Tartalomjegyzék

1.	Bev	ezetés	6		
	1.1.	Mi a plazma?	7		
	1.2.	Jelölések	7		
2.	Alapfogalmak				
	2.1.	A plazmafizika felépítése	8		
	2.2.	Debye-árnyékolás	10		
	2.3.	Kvázineutralitás	12		
	2.4.	Coulomb-szórás	12		
	2.5.	Elektron- és ionütközési frekvenciák	15		
3.	Kin	etikus egyenlet	17		
	3.1.	A kinetikus egyenlet momentumai	20		
4.	Kéti	olyadék-egyenletek	23		
	4.1.	Kétfolyadék kontinuitási egyenlet	23		
	4.2.	Kétfolyadék-mozgásegyenlet	23		
	4.3.	Kétfolyadék-állapotegyenlet	26		
	4.4.	A momentumegyenletek lezárásának problematikája	28		
5.	MH	D-egyenletek	32		
	5.1.	MHD kontinuitási egyenlet	32		
	5.2.	MHD-mozgásegyenlet	32		
	5.3.	MHD-állapotegyenlet	35		
6.	Drif	táramlások I	36		
7.	Elen	ni plazmahullámok	39		
	7.1.	Nem mágnesezett plazmahullámok	42		
		7.1.1. Elektrosztatikus (kompressziós) hullámok	42		
		7.1.2. Elektromágneses (inkompresszibilis) hullámok	48		
	7.2.	Mágnesezett plazmahullámok	49		
		7.2.1. Nyírási Alfvén-hullámok	53		
		7.2.2. Kompressziós Alfvén-hullámok	57		

8.	Hid	eg plazmahullámok taxonómiája	59			
	8.1.	Terjedés a mágneses térrel párhuzamosan ($\theta = 0$)	64			
	8.2.	Levágások és rezonanciák	67			
	8.3.	Terjedés a mágneses térre merőlegesen ($\theta = \pi/2$)	67			
	8.4.	Alacsony frekvenciájú hullámok tetszőleges irányú terjedése	68			
	8.5.	Terjedés tetszőleges irány és frekvencia esetén	69			
		8.5.1. A hullámnormális felületek	70			
		8.5.2. A CMA-diagram	71			
9.	Plaz	mahullámok inhomogén közegben – a drifthullámok	74			
10. MHD-egyensúly						
	10.1	. A mágneses erő	78			
	10.2	. Egyensúly két dimenzióban: a Bennett-pinch	79			
	10.3	. Egyensúly három dimenzióban: nem létezik	80			
	10.4	. A Grad–Safranov-egyenlet	83			
		10.4.1. A Grad–Safranov-egyenlet megoldásai	86			
11	Inst	abilitások	89			
	11.1	. Általános stabilitásvizsgálat	91			
	11.2	. A kicserélődési instabilitás	94			
		11.2.1. A hidrodinamikai Rayleigh–Taylor-instabilitás	95			
		11.2.2. MHD Rayleigh–Taylor-instabilitás	98			
	11.3	A hurokinstabilitás	101			
	11.4	. A Landau-csillapodás	105			
		11.4.1. A kinetikues egyenlet Fourier-analízise	106			
		11.4.2. A Laplace-transzformáció	108			
		11.4.3. A kinetikus egyenlet Landau-féle analízise	110			
12	A pl	azma egyrészecskés leírása	113			
	12.1	. A mágneses momentum megmaradása	118			
		12.1.1. A mágneses tükör	119			
13	13. Driftáramlások II					
14. Függelék						

14.1. A Frenet–Serret-triéder	125
14.2. Vektorszámítás	126
14.2.1. A leggyakoribb vektoralgebrai azonosságok	131
14.3. A deriváltoperátor néhány reprezentációja	132
14.4. Képletgyűjtemény	132
14.5. Egyenletgyűjtemény	134
14.6. Irodalom	136

1. Bevezetés

A plazmafizika viszonylag új tudomány, kezdetei a XIX. század végére nyúlnak vissza. Magát a plazma szót is csak a XX. század első felétől használják annak a sajátos anyagi halmazállapotnak a jelölésére, melyről ez a jegyzet szól.

Az elmúlt 50 évben, köszönhetően elsősorban a szabályozott termonukleáris fúziós kutatások során elért eredményeknek és kifejtett erőfeszítéseknek, a plazmafizika jelentős mérétkben fejlődött és ma mind maga a plazmafizika, mind a hozzá szorosan kapcsolódó plazmatechnológia egyre jelentősebb helyet foglal el a tudományos-műszaki kutatásban és fejlesztésben.

Ez a jegyzet a plazmafizika, ezen belül is a magas hőmérsékletű plazmák fizikájának alapjait tárgyalja. A tárgyalás módja olyan, hogy a teljes megértéshez nélkülözhetetlen a vektoralgebra és a vektoranalízis eszköztára, ezért ezt a jegyzetet elsősorban műszaki (mérnök, fizikus stb.) végzettséggel rendelkezőknek, vagy a természettudományos végzettség megszerzése előtt állóknak ajánljuk.

Ebben a jegyzetben értelemszerűen nincs benne "minden" a plazmákról, természetesen nem is lehet. De megtalálhatóak benne azok az alapok, amelyekre mindenképpen szükség van a plazmafizika mélyebb, komplexebb területeinek megértéséhez. A jegyzet anyagának kidolgozásánál az volt a cél, hogy azt a plazmafizika legkülönfélébb területein (kozmikus plazmák, laboratóriumi plazmák, lézer keltette plazmák stb.) is haszonnal lehessen forgatni és csak annyit tartalmazzon a plazmafizika elemeiből, amennyi feltétlenül szükséges egy speciálisabb terület felé történő továbblépéshez.

A plazmafizikát sokféleképpen lehet tárgyalni, bemutatni. Erről a sokféleségről a *Függelék*ben található *Irodalom* tanulmányozásával is megbizonyosodhatunk. Ennek a jegyzetnek a felépítése rendhagyó abban az értelemben, hogy benne központi helyet foglal el a plazmák két-, illetve egyfolyadék-leírása, mivel a szerző meggyőződése szerint ez a két elmélet mutatja be legplasztikusabban és legszemléletesebben a plazmafizika lényegét, azaz azt, hogy a plazma nem más, mint egy Coulombkölcsönhatás alatt álló <u>kollektív</u> sokrészecskerendszer.

1.1. Mi a plazma?

Hétköznapi értelemben plazmáról beszélünk, ha egy gáz halmazállapotú anyag részecskéinek (vagy legalább néhany részecskéjének) mozgási energiája elegendően nagy ahhoz, hogy más részecskékkel történő ütközések során a semleges atomok elektronburkáról egy vagy több elektron leszakadjon, és elektronok, ionok és atomok keveréke jöjjön létre. Ezt a plazmadefiníciót – bár nem tudományos pontosságú – kiindulásként felhasználjuk azzal, hogy később még megadjuk a plazma pontosabb definícióját.

Az univerzumban, és így természetesen a minket körülvevő világban is, nagyon sok helyen találkozhatunk plazmával. Az 1.1. ábrán láthatjuk azt a hihetetlenül széles paramétertartományt, ahol a plazmaállapot létezhet és ahol a plazmafizika eszköztára felhasználható. A vízszintes tengelyen a részecskeszám-sűrűség logaritmusát, a függőlegesen pedig a plazma hőmérsékletének logaritmusát ábrázoltuk.

A plazmafizikában szokásos módon a hőmérsékletet nem kelvinben vagy celsius-fokban, hanem a plazma egy tetszőleges részecskéjére átlagosan jutó kinetikus energiában adjuk meg, amit ráadásul nem joule-ban, hanem elektronvoltban fejezünk ki. Ennek megfelelően 1 eV hozzávetőlegesen 11600 K hőmérsékletnek felel meg. Ez egy kicsit furcsa, de kényelmes mértékegység, tekintve a plazmafizikában előforduló esetlegesen igen magas hőmérsékleteket.

1.2. Jelölések

- A jegyzetben használt főbb szimbólumok és jelölések a következők:
- σ (alsó indexként) részecskefajta (e elektron, i ion, a atom stb.),
- n_{σ} a szigma típusú részecske részecskeszám-sűrűsége, $[m^{-3}]$,
- q_{σ} a szigma típusú részecske töltése, [C],
- T_{σ} a szigma típusú részecske hőmérséklete, [K],
- κ Boltzmann-állandó, $[1, 38 \cdot 10^{-23} J K^{-1}]^1$,
- ϵ_0 a vákuum dielektromos állandója, [8,85 · 10^{-12} Fm^{-1}],
- μ_0 a vákuum permeabilitása, $[4\pi \cdot 10^{-7}Hm^{-1}]$,
- \hat{z} a B mágneses indukcióvektor irányába mutató egységvektor.

¹A képletek származtatásánál megtartjuk a Boltzmann-állandót és a hőmérsékletet Kelvinben a jobb követhetőség kedvéért, bár – mint fentebb megjegyeztük – a plazmafizikában κT helyett mindig egyszerűen *T*-t használnak elektronvoltban.



1.1. ábra. Plazmaállapotok az univerzumban

2. Alapfogalmak

2.1. A plazmafizika felépítése

A plazmafizika nehezen építhető fel axiomatikus rendszerként. Az egyenletek levezetéséhez mindig szükség van néhány *a priori* fogalom, mennyiség, illetve közelítés bevezetésére, és csak később, már az egyenletek birtokában mutatható meg, hogy *a priori* fogalmaink helyesek voltak. Ennek nagyon egyszerű oka van. Egy plazmafizikai rendszer a maga töltött és semleges részecskéivel, külső és belső elektromágneses tereivel annyira komplex, hogy leírásához a fizika sokszor látszólag egymástól távolálló diszciplináinak (statisztikus fizika, elektrodinamika, mechanika, termodinamika stb.) eszköztárát is fel kell használni. Ezen túlmenően a plazmafizika felépítéséhez tulajdonképpen nincs is szükség új axiómákra, azaz olyanokra, amelyek a fizika más területein ne fordulnának elő. Ezért a más területektől – elsősorban a statisztikus fizikától – "kölcsönvett" fogalmakat a plazmafizikában axiómaként kezeljük.

Klasszikus értelemben vett plazmákról akkor beszélünk, ha a részecskék zöme legalább egyszeresen ionizált, és így a plazma viselkedésének egészét a töltött és nem a semleges részecskék viselkedése határozza meg. Nehéz persze meghúzni a választóvonalat, hogy mikortól dominál a töltött részecskék viselkedése, így az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az általunk ebben a jegyzetben viszgált plazmák teljesen ionizáltak, azaz az ionizáltsági fok² legyen 1.

A Lorentz-egyenlet és a Maxwell-egyenletek rendszere pontosan előírja minden, a plazmát alkotó töltött részecske mozgását. A megoldást önkonzisztens módon kell végrehajtanunk. A Maxwell-egyenletekkel kiszámítjuk a töltött részecskék hatására kialakuló elektromágneses tereket, majd a Lorentz-egyenlet segítségével térben léptetjük a részecskéket. Ha a plazmában nem csak töltött részecskék vannak, a semleges részecskékre külön kell mozgásegyenleteket felírnunk, a semleges-semleges és semleges-töltött kölcsönhatásokat pedig valamilyen módon modellezni (de most ezeket a folyamatokat figyelmen kívül hagyjuk). Könnyű elképzelni, hogy ~ 10^{20} részecske esetén az itt vázolt módszer megoldhatatlan számítási feladatot jelent, tehát a plazmára mint részecskék sokaságára vonatkozó elméletet a statisztikus fizika eszköztárával kell felépítenünk.

Definiáljuk az $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ eloszlásfüggvényt úgy, hogy

$$dn = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3xd^3v \tag{2.1}$$

adja meg a *t*-időpillanatban az x és x + dx térbeli pontok között tartózkodó azon részecskék számát, amelyeknek a sebessége v és v + dv közé esik. Most tekintsünk el attól az egyébként egyáltalán nem triviális kérdéstől, hogy mikor rendelhető egy rendszerhez a fenti típusú eloszlásfüggvény, és egyszerűen posztuláljuk, hogy az általunk vizsgálandó plazmák esetében <u>létezik</u> a 2.1 egyenlet alatti eloszlásfüggvény (1. számú *a priori* feltevés).

Tegyük fel továbbá, hogy "elegendően sok" részecske alkotja a rendszerünket, és a részecskék között "elegendően sok" ütközés van ahhoz, hogy az eloszlásfüggvény időben és térben folytonosan, kváziegyensúlyi módon változzon (2. és 3. számú *a priori* feltevések).

Nem kellene szükségszerűen feltennünk, de követeljük még meg, hogy a részecskék nemrelativisztikus sebességgel mozognak és csak elektromágneses kölcsönhatás van közöttük.

²Az ionizáltsági fok azt mutatja meg, hogy a plazmát alkotó részecskék mekkora hányada van ionizált állapotban. $\alpha = n_i/(n_i + n_a)$.

2.2. Debye-árnyékolás

Tekintsünk egy pozitív és negatív töltések összességéből álló rendszert! Nyilvánvaló, hogy mivel vákuumban a Coulomb-kölcsönhatás hatótávolsága végtelen, egy adott részecskére ható eredő erő kiszámításánál elvileg annak minden más részecskével történő kölcsönhatását figyelembe kellene venni. Szerencsére azonban plazmában ezt nem kell megtenni, mert a részecskék szabad mozgása miatt a vákuumban érvényes Coulomb-tér módosulni fog, mégpedig úgy, hogy egy adott részecskének csak egy adott sugarú gömbön belül tartózkodó többi részecskével való kölcsönhatását kell figyelembe venni. Más szavakkal: plazmában a Coulomb-potenciál távolságfüggése módosul, a Coulomb-tér a távolság növelésével gyorsabban cseng le a vákuumbeli inverz távolságfüggésnél.

Helyezzünk a plazmába egy q_P pozitív töltésű próbatöltést! Ez a töltés a plazma elektronjait vonzani, ionjait pedig taszítani fogja. Ennek következtében a próbatöltés közelében (mivel a részecskék szabadon elmozdulhatnak) az elektronokból felesleg, az ionokból pedig hiány fog kialakulni. Természetesen csak addig fognak az elektronok a töltéshez vándorolni (és az ionok onnan elvándorolni), amíg az eredő elektromos térerősség a töltéstől mért bizonyos távolságnál nagyobb távolságokon nullává nem válik. Azon a bizonyos távolságon belül azonban nem kell nullának lennie az elektromos térnek, különben az odavonzott elektronok és ionok elvándorolnak.

Legyen a töltésvándorlás után kialakuló elektromos tér potenciálja $\phi(\mathbf{r})$! Nyilvánvaló, hogy egy elektron, amelyik a próbatöltés közelébe vándorolt, nem marad örökké ott, hanem a hőmozgás miatt elmegy onnan, azonban a nagyszámú elektron miatt (2. *a priori* feltétel) új elektron lép a helyébe, mely a régitől statisztikailag megkülönböztethetetlen. Ugyanez igaz az ionokra is.

A 3. számú *a priori* feltétel miatt a részecskék eloszlása ebben a $\phi(r)$ potenciáltérben Boltzmann-eloszlás, azaz

$$n_{\sigma}(\mathbf{r}) = n_{\sigma 0} \exp\left(-q_{\sigma} \phi(\mathbf{r}) / \kappa T_{\sigma}\right) \tag{2.2}$$

 $(n_{\sigma 0} \text{ és } T_{\sigma} \text{ legyenek homogének})$. Írjuk fel a Poisson-egyenletet a kialakult potenciállal és töltéseloszlással!

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[q_P \delta(\mathbf{r}) + \sum_{\sigma} q_{\sigma} n_{\sigma}(\mathbf{r}) \right], \qquad (2.3)$$

ahol $q_P\delta(\mathbf{r})$ a próbatöltés töltéssűrűsége. Nyugodtan feltehetjük, hogy egyetlen próbatöltés nem nagyon perturbálja a nagyon sok részecskéből alló plazmát, azaz $|q_\sigma\phi| \ll \kappa T_\sigma$. Ennek megfelelően 2.2-t közelíthetjük

$$\frac{n_{\sigma}}{n_{\sigma 0}} \simeq 1 - \frac{q_{\sigma}\phi}{\kappa T_{\sigma}} \quad \text{-val},$$

amivel a 2.3 egyenlet

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[q_P \delta(\mathbf{r}) + \left(1 - \frac{q_e \phi}{\kappa T_e} \right) q_e n_{e0} + \left(1 - \frac{q_i \phi}{\kappa T_i} \right) q_i n_{i0} \right].$$
(2.4)

Ha a próbatöltés behelyezése előtt a plazma semleges volt, azaz a nemperturbált sűrűségekre igaz, hogy $q_e n_{e0} + q_i n_{i0} = 0$, akkor a 2.4 egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(\mathbf{r}) = -\frac{q_P}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}).$$
(2.5)

Itt definiáltuk az

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_{\sigma} \frac{1}{\lambda_{\sigma}^2}$$
(2.6)

effektív Debye-hosszt az egyes részecskék

$$\lambda_{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon_0 \kappa T_{\sigma}}{n_{\sigma 0} q_{\sigma}^2} \tag{2.7}$$

Debye-hosszán keresztül.

A 2.5 egyenlet megoldása

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q_P}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D},\tag{2.8}$$

ami a vákuumbeli Coulomb-potenciálnál gyorsabban lecsengő potenciáltér. Látható, hogy $r \gg \lambda_D$ távolságokon a plazma tökéletesen kioltja a próbatöltés elektromos terét.

Altalában is igaz, nem csak a próbatöltésre, hogy a plazma Debyehossznyi távolságokon leárnyékolja az elektrosztatikus elektromos teret, feltéve hogy a Debye-hossznak megfelelő sugarú gömbön belül sok részecske van (különben az egész előbbi analízisünk értelmét veszti).

A Debye-árnyékolás egy szép példája annak, hogy a plazma, mint részecskék összessége, minőségileg másképp viselkedik, mint az egyes részecskék külön-külön viselkednének. Ezért az 1.1 egyenlet alatti plazma definíciót úgy kell pontosítanunk, hogy a plazma pozitív és negatív töltések összessége, <u>és</u> a Debye-hossznak megfelelő sugarú gömbön belül sok plazmarészecske van.

2.3. Kvázineutralitás

A Debye-árnyékolás bemutatásánál feltételeztük, hogy a plazma a próbatöltés behelyezése (az elektrosztatikus perturbáció bekapcsolása) előtt semleges volt. Most megmutatjuk, hogy ez egy teljesen jogos feltételezés volt, mert a plazma elektromos semlegessége csak Debye-hossznyi távolságokon sérülhet.

Számítsuk ki annak a maximális gömbnek a sugarát, amelyből véletlen (termikus) fluktuáció következtében minden elektron egyszerre eltávozhat. Ha ez az eset ténylegesen elő is állna, akkor az jelentené a kvázineutralitás maximális sérülését.

Az elektronmentes r sugarú gömbben visszamaradt ionok össztöltése $Q = 4\pi ner^3/3$, aminek megfelelő elektromos tér $E = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 = ner/3\varepsilon_0$. Az elektromos tér energiasűrűsége $\varepsilon_0 E^2/2$, azaz a tér teljes energiája

$$W = \int_0^{r_{max}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \pi r_{max}^5 \frac{2n_e^2 e^2}{45\varepsilon_0}.$$
 (2.9)

Amikor a kvázineutralitás legjobban sérül, az elektrosztatikus térben tárolt energia éppen a gömböt elhagyó elektronok mozgási energiája.

$$\pi r_{max}^5 \frac{2n_e^2 e^2}{45\varepsilon_0} = \frac{3}{2}n\kappa T \cdot \frac{4}{3}\pi r_{max}^3 \tag{2.10}$$

Ebből r_{max} -ra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$r_{max}^2 = 45 \frac{\varepsilon_0 \kappa T}{n_e e^2},\tag{2.11}$$

azaz

$$r_{max} \simeq 7\lambda_D.$$
 (2.12)

Eszerint a plazma kvázineutralitása valóban csak néhány Debye-hossznyi távolságon sérülhet.

2.4. Coulomb-szórás

Korábban feltettük, hogy részecskéink nemrelativisztikus sebességgel mozognak, ezért ennek megfelelően kölcsönhatásukat egymás elektrosztatikus, Coulomb-terében való szórásra szűkíthetjük. Tekintsük két töltött részecske ütközését, mégpedig tömegközépponti rendszerükben (2.1. ábra)! Ebben a rendszerben az F-fel és T-vel jelölt részecskék sebessége párhuzamos, és a sebességvektorokat tartalmazó egyenesek távolsága legyen b (*ütközési paraméter*). Az ütközés során a részecskék sebességvektorai eltérülést szenvednek. Jelöljük a szóródás után a sebességvektorok által bezárt szöget θ -val!



2.1. ábra. A Coulomb-szórás

Felírva a szórási folyamatra az energia- és impulzusnyomatékmegmaradási egyenleteket, az eltérülés szögére az alábbi kifejezés adódik:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{q_T q_F}{4\pi\varepsilon_0 b\mu v_0^2}.$$
(2.13)

Itt μ a redukált tömeg ($\mu^{-1} = m_F^{-1} + m_T^{-1}$) és v_0 a részecskék relatív sebessége. Minél kisebb a b, annál nagyobb az ütközés után a sebességeltérülés (a b = 0 centrális ütközéshez $\theta = 180^{\circ}$ tartozik). Nyilvánvalóan létezik egy olyan $b_{\pi/2}$ -vel jelölt ütközési paraméter érték, amely esetén az eltérülés szöge éppen 90°. Ennél kisebb ütközési paraméter esetén az eltérülés szöge nagyobb (hívjuk ezeket *nagyszögű ütközés*eknek), nagyobb ütközési paraméter esetén pedig kisebb lesz 90 foknál (ez utóbbiakat pedig hívjuk *kisszögű ütközés*eknek). A 2.13 egyenletből azonnal következik, hogy

$$b_{\pi/2} = \frac{q_T q_F}{4\pi\varepsilon_0 \mu v_0^2}.$$
 (2.14)

A nagyszögű szórás hatáskeresztmetszete $\sigma_{nagy} \approx \pi b_{\pi/2}^2$, a kisszögű szórásoknál pedig differenciális hatáskeresztmetszetet adhatunk meg. A b és b + db ütközési paraméterek közé eső szórás eltérülési szöge $\theta(b)$ és $\theta(b+db)$ szögek közé esik. Ezeknek a szórási eseményeknek a hatáskeresztmetszete $\sigma(b,b+db) \approx 2\pi b db$. Nagyszögű ütközést természetesen nemcsak egy nagyszögű szórási esemény, hanem sok egymást követő kisszögű szórási esemény együttesen is létrehozhat. Határozzuk meg, hogy mekkora effektív hatáskeresztmetszettel írható le egy ilyen ütközési sorozat!

Természetesen a Coulomb-ütközés axiális szimmetriája miatt a kisszögű szórási események eltérülési szögeinek (θ_i) egyszerű számtani középértéke nulla (N az ütközések száma), azaz $N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \theta_i = 0$, ezért ne ezt, hanem az eltérülési szögek négyzetes átlagát számítsuk ki. Keressük a kisszögű eseményeknek azt az N számát, hogy $\sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 \simeq 1$ radián legyen! Mivel $\pi/2 \simeq 1$, a kisszögű események sorozata jó közelítéssel egyenértékűnek vehető egy nagyszögű szórási eseménnyel.

Képzeljük el, hogy a T jelű részecskén ülünk, és az F jelű részecskék velünk szembejönnek v_{rel} relatív sebességgel! Ekkor a szembejövő részecskék fluxusa $\Gamma = n_F v_{rel}$ és t idő alatt a b és b + db ütközési paraméterek közé eső kisszögű szórási események száma $\Gamma t2\pi b db$. Ha t^* -al azt az időt jelöljük, amely alatt a kisszögű események éppen egy nagyszögű szórást eredményeznek, akkor

$$1 \simeq \sum_{i=1}^{N} \theta_i^2 = \Gamma t^* \int 2\pi b [\theta(b)]^2 \mathrm{d}b.$$
 (2.15)

Ha az ütközések *N* száma, ami egy ilyen nagyszögű szóráshoz kell, elegendően nagy, akkor a Γ fluxust és a *t* időt egy effektív hatáskeresztmetszet köti össze: $\sigma\Gamma = t^{-1}$. A 2.15 egyenletre pillantva azonnal látszik, hogy a keresett kumulatív kisszögű hatáskeresztmetszet

$$\sigma^* = \int 2\pi b[\theta(b)]^2 \mathrm{d}b. \tag{2.16}$$

Az integrálás alsó határa nyilvánvalóan $b_{\pi/2}$, mivel ennél kisebb ütközési paraméternél már egyetlen ütközés is $\pi/2$ -nél nagyobb eltérüléshez vezetne. A felső határ pedig a korábban megismert λ_D Debye-hossz, mert az annál nagyobb ütközési paraméterek már semmilyen eltérüléshez nem vezetnek (a töltések a Debye-árnyékolás miatt nem is hatnak kölcsön).

Kis szögekre a 2.13 alatti kifejezés így közelíthető:

$$\theta(b) = \frac{q_T q_F}{2\pi\varepsilon_0 b \mu v_0^2},\tag{2.17}$$

azaz

$$\sigma^* = \int_{b_{\pi/2}}^{\lambda_D} 2\pi b \left(\frac{q_T q_F}{2\pi\varepsilon_0 b \mu v_0^2} \right)^2 \mathrm{d}b.$$
(2.18)

Az integrálást elvégezve

$$\sigma^* = 8 \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_{\pi/2}}\right) \sigma_{nagy},\tag{2.19}$$

ahol σ_{nagy} a $b_{\pi/2}$ paraméterhez tartozó nagyszögű szórás hatáskeresztmetszete. Látható, hogy a kumulatív kisszögő szórásokhoz tartozó hatáskeresztmetszet lényegesen nagyobb az egyetlen nagyszögű szórás hatáskeresztmetszeténél. Pontosabban csak akkor lényegesen nagyobb, ha $\lambda_D/b_{\pi/2} \gg 1$. De mivel $q_T = q_F$ esetén $b_{\pi/2} = 1/(2n\lambda_D^2)$, ez a feltétel egyenértékű a $n\lambda_D^3 \gg 1$ feltétellel, ami a korábbi fejezetekben mondottak szerint – mármint hogy sok részecskénk van – nyilvánvalóan teljesül.

 σ_{nagy} értékét behelyettesítve,

$$\sigma^* = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{q_T q_F}{\varepsilon_0 \mu v_0^2} \right)^2 \ln \left(\frac{\lambda_D}{b_{\pi/2}} \right)$$
(2.20)

adódik.

A legfontosabb észrevétel a 2.20 kifejezéssel kapcsolatban az, hogy a kumulatív kisszögű Coulomb-szórások, vagy – a nagyszögű szórásokat a fentiek miatt elhanyagolva – egyszerűen a Coulomb-szórás hatáskeresztmetszete a *relatív sebesség negyedik hatványával fordítottan arányos*. Forró plazmában v_0 igen nagy, azaz σ^* nagyon pici tud lenni. Olyan pici, hogy a Coulomb-szórás sokszor elhanyagolható más folyamatok mellett. Hogy valóban el lehet-e hanyagolni a Coulomb-szórást, ahhoz vagy a szórási hatáskeresztmetszetből számítható ν ütközési frekvenciát ($\nu = \sigma^* nv$), vagy két ütközés között a részecskék által átlagosan megtett l szabad úthosszat ($l = 1/(\sigma^* n)$) kell összehasonlítani a vizsgálni kívánt egyéb folyamat idő-és térskálájával.

Ha a plazmában a részecskék közötti Coulomb-szórás elhanyagolható, *ütközésmentes* vagy *ideális* plazmáról beszélünk.

2.5. Elektron- és ionütközési frekvenciák

Vegyük azt az esetet, amikor plazmánk csak elektronokból és azonos ionokból áll. A jegyzetben a későbbiek során is gyakran csak két plazmakomponenst, elektronokat és (egyfajta) ionokat fogunk megkülönböztetni. Több plazmakomponensre az analízis persze sokkal bonyolultabb, mint kettőre, de kvalitatíve nem vezet más végeredményre.

Legyenek tehát elektronjaink és ionjaink, amelyek között az alábbi négyféle ütközési frekvenciát lehet megkülönböztetni:³

- 1. elektron-elektron ütközési frekvencia, elektronok
 elektronokon szóródnak, $\nu_{ee},$
- 2. elektron-ion ütközési frekvencia, elektronok ionokon szóródnak, vei,
- 3. ion-ion ütközési frekvencia, ionok ionokon szóródnak, ν_{ii} ,
- 4. ion-elektron ütközési frekvencia, ionok elektronokon szóródnak, ν_{ie} .

A semleges gázok kinetikus elméletéből ismert, hogy ha egy n részecskeszám sűrűségű gázban az atomok sebessége v és az atomok közötti kölcsönhatás keresztmetszete σ , akkor a ν ütközési frekvencia

 $\nu = n\sigma v$

alakban adható meg.

Csak nagyságrendi összehasonlítást akarunk az ütközési frekvenciák között, ezért minden frekvenciát ν_{ee} -vel fogunk összehasonlítani, azzal a feltevéssel élve, hogy az ütközésekben a relatív sebesség a résztvevők "tipikus" sebessége, azaz a $v_{T\sigma} = (2\kappa T_{\sigma}/m_{\sigma})^{1/2}$ termikus sebesség. Ez persze egy nagyon durva közelítés, mivel $\sigma^* v^{-4}$ -el arányos, és egyáltalán nem lehet minden részecskét azonos sebességűnek venni, de ettől most tekintsünk el.

Ha az elektron- és az ionkomponens hőmérséklete megegyezik (ez nem túl erős feltevés), akkor $v_{Te} \gg v_{Ti}$ és $\nu_{ee} \approx \nu_{ei}$, mivel a különbség csak a redukált tömegek különbségéből adódik. A hőmérsékletek egyenlősége miatt $\sigma_{ii}^* \approx \sigma_{ee}^*$, és az ütközési frekvenciák közötti különbség csak a relatív sebességekből adódik, azaz $\nu_{ii} \approx (m_e/m_i)^{1/2}\nu_{ee}$. Az ion-elektron ütközési frekvenciára nehéz még durva becslést is adni, ezért inkább csak érzékeltetjük, hogy a $\nu_{ie} \approx (m_e/m_i)\nu_{ee}$ azért helytálló, mert az elektronoknak sok ütközésre van szükségük az ionokat eredeti sebességükhöz képest eltéríteni, de az ionoknak, sokkal nagyobb tömegük miatt, a lassú sebesség ellenére is már kevés ütközés is elég ahhoz, hogy az elektronokat eltérítsék.

³A következőkben definiált ütközési frekvenciák az *impulzus*átadás és nem az *energia*átadás jellemző frekvenciaértékei.

3. Kinetikus egyenlet

Statisztikus fizikai tanulmányaink során már megismerkedtünk a fázistér fogalmával, most származtassunk egyenletet a Coulomb-rendszerünket leíró hatdimenziós fázistérben definiált eloszlásfüggvény tér- és időbeli fejlődésére! Tekintsük a 3.1. ábrát! A részecskék a fázistérben egymás kölcsönhatása alatt, de önállóan mozognak, ezért az eloszlásfüggvényt úgy is tekinthetjük, mint egy "fázisfolyadékot", melyet a részecskék összessége alkot. A kinetikus egyenlet nem más, mint ennek a fázisfolyadéknak a mozgását leíró egyenlet.



3.1. ábra. Az eloszlásfüggvény szemléltetése

A 3.1. ábrán bejelöltünk egy kicsiny fázistérfogatot és néhány részecskét, melyek belépnek a feltüntetett fázistérfogatba, illetve kilépnek onnan. Nyilvánvaló, hogy amennyiben a részecskék között <u>nincsenek ütközések</u>, akkor a fázistérfogatban lévő fázispontok számának megváltozása éppen az oda belépő, illetve az onnan kilépő részecskék számának különbségével egyenlő. Ekkor a be- és kilépő részecskék számára az alábbi mérlegegyenlet adódik:

$$\frac{\partial f(x,v,t)}{\partial t} dx dv = -f(x + dx,v,t)v dv + f(x,v,t)v dv -f(x,v + dv,t)a(x,v + dv,t) dx$$
(3.1)
+ $f(x,v,t)a(x,v,t) dx.$

Az x + dx és v + dv mennyiségeket tartalmazó tagokat Taylor-sorba fejtve kapjuk a kinetikus egyenlet egydimenziós (egy térbeli dimenziós) alakját:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vf) + \frac{\partial}{\partial v}(af) = 0.$$
(3.2)

Kézenfekvő, hogy ha nem egy, hanem három térbeli dimenziónk van, akkor a kinetikus egyenlet így általánosítható:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}f) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f) = 0.$$
(3.3)

Ha plazmánk teljesen ionizált (fúziós plazmáknál ez többnyire igaz) és ennek következtében nincsenek benne semleges részecskék, akkor a 3.3 egyenletben a gyorsulás egyenlő a Lorentz-egyenletből kifejezhető gyorsulással, azaz

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{3.4}$$

A gyorsulásvektor kiemelhető a sebességvektor szerinti deriválás alól,

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f), \tag{3.5}$$

mivel a Lorentz-gyorsulás merőleges a sebességre. Az x helyvektor és a sebesség független változók, tehát a sebesség (a gyorsuláshoz hasonló módon) szintén kiemelhető a hely szerinti deriválás alól.

Felhasználva a kiemeléseket jutunk az ütközésmentes kinetikus egyenlet, a *Vlaszov-egyenlet* kanonikus alakjához:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$
(3.6)

Ha a plazmában ütközések is vannak a részecskék között, akkor – a 3.2. ábrán szemléltetett módon – a fázistérfogatban nem lesz a részecskék száma állandó, hanem a részecskék az ütközések következtében látszólag megsemmisülnek, illetve keletkeznek – legalábbis az adott fátistérfogat



3.2. ábra. Az ütközések hatása az eloszlásfüggvényre

számára, hiszen a részecskék az ütközéseket követően másik fázistérfogatban jelennek meg. Ezt a keltő-eltüntető folyamatot a kinetikus egyenlet jobb oldalán a zérus helyett egy ún. *ütközési integrál*lal (vagy más néven *ütközési operátor*ral) vehetjük figyelembe.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll},\tag{3.7}$$

ahol a *coll* az angol *collision* szóból származik és az ütközésekre utal. Az ütközési operátor az eloszlásfüggvény ütközések miatti megváltozását adja meg. Az ütközési integrál konkrét alakja általában nagyon bonyolult, függ a részecskék közötti kölcsönhatás természetétől és hatótávolságától.

Ha többfajta részecskét is tartalmaz a plazma, minden részecskefajtára külön-kölön fell kell írni a kinetikus egyenletet és az ütközési integrálban a különböző részecskék közötti ütközéseket is figyelembe kell venni.

$$\frac{\partial f_{\sigma}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \mathbf{v}} = \sum_{\alpha} C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma})$$
(3.8)

Ez utóbbi egyenletben az ütközési integrált $\sum_{\alpha} C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma})$ alakban írtuk, ahol $C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma})$ az f_{σ} eloszlásfüggvény megváltozásának rátája az α típusú részecskékkel való ütközések során (természetesen α lehet σ is).

3.1. A kinetikus egyenlet momentumai

A kinetikus egyenlet teljes mértékben meghatározza a rendszerünket, minden, a plazmát alkotó részecskék mozgásából eredő fizikai folyamatot le tud írni.⁴

Használata azonban nem egyszerű, elsősorban azért, mert megoldása igen nehéz, szinte minden esetben csak numerikusan, sok-sok közelítő feltevés figyelembevételével lehetséges.

Másodsorban azért nem egyszerű a kinetikus egyenlet használata, mert az eloszlásfüggvény túlságosan sok és részletes információt tartalmaz a rendszerről. Egy átlagos feladat megoldásánál azonban általában nincs szükségünk ilyen sok ismeretre, és nem is tudjuk az eloszlásfüggvényt közvetlenül mérni.

Szükség van tehát általánosan használható, a teljes kinetikus egyenletnél egyszerűbb, viszonylag kevés megkötést tartalmazó elméletekre.

Az egyik lehetőségünk az, hogy valahogyan, a rendszer szimmetriatulajdonságait felhasználva megprobáljuk az eloszlásfüggvény dimenziószámát csökkenteni. A teljes eloszlásfüggvény 6 + 1 dimenziós a három térbeli és a három sebességtérbeli dimenzió, valamint az idő miatt. Ha a rendszerünk valamilyen szimmetriatulajdonsággal bír, akkor a szimmetriakoordináta szerint az eloszlásfüggvény és vele együtt a kinetikus egyenlet kiintegrálható, így csökkentve a dimenziószámot. Az is előfordulhat (és ez a gyakoribb eset), hogy rendszerünkben több, egymástól lényegesen eltérő tér- és/vagy időskálával rendelkező folyamat zajlik, minket pedig csak a lassú és nagy térrészekre kiterjedő jelenségek érdekelnek. Ekkor a gyors tér- és/vagy időváltozással bíró folyamatra átlagoljuk ki a kinetikus egyenletet és az eloszlásfüggvényt (ún. *rendezést* hajtunk végre). Rendezésről beszélünk akkor is, ha egy fizikai mennyiséget valamilyen kis paraméter (a *rendező paraméter*) szerint kifejtünk, és a számítások során csak a nulladik, első, második stb. tagokat tartjuk meg.⁵

⁴Természetesen az ütközési integrálon keresztül a kinetikus egyenlet nemcsak mechanikai, hanem például atomfizikai folyamatok leírására is alkalmas.

⁵Ez utóbbi eljárást hívhatjuk nullad-, első-, másod- stb. rendű közelítésnek is, de a plazmafizikában előszeretettel használják a rendezés kifejezést.

Hogy ez az egész ne legyen túl absztrakt, mondjunk egy példát! Tudjuk, hogy a töltött részecskék mágneses térben a mágneses indukcióvektor irányára merőlegesen körmozgást végeznek (*Larmor-mozgás*). Ennek a körmozgásnak van egy időskálája (a keringési idő) és van egy térskálája (a kör sugara). Ha csak olyan folyamatok érdekesek számunkra, amelyek lényegesen lassabbak, mint a Larmor-frekvencia és lényegesen hosszabb skálájúak, mint a Larmor-sugár, akkor mindkét skála szerint átlagolunk, azaz úgynevezett *drift-rendezés*t végzünk, ha csak a keringési idő szerint átlagolunk, *Larmor-rendezés*ről beszélünk. Mindkét eljárással 6 + 1-ről 5 + 1-re csökkenthető a dimenziószám.

Van azonban más lehetőség is, hogy a kinetikus egyenletből és az eloszlásfüggvényből "kezelhetőbb" elméletet származtassunk. Lássuk, mi is ez!

Vezessünk be az eloszlásfüggvény segítségével definiált, laboratóriumban is mérhető mennyiségeket!

Ha az eloszlásfüggvényt egy adott helyen a sebesség szerint kiintegráljuk, megkapjuk az adott helyen a részecskesűrűséget:

$$n_{\sigma}(\mathbf{x}) = \int f_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, \mathrm{d}^{3} v.$$
(3.9)

Az adott helyen érvényes átlagsebesség az eloszlásfüggvény sebességgel súlyozott átlaga:

$$\mathbf{u}_{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\int \mathbf{v} f_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, \mathrm{d}^3 v}{n_{\sigma}(\mathbf{x})}.$$
(3.10)

A fenti logikát folytatva az átlagenergia az eloszlásfüggvény sebességnégyzettel súlyozott átlaga:

$$q_{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{\int \frac{1}{2} m_{\sigma} v^2 f_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \, \mathrm{d}^3 v}{n_{\sigma}(\mathbf{x})}.$$
(3.11)

Az iménti eljárást, amikor az eloszlásfüggvénynek a sebesség egyre növekvő hatványaival vett átlagát számítjuk ki, az eloszlásfüggvény *momentumai* kiszámításának hívjuk. Általában is egy függvény egyik változója növekvő hatványai szerinti átlagokat a függvény momentumainak nevezzük és belátható, hogy (bizonyos analitikus feltételek megléte esetén) az adott függvényt ekvivalens módon – általában végtelen számú – momentumával is megadhatjuk.

A momentumképzés egyenletekre is értelmezhető, amikor is az egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk az egyenlet egyik független vál-

tozójával és ugyanezen változó szerint az egyenletet integráljuk. Tegyük most mi is ezt a 3.8 kinetikus egyenletünkkel!

A kinetikus egyenlet momentumainak kiszámításánál különös figyelmet kell fordítani az ütközési integrál momentumainak kiszámítására. Vizsgáljuk meg, anélkül, hogy konkrétan ismernénk az ütközési integrál alakját, hogy momentumai milyen tulajdonságokkal rendelkeznek! Természetesen feltesszük, hogy az ionizációhoz, illetve rekombinációhoz (azaz a részecskefajta megváltozásához) vezető ütközéseket figyelmen kívül hagyjuk.

1. Az ütközések következtében nem változhat meg egy adott helyen a részecskék száma:

$$\int C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma}) \,\mathrm{d}^3 v = 0. \tag{3.12}$$

 Azonos típusú részecskék közötti ütközések következtében nem változhat meg egy adott helyen a részecskék összes impulzusa:

$$\int m_{\sigma} \mathbf{v} C_{\sigma\sigma}(f_{\sigma}) \, \mathrm{d}^3 v = 0. \tag{3.13}$$

Különböző típusú részecskék közötti ütközések következtében a két részecsketípus összes impulzusa változatlan:

$$\int m_{\sigma} \mathbf{v} C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma}) \,\mathrm{d}^{3} v + \int m_{\alpha} \mathbf{v} C_{\alpha\sigma}(f_{\alpha}) \,\mathrm{d}^{3} v = 0.$$
(3.14)

 Azonos típusú részecskék közötti ütközések következtében nem változhat meg egy adott helyen a részecskék összes energiája:

$$\int m_{\sigma} v^2 C_{\sigma\sigma}(f_{\sigma}) \,\mathrm{d}^3 v = 0. \tag{3.15}$$

Különböző típusú részecskék közötti ütközések következtében a két részecsketípus összes energiája változatlan:

$$\int m_{\sigma} v^2 C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma}) \,\mathrm{d}^3 v + \int m_{\alpha} v^2 C_{\alpha\sigma}(f_{\alpha}) \,\mathrm{d}^3 v = 0.$$
(3.16)

4. Kétfolyadék-egyenletek

A plazmák leírásának ebben az elméletében a plazmát két (elektron- és ion-) folyadékkomponensből álló rendszerként írják le.

4.1. Kétfolyadék kontinuitási egyenlet

Számítsuk ki először a kinetikus egyenlet nulladik momentumát, ami a sebesség nulladik hatványa, azaz az 1 szerinti átlagképzést jelenti!

$$\int \left[\frac{\partial f_{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}f_{\sigma}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f_{\sigma})\right] \, \mathrm{d}^{3}v = \sum_{\alpha} \int C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma}) \, \mathrm{d}^{3}v \qquad (4.1)$$

Felhasználva a részecskesűrűség 3.9 szerinti és az átlagsebesség 3.10 szerinti kifejezéseit, valamint a sebességtérbeli divergenciát a Gausstétellel felületi integrállá alakítva kapjuk a

$$\frac{\partial n_{\sigma}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}) = 0$$
(4.2)

egyenletet (az idő- és térderiváltakat kihoztuk a sebesség szerinti integrál alól). Ez a kétfolyadék kontinuitási egyenlet.

4.2. Kétfolyadék-mozgásegyenlet

Számítsuk ki ezután az első momentumot, ami a sebesség első hatványa szerinti átlagképzést jelenti!

$$\int \mathbf{v} \left[\frac{\partial f_{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f_{\sigma}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a} f_{\sigma}) \right] \, \mathrm{d}^{3} v = \sum_{\alpha} \int \mathbf{v} C_{\sigma\alpha}(f_{\sigma}) \, \mathrm{d}^{3} v \quad (4.3)$$

Az egyenlet bal oldalán álló összeget integráljuk tagonként és végezzük el az alábbi egyszerűsítéseket!

- Az idő- és térderiváltakat hozzuk ki a sebesség szerinti integrál alól.
- A sebességet bontsuk átlagsebességre és az átlag körüli ingadozásra, azaz legyen $\mathbf{v}_{\sigma}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}_{\sigma}(\mathbf{x},t) + \mathbf{v}'_{\sigma}(\mathbf{x},t)$, ahol $\mathbf{v}'_{\sigma}(\mathbf{x},t)$ az átlagsebesség körüli ingadozás.

• A gyorsulást tartalmazó tagokat integráljuk parciálisan és használjuk fel a

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}}\right)_{ij} = \delta_{ij}$$

összefüggést.

Az egyszerűsítések elvégzése után az elsőmomentum-egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\frac{\partial (n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int (\mathbf{v}_{\sigma}' \mathbf{v}_{\sigma}' + \mathbf{v}_{\sigma}' \mathbf{u}_{\sigma} + \mathbf{u}_{\sigma} \mathbf{v}_{\sigma}' + \mathbf{u}_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}) f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v - - \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \int (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{\sigma} \times \mathbf{B}) f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v = -\frac{1}{m_{\sigma}} \mathbf{R}_{\sigma \alpha}.$$
(4.4)

Itt $\mathbf{R}_{\sigma\alpha}$ az a súrlódási erő, amely a σ részecskékre hat az α részecskékkel való ütközés következtében. Nyilvánvalóan $\mathbf{R}_{\sigma\sigma} = 0$, azaz a részecskék saját magukra nem hatnak súrlódási erővel. Feltéve, hogy a plazma elektron- és ionkomponensekből áll, a súrlódási erő így adható meg:

$$\mathbf{R}_{ei} = \nu_{ei} m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \tag{4.5}$$

és

$$\mathbf{R}_{ie} = \nu_{ie} m_i n_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \tag{4.6}$$

Itt ν_{ei} az elektron-ion, míg ν_{ie} az ion-elektron ütközési frekvencia. A súrlódási erő fenti kifejezései szemléletesen azt jelentik, hogy például az elektronokat az ionokhoz kötött vonatkoztatási rendszerből szemlélve az elektronok $m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$ impulzusa ν_{ei} rátával tűnik el (randomizálódik). A 4.4 egyenlet tovább egyszerűsíthető, ha felhasználjuk, hogy $\int \mathbf{v}'_{\sigma} f_{\sigma} d^3 v = 0.$

$$m_{\sigma} \left[\frac{\partial (n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}) \right] = n_{\sigma} q_{\sigma} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\sigma} \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}_{\sigma} - \mathbf{R}_{\sigma\alpha}$$
(4.7)

A nyomás tenzort ilyen alakban definiáltuk:

$$\mathbf{P}_{\sigma} = m_{\sigma} \int \mathbf{v}_{\sigma}' \mathbf{v}_{\sigma}' f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v'. \tag{4.8}$$

Ha f_{σ} eloszlásfüggvény az átlagsebességtől való \mathbf{v}'_{σ} eltérés izotróp függvénye, akkor a nyomástenzor nemdiagonális elemei eltűnnek, a diagonális elemek pedig egyenlőek. Ebben az esetben érdemes bevezetni a

 P_{σ} skalárnyomást, ami nem más, mint a diagonális elemek értéke:

$$P_{\sigma} = m_{\sigma} \int v'_x v'_x f_{\sigma} \, \mathrm{d}^3 v' = m_{\sigma} \int v'_y v'_y f_{\sigma} \, \mathrm{d}^3 v' = m_{\sigma} \int v'_z v'_z f_{\sigma} \, \mathrm{d}^3 v' =$$
$$= \frac{m_{\sigma}}{3} \int \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' f_{\sigma} \, \mathrm{d}^3 v'.$$

Ha a nyomástenzor nemdiagonális elemei nem tűnnek el, akkor érdemes definiálnunk a Π_{σ} *általánosított nyírási tenzor*t az alábbi módon:

$$\mathbf{P}_{\sigma} = P_{\sigma}\mathbf{I} + \mathbf{\Pi}_{\sigma},$$

ahol I az egységtenzor, és a nyírási tenzor tartalmazza a nyomástenzor összes nemdiagonális elemét, de neki magának nincsenek diagonális elemei. A nemdiagonális elemek akkor nem tűnnek el (azaz a nyírási tenzor nem nulla), ha a plazmában különböző irányokban a részecskék más-más, ráadásul nem-maxwelli sebességeloszlással rendelkeznek, azaz az eloszlásfüggvény a sebességnek nem egyensúlyi és nem izotróp függvénye.

A plazmafizikában a sebességeloszlások nagyon sokszor nem izotrópak és nem maxwelliek, mivel a részecskék közötti ütközések száma általában nem elegendő ahhoz, hogy egyensúlyi és izotróp eloszlásfüggvény kialakulhasson. Minden esetben külön-külön meg kell vizsgálni, hogy van-e elegendő ütközés az egyensúly és az izotrópia kialakulásához. Előfordulhat, hogy bizonyos koordinátatengelyek mentén van elegendő ütközés, míg mások mentén nincs.

A továbbiakban olyan plazmákat fogunk csak vizsgálni, melyek esetében a nyírási tenzor elhanyagolható a skalárnyomás mellett. Ez azokra a plazmákra tehető meg, amelyek eloszlásfüggvénye a fentebb mondottak értelmében (legalább koordinátairányonként) nem nagyon különbözik a Maxwell-eloszlástól.

Később (13. fejezet) majd látni fogjuk, hogy mágnesezett plazmákban más-más (skalár)nyomás alakulhat ki a mágneses térrel párhuzamosan, mint arra merőlegesen.

Ha a rendszerünk dimenziószáma nem három, hanem kevesebb vagy több, bevezethetjük az N dimenziós skalárnyomást a következő módon:

$$P_{\sigma} = \frac{m_{\sigma}}{N} \int \sum_{j=1,N} v_j^{\prime 2} f_{\sigma} \, \mathrm{d}^N v^{\prime}.$$

Teljesen izotróp, Maxwell-eloszlást követő sebességeloszlás esetén a skalárnyomás nem más, mint $P_{\sigma} = n_{\sigma}\kappa T_{\sigma}$, ahogy azt az ideális gáztörvényből is ismerjük.

Kibontva a deriváltakat a 4.7 egyenletben észrevesszük, hogy a kapott egyenlet tartalmazza a 4.2 kontinuitási egyenlet u_{σ} -szorosát. Levonva ezt a beágyazott kontinuitási egyenletet, kapjuk:

$$n_{\sigma}m_{\sigma}\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{\sigma}}{\mathrm{d}t} = n_{\sigma}q_{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\sigma} \times \mathbf{B}) - \nabla \mathbf{P}_{\sigma} - \mathbf{R}_{\sigma\alpha}, \qquad (4.9)$$

ahol

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \nabla \tag{4.10}$$

az úgynevezett *konvektív* (vagy *szubsztanciális*) *derivált*. A 4.9 egyenlet a kétfolyadék-mozgásegyenlet.

4.3. Kétfolyadék-állapotegyenlet

Számítsuk most ki a kinetikus egyenlet második momentumát! A kontinuitási és a mozgásegyenlettel ellentétben ennek a momentumnak a kiszámításánál a rendszer dimenziószáma explicite megjelenik, tehát a skalárnyomás felírásánál az általános, N dimenziós alakot fogjuk használni. A kinetikus egyenletet $m_{\sigma}v^2/2$ -vel szorozva kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_{\sigma} v^2}{2} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int \frac{m_{\sigma} v^2}{2} \mathbf{v} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v + \\ + q_{\sigma} \int \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f_{\sigma} \mathrm{d}^N v \end{bmatrix} = \sum_{\alpha} \int m_{\sigma} \frac{v^2}{2} C_{\sigma\alpha} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v. \quad (4.11)$$

Vizsgáljuk meg és alakítsuk át az egyenlet minden tagját külön-külön!

1. Az időderiváltat tartalmazó tag így fog kinézni:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_{\sigma} v^2}{2} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_{\sigma} (\mathbf{v}' + \mathbf{u}_{\sigma})^2}{2} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v = = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{N P_{\sigma}}{2} + \frac{m_{\sigma} n_{\sigma} u_{\sigma}^2}{2} \right).$$
(4.12)

2. Felhasználva a $\mathbf{v}_{\sigma} = \mathbf{u}_{\sigma} + \mathbf{v}'_{\sigma}$ felbontást, a térderiváltat tartalmazó tag így alakul:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int \frac{m_{\sigma} v^2}{2} \mathbf{v} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v = \nabla \cdot \left(\mathbf{Q}_{\sigma} + \frac{N+2}{2} P_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} + \frac{m_{\sigma} n_{\sigma} u_{\sigma}^2}{2} \mathbf{u}_{\sigma} \right),$$

ahol $\mathbf{Q}_{\sigma} = \int \frac{m_{\sigma} v'^2}{2} \mathbf{v}' f_{\sigma} \mathrm{d}^N v$ a hőfluxus.

3. A gyorsulást tartalmazó tagot parciálisan integráljuk:

$$q_{\sigma} \int \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f_{\sigma} \mathrm{d}^N v = -q_{\sigma} \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v = -q_{\sigma} n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{E}.$$

4. Az ütközési tag nem más, mint a σ részecskék energiájának időegységre eső megváltozása az α részecskékkel történő ütközések következtében.

$$\sum_{\alpha} \int m_{\sigma} \frac{v^2}{2} C_{\sigma\alpha} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v = \int_{\alpha \neq \sigma} m_{\sigma} \frac{v^2}{2} f_{\sigma} \mathrm{d}^N v = -\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{E_{\sigma\alpha}}$$

A fenti négy átalakítást 4.11-en elvégezve kapjuk:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{NP_{\sigma}}{2} + \frac{m_{\sigma} n_{\sigma} u_{\sigma}^{2}}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{Q}_{\sigma} + \frac{N+2}{2} P_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} + \frac{m_{\sigma} n_{\sigma} u_{\sigma}^{2}}{2} \mathbf{u}_{\sigma} \right) - q_{\sigma} n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)_{E_{\sigma\alpha}}.$$
(4.13)

Ezt az egyenletet tovább egyszerűsíthetjük két matematikai azonosság felhasználásával. Az első ez:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m_{\sigma} n_{\sigma} u_{\sigma}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{m_{\sigma} n_{\sigma} u_{\sigma}^2}{2} \mathbf{u}_{\sigma} \right) = n_{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \nabla \right) \frac{m_{\sigma} u_{\sigma}^2}{2} = n_{\sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m_{\sigma} u_{\sigma}^2}{2} \right),$$

a másodikat pedig a mozgásegyenlet \mathbf{u}_{σ} -val való skaláris szorzása után kapjuk:

$$n_{\sigma}m_{\sigma}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_{\sigma}^{2}}{2}\right) + \mathbf{u}_{\sigma}\cdot\left(\nabla\left(\frac{u_{\sigma}^{2}}{2}\right) - \mathbf{u}_{\sigma}\times\nabla\times\mathbf{u}_{\sigma}\right)\right] = n_{\sigma}q_{\sigma}\mathbf{u}_{\sigma}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{u}_{\sigma}\cdot\nabla P_{\sigma} - \mathbf{R}_{\sigma\alpha}\cdot\mathbf{u}_{\sigma}.$$

Az utóbbi egyenlet így is írható:

$$n_{\sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m_{\sigma} u_{\sigma}^2}{2} \right) = n_{\sigma} q_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u}_{\sigma} \cdot \nabla P_{\sigma} - \mathbf{R}_{\sigma\alpha} \cdot \mathbf{u}_{\sigma}.$$
(4.14)

A 4.3 és a 4.14 egyenleteket 4.13-ba írva az energiaváltozásra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{N}{2}\frac{\mathrm{d}P_{\sigma}}{\mathrm{d}t} + \frac{N+2}{2}P_{\sigma}\nabla\cdot\mathbf{u}_{\sigma} = -\nabla\cdot\mathbf{Q}_{\sigma} + \mathbf{R}_{\sigma\alpha}\cdot\mathbf{u}_{\sigma} - \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{E_{\sigma\alpha}}.$$
 (4.15)

Az egyenlet jobb oldalán az első tag a hőfluxus, a második tag a részecskék ütközése miatt fellépő súrlódási erő munkája, a harmadik tag pedig az ütközések során átvett, illetve leadott energiát adja meg.

4.4. A momentumegyenletek lezárásának problematikája

A 4.2, 4.9 és 4.15 egyenletek a kinetikus egyenlet első három momentumegyenletei. A gyakorlatban nem szoktak magasabb momentumegyenleteket származtatni, mert a magasabb egyenletek már nem nyújtanak minőségileg új fizikai információt a rendszerről, és a megnövekedő komplexitás sem ér fel az általuk nyújtott többletpontossággal.

A fenti levezetésből világosan látszik, hogy a momentumegyenletek származtatásánál az *n*-edik lépésben olyan mennyiségek jelennek meg az egyenletekben, melyek értékét csak az n + 1-edik momentumegyenlet határozza meg (ilyen például a hőfluxus a 4.15 egyenletben). Ez szemmel láthatóan a $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int \mathbf{v} f_{\sigma} d^3 v$ tagban a sebességgel való szorzás miatt van, azaz minden esetben a kinetikus egyenlet momentumainak végtelen láncolatát kapjuk, ami persze semmiféle könnyítést nem jelent a teljes kinetikus egyenletek láncolatát – ezt az "elvágást" hívjuk a momentumegyenletek *lezárás*ának.

Egészen pontosan a lezárás az a folyamat, amely során a 4.2, 4.9 és 4.15 egyenletekben meghatározatlan mennyiségeket, a hőfluxust, a nyírási tenzort (ha van) és az ütközési operátor két momentumát kifejezzük a részecskeszám-sűrűséggel, a sebességgel és a skalárnyomással.

Kétféle fő lezárási eljárás létezik: az úgynevezett *csonkolásos* és az *aszimptotikus*. Az elsőben a magasabb momentumokat egyszerűen nullának veszik, vagy önkényesen kifejezik az alacsonyabb momentumok segítségével. Ennek az a fő hátránya, hogy nehezen indokolható közelítésekhez kell nyúlni, amikhez nem teljesen ismert pontosság (pontatlanság) tartozik. A másodikban az egyenleteket valamilyen kis paraméter segítségével vizsgáljuk, bizonyos paramétereket sorbafejtünk, ezáltal jól kézbentartható közelítésekhez jutunk. Ennek persze az az ára, hogy igen bonyolult matematikai kifejezésekkel kell dolgoznunk.

A legismertebb klasszikus aszimptotikus lezárási séma a Chapman– Enskog-lezárás, mely ütközések dominálta semleges gázokban alkalmazható és a kis paraméter a szabad úthossz és a makroszkópikus skálahossz (ezen a skálán változnak érezhetően a makroszkópikus mennyiségek) aránya. Az eljárás röviden a következő.

Legyen l a szabad úthossz és L a makroszkópikus skálahossz, azaz legyen

$$\epsilon = \frac{l}{L} \ll 1$$

a kis paraméter! Ekkor az f eloszlásfüggvény ϵ szerint sorbafejthető az f_0 egyensúlyi eloszlás körül.

$$f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = f_0(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \epsilon f_1(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \epsilon^2 f_2(\mathbf{x},\mathbf{v},t) + \dots$$

Az f_0 egyensúlyi eloszlásfüggvény természetesen a Maxwell-eloszlás. A sorfejtést felhasználva a kinetikus egyenlet átalakítható úgy, hogy integrálegyenletet kapjunk f_1 -re f_0 függvényében. Ezt az egyenletet megoldva a sorfejtés következő tagjára további egyenletet írhatunk fel a már ismert tagok figyelembevételével. A valóságban azonban ezt a következő egyenletet még soha senki nem írta fel és senki sem számolta ki a kis paraméterben négyzetes korrekciót az elképzelhetetlen matematikai nehézségek miatt. Szerencsére azonban f_1 meghatározása már elegendő pontosságot nyújt a problémák gyakorlati megoldásához.

A Chapman–Enskog-lezárás nemcsak semleges gázok esetében használható, hanem minden rövid hatótávolságú kölcsönhatással bíró erőtörvény esetén. Ebben az esetben a rövid hatótávolság azt jelenti, hogy két részecske között a kölcsönhatási erő az $1/r^2$ -es erőtörvénynél gyorsabban cseng le (semleges gázok esetében a kölcsönhatás távolsága gyakorlatilag a részecskék mérete). Ekkor megmutatható, hogy a nyírási tenzor

$$\mathbf{\Pi}_{ij} = -\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right),\,$$

a hőfluxus pedig

 $\mathbf{Q} = -\kappa_Q \nabla T$

alakú, ahol η a viszkozitási, κ_Q pedig a hővezetési együttható. A Chapman–Enskog-lezárás – a nyírási tenzor és a hőfluxus fenti alakjai mellett – a viszkozitási és a hővezetési együtthatóra is konkrét kifejezést szolgáltat.

Mágnesezett plazmák esetében a Chapman–Enskog-lezárás az úgynevezett *Braginszkij-egyenletek*re vezet, kis paraméterként vagy a semleges gázokhoz hasonló módon a szabad úthossz arányát a skálahosszhoz vagy a drift-rendezésnél korábban megismert mennyiségeket használva (azaz a Larmor-pálya sugarának arányát a térbeli skálahosszhoz, illetve a Larmor-frekvencia és az időskála szorzatát). Fontos megjegyezni, hogy a Braginszkij-egyenleteknél nem átlagolunk ki a kis paraméterek szerint, azokat csak az eloszlásfüggvény sorfejtésénél használjuk.⁶

Az ebben a bevezető jegyzetben megismerendő plazmafolyamatok ismertetéséhez tökéletesen elegendő a momentumegyenletek csonkolásos lezárása, ami a 4.15 egyenlet két fontos határesetére vezet. Ebben a két határesetben a 4.15 egyenlet igen egyszerű alakot ölt.

Legyen t egy valamilyen folyamat karakterisztikus ideje és l ugyanezen folyamat karakterisztikus térskálája. Ekkor a folyamatot jellemző $V_{folyamat}$ sebességére $V_{folyamat} = l/t$ adódik.

- 1. *Izoterm határeset*ben a hőfluxus tag dominál, aminek következtében térben homogén hőmérséklet alakul ki. Ez az eset akkor áll elő, ha a termikus átlagsebességre igaz, hogy $v_{T\sigma} \gg V_{folyamat}$ és az ütközési tagok elhanyagolhatóak.
- 2. *Adiabatikus határeset*ben viszont a hőfluxus hanyagolható el az ütközési tagokkal együtt. Ebben az esetben $v_{T\sigma} \ll V_{folyamat}$.

Adiabatikus határesetben az energiaegyenlet nagyban leegyszerűsödik, ha átrendezzük a kontinuitási egyenletet

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\sigma} = -\frac{1}{n_{\sigma}} \frac{\mathrm{d}n_{\sigma}}{\mathrm{d}t}$$
(4.16)

és behelyettesítjük 4.15-be

$$\frac{1}{P_{\sigma}}\frac{\mathrm{d}P_{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{n_{\sigma}}\frac{\mathrm{d}n_{\sigma}}{\mathrm{d}t}.$$
(4.17)

Gamma definíciója

$$\gamma = \frac{N+2}{N},$$

ahol *N* a rendszer dimenziója. Például teljesen izotróp esetben N = 3, így $\gamma = 5/3$; egydimenziós folyamatokra pedig (pl. mágneses tér erővonalai mentén terjedő perturbáció) N = 1 és $\gamma = 3$. A 4.17 egyenletet integrálva kapjuk a kétfolyadék *adiabatikus állapotegyenlet* kompakt alakját:

$$\frac{P_{\sigma}}{n_{\sigma}^{\gamma}} = \text{állandó}, \tag{4.18}$$

⁶Természetesen a Chapman–Enskog-lezárás egésze sem tartalmaz a kis paraméter szerinti átlagolást.

vagy ezzel egyenértékű módon

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{P_{\sigma}}{n_{\sigma}^{\gamma}} = 0. \tag{4.19}$$

A 4.2, a 4.9 és a 4.19 a Maxwell-egyenletekkel együtt alkotják a kétfolyadék-egyenleteket azzal a megkötéssel, hogy 4.19 csak adiabatikus közelítésben használható.

5. MHD-egyenletek

A kétfolyadék-egyenletekben a részecskék mozgását az egyes komponensek \mathbf{u}_{σ} átlagsebességével és \mathbf{P}_{σ} nyomásával írtuk le. A *magnetohidrodinamiká*ban (MHD) a kétfolyadék-átlagsebességek helyett két új, sebesség jellegű változót vezetünk be, valamint újradefiniáljuk a nyomást és az elmélet alkalmazhatóságára a kétfolyadék-elméleten túli, további megkötéseket teszünk. Az MHD-közelítést *egyfolyadék*-közelítésnek is szokták hívni, mert ebben az elméletben csak egy folyadékkomponens van.

A két új, sebesség jellegű mennyiség az áramsűrűség

$$\mathbf{J} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}$$
(5.1)

(lényegében a két komponens relatív sebessége) és a plazmafolyadék tömegközéppontjának sebessége

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\rho} \sum_{\sigma} m_{\sigma} n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}, \tag{5.2}$$

ahol

$$\rho = \sum_{\sigma} m_{\sigma} n_{\sigma} \tag{5.3}$$

a tömegsűrűség.

5.1. MHD kontinuitási egyenlet

A 4.2 egyenletet m_{σ} -val szorozva és a részecskefajtákra összegezve kapjuk az *MHD kontinuitási egyenlet*et:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0. \tag{5.4}$$

5.2. MHD-mozgásegyenlet

Az MHD-mozgásegyenlet származtatásához 4.9-et szorozzuk m_{σ} -val és összegezzük a részecskefajtákra:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\sigma} m_{\sigma} \int \mathbf{v} f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \sum_{\sigma} m_{\sigma} \int \mathbf{v} \mathbf{v} f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v + \\ + \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f_{\sigma} \right] \mathrm{d}^{3} v = 0.$$
(5.5)

Az egyenlet jobb oldala természetesen nulla, mivel $\mathbf{R}_{ei} + \mathbf{R}_{ie} = 0$, azaz a plazma egésze nem hathat saját magára súrlódási erővel. A sebesség ingadozó (random) komponensét most az \mathbf{u}_{σ} átlagsebesség helyett az U sebességhez viszonyítjuk.

$$\sum_{\sigma} m_{\sigma} \int \mathbf{v} \mathbf{v} f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v = \sum_{\sigma} m_{\sigma} \int (\mathbf{v}' + \mathbf{U}) (\mathbf{v}' + \mathbf{U}) f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v =$$
$$= \sum_{\sigma} m_{\sigma} \int \mathbf{v}' \mathbf{v}' f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v + \rho \mathbf{U} \mathbf{U}$$
(5.6)

Itt a v'-ban lineáris tagokat elhagytuk a $\sum_{\sigma} \int m_{\sigma} \mathbf{v}' f_{\sigma} d^3 v = 0$ összefüggés miatt. Az MHD-nyomástenzort az U sebességhez viszonyított sebesség-ingadozásokon keresztül definiálva

$$\mathbf{P}^{\text{MHD}} = \sum_{\sigma} m_{\sigma} \int \mathbf{v}' \mathbf{v}' f_{\sigma} \, \mathrm{d}^{3} v, \qquad (5.7)$$

és a gyorsulást tartalmazó tagot részenként integrálva

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\mathbf{U}) = \left(\sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma}\right) \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}^{\text{MHD}}.$$
 (5.8)

Az MHD-közelítést általában nagy térskálájú, lassú (hogy mihez képest lassú, azt később látni fogjuk) folyamatok leírásánál használjuk. Ezeken a térskálákon a plazma semlegesnek tekinthető, azaz $\sum_{\sigma} n_{\sigma}q_{\sigma} \approx 0$. A kétfolyadék esethez hasonlóan ennek az egyenletnek a bal oldala is tartalmazza beágyazva a kontinuitási egyenletet:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\mathbf{U}) = \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U})\right]\mathbf{U} + \rho\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}.$$
 (5.9)

Az MHD-nyomás definícióját felhasználva és levonva a kontinuitási egyenletet kapjuk az *MHD-mozgásegyenlet* standard alakját:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}\right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}^{\text{MHD}}.$$
(5.10)

Az 5.10 egyenlet két ismeretlent tartalmaz: a J áramsűrűséget és az U sebességet. Ezen változók egyértelmű meghatározásához szükségünk van még egy egyenletre. Ezt a plusz egyenletet az elektronokra felírt kétfolyadék-mozgásegyenletből származtathatjuk:

$$m_e \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_e}{\mathrm{d}t} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n_e} \nabla(n_e \kappa T_e) - \nu_{ei} m_e(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i).$$
(5.11)

Mint már korábban említettük, az MHD-közelítést nagy térskálákon, lassú folyamatok esetén használjuk. Ha a kérdéses folyamat karakterisztikus ideje (τ) lassabb az elektronok ciklotronperiódus-idejénél ($2\pi m_e/eB$), akkor az elektronok tehetetlenségét leíró tag ($m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt}$) elhanyagolható a mágneses tag mellett ($-e(\mathbf{u}_e \times \mathbf{B})$). Mivel $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i = -\mathbf{J}/n_e e$ és az elektronés iontömegek közötti jelentős különbség miatt $\mathbf{u}_i \simeq \mathbf{U}$, az 5.11 egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} - \frac{1}{n_e e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{1}{n_e e} \nabla(n_e \kappa T_e) = \eta \mathbf{J}.$$
 (5.12)

Ez az egyenlet az *általánosított Ohm-törvény*. Az 5.12 egyenlet bal oldalán álló $\mathbf{J} \times \mathbf{B}/n_e e$ tagot *Hall-tag*nak hívjuk és az általánosított Ohmtörvényben elhanyagolhatjuk, ha az alábbi két feltétel közül bármelyik fennáll:

 Az MHD-nyomás az 5.10 mozgásegyenletben elhanyagolható a másik két tag mellett. Ez azt is jelenti, hogy a másik két tagnak azonos nagyságrendűnek kell lennie, azaz

$$|\mathbf{J}| \sim \omega \rho |\mathbf{U}| / |\mathbf{B}|.$$

Itt feltettük, hogy ~ $1/\omega$ egy MHD-folyamat karakterisztikus ideje. Ez esetben a Hall-tag akkor hanyagolható el U × B mellett, ha ω sokkal kisebb az ionciklotron-frekvenciánál ($q_i B/m_i$).

2. Az elektron-ion ütközési frekvencia (ν_{ei}) nagy az elektronciklotronfrekvenciához (eB/m_e) képest, mert ez esetben a Hall-tag a fajlagos ellenállást tartalmazó taghoz ($\eta \mathbf{J} = (m_e \nu_{ei}/n_e e^2) \mathbf{J}$) képest kicsi.

A továbbiakban MHD tárgyalásainkban hallgatólagosan feltételezni fogjuk, hogy a két fenti feltétel közül legalább az egyik teljesül. Ha a két fenti feltétel közül egyik sem teljesül és a Hall tagot az 5.12 egyenletben meg kell tartani, *Hall MHD* rendszerről beszélünk.

Åltalában az 5.12 egyenletet nem közvetlenül szoktuk használni, hanem vesszük a rotációját, hogy az elektromos teret az indukciós Maxwellegyenletből be lehessen helyettesíteni.⁷ Ekkor

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{n_e} \nabla n_e \times \nabla \kappa T_e = \nabla \times \left(\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}\right).$$
(5.13)

⁷Az eltolási áramot – éppen a folyamatok lassúsága miatt – elhanyagoltuk

Legtöbbször a hőmérséklet- és a sűrűséggradiensek párhuzamosak, azaz a $(n_e e)^{-1} \nabla n_e \times \nabla \kappa T_e$ hő-elektromotoros erő elhagyható, amivel egyenletünk az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \left(\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}\right).$$
(5.14)

Ezt az egyenletet szokták

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \tag{5.15}$$

alakban is írni, de ekkor implicite feltételezni kell, hogy majd az egyenlet rotációját fogjuk venni és a hő-elektromotoros erő elhanyagolható.

5.3. MHD-állapotegyenlet

MHD-közelítésben az adiabatikus állapotegyenletet a kétfolyadékleíráshoz hasonló módon kaphatjuk meg, és egyenletünk alakja is hasonló:

$$\frac{P^{MHD}}{\rho^{\gamma}} = \text{állandó}$$
(5.16)

vagy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{P^{MHD}}{\rho^{\gamma}} = 0. \tag{5.17}$$

Gamma ebben az esetben is $({\cal N}+2)/{\cal N}$, ahol ${\cal N}$ a rendszer dimenziószáma.

6. Driftáramlások I

A megelőző fejezetben ismertetett kétfolyadék-egyenletek segítségével a plazmakomponensek mint folyadékok áramlási tere – a peremfeltételeket is figyelembe véve – meghatározható. Az egyenletek megoldása azonban általános esetben igen nehéz, és hasznos lenne, bizonyos közelítések bevezetése után, az áramlási kép legalább kvalitatív, közelítő megoldásait megtalálni. Az áramlási képben térben és időben lassan változó, úgynevezett *driftáramlás*okat fogunk keresni. A *driftközelítés* sajátsága, hogy kihasználjuk azt, hogy az áramlás sebességének mágneses térrel párhuzamos komponense általában kisebb a térre merőleges komponensnél, ezért csak a térre merőleges komponenst határozzuk meg, a párhuzamos rész iránt nem érdeklődünk.

Ennek a leszűkített érdeklődésnek a jogosságát kicsit később egzaktul is látni fogjuk, de kvalitatív indokot most is tudunk adni. Gondoljunk vissza ugyanis az általánosított Ohm-törvényre, mely szerint (ideliás plazmában)

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0,$$

azaz a mágneses erő csak a mágneses térre merőleges irányban hat, ezért a térrel párhuzamosan nem lehet az elektromos térnek komponense.

A kétfolyadék-mozgásegyenlet párhuzamos komponensében az áramlás dinamikáját lassú idő- és nagy térskálákon – amikor a sebesség teljes időderiváltja nulla vagy nagyon kicsi – a súrlódási erő (ha van) és a nyomásgradiens egyensúlya határozza meg (lásd a 4.9 egyenletet). Azaz a mozgásegyenletnek ez a komponense vezető rendben (a sebességderivált elhanyagolása esetén) nem ad információt $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ nagyságáról, viszont mivel a súrlódási erő általában pici (a plazma forró és az elektromágneses erők dominálnak), a párhuzamos nyomásgradiens sem lehet nagy, tehát a párhuzamos sebesség várhatóan kicsi. Ezzel szemben a merőleges mozgásegyenlet-komponens a plazmára ható erők egyensúlya esetén is jól definiálható, véges áramlási sebességet ad.

Induljunk ki ezek után a kétfolyadék-mozgásegyenletből, elhagyva a súrlódási tagot és fejben tartva, hogy nekünk most csak a merőleges áramlás érdekes!

$$m_{\sigma} n_{\sigma} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{\sigma}}{\mathrm{d}t} = q_{\sigma} n_{\sigma} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\sigma} \times \mathbf{B}) - \nabla P_{\sigma}$$
(6.1)

Az alkalmazott driftközelítés magja a következő. A mozgásegyenlet bal oldalán álló konvektív derivált két részből áll. Az első, a parciális időderiváltat tartalmazó tag az áramlási tér egy adott helyén a sebesség explicit időfüggését írja le, míg a második tag azt, hogy a folyadékkal együttmozogva hogyan változik a sebesség. Tegyük fel, hogy a sebesség jellemzően *T* idő eltelte, illetve *L* távolság megtétele után változik meg. Ekkor a konvektív derivált két tagjának nagyságrendje u_{σ}/T és $u_{\sigma}u_{\sigma}/L$. Vegyük észre, hogy L/u_{σ} nem más, mint az az idő, ami ahhoz szükséges, hogy a folyadék *L* utat megtegyen. Jelöljük ezt az időt *T**-al, azaz *T** = L/u_{σ} .

A bevezetett T és T^* mennyiségekkel a 6.1 egyenlet alábbi közelítését kapjuk!

$$\frac{\mathbf{u}_{\sigma}}{T} + \frac{\mathbf{u}_{\sigma}}{T^*} = \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \mathbf{E} + \omega_{c\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} \times \hat{z} - \frac{\nabla P_{\sigma}}{n_{\sigma} m_{\sigma}}$$
(6.2)

Ebben az átalakításban felhasználtuk az $\omega_{c\sigma}$ ciklotronfrekvencia definícióját, és \hat{z} a mágneses tér irányába mutató egységvektor. A 6.2 egyenletre pillantva azonnal látszik, hogy ha $T^*, T \gg \omega_{c\sigma}^{-1}$, azaz a plazmafolyadék sebességének megváltozása mind térben, mind időben lassabb, mint a ciklotronfrekvenciából meghatározható idő, akkor nulladik közelítésben az egyenlet bal oldala nullának tekinthető (ekkor ugyanis az egyenlet bal oldala elhanyagolható a mágneses tag mellett).

$$0 = \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \mathbf{E} + \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \mathbf{u}_{\sigma 0} \times \mathbf{B} - \frac{\nabla P_{\sigma}}{n_{\sigma} m_{\sigma}}$$
(6.3)

Az egyenletet a B mágneses térrel vektoriálisan szorozva $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ kifejezhető.

$$\mathbf{u}_{\sigma 0} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla P_{\sigma} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2}$$
(6.4)

Ez a driftsebesség nulladrendű közelítése. A jobb oldalon álló első tag az elektromos tértől származik és neve E x B-drift (*ékeresztbé drift*), a második tag pedig az úgynevezett *diamágneses drift*, ami a plazma diamágneses tulajdonságából származik, azaz abból, hogy külső mágneses tér hatására a plazmában olyan áramlások (és ennek következtében áramok) jönnek létre, hogy az áram generálta mágneses tér a külső mágneses teret gyengítse. A 6.4 kifejezés azt mutatja, hogy – miként egyébként is vártuk – a vezetőrendű driftsebesség merőleges a mágneses térre.

Ha a 6.4 egyenletben a mágneses térrel való keresztszorzatot kiemeljük, az alábbi alakot kapjuk:

$$\mathbf{u}_{\sigma 0} = (\mathbf{E} - \nabla P_{\sigma} / q_{\sigma} n_{\sigma}) \times \frac{\mathbf{B}}{B^2},$$

amit úgy is értelmezhetünk, hogy a driftek hatására az elektromos tér módosul a plazmában, és valójában csak egyféle, az elektromos tértől származó drift létezik. Ezt az alakját a driftsebességnek azonban ritkán szokták használni.

Az $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ vezetőrendű driftsebességhez elsőrendű korrekciót találhatunk, ha feltesszük, hogy a "tényleges" \mathbf{u}_{σ} driftsebesség $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ -tól csak egy kicsiny $\mathbf{u}_{\sigma 1}$ tagban különbözik, azaz

$$\mathbf{u}_{\sigma} = \mathbf{u}_{\sigma 0} + \mathbf{u}_{\sigma 1}$$

és

$$u_{\sigma 0} \gg u_{\sigma 1}.$$

A korrekciós tagnak persze már lehet mind párhuzamos, mind merőleges komponense. Írjuk be a korrekciós tagot a nulladrendű taggal együtt a 6.1 egyenletbe!

$$m_{\sigma}n_{\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u}_{\sigma0}+\mathbf{u}_{\sigma1}) = q_{\sigma}n_{\sigma}\left(\mathbf{E} + (\mathbf{u}_{\sigma0}+\mathbf{u}_{\sigma1})\times\mathbf{B}\right) - \nabla P_{\sigma}.$$
 (6.5)

A bal oldalon $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ mellett $\mathbf{u}_{\sigma 1}$ elhanyagolható, míg a jobb oldalon $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ a 6.3 egyenlet miatt kiesik. Ekkor

$$m_{\sigma} n_{\sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{u}_{\sigma 0} = q_{\sigma} n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma 1} \times \mathbf{B}.$$
 (6.6)

Az egyenletet – a fentebb már látott módon – a mágneses térrel vektoriálisan szorozva kapjuk az $u_{\sigma 1}$ korrekciót

$$\mathbf{u}_{\sigma 1} = -\frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma}B^2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{\sigma 0}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{B},\tag{6.7}$$

ahol $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ -t a 6.4 egyenlet definiálja. Az $\mathbf{u}_{\sigma 1}$ korrekciós tag neve *tehetlen-ségi drift*, mert az $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ származtatásánál korábban felhasznált közelítések ekvivalensek azzal, hogy a plazma részecskéinek nulla tömeget, azaz vég-telenül kicsi tehetetlenséget tulajdonítunk. Az $\mathbf{u}_{\sigma 1}$ korrekciót pedig akkor kapjuk, ha véges részecsketömeget, tehát véges tehetetlenséget veszünk figyelembe.

A 6.7 kifejezés a teljes időderivált miatt nagyon bonyolult. Ha a kifejezés kiértékelésénél csak a lineáris tagra (az idő szerinti explicit deriválásra) korlátozzuk magunkat, akkor az úgynevezett *polarizációs drift*et kapjuk.

$$\mathbf{u}_{\sigma 1} = \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma}B^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_{\perp} - \frac{1}{q_{\sigma}n_{\sigma}} \nabla_{\perp} P), \qquad (6.8)$$

ahol $\nabla_{\perp} = \nabla - \hat{z} \partial / \partial z$, a gradiensoperátor mágneses térre merőleges komponense.
7. Elemi plazmahullámok

A kétfolyadék-egyenletek és a magnetohidrodinamika egyenletei nagyon sokféle, a plazmában lezajló mozgást leírnak. A sokféle mozgás között persze vannak "egyszerűbbek" és "összetettebbek". A driftáramlások adják a plazma mozgásegyenleteinek legnagyobb tér- és időskálájú, azaz legegyszerűbb megoldásait. Minden hasonlat sánta, de képzeljük el plazmánkat a Föld óceánjának, és a driftáramlásokat a nagy óceáni áramlásoknak, amiket akkor látunk igazán jól, ha elegendően messziről nézzük a rendszert. Ha kicsit közelebb lépünk, azt vesszük észre, hogy a mozgások sokkal változatosabbak, mint az unalmas driftáramlások.⁸ Senki nem látott még nyugalomban lévő óceánt, a gyerekek is tudják, hogy a víz örökké hullámzik, ezért – a hasonlatnál maradva – nyilvánvaló, hogy plazmánkat is vég nélkül keresztül-kasul átjárják a hullámok. Mivel a plazma egy meglehetősen komplex közeg, várható, hogy benne rendkívül sokféle hullám terjedése lehetséges.

Ebben, és a következő fejezetben homogén és izotróp, egyensúlyban nyugalomban lévő plazmákban terjedő hullámokat fogunk vizsgálni, az egyszerűbbektől haladva a bonyolultabbak felé.

Keressük tehát most a plazma kétfolyadék-egyenleteinek olyan, úgynevezett hullám-megoldásait, ahol a plazmát jellemző paraméterek (sebesség, sűrűség, mágneses tér stb.) mind a térkoordinátának, mind az időnek harmonikus függvényei, azaz legyen

$$\mathbf{u} \sim e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad n \sim e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad \mathbf{B} \sim e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}!$$
 (7.1)

Ha nagyon precízek szeretnénk lenni, akkor az iménti egyenlet helyett a plazmaparaméterek Fourier-sorát kellene használni, de mi most megelégszünk azzal, hogy a változókról mintegy "leválasztjuk" a harmonikus függést, mégpedig csak egyetlen hullámszámvektort és körfrekvenciát figyelembe véve. Egy adott k és ω pároshoz tartozó hullámot (ha van ilyen) a plazma egy hullámmódusának vagy egyszerűen csak módusának hívjuk.

A módusokat többféle szempont szerint is csoportosíthatjuk. Ezek egy része csak plazmák esetében alkalmazható, míg más részük a semleges folyadékok esetében is.

A legelterjedtebb és egyben legegyszerűbb csoportosítás az, amikor aszerint különböztetjük meg a hullámokat, hogy a hullám terjedésének

⁸Olyan közel azonban ne menjünk, hogy már az atomok közötti távolságot is észrevegyük.

iránya milyen szöget zár be a hullámban rezgő plazmafolyadék sebességével, azaz milyen a viszony k és \mathbf{u}_{σ} iránya között. A két vektor által bezárt szög persze tetszőleges lehet, de az "elemi" esetekben ez a szög vagy nulla, vagy kilencven fok. Ha a sebesség iránya merőleges a terjedési irányra, akkor *transzverzális*, ha párhuzamos, akkor *longitudinális* hullámról beszélünk.

Az előbbi csoportosítással egyenértékű, de kevésbé szemléletes, ha a transzverzális hullámokat *nyírási*, a longitudinálisokat pedig *kompressziós* hullámoknak hívjuk. Nyírási hullámban a plazmafolyadék hullámhoz tartozó sebességterének divergenciája nulla, de rotációja nem, míg a kompressziós hullámban fordítva van. A sebességtér divergenciája nem nulla, a rotációja viszont igen.

A plazma mint közeg sajátosságai miatt a nyírási hullámokban a harmonikus perturbációhoz tartozó elektromos tér véges rotációjú (úgynevezett *elektromágneses* hullám), azaz ennek megfelelően ezekhez a hullámokhoz szükségképpen a mágneses tér perturbációja is szükséges. A kompressziós hullámok viszont lehetnek mind elektromágnesesek, mind *elektrosztatikus*ak aszerint, hogy van-e a mágneses térnek is perturbációja, vagy nincs. Elektrosztatikus hullámban természetesen a perturbált elektromos tér rotációja nulla.

A hullám-megoldások között tekintsük most csak azokat, ahol a közeg (a plazma) válasza lineáris egy kicsiny, kezdeti harmonikus perturbációra!

Legyen f egy tetszőleges, a plazmát jellemző változó! Kicsinynek mondunk egy perturbációt, ha minden időpillanatban és a tér minden pontjára igaz, hogy $f(\mathbf{x},t)$ aktuális értéke csak kevéssé tér el az egyensúlyi értékétől, azaz

$$f = f_0 + f_1$$

alakban írható, ahol f_0 az egyensúlyi, f_1 pedig a perturbált érték és $f_1/f_0 \ll 1$.

Ha van egy g változónk is, mely f-től függ ($g = g(f) = g(f_0 + f_1)$), akkor f_1 kicsi volta miatt g-t sorba fejthetjük a $g_0(f_0)$ egyensúlyi érték körül.

$$g = g_0 + g_1 + g_2 + g_3 + \dots$$

és $g_1/g_0 \ll 1$, $g_2/g_1 \ll 1$, $g_3/g_2 \ll 1$ stb. Csak lineáris rendig (azaz csak az egyensúlyi értékhez képest legnagyobb tagig) megtartva a sorfejtést g így írható:

$$g = g_0 + g_1.$$

Az előbb vázolt eljárást a g = g(f) egyenlet *linearizálás*ának hívjuk.

Most linearizáljuk ennek megfelelően a kétfolyadék-egyenleteket! Legyen $n_{\sigma} = n_{\sigma 0} + n_{\sigma 1}$ és $\mathbf{u}_{\sigma} = \mathbf{u}_{\sigma 0} + \mathbf{u}_{\sigma 1}$ stb.! A kétfolyadék kontinuitási egyenlet ekkor így néz ki:

$$\frac{\partial (n_{\sigma 0} + n_{\sigma 1})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[(n_{\sigma 0} + n_{\sigma 1}) (\mathbf{u}_{\sigma 0} + \mathbf{u}_{\sigma 1}) \right] = 0.$$
(7.2)

Az egyensúlyi, perturbáció nélküli állapotra igaz, hogy

$$\frac{\partial n_{\sigma 0}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\sigma 0} \mathbf{u}_{\sigma 0}) = 0.$$
(7.3)

Ezt az egyenletet vonjuk ki a 7.2 egyenletből!

$$\frac{\partial n_{\sigma 1}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[n_{\sigma 1} \mathbf{u}_{\sigma 0} + n_{\sigma 0} \mathbf{u}_{\sigma 1} + n_{\sigma 1} \mathbf{u}_{\sigma} \mathbf{1} \right] = 0$$
(7.4)

Csak a lineáris – elsőrendű – tagokat megtartva (az 1-es indexű tagok szorzata már másodrendben kicsi) kapjuk végül a kétfolyadék kontinuitási egyenlet linearizált alakját.

$$\frac{\partial n_{\sigma 1}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[n_{\sigma 1} \mathbf{u}_{\sigma 0} + n_{\sigma 0} \mathbf{u}_{\sigma 1} \right] = 0$$
(7.5)

Járjunk el hasonlóképpen a kétfolyadék-mozgásegyenlettel és az energiaegyenlettel is! A nem linearizált egyenletek 4.9 és 4.19 szerint a következők

$$m_{\sigma} n_{\sigma} \frac{\mathrm{d} \mathbf{u}_{\sigma}}{\mathrm{d} t} = q_{\sigma} n_{\sigma} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\sigma} \times \mathbf{B}) - \nabla P_{\sigma}$$
(7.6)

és

$$\frac{P_{\sigma}}{n_{\sigma}^{\gamma}} = \text{állandó.} \tag{7.7}$$

Ezeknek az egyenleteknek a linearizált alakja (a mozgásegyenletből ismét levontuk az egyensúlyi egyenletet):

$$m_{\sigma}n_{\sigma}\frac{\partial \mathbf{u}_{\sigma 1}}{\partial t} = q_{\sigma}n_{\sigma}(\mathbf{E}_{1} + \mathbf{u}_{\sigma 1} \times \mathbf{B}_{0} + \mathbf{u}_{\sigma 0} \times \mathbf{B}_{1}) - \nabla P_{\sigma 1}, \qquad (7.8)$$

és

$$\frac{P_{\sigma 1}}{P_{\sigma 0}} = \gamma \frac{n_{\sigma 1}}{n_{\sigma 0}}.$$
(7.9)

A 7.5, 7.8 és 7.9 egyenletek a linearizált Maxwell-egyenletekkel együtt alkotják azt az egyenletrendszert, amit felhasználunk az elemi plazmahullámok származtatására. Az iménti, linearizált kétfolyadék-egyenletek tetszőleges $u_{\sigma 0}$ esetén igazak, de – mint korábban ígértük – most csak olyan plazmákban terjedő hullámokat vizsgálunk, amikben nincsenek a perturbálatlan esetben (0 index) makroszkópikus áramlások, ezért az u_0 -t tartalmazó tagot a 7.8 és a 7.5 egyenletekben elhagyjuk.

7.1. Nem mágnesezett plazmahullámok

A legegyszerűbb esetben egyensúlyi mágneses tér sincs a plazmában, azaz $B_0 = 0$, és a 7.8 egyenlet így alakul:

$$m_{\sigma}n_{\sigma}\frac{\partial \mathbf{u}_{\sigma 1}}{\partial t} = q_{\sigma}n_{\sigma 0}\mathbf{E}_{1} - \nabla P_{\sigma 1}.$$
(7.10)

Az elektromos térerősség vektora az elektrodinamikából ismert módon

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.\tag{7.11}$$

Ennek linearizált változata

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}.$$
 (7.12)

 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (Coulomb-) mértéket választva 7.11 divergenciája éppen a Poisson-egyenlet.

7.1.1. Elektrosztatikus (kompressziós) hullámok

Ezekben a hullámokban $\nabla \cdot \mathbf{u}_1$ véges és a fejezet elején említetteknek megfelelően elektrosztatikus, kompressziós vagy longitudinális hullámoknak hívjuk őket. Az ilyen típusú hullámok származtatásához általában a 7.10 egyenlet divergenciájából indulnak ki. Vegyük mi is 7.10 divergenciáját!

$$m_{\sigma}n_{\sigma}\frac{\partial\nabla\cdot\mathbf{u}_{\sigma1}}{\partial t} = -q_{\sigma}n_{\sigma0}\nabla^2\phi_1 - \nabla^2 P_{\sigma1}$$
(7.13)

Helyettesítsük be $\nabla \cdot \mathbf{u}_1$ -t a 7.5 kontinuitási egyenletből!

$$m_{\sigma} \frac{\partial^2 n_{\sigma 1}}{\partial t^2} = q_{\sigma} n_{\sigma 0} \nabla^2 \phi_1 + \nabla^2 P_{\sigma 1}$$
(7.14)

Fejezzük ki a perturbált nyomást ($P_{\sigma 1}$) 7.9-ből, és azt is helyettesítsük be, valamint használjuk fel, hogy $P_{\sigma 0} = n_{\sigma 0} \kappa T_{\sigma 0}!$

$$m_{\sigma} \frac{\partial^2 n_{\sigma 1}}{\partial t^2} = q_{\sigma} n_{\sigma 0} \nabla^2 \phi_1 + \gamma \kappa T_{\sigma 0} \nabla^2 n_{\sigma 1}$$
(7.15)

Itt felhasználtuk, hogy a plazma homogén és $\nabla T_{\sigma 0} = 0$. Tegyük fel, hogy a függő változók hullámszerűen függenek mind a tértől, mind az időtől, azaz

$$n_{\sigma 1} \sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t), \qquad \phi_1 \sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)!$$
 (7.16)

Ekkor a deriváltoperátorok formálisan a következő egyszerű alakokkal helyettesíthetők: $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ és $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$. Behelyettesítve a deriváltoperátorokat a 7.15 egyenlet algebrai alakot ölt:

$$m_{\sigma}\omega^2 n_{\sigma 1} = q_{\sigma}n_{\sigma 0}k^2\phi_1 + \gamma\kappa T_{\sigma 0}k^2n_{\sigma 1}, \qquad (7.17)$$

amiből a perturbált sűrűség kifejezhető:

$$n_{\sigma 1} = \frac{q_{\sigma} n_{\sigma 0}}{m_{\sigma}} \frac{k^2 \phi_1}{\omega^2 - \gamma k^2 \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}}.$$
(7.18)

Írjuk az így kapott perturbált sűrűséget a

$$k^2 \phi_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} n_{\sigma 1} q_{\sigma} \tag{7.19}$$

Poisson-egyenletbe!

$$k^{2}\phi_{1} = \sum_{\sigma} \frac{n_{\sigma 0}q_{\sigma}^{2}}{\varepsilon_{0}m_{\sigma}} \frac{k^{2}\phi_{1}}{\omega^{2} - \gamma k^{2}\kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}}$$
(7.20)

Átrendezve kapjuk:

$$\left[1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \gamma k^2 \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}}\right] \phi_1 = 0.$$
(7.21)

Ez egy lineáris, homogén algebrai egyenletrendszer, amelynek akkor van a triviálistól ($\phi_1 = 0$) eltérő megoldása, ha ϕ_1 együtthatója nulla, azaz

$$1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \gamma k^2 \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}} = 0.$$
(7.22)

A 7.22 egyenlet felírásánál felhasználtuk a

$$\omega_{p\sigma}^2 \equiv \frac{n_{\sigma 0} q_{\sigma}^2}{\varepsilon_0 m_{\sigma}}$$

helyettesítést. Az $\omega_{p\sigma}$ mennyiséget a σ részecskék *plazmafrekvenciá*jának hívjuk, és ennek a mennyiségnek (mint később látni fogjuk) központi szerepe van a plazmafizikában. A 7.22 egyenletet

$$1 + \sum_{\sigma} \chi_{\sigma} = 0$$

alakban is írhatjuk, ahol a

$$\chi_{\sigma} = -\frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \gamma k^2 \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}}$$
(7.23)

kifejezés a σ részecskék *szuszceptibilitása*.

A 7.22 egyenlet neve *diszperziós reláció*, amely meghatározza, hogy egy adott ω frekvenciájú perturbáció milyen k hullámszámú hullámként fog a közegben terjedni. Vegyük észre, hogy ez a diszperziós reláció (tulajdonképpen egy $\omega = \omega(k)$ definiáló egyenlet) csak a hullámszámvektor abszolút értékétől függ, azaz irányfüggetlen, mint ahogy egy – feltevésünk szerint – izotróp közegtől el is várjuk.

A 7.22 diszperziós reláció egzaktul definiálja a nem mágnesezett plazmában terjedő elektrosztatikus módusokat, de érdekes és érdemes megvizsgálnunk az egyenlet bizonyos határeseteit.

Vizsgáljuk a 7.23 szuszceptibilitások közelítéseit aszerint, hogy a terjedő hullám fázissebessége hogyan viszonyul a $\kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}$ sebességhez (\approx a részecskék átlagos termikus sebessége)!

1. $\omega/k \gg \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}$ — *adiabatikus* közelítés. Ebben a közelítésben a hullám olyan gyorsan terjed, hogy a folyadékkomponensek mozdulatlanoknak tekinthetők a hullámperiódus időskáláján.

Mivel a síkhullámok egydimenziósak, N = 1 és $\gamma = (N + 2)/N = 3$. Ebben a határesetben a szuszceptibilitásokat így fejezhetjük ki:

$$\chi_{\sigma} = -\frac{\omega_{p\sigma}^{2}}{\omega^{2}(1 - \gamma k^{2}\kappa T_{\sigma0}/m_{\sigma}\omega^{2})}$$

$$\simeq -\frac{\omega_{p\sigma}^{2}}{\omega^{2}}\left(1 + 3\frac{k^{2}}{\omega^{2}}\frac{\kappa T_{\sigma0}}{m_{\sigma}}\right)$$

$$= -\frac{1}{k^{2}\lambda_{D\sigma}^{2}}\frac{k^{2}}{\omega^{2}}\frac{\kappa T_{\sigma0}}{m_{\sigma}}\left(1 + 3\frac{k^{2}}{\omega^{2}}\frac{\kappa T_{\sigma0}}{m_{\sigma}}\right).$$
(7.24)

2. $\omega/k \ll \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}$ — *izoterm* közelítés. Ebben a határesetben a folyadékkomponensek végtelen nagy sebességgel (azonnal) követik a hullám okozta perturbációt. Ekkor a szuszceptibilitások nagyon egyszerű alakot öltenek:

$$\chi_{\sigma} = \frac{\omega_{p\sigma}^2}{k^2 \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}} = \frac{1}{k^2 \lambda_{D\sigma}^2}.$$
(7.25)

A szuszceptibilitások közelítéseinek származtatásánál felhasználtuk, hogy adiabatikus esetben $\gamma = 3$, míg izoterm esetben $\gamma = 1$.

A 7.1. ábra szemlélteti a $\chi_{\sigma}k^2\lambda_{D\sigma}^2$ mennyiség változását $\omega/(k\sqrt{\kappa T_{\sigma_0}/m_{\sigma}})$ függvényében. Látható, hogy az izoterm és az adiabatikus szuszceptibilitások viselkedése meglehetősen különböző, és különösen figyelemre méltó, hogy nem esnek egybe az $\omega/k = \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}$ esetben. Sőt, itt a szuszceptibilitások divergálnak, ami nem jelenthet mást, mint hogy a folyadék közelítés $\omega/k \rightarrow \kappa T_{\sigma 0}/m_{\sigma}$ esetben nem alkalmazható, hanem, mint látni fogjuk, "vissza kell térni" a pontosabb, kinetikus leíráshoz.

Az elektronok és ionok tömege között jelentős, több mint három nagyságrendű különbség van. Így, bár a termikus átlagsebesség a tömeg gyökével skálázódik, a különbség a termikus átlagsebességek között is jelentős, még azonos komponens-hőmérséklet esetén is (ezt pedig elvárjuk egy egyensúlyban lévő plazmától). Ebből pedig az következik, hogy általában nem teljesülnek sem az adiabatikus, sem az izoterm közelítés feltételei mindkét folyadékkomponensre <u>egyszerre</u>.

Annak megfelelően, hogy mely komponensek tekinthetők adiabatikus, és melyek izoterm viselkedésűnek a hullámban, három alesetet vizsgálhatunk.

1. $\omega/k \gg \sqrt{\kappa T_{e0}/m_e}$, $\sqrt{\kappa T_{i0}/m_i}$ eset. Ekkor mind az ionok, mind az elektronok adiabatikusan viselkednek és a diszperziós reláció ilyen alakú:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\kappa T_{e0}}{m_e} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + 3\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\kappa T_{i0}}{m_i} \right) = 0.$$
(7.26)

Mivel $\omega_{pe}^2/\omega_{pi}^2=m_i/m_e$, az ionok hozzájárulása elhagyható, azaz

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(1 + 3\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\kappa T_{e0}}{m_e} \right) = 0.$$
 (7.27)



7.1. ábra. A szuszceptibilitás

Legalacsonyabb rendben a megoldás egyszerűen $\omega^2 = \omega_{pe}^2$. Iteratív eljárással magasabb rendű korrekciókat kaphatunk, felhasználva, hogy a zárójelben levő második tag kicsi (de épp ez volt az alapfeltevésünk, az adiabatikus viselkedés). Ekkor kapjuk a nagyfrekvenciás (adiabatikus), elektrosztatikus, nem mágnesezett plazmahullámok diszperziós relációjának standard alakját:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 \frac{\kappa T_{e0}}{m_e}.$$
(7.28)

Ezt a legalapvetőbb plazmahullámot elektron plazmahullámnak, Langmuir-hullámnak és Bohm–Gross-hullámnak is hívják.

2. $\omega/k \ll \sqrt{\kappa T_{e0}/m_e}$, $\sqrt{\kappa T_{i0}/m_i}$ eset. Ekkor mind az ionok, mind az elektronok izoterm módon viselkednek és a diszperziós reláció ilyen

alakú:

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} = 0.$$
 (7.29)

Ennek az egyenletnek nincs frekvenciafüggése, azaz az ehhez a diszperziós relációhoz tartozó hullám nem más, mint a Debye-árnyékolás maga – a plazma leárnyékol minden "kellően lassú" perturbációt.

3. $\sqrt{\kappa T_{i0}/m_i} \ll \omega/k \ll \sqrt{\kappa T_{e0}/m_e}$ eset. Ekkor az ionok adiabatikusan, az elektronok pedig izoterm módon viselkednek, és a diszperziós reláció a következő:

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\kappa T_{i0}}{m_i} \right) = 0.$$
 (7.30)

Vezessük be a c_s ionakusztikus sebességet!

$$c_s = \omega_{pi} \lambda_{De} = \sqrt{\kappa T_e/m_i} \tag{7.31}$$

Ekkor 7.30 így írható át:

$$\omega^{2} = \frac{k^{2}c_{s}^{2}}{1 + k^{2}\lambda_{De}^{2}} \left(1 + 3\frac{k^{2}}{\omega^{2}}\frac{\kappa T_{i0}}{m_{i}}\right).$$
(7.32)

Megint iterációs módszerhez folyamodunk és először feltesszük, hogy $T_{i0} = 0$, azaz

$$\omega^{2} = \frac{k^{2}c_{s}^{2}}{1 + k^{2}\lambda_{De}^{2}}$$
(7.33)

alakban kapjuk az *ionakusztikus hullámok* diszperziós relációjának elemi alakját. Magasabb rendű korrekciót kapunk, ha ezt az elemi egyenletet visszaírjuk 7.30-ba.

$$\omega^2 = \frac{k^2 c_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} + 3k^2 \frac{\kappa T_{i0}}{m_i}$$
(7.34)

Megkaptuk tehát a nem mágnesezett plazmahullámok 7.22 alatti diszperziós relációjának két legfontosabb ágát. A nagyfrekvenciás ág az elektron plazmahullámoké, a kisfrekvenciás pedig az ionakusztikus hullámoké.

7.1.2. Elektromágneses (inkompresszibilis) hullámok

Minden vektortér előállítható egy skalármező gradienseként plusz egy vektormező rotációjaként, azaz minden $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ felírható $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \nabla \psi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{Q}(\mathbf{r})$ alakban. Más megfogalmazásban: minden vektortér felbontható egy rotációmentes és egy divergenciamentes összetevőre. Ebből következően, ha tekintjük az elektromos tér 7.11 alatti kifejezését, rögtön látjuk, hogy a skalárpotenciál adja a rotációmentes komponenst, míg a vektorpotenciál (Coulomb-mértéket használva) a divergenciamenteset.

Az előző fejezetben a kompressziós hullámokat tekintettük, amikben a részecskék mozgásának sebességtere és az ehhez tartozó perturbált elektromos tér rotációja nulla volt (divergenciája pedig szükségképpen nem, különben a fent leírtak alapján azonosan nulla vektorterünk lenne).

Most tekintsük azokat a hullámokat, amelyekben $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\sigma} = 0$ vagy – ekvivalens módon – $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = 0$. Ezeket a hullámokat elektromágneses, inkompresszibilis vagy nyírási hullámoknak hívjuk.

Vegyük a 7.10 egyenlet rotációját és $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ legyen – csakúgy, mint a megelőző fejezetben – nulla!

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times (m_{\sigma} n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma 1}) = -q_{\sigma} n_{\sigma} \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t}$$
(7.35)

Integráljuk ezt az egyenletet időben, szorozzuk meg q_{σ}/m_{σ} -val és összegezzünk a részecskefajtákra!

$$\nabla \times \mathbf{J}_1 = -\varepsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{B}_1, \tag{7.36}$$

ahol J_1 a perturbált áramsűrűség, valamint bevezettük az

$$\omega_p^2 = \sum_{\sigma} \omega_{p\sigma}^2 \tag{7.37}$$

jelöléssel az egyes komponensek plazmafrekvenciáinak négyzetösszegét. A linearizált Ampère-törvényt felhasználva J_1 így is írható:

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1 - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}.$$
(7.38)

Ezt a kifejezést a 7.36 egyenletbe helyettesítve

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{B}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \right) = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{B}_1.$$
 (7.39)

Faraday törvényét és a $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ vektorazonos-ságot felhasználva

$$\nabla^2 \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_1}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{B}_1,$$

ami, **B**₁-t **B**₁ $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$ alakban feltételezve, a következő diszperziós relációra vezet:

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2. \tag{7.40}$$

Ez a nem mágnesezett plazmákban terjedő elektromágneses hullámok diszperziós relációja. Az egyenletre pillantva azonnal látszik, hogy ha $\omega < \omega_p$, akkor a hullám nem tud terjedni a plazmában, mivel k tisztán imagináriussá válik. Ebben az esetben a hullám exponenciálisan gyengül.

Meg kell még jegyezni, hogy a 7.37 egyenlet alatt definiált átlag plazmafrekvencia általában bonyolult függvénye az egyes komponensek $\omega_{p\sigma} = n_{\sigma}q_{\sigma}^2/\varepsilon_0 m_{\sigma}$ plazmafrekvenciáinak, azonban az elektron- és iontömeg közötti jelentős különbség miatt $\omega_{p\sigma}$ gyakorlatilag egyenlő az elektron plazmafrekvenciával.

7.2. Mágnesezett plazmahullámok

A mágnesezett plazmahullámok sokkal nagyobb változatosságot mutatnak, mint a nemmágnesezettek. Ennek az alapvető oka az, hogy a mágneses tér irányában, illetve arra merőleges irányban a plazma mozgása lényegesen különböző.

A mágnesezett plazmahullámok két alapmódusát, a nyírásit és a kompressziósat, Hannes Alfvén svéd fizikus "fedezte fel", így ezeket az alapmódusokat *Alfvén-hullámok*nak nevezzük. Alfvén eredeti levezetése az MHD-egyenleteken alapult, de mi most a kétfolyadék elmélet keretein belül tárgyaljuk ezeket a hullámokat. Az Alfvén-hullámok alacsony frekvenciájú plazmahullámok (a plazmák magnetohidrodinamikai leírása eleve csak ilyenek létét engedi meg), ezért a mostani kétfolyadék tárgyalásnál a plazma mozgására a driftközelítést használjuk és az eltolási áramot elhanyagoljuk. Természetesen a plazmákban nagyfrekvenciájú mágnesezett hullámok is terjednek, és ezeket a következő fejezet be is mutatja.

Megjegyzendő, hogy a mágnesezett hullámok MHD-képben is léteznek, míg a kompressziós, nemmágnesezett elektron-, illetve ionplazmahullámok csak a kétfolyadék képben, mivel ott feltétlenül szükség van a két folyadékkomponens térbeli szétválására ahhoz, hogy a hullámokat hajtó elektrosztatikus tér létrejöhessen.⁹

A mágnesezett plazmahullámok diszperziós relációja több ágra esik szét aszerint, hogy a plazma hidrodinamikai nyomása hogyan viszonyul a mágneses nyomáshoz. Izotróp hőmérsékleteloszlás esetén a σ típusú részecskékre ezt az arányszámot a következőképpen adjuk meg:

$$\beta_{\sigma} = \frac{n_{\sigma}\kappa T_{\sigma}}{B^2/2\mu_0}.$$

Ez a *plazmabétá*nak nevezett mennyiség központi helyet foglal el a mágnesezett plazmák elméletében, nem csak a hullámok jellemzésénél fontos.

A mágnesezett plazmahullámok bevezetéséhez tekintsük az Ampèretörvény és az indukciós egyenlet linearizált alakjait! A nem perturbált mágneses tér legyen térben homogén és időben állandó!

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \tag{7.41}$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{J}_1 \tag{7.42}$$

Ebben az egyenletrendszerben három ismeretlen van, ezért ha valamilyen harmadik egyenletből (vagy egyenletekből) származtatni tudnánk a $J_1(E_1)$ függést, akkor a három egyenletből E_1 és B_1 már egyértelműen meghatározható lesz. Ezután a nem mágnesezett hullámoknál megismert eljáráshoz hasonlóan a perturbált terekre harmonikus függést fogunk feltenni, így kapjuk majd meg a hullámok diszperziós relációját.

A 6. fejezetben kiszámítottuk az egyes folyadékkomponensek (elektronok és ionok) mágneses térre merőleges driftsebességeit izotróp plazmában lineáris rendben. A könnyebb érthetőség kedvéért itt megismételjük az ott kapott kifejezést.

$$\mathbf{u}_{\sigma} = \mathbf{u}_{\sigma 0} - \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma} B^2} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{u}_{\sigma 0} \right] \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{u}_{\sigma 0} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla P_{\sigma} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2}$$
(7.43)

⁹A kinetikus elmélet mint közelítésmentes elmélet is természetesen számot tud adni a nemmágnesezett elektron- és ionplazmahullámokról.

A mágnesezett plazmahullámok származtatásához ezt a driftsebességet linearizálnunk kell. A linearizált kifejezés:

$$\mathbf{u}_{\sigma 1} = \mathbf{u}_{\sigma 01} - \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma} B^2} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{u}_{\sigma 01} \right] \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{u}_{\sigma 01} = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla P_{\sigma 1} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2}.$$
(7.44)

A driftáramlások és a hullámok által okozott perturbáció következtében a mágneses térre merőlegesen elektromos áram is fog folyni, melyhez tartozó áramsűrűség:

$$\mathbf{J}_{\perp 1} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma 1} =$$

$$= \sum_{\sigma} \left[\left(n_{\sigma} q_{\sigma} \frac{\mathbf{E}_{1} \times \mathbf{B}}{B^{2}} \right) - \frac{\nabla P_{\sigma 1} \times \mathbf{B}}{B^{2}} + \left(n_{\sigma} m_{\sigma} \frac{\dot{\mathbf{E}}_{\perp 1}}{B^{2}} \right) - \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma}} \frac{\nabla \dot{P}_{\sigma 1} \times \mathbf{B}}{B^{2}} \right].$$
(7.45)

Ez az áram annak a J_1 áramperturbációnak a mergőleges komponense, melyre a 7.42 egyenletben szükségünk lesz. A hiányzó J_{z1} áramperturbációt lentebb számítjuk ki.

A 7.45 egyenletből látszik, hogy

- 1. az $E \times B$ drift nem ad járulékot az áramba,
- az ionok és az elektronok tömege közötti jelentős különbség miatt az elektromos tér okozta polarizációs driftben csak az ionok járuléka jelentős,
- 3. a diamágneses drift polarizációs járuléka szintén elhanyagolható a többi tag mellett, mivel az ω/ω_c rendben kisebb a többi tagnál.

$$\mathbf{J}_{\perp 1} = \frac{n_i m_i \dot{\mathbf{E}}_{\perp 1}}{B^2} - \frac{\nabla P_1 \times \mathbf{B}}{B^2},\tag{7.46}$$

ahol $P = \sum_{\sigma} P_{\sigma}$ az elektronok és ionok nyomásának összege.

Plazmafolyadékunk egy kiszemelt pontjában vegyünk fel lokális Descartes-koordinátarendszert úgy, hogy a *z* tengely a mágneses tér irányába mutasson, és bontsuk fel vektorainkat a mágneses térrel (a *z* tengellyel) párhuzamos és arra merőleges komponensekre, azaz legyen például $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{\perp 1} + E_{z1}\hat{z}$. A deriváltoperátort bontsuk fel hasonlóképpen: $\nabla = \nabla_{\perp} + \hat{z}\partial/\partial z$, valamint feltételezzük, hogy minden mennyiség $f(x,y) \exp(ik_z z - i\omega t)$ alakban írható! Ekkor a 7.41 Faraday-egyenlet így írható:

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp 1} + \nabla_{\perp} \times E_{z1} \hat{z} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \times \mathbf{E}_{\perp 1} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B}_{\perp 1} + B_{z1} \hat{z}), \qquad (7.47)$$

aminek párhuzamos

$$\hat{z} \cdot \nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp 1} = \mathrm{i}\omega B_{z1},\tag{7.48}$$

illetve merőleges komponense

$$(\nabla_{\perp} E_{z1} - \mathrm{i}k_z \mathbf{E}_{\perp 1}) \times \hat{z} = \mathrm{i}\omega \mathbf{B}_{\perp 1}$$
(7.49)

így néz ki. Bontsuk a 7.42 törvényt hasonló módon párhuzamos, illetve merőleges komponensekre!

$$\hat{z} \cdot \nabla_{\perp} \times \mathbf{B}_{\perp 1} = \mu_0 J_{z1} \tag{7.50}$$

$$(\nabla_{\perp} B_{z1} - \mathrm{i}k_z \mathbf{B}_{\perp 1}) \times \hat{z} = \mu_0 \mathbf{J}_{\perp 1}$$
(7.51)

Az áramsűrűség merőleges komponensének értékét a 7.46 egyenletből behelyettesítve kapjuk:

$$(\nabla_{\perp}B_{z1} - \mathrm{i}k_{z}\mathbf{B}_{\perp 1}) \times \hat{z} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{v_{A}^{2}}\mathbf{E}_{\perp 1} - \frac{\mu_{0}\nabla P_{1} \times \hat{z}}{B}.$$
 (7.52)

Átrendezés után:

$$\nabla_{\perp} \left(B_{z1} + \frac{\mu_0 P_1}{B} \right) \times \hat{z} - \mathrm{i}k_z \mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{v_A^2} \mathbf{E}_{\perp 1}.$$
 (7.53)

Ez utóbbi egyenletben bevezettük a $v_A^2 = B^2/(\mu_0 \rho)$ Alfvén-sebességet, aminek a jelentőségét később fogjuk látni (ρ a plazma tömegsűrűsége).

A 7.49 és a 7.53 egyenletek $\mathbf{E}_{\perp 1}$ -re és $\mathbf{B}_{\perp 1}$ -re vonatkozó csatolt egyenleteknek tekinthetők, amelyek a 7.49 egyenlet \hat{z} -pal való vektoriális szorzása után az alábbi formát nyerik (itt már $\mathbf{E}_{\perp 1}$ és $\mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z}$ a változóink):

$$i\omega \mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z} - ik_{z}\mathbf{E}_{\perp 1} = -\nabla_{\perp}E_{z1}$$
$$ik_{z}\mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z} - \frac{i\omega}{v_{A}^{2}}\mathbf{E}_{\perp 1} = \nabla_{\perp}\left(B_{z1} + \frac{\mu_{0}P_{1}}{B}\right) \times \hat{z}.$$
(7.54)

Ezt az egyenletrendszert algebrai átalakítások után megoldhatjuk $\mathbf{E}_{\perp 1}$ -re és $\mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z}$ -re:

$$\mathbf{E}_{\perp 1} = \frac{\mathrm{i}k_{z}\nabla_{\perp}E_{z1} + \mathrm{i}\omega\nabla_{\perp}(B_{z1} + \mu_{0}P_{1}/B) \times \hat{z}}{\omega^{2}/v_{A}^{2} - k_{z}^{2}}$$

$$\mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z} = \frac{\mathrm{i}(\omega/v_{A}^{2})\nabla_{\perp}E_{z1} + \mathrm{i}k_{z}\nabla_{\perp}(B_{z1} + \mu_{0}P_{1}/B) \times \hat{z}}{\omega^{2}/v_{A}^{2} - k_{z}^{2}}.$$
(7.55)

A merőleges komponensekre vonatkozó egyenletek után tekintsük a Faraday- és Ampère-törvények 7.48 és 7.50 átalakításával kapott, a párhuzamos komponensekre vonatkozó egyenleteit!

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_{\perp 1} \times \hat{z}) = \mathbf{i}\omega B_{z1}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z}) = \mu_0 J_{z1}$$
(7.56)

Behelyettesítve $\mathbf{E}_{\perp 1} \times \hat{z}$ és $\mathbf{B}_{\perp 1} \times \hat{z}$ fenti kifejezéseit, kapjuk:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathrm{i}k_z \nabla_\perp E_{z1} \times \hat{z} - \mathrm{i}\omega \nabla_\perp (B_{z1} + \mu_0 P_1/B)}{\omega^2 / v_A^2 - k_z^2}\right) = \mathrm{i}\omega B_{z1}$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathrm{i}(\omega/v_A^2) \nabla_\perp E_{z1} + \mathrm{i}k_z \nabla_\perp (B_{z1} + \mu_0 P_1/B) \times \hat{z}}{\omega^2 / v_A^2 - k_z^2}\right) = \mu_0 J_{z1}.$$
(7.57)

Mivel egy vektortér rotációjának divergenciája mindig nulla, ezért $\nabla \cdot (\nabla_{\perp} E_{z1} \times \hat{z}) = 0$ és $\nabla \cdot (\nabla_{\perp} (B_{z1} + \mu_0 P_{\perp 1}/B) \times \hat{z}) = 0$. Ezeket az összefüggéseket felhasználva a párhuzamos komponensekre vonatkozó egyenletek az alábbi alakokra egyszerűsödnek:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla_{\perp}(B_{z1} + \mu_0 P_1/B)}{\omega^2 / v_A^2 - k_z^2}\right) = -B_{z1}$$
(7.58)

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathrm{i}\omega\nabla_{\perp}E_{z1}}{\omega^2/v_A^2 - k_z^2}\right) = v_A^2\mu_0 J_{z1}.$$
(7.59)

A 7.58 és a 7.58 egyenletek megoldásához ismernünk kell még P_1 és J_{z1} kapcsolatát B_{z1} -el, illetve E_{z1} -el, de ezt már csak annak függvényében tudjuk megtenni, hogy kompressziós vagy nyírási hullámokat tárgyalunk.

Vegyük ugyanis a driftsebesség 7.44 alatti kifejezésének divergenciáját (a polarizációs járulékokat itt is elhanyagolhatjuk):

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\sigma 1} = \frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{B^2} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}\omega}{B} B_{z1}!$$
(7.60)

Látható, hogy nyírási hullámban ($\nabla \cdot \mathbf{u}_{\sigma 1} = 0$) $B_{z1} = 0$, kompressziós hullámban pedig B_{z1} véges, amihez véges $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\sigma 1}$ miatt véges P_1 nyomás-perturbáció tartozik.

7.2.1. Nyírási Alfvén-hullámok

Nyíróerők hiányában egy közönséges folyadékban nem terjedhetnek transzverzális hullámok. Mágnesezett plazmában azonban a mágneses tér

deformálásához, egészen pontosan a tér meggörbítéséhez szükséges erő éppen a "hiányzó" nyírási erőt eredményezi. Ennek megfelelően a nyírási Alfvén-hullámok olyan transzverzális hullámok, melyek a mágneses térrel párhuzamosan terjednek, és amikben a plazma a térre merőlegesen rezeg vagy elcsavarodik (mint egy húr transzverzális vagy torziós rezgései). A 7.2. ábra szemlélteti az alap Alfvén-módusokat (a nyírásit és a később bemutatandó kompressziósat). A könnyebb ábrázolhatóság kedvéért a perturbálatlan tér és a nyírási hullám terjedési iránya tisztán *z* irányú.



7.2. ábra. a) A perturbálatlan mágneses tér. b) A nyírási Alfvén-hullámok alapmódusa. c) A kompressziós Alfvén-hullámok alapmódusa.

A hullámok származtatásához tekintsük a kétfolyadékmozgásegyenlet párhuzamos komponensét!

$$n_{\sigma}m_{\sigma}\frac{\partial u_{\sigma z1}}{\partial t} = n_{\sigma}q_{\sigma}E_{z1} - \gamma_{\sigma}\kappa T_{\sigma}\frac{\partial n_{\sigma 1}}{\partial z}$$
(7.61)

Ebben az egyenletben $P_{\sigma 1} = \gamma_{\sigma} n_{\sigma} \kappa T_{\sigma}$ helyettesítéssel éltünk. Mivel a mágneses térrel párhuzamos mozgás egydimenziós, a 7.61 egyenletben $\gamma = 1$ ha izoterm, és $\gamma = 3$ ha adiabatikus a folyamat. Az izoterm eset az $\omega^2/k_z^2 \ll \kappa T_{\sigma}/m_{\sigma}$ esetnek felel meg, míg adiabatikus esetben a reláció fordított.

A $\nabla \cdot \mathbf{u}_{\sigma 1} = 0$ feltétel miatt a kontinuitási egyenlet:

$$\frac{\partial n_{\sigma 1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n_{\sigma} u_{\sigma z 1}) = 0.$$
(7.62)

A 7.61 egyenlet időderiváltját véve és a kontinuitási egyenletet behelyettesítve kapjuk:

$$\frac{\partial^2 u_{\sigma z1}}{\partial t^2} - \gamma_\sigma \frac{\kappa T_\sigma}{m_\sigma} \frac{\partial^2 u_{\sigma z1}}{\partial z^2} = \frac{q_\sigma}{m_\sigma} \frac{\partial E_{z1}}{\partial t}.$$
(7.63)

Ez nagyon hasonló a kompressziós elektrosztatikus hullámokat leíró 7.15 egyenlethez azzal a kivétellel, hogy most nem tettük fel, hogy E_{z1} *elektrosztatikus*. Feltéve, hogy mennyiségeink ~ $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$ alakúak, egyenletünk algebrai egyenletre vezet és megoldható a perturbált sebesség *z* irányú komponensére:

$$u_{\sigma z1} = \frac{\mathrm{i}\omega q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \frac{E_{z1}}{\omega^2 - \gamma_{\sigma} k_z^2 \kappa T_{\sigma}/m_{\sigma}},\tag{7.64}$$

amiből rögtön adódik az áramsűrűség párhuzamos komponense, melyre a 7.59 egyenlethez szükségünk van.

$$\mu_0 J_{z1} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} E_{z1} \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \gamma_{\sigma} k_z^2 \kappa T_{\sigma} / m_{\sigma}}$$
(7.65)

Behelyettesítve ezt a kifejezést a 7.59 egyenletbe, kapjuk a nyírási Alfvén-hullámokra vonatkozó differenciálegyenletet:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla_{\perp} E_{z1}}{\omega^2 / v_A^2 - k_z^2}\right) - \frac{v_A^2}{c^2} E_{z1} \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \gamma_{\sigma} k_z^2 \kappa T_{\sigma} / m_{\sigma}} = 0.$$
(7.66)

A $\nabla_{\perp} \rightarrow i \mathbf{k}_{\perp}$ behelyettesítést elvégezve kapjuk a diszperziós relációt:

$$\frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2 - \gamma_e k_z^2 \kappa T_e/m_e} + \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2 - \gamma_i k_z^2 \kappa T_i/m_i} = 0.$$
(7.67)

A nyírási Alfvén-hullámok három csoportba oszthatók aszerint, hogy az Alfvén-sebesség hogyan viszonyul az elektron, illetve ion termikus sebességekhez. A három csoport a következő: (1) $v_A^2 \gg v_{Te}^2, v_{Ti}^2$, (2) $v_{Te}^2 \gg v_A^2 \gg v_{Ti}^2$ és (3) $v_{Te}^2, v_{Ti}^2 \gg v_A^2$. A plazmabétával jellemezve a három csoportot a következő, ekvivalens felosztást kapjuk: (1) $\beta_e \ll m_e/m_i$, (2) $m_i\beta_e/m_e \gg 1 \gg \beta_i$ és (3) $\beta_i \gg 1$.

Vizsgáljuk meg részletesen is ezt a három csoportot!

1. Ebben a csoportban a 7.67 egyenletben a második tag dominál a harmadikhoz képest, és a diszperziós reláció ilyen:

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 v_A^2}{1 + k_\perp c^2 / \omega_{pe}^2}.$$

Ezeket a hullámokat *tehetetlenségi Alfvén-hullám*oknak hívjuk, amik hideg plazmahullámok, mert a diszperziós reláció független a plazma hőmérsékletétől. A c/ω_{pe} mennyiség az *elektron ütközésmentes skinmélység*.

2. Ebben a csoportban a 7.67 egyenlet így egyszerűsíthető:

$$\frac{k_{\perp}^2}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \frac{1}{k_z^2 \kappa T_e/m_e} + \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \frac{1}{\omega^2} = 0.$$

Mivel ebben az egyenletben ω^2 két különböző nevezőben fordul elő, az egyenlet omegában negyedrendű, azaz tulajdonképpen két különböző módust ír le. Tegyük fel, hogy a vizsgált módusra a hullám sebessége sokkal nagyobb az ion-akusztikus sebességnél, azaz $\omega^2/k_z^2 \gg \kappa T_e/m_i!$

Ekkor

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 \left(1 + \frac{k_\perp^2}{v_A^2} \frac{\kappa T_e}{m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} \right),$$

és a hullámot kinetikus Alfvén-hullámnak hívjuk. Bevezetve a

$$\rho_s^2 = \frac{1}{v_A^2} \frac{\kappa T_e}{m_e} \frac{c^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{\kappa T_e}{m_i \omega_{ci}^2}$$
(7.68)

fiktív ion Larmor-sugárt (az ionhőmérséklet helyett az elektronhőmérséklet szerepel a képletben), a diszperziós reláció igen egyszerű alakot ölt:

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 (1 + k_\perp^2 \rho_s^2). \label{eq:sigma_state}$$

 Ebben a csoportban a diszperziós reláció az előző csoportéhoz hasonlít

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 (1 + k_\perp^2 \rho_s^2),$$

de itt ρ_s^2 definíciója egy árnyalattal különbözik a korábbitól:

$$\rho_s^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \left(\frac{1}{\lambda_{De}^2} + \frac{1}{\lambda_{Di}^2} \right)^{-1} = \frac{\kappa T_e}{(1 + T_e/T_i)m_i\omega_{ci}^2}$$

7.2.2. Kompressziós Alfvén-hullámok

A kompressziós Alfvén-hullámokban $B_{z1} \neq 0$ és $E_{z1} = 0$, ami egyben azt is jelenti, hogy $J_{z1} = 0$. Ezek a hullámok a mágneses tér erővonalainak sűrűsödését-ritkulását eredményezik (7.2. ábra). A diszperziós relációból majd látni fogjuk, hogy ez a hullám nemcsak kizárólag az egyensúlyi mágneses tér irányára merőlegesen terjed, de ez a speciális k-módus ábrázolható a legkönnyebben (7.2 ábra).

A linearizált kontinuitási egyenlet a szokásos alakú:

$$\frac{\partial n_{\sigma 1}}{\partial t} + n_{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\sigma 1} = 0.$$
(7.69)

A 7.60 egyenletet felhasználva ez így írható:

$$\frac{\partial n_{\sigma 1}}{\partial t} - \frac{n_{\sigma}}{B} \frac{\partial B_{z1}}{\partial t} = 0, \qquad (7.70)$$

amit időben integrálunk:

$$\frac{n_{\sigma 1}}{n_{\sigma}} = \frac{B_{z1}}{B}.\tag{7.71}$$

A merőleges összenyomásra adiabaticitást feltételezve

$$\frac{P_1}{P} = \gamma \frac{n_{\sigma 1}}{n_{\sigma}}.\tag{7.72}$$

Ebből a kifejezésből P_1 értékét beírva a 7.58 egyenletbe kapjuk a kompressziós Alfvén-hullámok differenciálegyenletét:

$$\nabla_{\perp} \cdot \left(\frac{v_A^2 + c_s^2}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} \nabla_{\perp} B_{z1} \right) + B_{z1} = 0, \tag{7.73}$$

ahol

$$c_s^2 = \gamma \kappa \frac{T_e + T_i}{m_i}.\tag{7.74}$$

Ezen a helyen kell megjegyezni, hogy az irodalomban sokszor c_s fenti alakját hívják ionakusztikus sebességnek, és nem a 7.31 egyenlet alatt megadott alakot. Mi azonban csak 7.31-et hívjuk ionhangsebességnek, és a 7.74 mennyiségnek nem adunk külön nevet, bár a definíció kétségtelenül nagyon hasonlít a 7.31 alattira.

A $\nabla_{\perp} \rightarrow i\mathbf{k}_{\perp}$ behelyettesítéssel nyerjük ebben az esetben is a diszperziós relációt:

$$\frac{-k_{\perp}^2(v_A^2 + c_s^2)}{\omega^2 - k_z^2 v_A^2} + 1 = 0.$$
(7.75)

Vagy más formában, a $k^2 = k_z^2 + k_\perp^2$ triviális összevonást behelyettesítve

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 + k_\perp^2 c_s^2. \tag{7.76}$$

8. Hideg plazmahullámok taxonómiája

A 7.28, 7.34, 7.67 és 7.76 diszperziós relációkra pillantva azonnal látjuk, hogy az Alfvén-hullámok olyanok, hogy nulla hőmérsékletű, úgynevezett *hideg plazmá*ban is léteznek (a hullám fázissebessége $T \rightarrow 0$ esetén is véges), míg az elektronplazma-hullámok és az ionhanghullámok terjedéséhez véges hőmérséklet kell. A hideg plazma kifejezés ne zavarjon meg minket, nem *alacsony hőmérsékletű plazmá*ról van szó, aminek alacsony az ionizációs foka, hanem egy olyan, teljesen ionizált közegről, melynek a hőmérsékletét (és így a nyomását) elhanyagoljuk egyéb paramétereik (pl. a mágneses nyomás) mellett.

A 7.2 fejezet Alfvén-hullámai alacsony frekvenciájú, mágnesezett hullámok voltak, melyek származtatásánál a perturbált áramot drift közelítésben számítottuk ki. Ez – mint akkor láttuk – a hullám frekvenciájára vonatkozó $\omega \ll \omega_{ci}$ kikötésnek felelt meg.

A mostani, hideg plazmahullámokkal foglalkozó fejezetben tetszőleges frekvenciájú, de csak nulla hőmérsékletű plazmában terjedő hullámokat vizsgálunk. Látni fogjuk, hogy alacsony frekvenciák esetén a hullámok az Alfvén-módusokba mennek át, de általános esetben nagyon sokféle ága van a diszperziós relációnak.

Tekintsük a kétfolyadék-mozgásegyenletet nulla hőmérsékleten (P = 0) és *kis amplitúdójú*, gyengén inhomogén elektromos tér esetén! A driftáramlások tárgyalásánál látott módon (6. fejezet) most is feltesszük, hogy az elektromos tér inhomogenitásának L karakterisztikus távolságán az áramlás sebessége nem változik, azaz a konvektív deriváltban a térderiváltakat tartalmazó tagot elhagyjuk. A kis amplitúdójú elektromos tér feltételezése pedig ahhoz kell, hogy a keltett hullámok lineáris kapcsolatban legyenek a keltő tér intenzitásával. Az elektron- és ionkomponensek közötti súrlódástól eltekintünk.

A fenti közelítésekkel a kétfolyadék-mozgásegyenlet az alábbi alakú:

$$m_{\sigma}n_{\sigma}\frac{\partial \mathbf{u}_{\sigma}}{\partial t} = q_{\sigma}n_{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\sigma} \times \mathbf{B}).$$
(8.1)

Tegyük fel (ebben a jegyzetben immár sokadszorra), hogy a perturbáció olyan, hogy $\mathbf{u}_{\sigma} \sim e^{-i\omega t}$, azaz az időnek harmonikus függvénye. Ekkor a $\partial/\partial t$ időderivált $-i\omega$ -val való szorzással helyettesíthető. A továbbiakban a levezetés könnyebb követhetősége kedvéért az egyenletekben nem írjuk ki explicite az $e^{-i\omega t}$ függést, de feltételezzük azt. A mágneses térrel párhuzamos, illetve merőleges mozgásegyenletkomponensekre az alábbi alakokat kapjuk:

$$-\mathrm{i}\omega\mathbf{u}_{\sigma\parallel} = \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}}\mathbf{E}_{\parallel},\tag{8.2}$$

$$-\mathrm{i}\omega\mathbf{u}_{\sigma\perp} = \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}}\mathbf{E}_{\perp} + \omega_{c\sigma}(\mathbf{u}_{\perp} \times \hat{z}). \tag{8.3}$$

Itt $\omega_{c\sigma}$ a szokásos módon a σ típusú részecske ciklotronfrekvenciája és \hat{z} a mágneses tér irányába mutató egységvektor.

A 8.2 egyenlet azonnal rendezhető a párhuzamos sebességkomponensre:

$$\mathbf{u}_{\sigma\parallel} = \mathrm{i} \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}\omega} \mathbf{E}_{\parallel}. \tag{8.4}$$

A 8.3 egyenlet rendezése kis figyelmet kíván, mert a sebesség merőleges komponense nem feltétlenül (sőt, általában nem) párhuzamos az elektromos tér merőleges komponensével.

Bontsuk fel $u_{\sigma\perp}$ -t az elektromos tér merőleges komponensével párhuzamos (p indexű) és arra merőleges (m indexű) komponensekre, azaz legyen

$$\mathbf{u}_{\sigma\perp} = \mathbf{u}_{\sigma\perp p} + \mathbf{u}_{\sigma\perp m},$$

ahol

 $\mathbf{u}_{\sigma\perp m}\cdot\mathbf{E}_{\perp}=0!$

A felbontást a 8.3 egyenletbe beírva és rendezve:

$$0 = \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \mathbf{E}_{\perp} + \mathrm{i}\omega(\mathbf{u}_{\sigma\perp p} + \mathbf{u}_{\sigma\perp m}) + \omega_{c\sigma}[(\mathbf{u}_{\sigma\perp p} + \mathbf{u}_{\sigma\perp m}) \times \hat{z}].$$
(8.5)

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{u}_{\sigma\perp p}$, $\mathbf{u}_{\sigma\perp m}$ és \hat{z} vektorok páronként merőlegesek egymásra, azaz például $\hat{\mathbf{u}}_{\sigma\perp p}$ előállítható vagy $\hat{\mathbf{u}}_{\sigma\perp p} = \hat{\mathbf{u}}_{\sigma\perp m} \times \hat{z}$, vagy $\hat{\mathbf{u}}_{\sigma\perp p} = \hat{z} \times \hat{\mathbf{u}}_{\sigma\perp m}$ alakban. (A [^]-os vektorok az adott irányba mutató egységvektorok.)

Ekkor a 8.5 egyenlet két, a *p*- és *m*-komponensekre vonatkozó egyenletrendszerre esik szét, amelynek megoldásával megkapjuk a sebesség mágneses térre merőleges komponensét:

$$\mathbf{u}_{\sigma\perp} = -\mathrm{i}\frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}\omega(1-\omega_{c\sigma}^2/\omega^2)}\mathbf{E}_{\perp} + \frac{\omega_{c\sigma}}{\omega} \left[\frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}\omega(1-\omega_{c\sigma}^2/\omega^2)}\right]\hat{z} \times \mathbf{E}_{\perp}.$$
 (8.6)

Ezt a kifejezést a párhuzamos komponenssel (8.4 egyenlet) összevonva kapjuk a teljes sebességet:

$$\mathbf{u}_{\sigma} = \frac{\mathrm{i}q_{\sigma}}{m_{\sigma}\omega} \left[\mathbf{E}_{\parallel} + \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{1 - \omega_{c\sigma}^2/\omega^2} - \frac{\mathrm{i}\omega_{c\sigma}}{\omega} \frac{\hat{z} \times \mathbf{E}}{1 - \omega_{c\sigma}^2/\omega^2} \right].$$
(8.7)

Az elektromos áram, ami ebből a sebességből adódóan a plazmában megindul:

$$\mathbf{J} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma},$$

vagy behelyettesítve a sebességeket

$$\mathbf{J} = i\varepsilon_0 \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega} \left[\mathbf{E}_{\parallel} + \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{1 - \omega_{c\sigma}^2/\omega^2} - \frac{\mathrm{i}\omega_{c\sigma}}{\omega} \frac{\hat{z} \times \mathbf{E}}{1 - \omega_{c\sigma}^2/\omega^2} \right].$$
(8.8)

Az áram ezen kifejezését az Ampère-törvénybe írva:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} =$$
$$= \mu_0 \left(i\varepsilon_0 \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega} \left[\mathbf{E}_{\parallel} + \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{1 - \omega_{c\sigma}^2/\omega^2} - \frac{\mathrm{i}\omega_{c\sigma}}{\omega} \frac{\hat{z} \times \mathbf{E}}{1 - \omega_{c\sigma}^2/\omega^2} \right] - i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} \right).$$

Az egyenlet jobb oldalán új jelölést bevezetve igen egyszerű alakot kapunk:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \right), \tag{8.9}$$

ahol K az úgynevezett *dielektromos tenzor*. A tenzor mátrixa elemeinek segítségével a K \cdot E szorzat áttekinthető alakra hozható:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2} \left[\mathbf{E}_{\parallel} + \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{1 - \omega_{c\sigma}^2 / \omega^2} - \frac{\mathrm{i}\omega_{c\sigma}}{\omega} \frac{\hat{z} \times \mathbf{E}}{1 - \omega_{c\sigma}^2 / \omega^2} \right] = \\ = \begin{bmatrix} S & -\mathrm{i}D & 0\\ \mathrm{i}D & S & 0\\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \mathbf{E}. \quad (8.10)$$

Az S, D és P elemek definíciója rendre a következő:

$$S = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \omega_{c\sigma}^2}, \quad D = \sum_{\sigma} \frac{\omega_{c\sigma}}{\omega} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2 - \omega_{c\sigma}^2}, \quad P = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2}.$$
 (8.11)

Az *S* az angol *sum* (összeg), a *D* az angol *difference* (különbség), a *P* pedig az angol *parallel* (párhuzamos) szavakból származik. Az *S* és *D* jelölés értelmét később látni fogjuk, a *P* mátrixelem értelme már most is világos — az ugyanis nem más, mint a nemmágnesezett plazmák $P = 1 + \chi_i + \chi_e$ dielektromos függvénye (7.1.1 fejezet) hideg plazma közelítésben. A plazma viselkedésének párhuzamos dinamikáját ugyanis nem befolyásolja a mágneses tér.

K fenti definíciójával tehát a Maxwell-egyenletek, a Lorentz-egyenlet és a plazma áramait (áramlásait) leíró egyenletek az alábbi két, csatolt egyenletben összegezhetők:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \right)$$
(8.12)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$
(8.13)

A hideg plazmahullámok hullámegyenletét megkapjuk, ha vesszük a 8.13 egyenlet rotációját, majd ebbe behelyettesítjük a 8.12 egyenletet:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \right).$$
(8.14)

Az elektromos tér $\sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$ tér- és időfüggését feltételezve algebrai egyenlethez jutunk:

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \left(\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \right).$$
(8.15)

Célszerű bevezetnünk az $n = ck/\omega$ törésmutató-vektort, ami lényegében a hullámvektor átskálázása úgy, hogy a törésmutató abszolút értéke egységnyi legyen a fényhullámokra. A törésmutató felhasználásával a 8.15 egyenlet így írható:

$$\mathbf{nn} \cdot \mathbf{E} - n^2 \mathbf{E} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad (8.16)$$

ami nem más, mint egy homogén egyenletrendszer az elektromos tér három komponensére. Az $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$ törésmutató-vektor a már ismert módon felbontható a mágneses térrel párhuzamos és merőleges komponensekre (természetesen most is a *z* tengely mutat az egyensúlyi mágneses tér irányába). A *z* tengely megválasztásán túl, az általánosság megszorítása nélkül vegyük fel lokális Descartes-koordinátarendszerünket úgy, hogy az *x*-tengely mutasson **n** merőleges komponensének irányába, azaz

legyen $n_y = 0$. Ezt csak térben homogén egyensúly esetén tehetjük meg, de plazmánk most homogén egyensúlyi állapottal rendelkezik.

A 8.16 egyenletet írjuk mátrix alakba!

$$\begin{bmatrix} S - n_z^2 & -\mathrm{i}D & n_x n_z \\ \mathrm{i}D & S - n^2 & 0 \\ n_x n_z & 0 & P - n_x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$
(8.17)

A könnyebb tárgyalás érdekében vezessünk be gömbi koordinátákat a k-térben (vagy ekvivalens módon az n-térben) úgy, hogy \hat{z} legyen a koordinátarendszer tengelye, θ pedig a polárszög. Ezekkel az új koordinátákkal

$$n_x = n\sin\theta, \quad n_z = n\cos\theta, \quad n^2 = n_x^2 + n_z^2,$$
 (8.18)

és

$$\begin{bmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$
(8.19)

A 8.19 homogén egyenletrendszernek akkor van a triviálistól eltérő megoldása, ha az elektromos tér komponenseinek együtthatóiból képzett mátrix determinánsa nulla, azaz

$$\begin{vmatrix} S - n^2 \cos^2 \theta & -iD & n^2 \sin \theta \cos \theta \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & P - n^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0$$
(8.20)

A 8.20 egyenlet megoldásai megadják a plazmában terjedő hullámmódusokat és az $\omega(\mathbf{k})$ (vagy ezzel ekvivalens módon az $\omega(\mathbf{n})$) összefüggést, azaz a diszperziós relációt.

Mielőtt a meglehetősen bonyolult, legáltalánosabb helyzetet, a tetszőleges ω frekvenciájú hullám teszőleges θ irányú terjedését megvizsgálnánk, nézzünk meg három egyszerűbben kezelhető esetet.

Két esetben a terjedés irányára (az egyensúlyi térrel párhuzamos és merőleges terjedést vizsgáljuk), a harmadikban pedig az ω frekvenciára (alacsony frekvenciákra szorítkozunk) teszünk megszorítást. A térrel párhuzamos, $\theta = 0$, azaz k || B₀ és a térre merőleges, $\theta = \pi/2$, azaz k \perp B₀ esetek azért egyszerűek, mert a 8.20 mátrix nemdiagonális elemei közül kettő eltűnik, és a 8.20 alatti determináns kiszámítása igen könnyű.

8.1. Terjedés a mágneses térrel párhuzamosan ($\theta = 0$)

A 8.19 egyenlet ebben az esetben így írható:

$$\begin{bmatrix} S - n^2 & -iD & 0\\ iD & S - n^2 & 0\\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x\\ E_y\\ E_z \end{bmatrix} = 0.$$
(8.21)

Ennek az egyenletrendszernek a determinánsa

$$\left[(S - n^2)^2 - D^2 \right] P = 0, \tag{8.22}$$

aminek két gyöke van.

$$P = 0 \tag{8.23}$$

és

$$n^2 - S = \pm D.$$
 (8.24)

A 8.24 egyenlet

$$n^2 = R, \quad n^2 = L$$
 (8.25)

alakban is írható, ahol

$$R = S + D, \quad L = S - D.$$
 (8.26)

Az R az angol *right* (jobb) szóra, az L pedig az angol *left* (bal) szóra utal. Ezek után a korábban bevezetett S (*sum*) és D (*difference*) betűk már értelmet nyernek, mivel

$$S = \frac{R+L}{2}, \quad D = \frac{R-L}{2}.$$

A 8.24 egyenlet szerint a mágneses térrel párhuzamos hullámterjedésnek két alapmódusa van,¹⁰ mégpedig (beírva S és D korábbi definícióit):

$$R = n^2 = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega(\omega + \omega_{c\sigma})}, \text{ és } \quad L = n^2 = 1 - \sum_{\sigma} \frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega(\omega - \omega_{c\sigma})}.$$
 (8.27)

A törésmutató az *R*-módus esetében $\omega = -\omega_{c\sigma}$ -nál, míg az *L*-módus esetében $\omega = +\omega_{c\sigma}$ -nál divergál. Mivel $\omega_{c\sigma} = q_{\sigma}B/m_{\sigma}$, következésképpen az ionciklotron-frekvencia pozitív, az elektronciklotron-frekvencia pedig

 $^{{}^{10}}$ A P = 0 módus most számunkra teljesen érdektelen, mert az – mint korábban említettük – semmiben nem különbözik a nemmágnesezett plazmahullámoktól.

negatív számmal adható meg. Ebből következően az *R*-módus törésmutatója az elektronciklotron-frekvenciánál, az *L*-módus törésmutatója pedig az ionciklotron-frekvenciánál divergál.

 $\omega \to \infty$ (nagy frekvenciák) esetén $R, L \to 1, \omega \to 0$ (alacsony frekvenciák) esetén pedig fel kell használnunk, hogy

$$\frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega_{c\sigma}} = \frac{n_{\sigma}q_{\sigma}^2}{\varepsilon_0 m_{\sigma}} \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma}B} = \frac{n_{\sigma}q_{\sigma}}{\varepsilon_0 B},$$
(8.28)

azaz

$$\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}}$$

Ezzel az $\omega \rightarrow 0$ esetre

$$\lim_{\omega \to 0} R, L = 1 - \frac{1}{\omega} \left[\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega \pm \omega_{ci})} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega \pm \omega_{ce})} \right] =$$

$$= 1 - \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2}{\omega_{ci}\omega_{ce}} \simeq$$

$$\simeq 1 - \frac{n_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \frac{m_i}{q_i B} \frac{m_e}{q_e B} =$$

$$= 1 + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} =$$

$$= 1 + \frac{c^2}{v_A^2}.$$
(8.29)

Itt v_A a már korábban megismert Alfvén-sebesség, vagyis alacsony frekvenciákon ezek a módusok az Alfvén-módusokkal vannak kapcsolatban, mivel hasonlóak a diszperziós relációik. A 8.1. ábra mutatja a törésmutató négyzetének frekvenciafüggését az $n^2 = R$, L hullámokra.

Miután meghatároztuk a 8.21 egyenlet együtthatómátrixának sajátértékeit, számítsuk ki a sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat is. Az $n^2 = R$ sajátértéket a 8.21 egyenletbe visszahelyettesítve az

$$\begin{bmatrix} -D & -\mathrm{i}D & 0\\ \mathrm{i}D & -D & 0\\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x\\ E_y\\ E_z \end{bmatrix} = 0$$
(8.30)

egyenletet kapjuk, amiből a sajátvektorokra

$$\frac{E_x}{E_y} = -i \tag{8.31}$$



8.1. ábra. Az R-, illetve L-módusok törésmutatójának frekvenciafüggése

adódik. Ezt felhasználva láthatjuk, hogy például az $n = +\sqrt{R}$ érték esetében az elektromos tér a \hat{z} -ra merőleges síkban a következő alakú:

$$\mathbf{E}_{\perp} = \Re\{E_{\perp}(\hat{x} + \mathrm{i}\hat{y})\exp(\mathrm{i}k_{z}z - \mathrm{i}\omega t)\} = \\ = |E_{\perp}|\{\hat{x}\cos(k_{z}z - \omega t + \delta) - \hat{y}\sin(k_{z}z - \omega t + \delta)\},$$
(8.32)

ahol $E_{\perp} = |E_{\perp}| e^{i\delta}$. Ez az elektromos tér egy *jobbra cirkulárisan polarizált*, a *z* tengely irányába terjedő hullámnak felel meg. Az $n^2 = L$ sajátérték pedig egy *balra cirkulárisan polarizált* hullámot ír le, aminek megfelelően az R(=right) és L(=left) jelölések értelme világos lett. Lineárisan polarizált hullám az *R* és *L* hullámok megfelelő összegéből állítható elő.

Összefoglalva: a mágneses térrel párhuzamos hullámterjedés esetén két sajátmódus létezik – mégpedig egy jobbra és egy balra cirkulárisan polarizált. A jobbra polarizált hullámnak a törésmutatója végtelenhez tart az elektronciklotron-frekvenciánál, míg a balra polarizált hullámnál ugyanez az ionciklotron-frekvenciánál történik. Alacsony frekvenciákon ezek a módusok az Alfvén-hullámoknak felelnek meg $n_z^2 = 1 + c^2/v_A^2$ diszperziós relációval (mivel $k_x = k_y = 0$). A 7.2 fejezetben azonban az Alfvénhullámok diszperziós relációja kicsit másként nézett ki. Felmerül a kérdés, hogy a korábbi fejezetben miért nem szerepel az '1'-es a diszperziós relációban? Ennek az az oka, hogy akkor elhanyagoltuk az eltolási áramot, amit most nem hanyagoltunk el. Az eltolási árammal kapcsolatos tag most azt mutatja meg, hogy ha a plazma sűrűsége olyan alacsony (vagy a mágneses tér olyan nagy), hogy az Alfvén-sebesség meghaladja a fénysebességet, akkor az Alfvén-módusok közel fénysebességgel haladó közönséges vákuumbeli elektromágneses hullámoknak felelnek meg.

8.2. Levágások és rezonanciák

A törésmutató a 8.1. ábrán szemléltetett kvalitatív viselkedése, azaz hogy léteznek olyan frekvenciák, amelyekre $n^2 \rightarrow \infty$, és olyanok, amikre $n^2 = 0$, nem kizárólag az ott mutatott R- és L-módusokat jellemzi, hanem általában is, minden módus esetében tipikus. Azt a frekvenciát, amelyen a törésmutató négyzete végtelenhez tart, *rezonanciafrekvenciá*nak hívjuk, azt pedig, ahol a töresmutató nulla, *levágási frekvenciá*nak. A levágási frekvencián a törésmutató tisztán valós értékről tisztán képzetesre vált. Tekintve, hogy a hullám fázisának térbeli változását $\sim \exp(i\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})$ alakban vettük fel, a képzetes törésmutató lecsengő amplitúdójú hullámot, a divergáló törésmutató pedig nulla fázissebességel terjedő hullámot ad. Ha a hullám terjedésének iránya mentén a plazmaparaméterek változnak, a hullám különböző törésmutató divergál, a hullám elnyelődik, egy olyan réteget, ahol a törésmutató képzetessé válik, a hullám visszaverődik.

8.3. Terjedés a mágneses térre merőlegesen ($\theta = \pi/2$)

Ha $\theta = \pi/2$, a 8.20 egyenlet ilyen alakot vesz fel

$$\begin{bmatrix} S & -iD & 0\\ iD & S - n^2 & 0\\ 0 & 0 & P - n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x\\ E_y\\ E_z \end{bmatrix} = 0,$$
 (8.33)

ami ismét két, különálló hullámmódust definiál.

Az első módusnál a sajátvektor olyan, hogy a három elektromos térkomponens közül csak $E_z \neq 0$, és az ennek a módusnak megfelelő sajátértékegyenlet $P - n^2 = 0$, vagy

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \sum_{\sigma} \omega_{p\sigma}^2, \tag{8.34}$$

ami pont egy nemmágnesezett plazmában terjedő elektromágneses hullámot ír le (7.1.2. fejezet). Ez a módus összhangban van azzal az elvárással, hogy a mágneses térrel párhuzamos plazmamozgásokra a mágneses térnek nincs hatása.¹¹ Ezt a módust *ordinárius* hullámnak hívjuk pont amiatt, hogy viselkedését a mágneses tér nem befolyásolja.

A második módusnál sem E_x , sem E_y nem zérus (E_z viszont igen) és a sajátérték-egyenlet $S(S - n^2) - D^2 = 0$ alakú, aminek a következő diszperziós reláció felel meg:

$$n^{2} = \frac{S^{2} - D^{2}}{S} = 2\frac{RL}{R+L}.$$
(8.35)

Ennek a hullámnak mind R = 0-nál, mind L = 0-nál levágása, rezonanciája pedig S = 0-nál van. Mivel ez a módus függ a mágneses tértől, *extraordinárius* hullámnak hívjuk. Az S = 0 rezonancia hibrid rezonancia, mert frekvenciája mind $\omega_{c\sigma}^2$ -től, mind $\omega_{p\sigma}^2$ -től függ. Mivel S négyzetesen függ a frekvenciától, az S = 0 egyenletnek két különálló gyöke van, amit az egyenlet explicit kiírásával határozhatunk meg.

$$S = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} = 0$$
(8.36)

Mivel $\omega_{ce} \gg \omega_{ci}$, az egyik (a nagyobbik, $\omega \gg \omega_{ce}$) gyök jó közelítéssel

$$\omega_{fh}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2, \tag{8.37}$$

míg a másik, a kisebbik gyök ($\omega \ll \omega_{ce}$)

$$\omega_{ah}^{2} = \omega_{ci}^{2} + \frac{\omega_{pi}^{2}}{1 + \frac{\omega_{pe}^{2}}{\omega_{ca}^{2}}}.$$
(8.38)

A nagyobbik gyök az úgynevezett *felsőhibrid frekvencia*, a kisebbik gyök pedig az *alsóhibrid frekvencia*.

8.4. Alacsony frekvenciájú hullámok tetszőleges irányú terjedése

Nagyon alacsony, $\omega \ll \omega_{ci}$ frekvenciákon

$$S \simeq R \simeq L \simeq 1 + c^2 / v_A^2$$
$$D \simeq 0, \tag{8.39}$$

 $^{^{11}}E_x=E_y=0,$ de $E_z\neq 0$ miatt a plazma részecskéi az egyensúlyi mágneses tér mentén oszcillálnak.

azaz a diszperziós relációt meghatározó egyenlet

$$\begin{bmatrix} S - n_z^2 & 0 & n_x n_z \\ 0 & S - n^2 & 0 \\ n_x n_z & 0 & P - n_x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$
(8.40)

alakra egyszerűsödik. Mivel D = 0, az egyenlet determinánsa két különálló módust határoz meg. Az egyikre

$$(S - n^2)E_y = 0, (8.41)$$

míg a másikra

$$\begin{bmatrix} S - n_z^2 & n_x n_z \\ n_x n_z & P - n_x^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_x \\ E_z \end{bmatrix} = 0.$$
(8.42)

Az első egyenlet

$$n^2 = S \tag{8.43}$$

diszperziós relációra vezet $E_y \neq 0$ sajátvektorral. Ez a "klasszikus" kompressziós Alfvén-módus, mert az eltolási áram elhanyagolása esetén a 8.43 egyenlet a már korábban megismert $\omega^2 = k^2 v_A^2$ alakra vezet. A második módusban mind E_x , mind E_y véges és a diszperziós reláció

$$n_x^2 = \frac{P}{S}(S - n_z^2)$$
(8.44)

alakú. Ezek pont a tehetetlenségi Alfvén-hullámok $\omega^2 = k_z^2 v_A^2/(1 + k_x^2 c^2/\omega_{pe}^2)$ diszperzióval az eltolási áram elhanyagolása esetén.

8.5. Terjedés tetszőleges irány és frekvencia esetén

Az előzőekben megvizsgált egyszerűbb esetek, az alacsony frekvenciájú Alfvén-módusok, valamint a módusok a $\theta = 0$ -nál, illetve $\theta = \pi/2$ -nél mutatott terjedése rávilágított a hideg plazmahullámok viselkedésének legalapvetőbb tulajdonságaira, így legfőképp a rezonancia- és a levágási frekvenciák létére. Most vizsgáljuk meg a 8.20 egyenlet determinánsát tetszőleges ω és θ esetén! Kis számolás után a determináns ilyen alakba írható:

$$An^4 - Bn^2 + C = 0, (8.45)$$

ahol

$$A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta$$
$$B = (S^2 - D^2) \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta)$$
$$C = P(S^2 - D^2) = PRL.$$
(8.46)

A 8.45 egyenlet négyzetes a törésmutatóban, aminek két gyöke van:

$$n^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$
(8.47)

Látjuk tehát, hogy a korábban vizsgált egyszerű esetekkel összhangban a hideg plazmahullámok diszperziós relációja mindig két külön módust határoz meg. Kimutatható, hogy valós θ szögek esetén a $B^2 - 4AC$ mennyiség pozitív definit, mivel

$$B^{2} - 4AC = (S^{2} - D^{2} - SP)^{2} \sin^{4}\theta + 4P^{2}D^{2} \cos^{2}\theta.$$
 (8.48)

Ebből az következik, hogy *n* vagy tisztán valós (ez haladó hullámoknak felel meg), vagy tisztán képzetes (ez felel meg a kihaló vagy lecsengő módusoknak). A 8.45 és a 8.46 egyenletekből következik, hogy levágás C = 0-nál van, amikor vagy P = 0, vagy R = 0, vagy L = 0. Rezonanciánál $A \rightarrow 0$, amikor

$$S\sin^2\theta + P\cos^2\theta \simeq 0. \tag{8.49}$$

8.5.1. A hullámnormális felületek

A diszperziós reláció által leírt hullámviselkedést kvalitatíven megjeleníthetjük az úgynevezett *hullámnormális felület*tel, ami nem más, mint egy polárkoordináta-rendszerben ábrázolt görbe,¹² ahol a pontok origótól mért távolsága a hullám fénysebességgel normált fázissebessége, a polárszög pedig a terjedés iránya. Mivel $n = ck/\omega$, a hullámnormális felület nem más, mint egyszerűen $1/n(\theta)$ ábrázolása θ függvényében. A legegyszerűbb ilyen felületet a vákuumban terjedő fény esetében kapjuk, melynek egyenlete

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2\right) \mathbf{E} = 0, \qquad (8.50)$$

és diszperziós relációja

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\omega^2}{k^2 c^2} = 1. \tag{8.51}$$

A vákuumban terjedő fény hullámnormális felülete tehát egy egységnyi sugarú gömb. Általános esetben a felület persze bonyolultabb alakú,

¹² Általában nem görbe, hanem felület, de mivel plazmánk homogén az x - y síkban, a hullámnormális felületet tökéletesen jellemzi a felület egy olyan síkmetszete, amely tartalmazza a z tengelyt. A hullámnormális felület homogén plazma esetén a hullámnormális görbe z tengely körüli megforgatásával kapható meg.

mert a törésmutató függ a terjedés irányától. Az biztos azonban, hogy a felület sugara rezonanciánál végtelenhez, levágásnál pedig nullához tart (mivel $1/n \rightarrow 0$ rezonanciánál, és $1/n \rightarrow \infty$ levágásnál).

8.5.2. A CMA-diagram

A 8.47 egyenlet a módusok nagy gazdagságát leírja, de csekély gyakorlati haszna van, mert a törésmutató nagyon sok paraméter nagyon bonyolult függvénye. A CMA-diagram (Clemmow–Mullaly–Allis) elegáns módon mutatja be és rendszerezi a kvalitatíve igen különböző hullámmódusokat.

Elvben a 8.47 egyenlet szerint a törésmutató hat paraméter, egészen pontosan $\theta, \omega, \omega_{pe}, \omega_{pi}, \omega_{ce}$ és ω_{ci} függvénye. Azonban nem mind a hat paraméter független, mert $\omega_{pe}^2/\omega_{pi}^2 = m_i/m_e$ és $\omega_{ce}^2/\omega_{ci}^2 = (m_i/m_e)^2$ egyszeresen töltött ionokra. Rögzített iontöltés esetén tehát a törésmutató nagysága csak a terjedés irányától (θ) és a plazmasűrűségtől (ω_{pe}), valamint a mágneses tér nagyságától függ (ω_{ce}). Kézenfekvő minden frekvenciát a hullám frekvenciájával normálni, mert az S, D és P kifejezéseiben úgyis a normalizált frekvenciák fordulnak elő. Azaz n^2 ténylegesen $\theta, \omega_{pe}^2/\omega$ és ω_{ce}^2/ω függvénye, tehát rögzített frekvenciáknál kizárólag a terjedési iránytól függ. Ha tehát az $n = n(\theta)$ függés megvan, azt ábrázolhatjuk egy hullámnormális felületen.

A CMA-diagramon a függőleges tengelyen az $\ln(\omega_{pe}^2/\omega^2 + \omega_{pi}^2/\omega^2)$ mennyiséget, a vizszintes tengelyen pedig az $\ln(\omega_{ce}^2/\omega^2)$ mennyiséget ábrázoljuk. Ekkor a sík minden pontja kölcsönösen egyértelműen meghatározza a plazma elektronsűrűségét és a mágneses teret. Tulajdonképpen a sík minden pontjához hozzátartozik egy-egy hullámnormális felület, és CMA-diagramunkon ezekből akár többet is tudnánk ábrázolni, de ekkor a diagram nagyon zsúfolt lenne.

Szerencsére azonban nincs szükség nagyszámú hullámnormális felület ábrázolására, mert a felületek topológiája csak bizonyos határvonalak átlépésekor változik meg, ezért egy-egy adott tartományon belül változik ugyan a felület alakja, de topológiája nem. A 8.2. ábra mutatja be a CMAdiagram ezen tartományait a hozzájuk tartozó tipikus hullámnormális felületek alakjaival.

A tartományok határait a következő vonalak határozzák meg:

1. Az alapvető rezonanciák – ezek azok a vonalak, amelyek mentén $\theta = 0$ vagy $\theta = \pi/2$ esetén n^2 -nek rezonanciája van, azaz $R = \infty$



8.2. ábra. A CMA-diagram

(elektronciklotron-rezonancia), $L = \infty$ (ionciklotron-rezonancia) és S = 0 (alsó- és felsőhibrid rezonanciák).

2. A levágások – R = 0, L = 0 és P = 0.

Az egyes, levágások és rezonanciák által határolt tartományokon belül a hullámnormális felületek a 8.3. ábrán bemutatott alakokat vehetik fel.

Igazolható, hogy csak három alapvető felülettípus van, mégpedig az (a) – ellipszoid, a (b) – függőleges súlyzó és a (c) – vízszintes súlyzó. A 8.3. ábra (d) és (e) rajza mutatja a megengedett felületkombinációkat: látható, hogy súlyzó ellipszoiddal kombinálható, de súlyzó súlyzóval nem. Ezen a ponton érdemes visszaemlékezni arra, hogy – mint már korábban is megállapítottuk – eredeti feltevésünk szerint a hideg plazmahullámok terjedése azonos az x és y tengely mentén, tehát a hullámnormális felületek valójában a z tengely körül szimmetrikus forgástestek, amiknek csak a metszeteit ábrázoljuk.

Hogyan használjuk ezek után a CMA-diagramot? Tegyük fel, hogy adott sűrűségű plazmánk van adott mágneses térben. Mivel a diagram



8.3. ábra. A hullámnormális felületek típusai és megengedett kombinációi

koordinátái az $\ln(\omega_{pe}^2/\omega^2 + \omega_{pi}^2/\omega^2)$ és az $\ln(\omega_{ce}^2/\omega^2)$ mennyiségek, a szóba jöhető, lehetséges hullámterjedési frekvenciák egy 45°-os egyenes mentén helyezkednek el, melynek helyzete a síkon a plazmasűrűség és a mágneses tér függvénye. A nagy frekvenciák a bal alsó tartományban, a kicsik a jobb felsőben vannak. A megengedett módusok e mentén az egyenes mentén fekszenek, tehát csak azok a módusok megengedettek, amiknek a tartományain belül ez az egyenes áthalad. Így meg tudjuk pontosan mondani, hogy adott plazmában adott frekvencia esetén melyik hullámmódus alakul ki.

9. Plazmahullámok inhomogén közegben – a drifthullámok

Csak a tankönyvekben homogén minden közeg. A valóságban az egyensúlyi mennyiségek legtöbbször a térnek valamiféle nemtriviális függvényei, ez az inhomogenitás pedig jelentősen módosítja vagy módosíthatja a hullámok terjedését.

Most tekintsünk egy viszonylag egyszerű plazmakonfigurációt, melyben az egyensúlyi mágneses tér homogén, de a plazma sűrűségének van gradiense, mégpedig a mágneses térre merőlegesen. Ebben a konfigurációban az elektrosztatikus plazmahullámok egy sajátos osztálya, az úgynevezett *drifthullám*ok is megjelennek a már korábban megismert hullámfajták mellett.

Az általánosság megszorítása nélkül vegyük fel Descarteskoordinátarendszerünket úgy, hogy az egyensúlyi mágneses tér mutasson a z tengely, a sűrűséginhomogenitás pedig az x tengely irányába (9.1. ábra).



9.1. ábra. A drifthullámok

Tegyük fel, hogy az x irányú sűrűségeloszlás exponenciálisan függ a helytől (a konkrét függvényalak csak a megértést egyszerűsíti, más jelentősége nincs)!

$$n \sim \exp(-x/L),\tag{9.1}$$

ahol *L* a sűrűséggradiens skálahossza. Tekintsünk ebben a rendszerben egy *y* és *z* irányú harmonikus, nagyon kis frekvenciájú ($\omega \ll \omega_{ci}$), elektro-
sztatikus perturbációt, azaz legyen a perturbált potenciál

$$\phi_1 \sim \exp(\mathrm{i}k_y y + \mathrm{i}k_z z - \mathrm{i}\omega t) \tag{9.2}$$

alakú! Feltesszük továbbá, hogy a *z* irányú fázissebesség az ion és az elektron termikus sebesség közé esik ($v_{Ti} \ll \omega/k_z \ll v_{Te}$), azaz az ionok adiabatikusan, az elektronok pedig izoterm módon viselkednek. Figyeljük meg, hogy ez ugyanaz a paramétertartomány, amiben az ionakusztikus hullámokat származtattuk! Legyen továbbá a perturbáció mind mágneses térrel párhuzamos, mind arra merőleges hullámhossza jóval nagyobb a Debye-hossznál, amikor is a plazmát gyakorlatilag elektromosan semlegesnek tekinthetjük és $n_e \simeq n_i$.¹³

Mivel $\omega/k_z \ll v_{Te}$, az elektronok mozgásegyenletének párhuzamos komponense

$$0 \simeq -q_e \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{n_e} \frac{\partial}{\partial z} (n_e \kappa T_e)$$
(9.3)

alakban közelíthető. Ez az egyenlet az elektronsűrűségre Boltzmanneloszlást eredményez.

$$n_e = n_{e0} \exp(-q_e \phi_1 / \kappa T_e), \qquad (9.4)$$

amit kis ϕ_1 perturbáció esetén kifejthetünk és elsőrendben a perturbált elektronsűrűségre a

$$n_{e1} = -n_{e0} \frac{q_e \phi_1}{\kappa T_e}$$
(9.5)

kifejezést kapjuk.

Az ionokra az $\omega/k_z \gg v_{Ti}$ feltételt tettük, aminek megfelelően az ionok esetében a hőmérsékletet tartalmazó tag elhanyagolható a mozgásegyenletben. Sőt, mivel $\omega \ll \omega_{ci}$, elsőrendben a mozgásegyenletben a teljes időderivált is elhagyható, ami az ionok merőleges mozgására az E x Bdriftet eredményezi:

$$\mathbf{u}_{i1} = \frac{-\nabla\phi_1 \times \mathbf{B}}{B^2} = -\frac{\mathrm{i}k_y\phi_1}{B}\hat{x}.$$
(9.6)

¹³Itt kis ellentmondás van aközött, hogy $n_e \simeq n_i$, de mégis van elektrosztatikus tér, ami $\nabla \cdot \mathbf{E} = q/\varepsilon_0(n_i - n_e)$ szerint véges különbséget követelne meg az elektron- és ionsűrűség között. Az ellentmondás feloldása abban rejlik, hogy természetesen egzaktul $n_e \neq n_i$ -vel, de a Debye-hossznál nagyobb távolságokon *jó közelítéssel* igen. A "pontos" számításokhoz elvileg mindig a Poisson-egyenletet kellene használnunk, de használhatjuk a $n_e \simeq n_i$ feltételt is. Ez utóbbi kikötés használata (nem lehet elégszer hagsúlyozni) a Debye-hossznál nagyobb távolságokon az úgynevezett *plazma közelítés*.

Az ionok sűrűségperturbációját a linearizált kontinuitási egyenletből kaphatjuk meg:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + \mathbf{u}_{i1} \cdot \nabla n_{i0} + n_{i0} \nabla \cdot \mathbf{u}_{i1} = 0.$$
(9.7)

Észrevéve, hogy $\nabla \cdot \mathbf{u}_{i1} = 0$ (a 9.6 egyenlet segítségével könnyen ellenőrizhető), a perturbált ionsűrűség azonnal adódik:

$$n_{i1} = -n_{i0} \frac{k_y \phi_1}{\omega LB}.\tag{9.8}$$

A kvázineutralitás miatt (plazmaközelítés) az elektron- és ionsűrűség perturbációkat egyenlővé téve kapjuk a drifthullámok diszperziós relációját:

$$\omega = -\frac{k_y \kappa T_e}{q_e LB} = k_y u_{de},\tag{9.9}$$

ahol $u_{de} = -\kappa T_e/q_e LB$. Ennek a kifejezésnek az ad mélyebb értelmet, hogy egyensúlyban – a 6. fejezetben megismertek alapján – az elektronok véges sűrűséggradiens mellett a mágneses térre merőlegesen diamágneses driftsebességgel mozgást végeznek, a 9.9 kifejezésben pedig u_{de} nem más, mint éppen ez a diamágneses sebesség.¹⁴ A diszperziós relációnak ez a speciális alakja indokolja a drifthullám elnevezést.

A drifthullámban tehát a mágneses térrel párhuzamosan izoterm mozgást végző elektronok Boltzmann-eloszlása árnyékolja le az elektronok mozgása által okozott E x B-drifttel az x tengely mentén ide-oda mozgó ionokat. Ennek a kétféle mozgásnak a kölcsönhatásából ered az y irányban terjedő drifthullám.

A 9.9 diszperziós reláció érdekessége, hogy az sem az elektron-, sem az iontömegtől nem függ. Ez amiatt van, hogy sem az elektronok Boltzmann-eloszlása, sem az ionok E x B-driftsebessége nem függ egyik tömegtől sem.

¹⁴Megjegyzendő, hogy mostani egyszerű plazmamodellünkben az ionok hőmérsékletét elhanyagoltuk, tehát az ő esetükben nincs egyensúlyi diamágneses mozgás. Ezért is nem szerepel a 9.7 egyenletben \mathbf{u}_{i0} .

10. MHD-egyensúly

Eddig a pontig a jegyzetben minden irányban végtelen kiterjedésű plazmákat vizsgáltunk és adottnak vettük, hogy létezik valamiféle stabil egyensúlyi állapot, melyben a plazmánk – perturbáció hiányában – tetszőleges időt eltölthet. Most nézzük meg azt, hogy az MHD-elmélet keretén belül milyen feltételei vannak annak, hogy a plazma egyensúlyban legyen. Nyilvánvalóan a plazmaparaméterek csak valamiféle speciális kombinációja esetén lesz egyensúly, és nem is feltétlenül stabil. Az egyensúlyi állapot stabilitásának kérdését a rákövetkező fejezetben tárgyaljuk majd.

Tekintsük az MHD-mozgásegyenletet!

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}\right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P \tag{10.1}$$

Egyensúlyban az időderivált eltűnik, azaz az alábbi egyszerűbb egyenletre jutunk:

$$\rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P. \tag{10.2}$$

Ha az egyensúly olyan, hogy a plazmában nincsenek makroszkópikus (MHD) áramlások, azaz U = 0, *statikus* egyensúlyról beszélünk, egyéb esetekben az egyensúly *dinamikus*. Ebben a bevezető jegyzetben csak a statikus egyensúlyt vizsgáljuk, mivel az lényegesen egyszerűbben tárgyalható a dinamikusnál.

Adott tehát a

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P \tag{10.3}$$

egyenlet, amelynek keressük a megoldásait.

Az egyenletre pillantva rögtön látszik, hogy a jobb oldal rotációja nulla (gradiens rotációja mindig az), de a bal oldalé nem feltétlenül. Ebből következően nem létezik minden tetszőleges $P(\mathbf{x})$ -hez olyan árameloszlás $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ (és ennek megfelelően $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ mágneses tér) úgy, hogy a 10.3 egyenlet igaz legyen. Ennek fordítottja is igaz, azaz nem minden tetszőleges $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ árameloszláshoz létezik egyensúlyi $P(\mathbf{x})$ nyomás.

10.1. A mágneses erő

Felhasználva a $\nabla B^2/2 = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{B}$ vektorazonosságot és Ampère törvényét, 10.3 bal oldala így írható:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[-\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left[\frac{B^2}{2} \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B} \right], \qquad (10.4)$$

ahol I az egységtenzor és felhasználtuk a

$$\nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$$

összefüggést. Definiáljunk minden térbeli x pontban egy lokális Descartes-koordinátarendszert úgy, hogy a z tengely a mágneses tér irányába mutasson! Ekkor a 10.3 egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$0 = -\nabla \cdot \begin{bmatrix} P + \frac{B^2}{2\mu_0} & & \\ & P + \frac{B^2}{2\mu_0} & \\ & & P - \frac{B^2}{2\mu_0} \end{bmatrix}.$$
 (10.5)

A 10.3 egyenletnek ebből az alakjából jól látszik, hogy a mágneses tér a térre merőleges (x és y) irányokban nyomóerőként, míg a térrel párhuzamos irányban húzóerőként lép fel.

Ez a megállapítás – bár igaz – kissé félrevezető, mivel azt sugallja, hogy létezik egy, a mágneses térrel párhuzamos erő, holott az valójában nem létezik, mert a $J \times B$ -nek nincs B irányába eső komponense. Hogy ezt az "ellentmondást" feloldjuk, rendezzük át a 10.4 egyenlet második sorát!

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[-\nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) + B^2 \hat{z} \cdot \nabla \hat{z} + \hat{z} \hat{z} \cdot \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[-\nabla_{\perp} \left(\frac{B^2}{2} \right) + B^2 \boldsymbol{\kappa} \right]$$
(10.6)

és

$$\boldsymbol{\kappa} = \hat{z} \cdot \nabla \hat{z} = -\mathbf{R},\tag{10.7}$$

R pedig a mágneses tér erővonalainak lokális görbületi sugara.

A $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ erőnek ebből az alakjából már jól látszik, hogy a mágneses térrel párhuzamosan valójában az erővonalak görbületéből adódóan lép fel húzóerő (ugyanúgy, mint ahogy egy megfeszített húr is szeretne kiegyenesedni, ha deformálják).

10.2. Egyensúly két dimenzióban: a Bennett-pinch

A legegyszerűbb statikus egyensúlyi elrendezést Bennett tanulmányozta 1934-ben, és *Bennett*- vagy *Z-pinch*nek hívjuk.¹⁵ (*Z* az áram irányát jelöli.) Ez az elrendezés (10.1. ábra) tulajdonképpen egy végtelen hosszú, tengelyszimmetrikus henger alakú plazmából áll, melyben a szimmetriatengely (a z tengely) mentén J áramsűrűség folyik. A plazmát vákuum veszi körül és hengerkoordináta-rendszert használunk.



10.1. ábra. A Bennett-pinch

Az r sugarú körön belül folyó áram és az áramsűrűség az alábbi kapcsolatban van:

$$I(r) = \int_0^r 2\pi r' J_z(r') dr'.$$
 (10.8)

Ezzel a kifejezéssel egyenértékű módon az axiális áramsűrűség így számítható a teljes áramból:

$$J_z(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial r}.$$
(10.9)

¹⁵A *pinch* angol szó összehúzódást, zsugorodást jelent, és arra utal, hogy ez a plazmaelrendezés "összehúzza magát", mint ahogy a következő fejezetben látjuk majd.

Az axiális áram keltette azimutális mágneses teret az Ampère-törvény szolgáltatja:

$$B_{\theta}(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}.$$
 (10.10)

Ezek után a 10.3 egyenlet a Bennett-pinch esetére az alábbi egyszerű alakot ölti:

$$r^2 \frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{8\pi^2} \frac{\partial I^2}{\partial r}.$$
 (10.11)

Integráljuk az egyenletet r = 0-tól r = a-ig (a a plazmahenger sugara)!

$$\int_{0}^{a} r^{2} \frac{\partial P}{\partial r} \mathrm{d}r = [r^{2} P(r)]_{0}^{a} - 2 \int_{0}^{a} r P(r) \mathrm{d}r = -\frac{\mu_{0}}{8\pi^{2}} I^{2}(a)$$
(10.12)

A kiintegrált mennyiség eltűnik mind r = 0, mind r = a esetben, mivel P(a) = 0 – A nyomás a plazma-vákuum határfelületen eltűnik. Ha a hőmérséklet homogén, a nyomást így fejezhetjük ki: $P = N\kappa T$, azaz a 10.12 egyenlet így írható:

$$I^2 = \frac{8\pi N\kappa T}{\mu_0},$$
 (10.13)

ahol *N* az egységnyi tengelyhosszra jutó részecskeszám. A Bennettösszefüggésnek hívott 10.13 egyenlet legfontosabb állítása az, hogy adott *N* és *T* összetartásához (egyensúlyban tartásához) szükséges áram független a sűrűség radiális eloszlásától. A Bennett-összefüggésből az is látható, hogy viszonylag gyenge áramokkal is jelentős plazmanyomást lehet ellensúlyozni. Ez a két tény motiválta a berendezések tervezését a szabályozott fúziós kutatások hajnalán, az 1950-es, 60-as években. Azonban – mint később látni fogjuk – a fent vázolt leírás túlzottan optimista, mert a *Z-pinch* elrendezés nagyon erősen instabil.

Azimutális irányban folyó árammal is lehetséges a plazma összetartása, azonban csak tranziens módon. Ebben az elrendezésben a henger alakú plazmát egy csőszerű tekercs veszi körül, amelyben folyó azimutális áram axiális mágneses tere a plazma felületén folyó, szintén azimutális áramot indukál, és az így fellépő $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ erő tartja össze a konfigurációt. Látható, hogy a $\theta - pinch$ nek hívott elrendezés természeténél fogva tranziens, mert a plazma felületén folyó áram nem tartható fenn állandóan.

10.3. Egyensúly három dimenzióban: nem létezik

Láttuk, hogy a végtelen hosszú, henger alakú plazmában folyó, axiális áramból eredő, befelé mutató erő egyensúlyozni tudja a nyomásgradiensből adódó, kifelé mutató erőt. Természetszerűen merül fel a kérdés, hogy létezik-e 3 dimenzióban is olyan plazmakonfiguráció, amelyet kizárólag a plazmában magában folyó áramoktól származó erők össze tudnak tartani. A válasz sajnos határozott nem, és a bizonyítást egy Safranovtól származó viriál tétellel végezhetjük el.

Tekintsük a 10.2. ábrán látható, véges nyomású, gömb alakú plazmát, melyet vákuum vesz körül. A bizonyítás során a *reductio ad absurdum* módszert használjuk, azaz tegyük fel, hogy

- 1. a plazma véges, a sugarú,
- 2. statikus MHD-egyensúlyban van,
- 3. áramok kizárólag a plazmában, a plazmát körülvevő vákuumban nem folynak.



10.2. ábra. Egyensúly 3 dimenzióban

A statikus MHD-egyensúly alapegyenletét így is írhatjuk:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \tag{10.14}$$

ahol

$$\mathbf{T} = \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)\mathbf{I} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\mathbf{B}.$$
 (10.15)

Legyen **r** egy, a plazma középpontjából a megfigyelési pontba mutató vektor, és tekintsük az alábbi viriál kifejezést!

$$\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) = \sum_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{jk} x_k)$$
$$= (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r} + \sum_{jk} T_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} x_k \qquad (10.16)$$
$$= \sum_{jk} T_{jk} \delta_{jk} = \operatorname{Sp} \mathbf{T}$$

A T tenzor spúrja Sp T = $3P + B^2/2\mu_0$ pozitív definit. Integráljuk a 10.16 egyenletet a teljes térre!

$$\int \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) d^3 r = \int_{S_{\infty}} d\mathbf{s} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{r} =$$

$$= \int_{S_{\infty}} d\mathbf{s} \cdot \left[\left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{I} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{r}$$
(10.17)

Mivel $\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r})$ pozitív definit, ezért ez az integrál véges és pozitív. Az egyenlet térfogati integrálját a Gauss-tétel segítségével végtelen távoli felületen vett felületi integrállá írtuk át.¹⁶ Értékeljük ki ezt a felületi integrált! Mivel a plazma kiterjedése véges, ezért nyomása egy végtelen távoli felületen nulla. A mágneses térrel arányos mennyiségeket multipol sorba fejtjük, és csak a vezető, dipol tagokat tartjuk meg. Mivel a mágneses dipol tér amplitúdója r^{-3} szerint cseng le, a felület nagysága pedig r^2 szerint nő, felületi integrálunk $\int ds B^2 r \sim r^{-3}$ szerint skálázódik, azaz eltűnik a végtelenben. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel 10.17 egyenletünk egyik oldala nulla, a másik pedig nem. Az ellentmondás csak úgy oldható fel, hogy hiba volt a kiindulási feltételeink között.

Ebből következően tehát nem létezik 3 dimenziós, önmagát saját áramaival összetartó plazmakonfiguráció. Az összetartás csak a plazmához képest külső, valamilyen mechanikai szerkezettel megtartott tekercsekben folyó áramokkal lehetséges. Ha nem lenne mechanikai szerkezet, akkor a tekercsek áramait a plazmában "olvaszthatnánk", amivel megsértenénk a viriál tételt, tehát a mechanikai tartó erőkre (szerkezetre) mindenképpen szükség van.

¹⁶Ezt megtehettük, mert feltételezéseink szerint a plazmán kívül nincsenek áramok, és így nincsenek a mágneses térnek forrásai.

10.4. A Grad–Safranov-egyenlet

A 10.3 egyenlet megoldása, minden látszólagos egyszerűsége ellenére, távolról sem triviális. A nehézséget az okozza, hogy még mielőtt hozzáfognánk a megoldáshoz, mérlegelni kell, mely mennyiségeket írjuk elő, és melyeket határozzuk meg az egyenletből. Ez amiatt van (mint már korábban is írtuk), hogy a 10.3 egyenlet jobb oldala mindenképpen rotációmentes, bal oldala viszont általában nem. Ebből következően csak bizonyos speciális, általában valamilyen szimmetriával bíró plazmakonfigurációk lehetnek egyensúlyban. Természetesen nemcsak egyszerű szimmetria tulajdonságokra kell gondolni, mint például forgási, vagy transzlációs szimmetriára, hanem bonyolultabb, helikális, tükrözési stb. szimmetriákra is. Ebben a bevezető jegyzetben csak forgási szimmetriával bíró elrendezéseket tárgyalunk.

Vizsgáljuk meg tehát a statikus MHD-egyensúlyban lévő plazmaelrendezések egyik fontos alesetét, az axiális szimmetriával rendelkező elrendezéseket! Használjunk hengerkoordinátákat (r, ϕ , z) és legyen a z koordinátatengely egyben a szimmetriatengely is! A z tengely körüli axiális szimmetria azt jelenti, hogy minden f fizikai mennyiség független a ϕ toroidális szögtől,¹⁷ azaz $\partial f / \partial \phi = 0$. Számításaink egyszerűségének kedvéért a $\hat{\phi}$ egységvektor helyett használjuk a $\hat{\phi}/r = \nabla \phi$ vektort!

A legáltalánosabb, axiális szimmetriával rendelkező vektortér az alábbi alakú:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} (\nabla \psi \times \nabla \phi + \mu_0 I \nabla \phi). \tag{10.18}$$

Itt $\psi(r, z)$ és I(r, z) tetszőleges skalárterek, de ha 10.18 mágneses teret ír le, akkor $\psi(r, z)$ a poloidális fluxus (az elnevezés magyarázatát a 10.21 egyenletnél találjuk meg) és I(r, z) az r sugarú körön belül folyó áram.

Ekkor a mágneses tér toroidális komponense

$$\mathbf{B}_{tor} = B_{\phi}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \nabla \phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}, \qquad (10.19)$$

míg poloidális komponense

$$\mathbf{B}_{pol} = \frac{1}{2\pi} (\nabla \psi \times \nabla \phi). \tag{10.20}$$

A 10.18 egyenletből az is látható, hogy a B-re felírt kifejezés konzisztens az Ampère törvénnyel: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$.

¹⁷Megjegyezzük, hogy a ϕ irányba mutató vektorokat *toroidális*, az r - z síkban fekvő vektorokat pedig *poloidális* vektoroknak hívjuk.

A mágneses tér poloidális komponensének integrálja egy r sugarú körrel lefedett felületre, melynek középpontján áthalad a z tengely, éppen a $\psi(r,z)$ poloidális fluxus, azaz

$$\int_0^r \mathbf{B}_{pol} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^r \frac{1}{2\pi} (\nabla \psi \times \nabla \phi) \cdot \hat{z} 2\pi r' \mathrm{d}r' = \psi(r, z).$$
(10.21)

A poloidális fluxus fogalmának megléte eleve feltételezi az axiális szimmetriát, azaz azt, hogy egy adott r, z ponthoz mindig egyértelműen hozzárendelhető a fenti egyenletben egy r sugarú körrel lefedett terület, melynek kerülete mentén B állandó.

Az axiális szimmetria a poloidális és a toroidális vektorok között is sajátos kapcsolatot jelent, ugyanis egy toroidális vektor rotációja poloidális

$$\nabla \times \mathbf{B}_{tor} = \frac{\mu_0}{2\pi} \nabla I \times \nabla \phi, \qquad (10.22)$$

míg egy poloidális vektor rotációja toroidális

$$\nabla \times \mathbf{B}_{pol} = \nabla \times (B_r \hat{r} + B_z \hat{z}) = \hat{\phi} \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right).$$
(10.23)

A poloidális mágneses tér rotációja egy ψ -re ható Laplace-szerű operátorként is felírható.

$$\nabla \phi \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{pol} = \nabla \cdot (\mathbf{B}_{pol} \times \nabla \phi) = \nabla \cdot \left(\frac{1}{2\pi} [\nabla \psi \times \nabla \phi] \times \nabla \phi\right) = \\ = -\frac{1}{2\pi} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi\right).$$

Ez utóbbi egyenlet származtatásánál felhasználtuk a $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}$ vektorazonosságot. Mivel $\nabla \times \mathbf{B}_{pol}$ tisztán toroidális és $\hat{\phi} = r \nabla \phi$

$$\nabla \times \mathbf{B}_{pol} = -\frac{r^2}{2\pi} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi\right) \nabla \phi.$$
 (10.24)

 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ -ből az áramsűrűség toroidális és poloidális komponensei azonnal adódnak:

$$\mathbf{J}_{tor} = -\frac{r^2}{2\pi\mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi\right) \nabla \phi \qquad (10.25)$$

és

$$\mathbf{J}_{pol} = \frac{1}{2\pi} \nabla I \times \nabla \phi. \tag{10.26}$$

Most már minden adott ahhoz, hogy a 10.3 egyenletben kifejtsük a mágneses tagokat.

$$\nabla P = \mathbf{J}_{pol} \times \mathbf{B}_{tor} + \mathbf{J}_{tor} \times \mathbf{B}_{pol} + \mathbf{J}_{pol} \times \mathbf{B}_{pol}$$
(10.27)

A $\mathbf{J}_{pol} \times \mathbf{B}_{pol}$ tag az egyetlen toroidális irányú vektor a jobb oldalon, de mivel $\partial P / \partial \phi = 0$, ennek a tagnak azonosan egyenlőnek kell lennie nullával, azaz

$$(\nabla I \times \nabla \phi) \times (\nabla \psi \times \nabla \phi) = 0.$$
(10.28)

Ez utóbbi egyenlet viszont azt jelenti, hogy ∇I párhuzamos $\nabla \psi$ -vel. Ha d $I = d\mathbf{r} \cdot \nabla I$ és $d\psi = d\mathbf{r} \cdot \nabla \psi$, akkor

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\psi} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla I}{\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla\psi},$$

és mivel a párhuzamosság miatt d
 $I/{\rm d}\psi$ mindig meghatározott, I biztosan
 ψ függvénye és igaz, hogy

$$\nabla I(\psi) = I'(\psi) \nabla \psi. \tag{10.29}$$

Ebben a kifejezésben a vessző az argumentum szerinti deriválást jelöli. Ezek után a poloidális áramot felírhatjuk a poloidális fluxus segítségével:

$$\mathbf{J}_{pol} = \frac{I'}{2\pi} \nabla \psi \times \nabla \phi. \tag{10.30}$$

Minden ismert tagot a 10.27 egyenletbe írva kapjuk:

$$\nabla P = \frac{I'}{2\pi} (\nabla \psi \times \nabla \phi) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi} \nabla \phi - \nabla \phi \frac{r^2}{2\pi\mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi\right) \times \frac{1}{2\pi} [\nabla \psi \times \nabla \phi]$$
$$= -\left[\frac{\mu_0 I I'}{(2\pi r)^2} + \frac{1}{4\pi^2 \mu_0} \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi\right)\right] \nabla \psi,$$
(10.31)

amiből viszont az következik, hogy ∇P is párhuzamos $\nabla \psi$ -vel, azaz $P = P(\psi)$ és $\nabla P = P' \nabla \psi$. 10.31 mindkét oldalán ugyanaz a vektor áll egy-egy skalárral megszorozva, ami csak úgy lehetséges, ha maguk a

skalárok is egyenlőek. A 10.31 <u>vektor</u>egyenlet ekvivalens tehát az alábbi <u>skalár</u>egyenlettel:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \psi\right) + 4\pi^2 \mu_0 P' + \frac{\mu_0^2}{r^2} II' = 0.$$
 (10.32)

Ezt az egyenletet nevezzük Grad–Safranov-egyenletnek.¹⁸ Az egyenlet egyik sajátsága az, hogy ψ mind függő (azaz ismeretlen), mind független (azaz hely-) változóként megjelenik, tehát szerepelnek benne ψ deriváltjai, de ψ szerinti deriváltak is. Az igazán független változók természetesen az r és z koordináták, ezektől függ mind a nyomás, mind az áram, mind a fluxus. De a nyomás és az áram csak a fluxuson keresztül függenek tőlük, ezért mondhatjuk, hogy a fluxus függő és független változó is egyben.

A másik sajátság az, hogy egy kezdetben háromdimenziós vektoregyenletet transzformálni lehetett egyetlen szimmetriatulajdonság felhasználásával egy egydimenziós skaláregyenletté. Ennek mélyebb fizikai oka van, de azt most nem tárgyaljuk.

Írjuk vissza a Grad–Safranov-egyenletet a toroidális áram 10.25 alatti kifejezésébe!

$$\mathbf{J}_{tor} = \left(2\pi r^2 P' + \frac{\mu_0}{2\pi} I I'\right) \nabla\phi, \qquad (10.33)$$

amivel a teljes áram a következő módon írható:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{tor} + \mathbf{J}_{pol} = \left(2\pi r^2 P' + \frac{\mu_0}{2\pi} II'\right) \nabla \phi + \frac{I'}{2\pi} \nabla \psi \times \nabla \phi = 2\pi r^2 P' \nabla \phi + I' \mathbf{B}.$$
(10.34)

Az utolsó, B-vel párhuzamos tagot "erőmentes" áramnak hívjuk, míg az első tag az úgynevezett *diamágneses* áram.

10.4.1. A Grad–Safranov-egyenlet megoldásai

A Grad–Safranov-egyenlet nem határozza meg egyértelműen az egyensúlyt, mivel benne három független mennyiség – a ψ , a $P(\psi)$ és az $I(\psi)$ – szerepel. A független mennyiségek közül kettőt elő kell írni, és a harmadik kiszámításához lehet felhasználni a Grad–Safranov-egyenletet. A két előírt mennyiség általában a nyomás és az áram, melyeket más egyenletekből vagy mérésből határoznak meg, a poloidális fluxust pedig számítják.

¹⁸Német nyelvterületen az egyenletet Grad–Schlüter–Safranov-egyenletnek is nevezik.

A Grad–Safranov-egyenlet egy nemlineáris parciális differenciálegyenlet, melynek általános esetben csak numerikus megoldása létezik. Létezik azonban néhány speciális eset, melyekre analitikus megoldást is ismerünk. Egy ilyen speciális, analitikusan integrálható eset, melyet most ismertetni fogunk, a *Szolovjov*-megoldás.

A Szolovjov-megoldás két feltevésen alapul:

1. a nyomás a poloidális fluxus lineáris függvénye, azaz

$$P = P_0 + \lambda \psi,$$

2. az áram a plazmán belül állandó, azaz

$$I' = 0.$$

A második feltevés egyenértékű azzal, hogy minden z irányú áram a z tengely mentén folyik, és azon kívül nulla. Más szóval az áramelrendezés olyan, hogy a toroidális mágneses térnek egyetlen forrása van, éspedig az az áram, ami egy végtelenül vékony, a z-tengelybe eső vezetőben folyik.

Abban az esetben, ha I' véges, a plazma vagy diamágneses (a toroidális tér gyengébb a vákuumtérnél), vagy paramágneses (a toroidális tér erősebb a vákuumtérnél) viselkedést mutat.

Egyszerűsítő feltevéseinkkel a Grad–Safranov-egyenlet alábbi alakját kapjuk:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 4\pi^2 r^2 \mu_0 \lambda = 0, \qquad (10.35)$$

aminek egzakt megoldása a következő:

$$\psi(r,z) = \psi_0 \frac{r^2}{r_0^4} (2r_0^2 - r^2 - 4\alpha^2 z^2).$$
(10.36)

Itt ψ_0 , r_0 és α adott állandók. A 10.3. ábra ψ izo-kontúrvonalait mutatja r/r_0 és z/z_0 függvényében $\alpha = 0$ esetén. Mivel az egész elrendezés axiálisan szimmetrikus, az ábrát a z tengely körül megforgatva felületeket kapunk, és egy-egy ilyen felületen a poloidális fluxus állandó. Az állandó fluxussal bíró felületeket *fluxusfelület*nek vagy *mágneses felület*nek hívjuk. Az ábrára pillantva azonnal látható, hogy háromféle topológiájú felület létezik: *i*) zárt felület, *ii*) $z = \pm \infty$ -be tartó nyílt felület és *iii*) e kettőt elválasztó felület.



10.3. ábra. A Szolovjov-megoldás izofluxus vonalai. Folytonos vonal: szeparatrix; szaggatott vonalak: zárt és nyílt fluxusfelületek

A Szolovjov-megoldás, bár erősen idealizált és leegyszerűsített plazmakonfigurációt ír le, mégis alkalmas arra, hogy segítségével az axiálszimmetrikus egyensúlyi rendszerek főbb kvalitatív jellemzőit (a most megismert topológiai fluxusfelület-osztályozáson túl) bemutassuk.

- 1. A zárt fluxusfelületek közös részhalmaza a mágneses tengely.
- 2. A zárt és nyílt fluxusfelületeket elválasztó felület a szeparátrix.
- 3. A mágneses indukcióvektornak nincs a fluxusfelületekre merőleges komponense.

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0$$

4. A poloidális mágneses tér és a hozzátartozó poloidális fluxus a felelősek a plazma összetartásáért. Mivel a poloidális mágneses teret toroidális áramok hozzák létre, ezért a toroidális áram nélkülözhetetlen eleme az összetartásnak axiális szimmetriájú geometriában.

11. Instabilitások

A 10 fejezetben láttuk, hogy *léteznek* egyensúlyi plazmakonfigurációk. Természetszerűleg merül fel ezzel kapcsolatban a kérdés, hogy *mennyire stabilak* ezek az egyensúlyi állapotok.

Az egyensúlyi állapotok stabilitását például aszerint osztályozhatjuk, hogy mi történik a rendszerrel, ha egyensúlyi állapotából egy *kicsit* kitérítjük,¹⁹ majd magára hagyjuk. Ha visszatér egyensúlyi állapotába, az egyensúlyi helyzetet *stabilnak* mondjuk. Ha még jobban eltávolodik attól, az egyensúlyi helyzet *instabil*. Ha pedig a kimozdított állapot egy újabb egyensúlyi állapot, akkor a rendszerünk *semleges* egyensúlyi helyzetben van. A 11.1. ábra a különböző egyensúlyi fajtákat mechanikai példákon keresztül szemlélteti, ahol egy golyót látunk kovex, konkáv, illetve sík felületen.



11.1. ábra. A stabilitás mechanikai analógiája 1

Ha nem csak kis kitéréseket engedünk meg az egyensúlyi helyzettől, további egyensúlyi állapotokat különböztethetünk meg. Előfordulhat,

¹⁹Itt persze nemcsak mechanikai kitérítésre kell gondolni, hanem a plazmát jellemző bármilyen egyensúlyi mennyiség megváltoztatására.



11.2. ábra. A stabilitás mechanikai analógiája 2

hogy a rendszer kis kitérésekre stabil, nagy kitérésekre instabil. De a fordított helyzet is létezik: a rendszer kis kitérésekre instabil, nagy kitérésekre már stabil. Az is előfordulhat, hogy kis kitérésekkel szemben semleges az egyensúly, de nagy kitérésekre instabil. Ezt a legutóbbi állapotot *marginális stabilitás*nak hívjuk. A 11.2. ábra szemlélteti ezt a három újabb lehetőséget.

Mind stabil, mind instabil egyensúlyi állapotban van egy vagy több fizikai folyamat, amely stabilizálja vagy instabillá teszi az állapotot. Ha egy fizikai folyamat olyan, hogy hatására a rendszer instabilan viselkedik, akkor úgy mondjuk, hogy az adott folyamat *hajtja* az instabilitást. Az instabilitást hajtó folyamatoknak mindig megfelel valamilyen szabadenergia, mely az instabilitás során felszabadul. A felszabaduló energia miatt a rendszer az instabilitás következtében alacsonyabb potenciális energiájú állapotba kerül, mint az instabilitás kifejlődése előtt.²⁰

A plazmafizikában előforduló számos instabilitás legtöbbje az alábbi három nagy osztályba sorolható aszerint, hogy mi az, ami az instabilitást hajtja:

²⁰A mechanikai analógiánál maradva, a golyó instabilitásait a nehézségi erő hajtja és a felszabaduló szabadenergia a golyó potenciális energiája.

- 1. kicserélődési (angolul *interchange*) instabilitások hajtóerő: a nyomás gradiense,
- hurokinstabilitások (angolul kink) hajtóerő: az áramsűrűség gradiense,
- kinetikus instabilitások hajtóerő: a nem-maxwelli sebességeloszlásfüggvények.

A két első instabilitásfajta az MHD keretein belül is tárgyalható, tehát őket hívhatjuk még *MHD-instabilitás*oknak is.

Az MHD-instabilitásokat feloszthatjuk a fenti két jellemvonás szerint, de megkülönböztethetjük őket aszerint is, hogy az instabilitás során elmozdul-e a plazma-vákuum határfelület. Ha nem mozdul el, instabilitásunk *belső*, ha elmozdul, *külső* névre hallgat. A belső instabilitásokat szokták még *rögzített határfelületű* instabilitásnak is hívni, mert ilyenkor a határfeltétel olyan, mintha a plazmát egy deformálhatatlan, tökéletesen vezető felülettel vennénk körül.

Ebben a fejezetben legrészletesebben az (1) kicserélődési instabilitásokat fogjuk tárgyalni. A (2) hurokinstabilitás részletes ismertetése messze meghaladná a jegyzet kereteit, ezért azt csak nagyon vázlatosan kidolgozva ismertetjük. A (3) kinetikus instabilitások esetében pedig tulajdonképpen egy konkrét példát adunk csak, de ott is az inverz folyamatot, a csillapítást mutatjuk be, mert az jobban kapcsolódik a korábban már bemutatott anyaghoz.

A konkrét példák előtt azonban vizsgáljuk meg, hogy általános esetben, az MHD-egyenleteket felhasználva, milyen eszközökkel lehet az egyensúlyi konfigurációk stabilitását vizsgálni!

11.1. Általános stabilitásvizsgálat

Az egyensúlyi konfigurációk, de általában is a plazmák vizsgálata először az MHD-egyenletek keretei között történik. Ha az MHD keretein belül nem kapunk választ, vagy csak nem elég pontosat a kérdéseinkre, akkor visszanyúlunk a kétfolyadékképhez vagy a kinetikus egyenlethez. Nekünk most elegendő lesz az MHD-egyenletek nyújtotta pontosság.

Annak eldöntésére, hogy egy adott konfiguráció stabil-e vagy instabil, a *lineáris* stabilitásvizsgálat is megfelelő. Persze ha az instabilitás kifejlődésének dinamikájára is kíváncsiak vagyunk, a lineáris vizsgálat már nem elég, és *nemlineáris* stabilitásvizsgálatot kell végeznünk. Most mi megelégszünk az MHD-egyenletek lineáris stabilitásvizsgálatával.

Tegyük fel, hogy rendszerünk MHD-egyensúlyban van és legyen a rendszer minden pontjának egyensúlyi koordinátája \mathbf{x}_0 ! Vigyünk kis perturbációt (deformációt) a rendszerbe, azaz a rendszer pontjainak egyensúlytól eltérő koordinátái legyenek $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$, ahol $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ kis kitérés! Nyilvánvaló, hogy ha \mathbf{x}_0 egyesúlyi mennyiség, akkor időtől független, tehát \mathbf{x} időfüggése csak $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ -ben jelenik meg. Ezért $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t) =$ $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$ alakban írható (az egyensúly körül Fourier-sorba fejtettünk). Ha Im(ω) \geq 0, a rendszer stabil, ha Im(ω) < 0, a rendszer instabil.

Tekintsük a statikus MHD-egyensúly egyenleteit!

$$\mathbf{J}_{0} \times \mathbf{B}_{0} = \nabla P_{0}$$

$$\mu_{0} \mathbf{J}_{0} = \nabla \times \mathbf{B}_{0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_{0} = 0$$

$$\mathbf{U}_{0} = 0$$
(11.1)

A számítások során szükségünk lesz az energiaegyenletnek egy eddig még nem ismerős alakjára. Az energiaegyenlet szokásos alakja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{P}{\rho^{\gamma}} = 0$$

Ezzel teljesen ekvivalens a következő, egyszerű számolást igénylő alak (a kontinuitási egyenlet felhasználásával):

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P/\rho^{\gamma}) = \frac{\partial}{\partial t}(P/\rho^{\gamma}) + \mathbf{U} \cdot \nabla(P/\rho^{\gamma}) \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla P + \gamma P \nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \tag{11.2}$$

A korábban bevezetett deformációvektor segítségével a perturbált sebesség

$$\mathbf{U}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}$$

alakban vehető fel, amit felhasználva linearizáljuk az MHD-egyenleteket a 11.1 egyensúly körül!

$$P_{1} = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_{0} - \gamma P_{0} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}$$
$$\mathbf{B}_{1} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_{0})$$
(11.3)

Ezen egyenletek származtatásánál felhasználtuk az energiaegyenletet, a Faraday-, az Ampère- és az ideális Ohm-törvényeket, majd az egyenleteket időben integráltuk. A linearizált mozgásegyenlet a következő alakot ölti:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}), \qquad (11.4)$$

ahol az $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ erőoperátor

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1 - \nabla P_1, \tag{11.5}$$

vagy a 11.3 egyenleteket felhasználva

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mu_0} \left[(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 \right] + \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_0 + \gamma P_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}).$$
(11.6)

Vegyük észre, hogy a 11.6 erőoperátor nem tartalmaz explicit időderiváltakat, tehát formája $\boldsymbol{\xi}$ időfüggő alakjának behelyettesítése utan is változatlan. A 11.4 mozgásegyenlet bal oldala pedig így alakul:

$$-\omega^{2}\rho_{0}\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \frac{1}{\mu_{0}} \left[(\nabla \times \mathbf{B}_{0}) \times \mathbf{B}_{1} + (\nabla \times \mathbf{B}_{1}) \times \mathbf{B}_{0} \right] + \nabla (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla P_{0} + \gamma P_{0} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}). \quad (11.7)$$

 $\boldsymbol{\xi}$ -re megfelelő határfeltételeket előírva a 11.7 egyenlet egy sajátértékegyenlet a rendszer sajátmódusait leíró deformációs sajátvektorokra és sajátfrekvenciákra. ω birtokában pedig – a fentebb mondottak értelmében – már el lehet dönteni, hogy a módus stabil-e, vagy instabil.

A konkrét számítások során azonban nem a 11.7 sajátértékegyenletet szokták kiértékelni, hanem annak integrális alakját. A 11.7 egyenletet $\boldsymbol{\xi}$ komplex konjugáltjával szorozzák és kiintegrálják a plazmára és a plazmát körülvevő térrészre. Ekkor 11.7 bal oldala a pozitív definit mozgási energia, a jobb oldala pedig a perturbációhoz tartozó potenciális energia egyensúlyi értékhez képesti megváltozása lesz. Belátható, hogy a sajátértékegyenlet és a mondott módon vett integrális alak ekvivalensek. Az integrális alak akkor ad instabilitást, ha a potenciális energia megváltozása negatív, stabil rendszert pedig akkor ír le, ha a potenciális energia megváltozása pozitív (ún. *energia elv*). Könnyen átlátható a 11.1. ábrán látható mechanikai rendszerrel való analógia.

A 11.7 egyenlet integrális alakjának kiértékelésekor három térrészt szoktak megkülönböztetni: a plazma belsejét, a plazma-vákuum határfelületet és a vákuum tartományt. Erre azért van szükség, hogy megfelelően lehessen tárgyalni a belső és külső instabilitásokat. Mi most megelégszünk csak a plazmára vonatkozó integrál bemutatásával.

Hosszadalmas és fárasztó vektoralgebrai átalakítások után a plazma potenciális energiájának megváltozására az alábbi kifejezést kapjuk:²¹

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\mathbf{B}_{1\perp}^2}{\mu_0} + \frac{B_0^2}{\mu_0} (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp + 2\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\kappa})^2 + \gamma P_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)^2 \right] \mathrm{d}^3 r - \frac{1}{2} \int \left[2(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \nabla P_0)(\boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa}) + J_{0\parallel}(\boldsymbol{\xi}_\perp \times \hat{z}) \cdot B_{1\perp} \right] \mathrm{d}^3 r. \quad (11.8)$$

Itt a \perp alsó index a már megszokott módon a perturbálatlan mágneses térre merőleges vektorkomponenseket, $\kappa = \hat{z} \cdot \nabla \hat{z}$ pedig a görbületi vektort jelöli. A potenciális energiaváltozás 11.8 alatti kifejezésében a pozitív előjelű tagok stabilizálják, a negatív előjelű tagok pedig destabilizál(hat)ják a rendszert. Vegyük sorra a tagokat!

- $\frac{B_{1\perp}^2}{\mu_0}$ az erővonalak meggörbítéséhez szükséges energia. A nyírási Alfvén-hullámok potenciális energiájának fő járuléka.
- $\frac{B_0^2}{\mu_0} (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + 2 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\kappa})^2$ az erővonalak összenyomásához szükséges energia. A kompressziós Alfvén-hullámok potenciális energiájának fő járuléka.
- $\gamma P_0(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp)^2$ a plazma összenyomásához szükséges energia. A hanghullámok potenciális energiájának fő járuléka.

Ezek a tagok mind pozitív definitek, és így mindenképpen stabilizálják az egyensúlyt. Az utolsó két tag lehet pozitív és negatív is, tehát stabilizálhatják, de destabilizálhatják is az egyensúlyt.

- $(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla P_0)(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa})$ a kicserélődési instabilitást okozza.
- $J_{0\parallel}(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \times \hat{z}) \cdot B_{1\perp}$ a hurokinstabilitás okozója.

Most pedig nézzük részletesebben az egyes instabilitásfajtákat!

11.2. A kicserélődési instabilitás

Ez az instabilitásfajta onnan kapta a nevét, hogy az instabilitás során a plazma bizonyos térfogatelemei helyet cserélnek egymással, és ennek a

²¹A részletes számítások megtalálhatók például Freidberg *Ideal Magnetohydrodynamics* című könyvében.

helycserének a révén jut a rendszer alacsonyabb potenciális energiájú állapotba.

A kicserélődési instabilitások (általában is, nem csak a plazmafizikában) az ún. Rayleigh–Taylor (R–T) típusú instabilitások közé tartoznak, ezért először vizsgáljuk meg a hidrodinamikai R–T instabilitást, amely közönséges, összenyomhatatlan folyadékok esetén lép fel, ha kisebb sűrűségű folyadék tart egyensúlyban nagyobb sűrűségű folyadékot.

11.2.1. A hidrodinamikai Rayleigh-Taylor-instabilitás

A 11.3 szemlélteti hidrodinamikai rendszerünket. Vizsgáljuk meg, mi történik a rendszer potenciális energiájával, ha a ketféle folyadék határfelületén valamilyen fluktuáció hatására fodrozódás alakul ki! Legyen a fodrozódás amplitúdója Δh és a benne lévő folyadék térfogata V! Ekkor



11.3. ábra. A Rayleigh-Taylor-instabilitás.

$$\Delta W_{pot} = \rho_{kis} V \Delta hg - \rho_{naqy} V \Delta hg = V \Delta hg(\rho_{kis} - \rho_{naqy}) < 0$$

mindig, mivel a kisebb sűrűségű folyadék van felül. Ez az egyensúly tehát instabil a fodrozódással szemben. Hogy az instabilitás növekedési rátáját ki tudjuk számítani, közelítő feltevéseket kell tennünk:

- 1. az alsó folyadék sűrűsége sokkal kisebb a felsőénél, azaz $\rho_{kis} \ll \rho_{nagy}$,
- 2. egyensúlyban nincsenek áramlások a folyadékokban, azaz $\mathbf{v}_0 = 0$,
- 3. a két folyadék összenyomhatatlan, azaz $d_t \rho = 0$.

Ekkor a kontinuitási és a mozgásegyenlet, illetve ezek linearizált alakjai:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \implies \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 = 0$$
(11.9)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla P - \rho g \hat{y} \implies \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla P_1 - \rho_1 g \hat{y}. \tag{11.10}$$

A 11.3. ábrának megfelelően a gravitációs gyorsulás -y irányú. Peremfeltételként azt követeljük meg, hogy ne legyen elmozdulás a felső folyadék felső határánál (pl. mert a tartály fala merev), azaz ott legyen a perturbált sebesség nulla:

$$v_{1,y}(y=h) = 0.$$
 (11.11)

Tegyük fel, hogy a sebességperturbáció egy x - z síkban terjedő, időben és az y tengely mentén változó amplitúdójú síkhullám!

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(y)e^{\gamma t + \mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \qquad \mathbf{k}, \mathbf{x} \perp \hat{y}$$
(11.12)

Az összenyomhatatlansági feltételt kifejezhetjük a perturbált sebességtér divergenciamentességével is ($\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$). Helyettesítsük be a 11.12 egyenletben szereplő kifejezést ez utóbbi egyenletbe!

$$\left(\frac{\partial v_{1,y}(y)}{\partial y} + iv_{1,x}(y)k_x + iv_{1,z}(y)k_z\right)e^{\gamma t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0 \implies \frac{\partial v_{1,y}(y)}{\partial y} + i\mathbf{v}_{1,\perp}(y)\mathbf{k} = 0 \qquad (11.13)$$

Itt $\mathbf{v}_{1,\perp}$ -el jelöltük a sebességperturbáció x-z síkba eső, \hat{y} -ra merőleges komponensét. Bontsuk a 11.10 mozgásegyenletet is \hat{y} -ra merőleges, illetve azzal párhuzamos komponensekre!

$$\gamma \rho_0 v_{1,y}(y) = -\frac{\partial P_1}{\partial y} - \rho_1 g \tag{11.14}$$

$$\gamma \rho_0 \mathbf{v}_{1,\perp}(y) = -\mathbf{i} \mathbf{k} P_1 \tag{11.15}$$

Ennél az átalakításnál feltettük, hogy a nyomásperturbáció szintén a 11.12 egyenlet alatti alakot követi. A 11.15 egyenletből $v_{1,\perp}$ kifejezhető ik-val való skaláris szorzás és a 11.13 egyenletbe történő behelyettesítés után.

$$-\gamma\rho_0\frac{\partial v_{1,y}(y)}{\partial y} = k^2 P_1$$

A ρ_1 sűrűségperturbációt a 11.9 kontinuitási egyenletből tudjuk kifejezni, ha feltesszük a sűrűségre is a 11.12 egyenlet alatti alakot.

$$\gamma \rho_1 = v_{1,y}(y) \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \tag{11.16}$$

A fenti sűrűség- és nyomásperturbációra kapott értékeket a 11.14 egyenletbe írva sajátérték-egyenletet kapunk, mely a perturbált sebesség mellett már csak egyensúlyi mennyiségeket tartalmaz.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\gamma^2 \rho_0 \frac{\partial v_{1,y}(y)}{\partial y} \right] = \left[\gamma^2 \rho_0 - g \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \right] k^2 v_{1,y}(y)$$
(11.17)

Az instabilitás γ növekedési faktorának meghatározásához a 11.17 egyenletet külön-külön kell kiértékelnünk a folyadékok belsejében, illetve a két folyadék határfelületén egy keskeny, $y = [0^-; 0^+]$ sávban.

1. A folyadékok belsejében $\rho_0 = const$, ezért a 11.17 egyenlet így egyszerűsödik:

$$\frac{\partial^2 v_{1,y}(y)}{\partial y^2} = k^2 v_{1,y}(y)$$

Ennek az egyenletnek a 11.11 peremfeltételt kielégítő megoldása

$$v_{1,y}(y) = A\sinh(k(y-h)).$$
 (11.18)

2. A folyadékok határán integráljuk a 11.17 sajátértékegyenletet $y = 0^-$ és $y = 0^+$ között. Kihasználva, hogy közelítő feltevésünk szerint az alsó folyadék sűrűsége sokkal kisebb a felsőénél, ($\rho_0(y < 0) \simeq 0$)

$$\left[\gamma^2 \rho_0 \frac{\partial v_{1,y}(y)}{\partial y} \right]_{0^-}^{0^+} = - \left[q \rho_0 k^2 v_{1,y}(y) \right]_{0^-}^{0^+}$$

$$\gamma^2 \frac{\partial v_{1,y}(y)}{\partial y} = -g k^2 v_{1,y}(y).$$
 (11.19)

Helyettesítsük ide be a 11.18 egyenletből a folyadékok belsejére vonatkozó $v_{1,y}(y)$ kifejezést, és így kapjuk a növekedési faktor k hullámszámtól való függését:

$$\gamma^2 = kg \tanh(k_\perp h). \tag{11.20}$$

Mivel ebben a kifejezésben a tangens-hiperbolikusz függvény argumentuma minden perturbációra pozitív, ezért a növekedési faktor négyzete is pozitív, azaz folyadékrendszerünk mindig instabil. Az látható még a 11.20 egyenletből, hogy a nagyobb hullámszámú perturbációk instabilabbak a kisebb hullámszámúaknál.

11.2.2. MHD Rayleigh-Taylor-instabilitás

Általánosítsuk a fenti hidrodinamikai Rayleigh–Taylor-instabilitást plazmákra! A most bemutatandó általánosítást Kruskal és Schwarzschild végezték el először, ezért a hidrodinamikai R–T instabilitás MHD változatát Kruskal–Schwarzschild-instabilitásnak is hívják.

Plazmák esetében jobban megfelel a valóságnak, ha a plazmában nem lépcsőszerű sűrűség-ugrást feltételezünk, mint az előző alfejezetben, hanem az y tengely (pozitív) irányába mutató folytonos sűrűséggradienst. A plazma nyomásával a 10. fejezetben mondottak szerinti, x - z síkkal párhuzamos mágneses tér tart egyensúlyt, melynek gradiense -y irányba mutat.

Mivel laboratóriumi plazmák esetében a nehézségi erő szinte mindig elhanyagolható az elektromágneses erők mellett, a fenti leírásban szereplő nehézségi gyorsulást "ki kell váltanunk" valamilyen másik erővel. Egy ilyen másik lehetséges erő például tipikusan a mágneses tér erővonalainak görbületéből származó erő, ahogyan azt a 10.4 egyenletnél láttuk. Az egyszerűség kedvéért azonban mostani levezetésünknél megmaradunk a nehézségi erőt jelölő *g* szimbólumnál, de tudjuk, hogy az bármilyen, a mágneses tér erővonalaira merőleges erőt jelenthet.

Tekintsük az MHD-mozgásegyenletet és annak linearizált alakját (feltételezve, hogy a nem perturbált sebesség most is nulla, $\mathbf{v}_0 = 0$, és a plazma összenyomhatatlan)!

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right) = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P - \rho g \hat{y} \quad (11.21)$$
$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla \tilde{P}_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \nabla \mathbf{B}_0}{\mu_0} - \rho_1 g \hat{y} \quad (11.22)$$

Itt

10

$$\tilde{P}_1 = P_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0}$$

a perturbált teljes (kinetikus plusz mágneses) nyomás. Bontsuk a 11.22 egyenletet a szokásos módon a mágneses térrel párhuzamos és merőleges komponensekre!

$$\gamma \rho_0 v_{1,y} = \frac{\partial \dot{P}_1}{\partial y} + \frac{\mathrm{i}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) B_{1,y}}{\mu_0} - \rho_1 g \tag{11.23}$$

$$\gamma \rho_0 \mathbf{v}_{1,\perp} = -\mathbf{i} \mathbf{k} \tilde{P}_1 + \frac{1}{\mu_0} \left[\mathbf{i} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_{1,\perp} + B_{1,y} \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial y} \right]$$
(11.24)

Szorozzuk a 11.24 egyenletet skalárisan ik-val és használjuk fel az összenyomhatatlanságot kifejező 11.13 egyenletet!

$$-\gamma \rho_0 \frac{\partial v_{1,y}}{\partial y} = k^2 \tilde{P}_1 + \frac{1}{\mu_0} \left[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{1\perp} + \mathrm{i} B_{1,y} \frac{\partial (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)}{\partial y} \right]$$
(11.25)

Mivel $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$, a perturbált mágneses tér merőleges komponensére igaz, hogy

$$\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{1\perp} = -\frac{\partial B_{1y}}{\partial y}.$$

Ezek után a 11.25 egyenletet tovább alakíthatjuk:

$$k^{2}\tilde{P}_{1} = -\gamma\rho_{0}\frac{\partial v_{1,y}}{\partial y} - \frac{1}{\mu_{0}}\left[-\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0})\frac{\partial B_{1,y}}{\partial y} + \mathrm{i}B_{1,y}\frac{\partial(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0})}{\partial y}\right].$$

Ebből az egyenletből \tilde{P}_1 kifejezhető és a 11.23 egyenletbe helyettesíthető:

$$\gamma \rho_0 v_{1,y} = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\gamma \rho_0 \frac{\partial v_{1,y}}{\partial y} - \frac{1}{\mu_0} \left[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \frac{\partial B_{1,y}}{\partial y} + iB_{1,y} \frac{\partial(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)}{\partial y} \right] \right\} + \frac{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)B_{1,y}}{\mu_0} - \rho_1 g.$$
(11.26)

Ebben az egyenletben már csak B_{1y} nem egyensúlyi mennyiség, ezért ha B_{1y} -t is ismernénk, a 11.17 egyenlethez hasonló sajátértékegyenlethez jutnánk. Linearizáljuk az ideális Ohm-törvényt!

 $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 = 0$

Vegyük a rotációját és használjuk fel a Faraday-törvényt!

$$\gamma \mathbf{B}_1 = \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)$$

Szorozzunk skalárisan \hat{y} -al, majd a $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$ vektoranalitikai azonosság segítségével fejezzük ki B_{1y} -t!

$$\gamma B_{1,y} = \hat{y} \cdot \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0) = \nabla \cdot [(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)] \times \hat{y} = \mathbf{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 v_{1,y} \quad (11.27)$$

Ezt a kifejezést, valamint a 11.16 és 11.26 egyenleteket felhasználva kapjuk a sajátérték-egyenletet.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\gamma^2 \rho_0 + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 \right] \frac{\partial v_{1,y}}{\partial y} \right\} = k^2 \left\{ \gamma^2 \rho_0 - g \frac{\partial \rho_0}{\partial y} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 \right\}$$
(11.28)

Ez az egyenlet megegyezik a 11.17 alatti egyenlettel, ha a perturbálatlan mágneses tér nulla ($\mathbf{B}_0 = 0$).

A 11.17 sajátértékegyenlet analitikusan nem oldható meg, mert minden, az egyenletben szereplő együttható függvénye az y koordinátának. Kvalitatív tulajdonságokat azonban megállapíthatunk a γ növekedési rátára, ha feltesszük, hogy plazmánk egy h magasságú merev falú edényben van, azaz sem y = 0, sem y = h esetében nem engedjük meg a felület fodrozódását, vagyis határfeltételeink a következők:

$$v_{1,y}(0) = v_{1,y}(h) = 0.$$

Szorozzuk be a 11.28 egyenletet $v_{1,y}\text{-}\mathrm{al}$ és integráljuk az $y=[0\ h]$ tartományra!

$$\left[\left\{\gamma^{2}\rho_{0} + \frac{1}{\mu_{0}}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0})^{2}\right\}v_{1,y}\frac{\partial v_{1,y}}{\partial y}\right]_{0}^{h} - \int_{0}^{h}\left[\gamma^{2}\rho_{0} + \frac{1}{\mu_{0}}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0})^{2}\right]\left(\frac{\partial v_{1,y}}{\partial y}\right)^{2}\mathrm{d}y = k^{2}\int_{0}^{h}\left[\gamma^{2}\rho_{0} - g\frac{\partial\rho_{0}}{\partial y} + \frac{1}{\mu_{0}}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}_{0})^{2}\right]v_{1,y}^{2}\mathrm{d}y$$
(11.29)

A kiintegrált rész a határfeltételek miatt eltűnik, azaz γ^2 -et kifejezve kapjuk:

$$\gamma^{2} = \frac{\int_{0}^{h} \mathrm{d}y \left[k^{2} g \frac{\partial \rho_{0}}{\partial y} v_{1,y}^{2} - \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{0})^{2}}{\mu_{0}} \left(k^{2} v_{1,y}^{2} + \left(\frac{\partial v_{1,y}}{\partial y} \right)^{2} \right) \right]}{\int_{0}^{h} \mathrm{d}y \rho_{0} \left[k^{2} v_{1,y}^{2} + \left(\frac{\partial v_{1,y}}{\partial y} \right)^{2} \right]}.$$
 (11.30)

A hidrodinamikai esettel megegyezően, ha $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ mindenhol és a sűrűség gradiens pozitív, akkor $\gamma^2 > 0$, azaz az elrendezés instabil. Ha a sűrűség gradiens mindenhol negatív, kivéve egy keskeny, Δy vastagságú sávot, akkor a rendszer csak ebben a keskeny sávban lesz instabil a kicserélődési instabilitással szemben és az integrált a 11.30 egyenletben közelítőleg el tudjuk végezni: $\gamma^2 \sim g \Delta y \rho_0^{-1} \partial \rho_0 / \partial y$, ahol $\partial \rho_0 / \partial y$ az instabil tartományban vett érték.

Az is látható, hogy véges $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ érték csökkenti az instabilitás erősségét, mert a 11.30 egyenletben a $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ -t tartalmazó tag mindig pozitív, azaz

ez a tag a mínusz miatt γ^2 értékét csökkenti. Akár a rendszer stabilizálódása is bekövetkezhet, ha a mágneses tag kellően erős mágneses tér mellett dominál a gravitációs tag mellet és γ^2 negatívvá válik. Azonban teljes stabilitást a kicserélődési instabilitással szemben ebben a geometriában nem tudunk elérni, mert a k perturbáció (általában termikus fluktuáció) bármilyen szöget bezárhat a mágneses indukcióvektorral, azaz mindig lesz egy olyan k érték, amire $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$ és a rendszer instabil. Ha a mágneses térnek nyírása is van, azaz a **B** vektor *x* tengellyel bezárt szöge az *y* koordináta függvénye, akkor $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ csak egyetlenegy vékony síktartományban lesz nulla, és az instabilitás csak erre a nagyon vékony térrészre fog koncentrálódni. Összefoglalva tehát: az MHD R–T instabilitást a mágneses tér nagysága és nyírása együttesen stabilizálják.

A $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ tag stabilizáló hatásának fizikai okát a 11.27 egyenlet mutatja meg, ahonnan látszik, hogy a v_{1y} perturbációhoz tartozó perturbált B_{1y} mágneses tér $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0$ -lal arányos. Kezdetben a mágneses térnek nem volt yirányú komponense, így a megjelenő y komponens a mágneses tér erővonalainak meggörbülését jelenti. Ha a meggörbítéshez szükséges energia kisebb a folyadékelemek kicserélődése során felszabaduló energiánál, a rendszer instabil lesz.

Ha visszagondolunk arra, hogy plazmák esetében a gravitációs erő pl. a mágneses tér görbületéből eredő erővel helyettesíthető, akkor a 11.30 egyenlet azt állítja, hogy léteznek *kedvező és kedvezőtlen* mágneses térgörbülettel rendelkező tartományok. Kedvező görbületű a tartomány, ha a görbületből eredő erő párhuzamos a nyomásgradienssel, és így a plazmaegyensúly stabil. Értelemszerűen kedvezőtlen a görbület a fordított esetben, azaz ha a görbületből eredő erő ellentétes a nyomásgradienssel, amikor is az egyensúly instabil. Mivel a plazma nyomása a határfelülete felé haladva általában csökken, a kedvező térgörbület egyben azt is jelenti, hogy a plazma felől nézve a határfelület *konkáv*, míg kedvezőtlen térgörbület esetén *konvex*.

A 11.8 egyenletre visszatekintve már érthető, hogy a $(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla P_0)(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa})$ kifejezés felelős ezért az instabilitásért, mivel pont a görbületi vektor és a nyomásgradiens relatív irányát kapcsolja össze.

11.3. A hurokinstabilitás

Ezt az instabilitásfajtát azért hívják hurokinstabilitásnak, mert az instabilitás során egy kezdetben görbületlen plazmacső helikális deformációt szenved, azaz áthurkolja a plazmacső eredeti, nemperturbált tengelyét. Szemléletes képet legkönnyebben *külső* hurokinstabilitásokhoz adhatunk, azok között is az úgynevezett *kihajló* instabilitáshoz. Képzeljünk el egy hosszú, áramjárta plazmafonalat (pl. a Bennett-pinchet)! Ha valamilyen perturbáció következtében a plazmafonal egy kicsit meghajlik, a hajlat belső oldalán az azimutális mágneses tér megnő. Ez ahhoz vezet, hogy ugyanazon a belső oldalon a megnövekedett $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ erő következtében a kihajlás tovább nő, és ez az állapot instabil.

A hurokinstabilitások közé tartozik még – sok más között – az úgynevezett *befűződési* instabilitás is. Ekkor a plazmafonal nem kihajlik, hanem befűződik az instabilitás következtében. Az instabilitást itt is a megnövekedett $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ erő hajtja, ami a perturbációt tovább növeli.

Ha az instabilitást okozó perturbációt az azimutális szög szerint kifejtjük ($\sim \sin m\phi$), akkor a befűződési instabilitáshoz az m = 0 módusszám, a kihajló instabilitáshoz az m = 1 módusszám tartozik (11.4. ábra). Az ábrán látható még az m = 2 módusszámhoz tartozó *filamentációs* instabilitás.

A kvalitatív bemutatás után vizsgáljuk meg részletesebben a belső hurokinstabilitást, azaz tekintsük a 11.8 egyenletben szereplő utolsó tagot!

$$J_{0\parallel}(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \times \hat{z}) \cdot \mathbf{B}_{1\perp} \tag{11.31}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy ez a tag olyan, helikális struktúrájú instabilitást ír le, amit az áram mágneses térrel párhuzamos komponensének gradiense hajt. Az egyszerűség kedvéért legyen $P \rightarrow 0$, azaz ezúttal hanyagoljuk el a nyomás által hajtott instabilitásokat.²²

Vegyük észre, hogy a perturbált mágneses térhez tartozó vektorpotenciál perturbációja (A_1) kifejezhető a perturbálatlan mágneses térrel és a $\boldsymbol{\xi}$ elmozdulásvektorral.

$$\mathbf{A}_1 = \boldsymbol{\xi} imes \mathbf{B}_0$$

Ezt felhasználva a 11.31 kifejezés így írható át:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \frac{J_{0\parallel}}{B_0}.\tag{11.32}$$

Megmutatjuk, hogy véges $A_1 \cdot B_1$ helikális perturbációnak felel meg. Vegyünk fel lokális Descartes-koordinátarendszert úgy, hogy a *z* tengely

²²Ha figyelembe vennénk a plazma nyomását, akkor egy kicserélődési módus is mindenképpen kifejlődne, ami csatolódna a viszgálni kívánt hurokmódushoz, alapvetően megváltoztatva annak főbb tulajdonságait.



11.4. ábra. A hurokinstabilitás legfontosabb típusai

mutasson \mathbf{B}_0 irányába. Ekkor $\mathbf{A}_1 = A_{1x}\hat{x} + A_{1y}\hat{y}$, mivel a vektorpotenciálnak nem lehet z irányú komponense.

$$\mathbf{A}_{1} \cdot \mathbf{B}_{1} = -A_{1x} \frac{\partial A_{1y}}{\partial z} + A_{1y} \frac{\partial A_{1x}}{\partial z}$$
(11.33)

Tegyük fel, hogy A_1 mindkét komponense nemtriviális függvénye znek, azaz legyen pl. $A_{1x} = \text{Re } A_{1x} \exp ikz$ és $A_{1y} = \text{Re } A_{1y} \exp ikz$. Ebben az esetben

$$\mathbf{A}_{1} \cdot \mathbf{B}_{1} = \frac{1}{2} \left[-A_{1x}^{*} \frac{\partial A_{1y}}{\partial z} + A_{1y}^{*} \frac{\partial A_{1x}}{\partial z} \right] = -\frac{k}{2} \operatorname{Re} \left[i (A_{1x}^{*} A_{1y} - A_{1y}^{*} A_{1x}) \right],$$
(11.34)

ami csak akkor lehet véges, ha $A_{1x}^*A_{1y}$ nem tisztán valós. Legegyszerűbb esetben tehát $A_{1y} = iA_{1x}$, vagyis

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = k |A_{1x}|^2$$

és

$$\mathbf{A}_1 = \operatorname{Re}\left[A_{1x}(\hat{x} + \mathrm{i}\hat{y})\exp\mathrm{i}kz\right],$$

ami egy helikális tér, mert $A_{1x} \sim \cos kz$ és $A_{1y} \sim \sin kz$.

Mivel véges $A_1 \cdot B_1$ helikális perturbációt jelent, kézenfekvő a mágneses tér helicitássűrűségét $A \cdot B$ alakban definiálni, amivel a plazma teljes mágneses helicitására a

$$K = \int_{V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \, \mathrm{d}^{3}r \tag{11.35}$$

kifejezés adódik.

Megmutatható, hogy ideális plazmában a teljes helicitás megmaradó mennyiség (nem csak lineáris rendben), azaz minden perturbációra K =állandó. Ebből az következik, hogy ha a mágneses teret $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ alakban, a vektorpotenciált pedig $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ alakban írjuk, akkor

$$K = \int \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \, \mathrm{d}^3 r = \int (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) \cdot \nabla \times (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) \, \mathrm{d}^3 r =$$

=
$$\int \mathbf{A}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_0 \, \mathrm{d}^3 r + \int \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_0 \, \mathrm{d}^3 r +$$

+
$$\int \mathbf{A}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 \, \mathrm{d}^3 r + \int \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 \, \mathrm{d}^3 r$$

(11.36)

A helicitás megmaradása miatt a 11.36 egyenletnek a perturbáció minden rendjében külön-külön is teljesülnie kell, azaz első rendben

$$\int \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_0 \, \mathrm{d}^3 r + \int \mathbf{A}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 \, \mathrm{d}^3 r = 0,$$

másodrendben pedig

$$\int \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{A}_1 \, \mathrm{d}^3 r = \int \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 \, \mathrm{d}^3 r = 0.$$

Ezt az eredményt kell összevetnünk a 11.8 egyenletben szereplő utolsó taggal, azaz $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1 J_{0\parallel}/B_0$ -al, pontosabban annak a plazmatérfogatra vett integráljával. Látszik, hogy mivel $J_{0\parallel}/B_0$ általában valamilyen bonyolult függvénye a térkoordinátának, a 11.8 egyenletben akkor lesz nulla az utolsó tag (azaz nem destabilizáló), ha $J_{0\parallel}/B_0$ állandó, és így az integrál elé kiemelhető ($\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B}_1$ integrálja pedig mindig automatikusan nulla).

Összefoglalva: azok a perturbációk stabilak a kihajló instabilitással szemben, amelyekre $J_{0\parallel}/B_0 = \lambda =$ állandó.²³ Ezt az állítást másképpen felírva (λ -ról μ_0 -t leválasztva)

$$\mu_0 \mathbf{J}_0 = \lambda \mathbf{B}_0,$$

azaz

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \lambda \mathbf{B}_0. \tag{11.37}$$

Ezt az egyenletet erőmentes egyensúlynak hívjuk, és a megoldásai olyan helikális mágneses terek, melyek rotációja párhuzamos magával a térrel. Ha a mágneses tér olyan, hogy erővonalai síkban fekszenek (azaz a tér kétdimenziós), akkor a rotáció mindenképpen ki fog mutatni a felületből, és a 11.37 egyenlet sosem teljesülhet. Az erőmentes egyensúly teljesüléséhez tehát háromdimenziós mágneses térre van szükség.

11.4. A Landau-csillapodás

A kétfolyadékkép tárgyalási keretein belül a plazmában keltett elektrosztatikus hullámok az ütközések elhanyagolása esetén nem csillapodnak, azaz ha egyszer létrejöttek, az idők végezetéig megmaradnak. Ez a 7.22 egyenletből is látszik, amely nem ad számot semmilyen csillapító tényezőről. A valóságban azonban a 7.22 egyenlet pontosításra szorul. Lev Davidovics Landau dolgozta ki azt az elméletet, amely a kinetikus egyenlet felhasználásával korrekciókat tud adni a diszperziós egyenlethez. Érdekességként megemlíthető, hogy Landau már több mint egy évtizeddel a kísérleti igazolás előtt megjósolta, hogy az elektrosztatikus plazmahullámoknak csillapodniuk *kell*.

A 11.5 ábrázol egy hipotetikus plazmarészecskét az elektrosztatikus hullám potenciáljában. Legyen a hullám terjedési sebessége v_f , a plazmarészecskéjé pedig v_p ! Ha $v_f > v_p$, a hullám a részecskét gyorsítani fogja, a

²³Ez egy elégséges, de nem szükséges feltétel, hiszen az energiaintegrál nemnegatív tagjai stabilizálhatják ezt a módus $J_{0\parallel}/B_0 \neq$ állandó esetén is.

részecske a hullám energiájának rovására jut energiához. A hatékony energiacseréhez persze az is kell, hogy v_f ne nagyon különbözzön v_p -től (ún. *rezonancia közeli állapot*), különben a hullám és a részecske relatív mozgásának fázisa időben hamar szétcsúszik, és az energiacsere időben kiátlagolódik. Ha viszont $v_f < v_p$, akkor minden pont fordítva van, a hullám erősödni fog a részecske energiájának rovására.



11.5. ábra. A Landau-csillapodás

Ha a plazmában azonos számú, a hullámnál gyorsabb és a hullámnál lassabb részecske van, akkor összességében a hullámot erősítő, illetve gyengítő hatás kiegyeníti egymást. Plazmában azonban a részecskék sebesség-eloszlása (legtöbbször) a 11.38 szerinti Maxwell-eloszlás, tehát a hullám ekkor gyengülni fog.

11.4.1. A kinetikues egyenlet Fourier-analízise

Idézzük fel a plazmahullámok tárgyalásánál követett eljárásunkat! (1) – az egyenleteket linearizáltuk, (2) – harmonikus perturbációt feltételeztünk, (3) – a differenciálegyenlet-rendszert algebrai egyenletrendszerré alakítottuk és végül (4) – az algebrai egyenletrendszer determinánsának gyökei szolgáltatták a diszperziós relációt.

Próbáljuk most meg ugyanezt az eljárást végigvinni a kinetikus egyenleten! Az egyszerűség kedvéért rendszerünk legyen egydimenziós, csak elektrosztatikus elektromos teret engedjünk meg, és tekintsük az ionokat mozdulatlanoknak! Mivel az ionok mozdulatlanok, minden perturbált mennyiség az elektronokra vonatkozik, azaz mennyiségeinknél az *e* indexet elhagyhatjuk.

Az egyensúlyi elektroneloszlás legyen maxwelli

$$f_0(v) = n_0 \frac{1}{\pi^{1/2} v_T} \exp\left(-v^2/v_T^2\right),\tag{11.38}$$

ahol $v_T \equiv \sqrt{2\kappa T/m!}$

Az egydimenziós kinetikus egyenlet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{q}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$
(11.39)

és linearizált alakja

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{q}{m} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \qquad (11.40)$$

ahol f_1 az eloszlásfüggvény perturbációja, $f = f_0 + f_1$. Feltéve, hogy a függő változók ~ exp (i $kx - i\omega t$) szerint függenek a tértől és az időtől, a 11.40 egyenlet így írható:

$$-i(\omega - kv)f_1 - ik\phi_1 \frac{q}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \qquad (11.41)$$

amit f_1 -re megoldhatunk

$$f_1 = -\frac{k}{(\omega - kv)} \frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \phi_1.$$
(11.42)

Az elektronsűrűség perturbációja ezek után

$$n_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dv = -\frac{q}{m} \phi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{(\omega - kv)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv.$$
(11.43)

A Poisson-egyenletből kaphatunk még egy összefüggést n_1 és ϕ_1 között

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = -\frac{n_1 q}{\varepsilon_0},\tag{11.44}$$

vagy $\partial/\partial x$ -t ik-val helyettesítve

$$k^2 \phi_1 = \frac{n_1 q}{\varepsilon_0}.\tag{11.45}$$

A 11.43 és a 11.45 egyenletek kombinálásával a diszperziós relációt kapjuk

$$1 + \frac{q^2}{k^2 m \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{(\omega - kv)} \frac{\partial f_0}{\partial v} \mathrm{d}v = 0.$$
 (11.46)

Ezt az egyenletet elegánsabb formába írhatjuk, ha behelyettesítjük f_0 11.38 alatti alakját és bevezetjük a $\xi = v/v_T$ dimenziótlan részecskesebességet és az $\alpha = \omega/kv_T$ dimenziótlan fázissebességet:

$$1 - \frac{1}{2k^2 \lambda_D^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi - \alpha)} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\xi^2} d\xi = 0.$$
 (11.47)

Az elektron szuszceptibilitását

$$\chi = -\frac{1}{2k^2\lambda_D^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi - \alpha)} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\xi^2} \mathrm{d}\xi$$

alakban definiálva 11.47 a már ismerős

$$1 + \chi = 0$$

alakot ölti.

Ezzel a számolással azonban távolról sem oldottuk még meg a feladatot, mert a 11.47 egyenletben szereplő integrál $\xi = \alpha$, azaz $\omega = kv_T$ esetén nem értékelhető ki. Ha visszaemlékszünk, lényegében ugyanezzel a problémával már találkoztunk a kétfolyadékképben, amikor is diszperziós relációnk értelmét vesztette, ha ω/k összemérhető volt a termikus sebességgel, $\sqrt{\kappa T/m}$ -mel.

Érdemes megjegyezni, hogy míg kétfolyadékképben a kinetikus egyenlet három momentumára és a Poisson-egyenletre volt szükségünk, addig most elegendő volt a kinetikus (Vlaszov-) és a Poisson-egyenletek felhasználása, ami alátámasztja azt az amúgy is ismert tényt, hogy a kinetikus egyenlet egymagában is elegendő a rendszer leírásához.

11.4.2. A Laplace-transzformáció

Landau jött rá arra, hogy az imént bemutatott Vlaszov–Poisson-problémát nem *sajátérték*, hanem *kezdetiérték*-problémaként kell kezelni. Kezdetiértékproblémák megoldásához pedig nem a Fourier-, hanem a Laplacetranszformáció nyújt megfelelő eszközt.

Vázlatosan tekintsük át a Laplace-transzformáció főbb jellemzőit!

Egy $\psi(t)$ függvény Laplace-transzformáltja a következő (*p* komplex szám):

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^\infty \psi(t) e^{-pt} \mathrm{d}t.$$
(11.48)

Azokban az esetekben, amikor $\psi(t)$ exponenciálisan növekvő tagokat tartalmaz, elővigyázattal kell eljárni.

Tegyük fel, hogy $t \to \infty$ esetén $\psi(t) \sim \exp(\gamma t)$ szerint divergál, azaz γ a leggyorsabban növekvő kitevő ψ -ben. Ebből rögtön következik, hogy a 11.48 integrálnak csak akkor van értelme, ha megkötést teszünk p valós részére, mégpedig azt, hogy Re $p > \gamma$. Hogy ezt ne felejtsük el, a Laplace-transzformációt explicite így definiáljuk:

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^\infty \psi(t) e^{-pt} \mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Re} p > \gamma.$$
(11.49)

Szükségünk lesz még a $\psi(p)$ függvény inverz Laplace-transzformáltjára, g(t)-re is.

$$g(t) = \int_C \tilde{\psi}(p) e^{pt} \mathrm{d}p \tag{11.50}$$

Itt az integrálás C kontúrjának megválasztásakor tekintettel kell lenni arra, hogy a kontúr csak azokat a tartományokat járhatja be, ahol $\tilde{\psi}(p)$ értelmezett, azaz ahol Re $p > \gamma$. Egy lehetséges integrálási kontúr az úgynevezett *Bromwich-kontúr*, ahol p valós részét állandóan tarjuk $\beta > \gamma$ értéken, a komplex résszel pedig végighaladunk $-i\infty$ -től $+i\infty$ -ig. Ha $\tilde{\psi}(p)$ -nek a 11.49 alatti kifejezést vesszük, akkor az inverz Laplace-transzformáció (egy rövid levezetést átugorva):

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \tilde{\psi}(p) e^{pt} dp, \qquad \beta > \gamma.$$
(11.51)

Mielőtt áttérnénk a fizikára, megemlítjük a Laplace-transzformáció egy másik fontos tulajdonságát is. ψ időderiváltjának, $d\psi/dt$ -nek ugyanis parciális integrálás után nagyon egyszerűen számítható a transzformáltja:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t = [\psi(t)\mathrm{e}^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty \psi(t)\mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t = p\tilde{\psi}(p) - \psi(0).$$
(11.52)

Látható, hogy a $\psi(0)$ kezdeti érték explicite megjelent a transzformáció során, ami mindjárt igazolja is, hogy miért Laplace-transzformáció kell a kezdetiérték-problémákhoz.

11.4.3. A kinetikus egyenlet Landau-féle analízise

Legyen a részecskék sebességeloszlása az alábbi Maxwell-eloszlás:

$$f_{\sigma 0}(\mathbf{v}) = n_{\sigma 0} \left(\frac{m_{\sigma}}{2\pi\kappa T_{\sigma}}\right)^{3/2} \exp(-m_{\sigma}\mathbf{v}^2/2\kappa T_{\sigma})!$$
(11.53)

Tegyük fel, hogy t = 0-ban az egyensúlyi elektromos tér nulla, valamint azt, hogy az eloszlásfüggvény időben csak egy kis perturbáció időfüggésén keresztül változik, azaz

$$f_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\sigma 0}(\mathbf{v}) + f_{\sigma 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)!$$
(11.54)

A linearizált kinetikus egyenlet a 11.40 egyenlethez hasonlóan

$$\frac{\partial f_{\sigma 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\sigma 1} - \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \nabla \phi_1 \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$
(11.55)

A függő változók $\sim \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ térbeli függését feltételezve kapjuk:

$$\frac{\partial f_{\sigma 1}}{\partial t} + \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} f_{\sigma 1} - \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \phi_1 \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$
(11.56)

Az időben Laplace-transzformációt végrehajtva

$$(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v}, p) - f_{\sigma 1}(\mathbf{v}, 0) - \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}}\tilde{\phi}_{1}(p)i\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0$$
(11.57)

és $\tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v},p)$ -re megoldva az egyenletet

$$\tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v},p) = \frac{1}{(p+\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})} \left[f_{\sigma 1}(\mathbf{v},0) + \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \tilde{\phi}_{1}(p)\mathbf{i}\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} \right].$$
(11.58)

Ez nagyban hasonlít a 11.42 egyenletre azzal a különbséggel, hogy most az i ω Fourier-változó helyett a komplex *p* Laplace-változó jelent meg az $f_{\sigma 1}(\mathbf{v}, 0)$ kezdeti értékkel együtt. A Poisson-egyenlet a szokásos módon írható:

$$\nabla^2 \phi_1 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} n_{\sigma 1} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int f_{\sigma 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathrm{d}^3 v, \qquad (11.59)$$

majd $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ helyettesítés után

$$k^{2}\tilde{\phi}_{1}(p) = \frac{1}{\varepsilon_{0}} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v}, p) \mathrm{d}^{3}v.$$
(11.60)
Kombinálva a Poisson- és kinetikus egyenletek fenti alakjait kapjuk:

$$k^{2}\tilde{\phi}_{1}(p) = \frac{1}{\varepsilon_{0}}\sum_{\sigma}q_{\sigma}\int\left[\frac{f_{\sigma1}(\mathbf{v},0) + \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}}\tilde{\phi}_{1}(p)\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\frac{\partial f_{\sigma0}}{\partial\mathbf{v}}}{(p+\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\right]\mathrm{d}^{3}v.$$
 (11.61)

Ezt $\tilde{\phi}_1(p)$ -re megoldva

$$\tilde{\phi}_1(p) = \frac{S(p)}{N(p)} \tag{11.62}$$

adódik, ahol az S(p) számláló és az N(p) nevező az alábbi alakú:

$$S(p) = \frac{1}{k^2 \varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \frac{f_{\sigma 1}(\mathbf{v}, 0)}{(p + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} d^3 v, \qquad (11.63)$$

$$N(p) = 1 - \frac{1}{k^2 \varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \frac{q_{\sigma}^2}{m_{\sigma}} \int \frac{\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}}}{(p + \mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \mathrm{d}^3 v.$$
(11.64)

Ezek után már "csak" a

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{S(p)}{N(p)} e^{pt} dp$$
(11.65)

inverz Laplace-transzformációt kell végrehajtani, és máris megkaptuk a keresett végeredményt. A 11.65 egyenletben az integrálási határoknál β -t úgy kell megválasztani, hogy az nagyobb legyen az $\frac{S(p)}{N(p)}$ kifejezésben exponenciálisan leggyorsabban növekvő tagnál.

A most bemutatott formális megoldás szerint $\phi_1(t)$ a valoságban az integrandus komplexitása miatt nem értékelhető ki, de szerencsére a Landau csillapodás szempontjából elegendő $\phi_1(t)$ időben aszimptotikus viselkedését ismerni, ami viszont analitikusan számolható.

Részletes levezetés helyett most csak a főbb lépéseket ismertetjük.

A 11.65 egyenletben szereplő indegrandust a komplex függvénytanból ismert *reziduum tétel* segítségével értékeljük ki. Ehhez elvileg az integrandus összes pólusát, azaz N(p) zérushelyeit ismerni kell. Az N(p) = 0egyenlet a szuszceptibilitások segítségével az alábbi, már ismerős alakban is írható:

$$N(p) = 1 + \chi_e + \chi_i = 0, \qquad (11.66)$$

ahol

$$\chi_{\sigma} = \frac{1}{2k^2 \lambda_D^2} [1 + \alpha Z(\alpha)]. \tag{11.67}$$

Itt bevezettük – 11.47-hez hasonlóan – az $\alpha = ip/kv_{T\sigma}$ és $\boldsymbol{\xi} = v/v_{T\sigma}$ változókat, és $Z(\alpha)$ a plazma *diszperziós függvénye*.

$$Z(\alpha) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\boldsymbol{\xi}^2}}{(\boldsymbol{\xi} - \alpha)} \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$$
(11.68)

Látható, hogy a 11.66 egyenlet a 7.22 egyenlettől eltérően komplex együtthatójú, és így – általában – komplex gyökei vannak a most komplex $\omega = ip$ "frekvencia" síkon.

Kiértékelve a plazma diszperziós függvényét $|\alpha| \gg 1$ esetre (adiabatikus határeset) a szuszceptibilitásokra az alábbi kifejezés adódik:²⁴

$$\chi_{\sigma} = -\frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2} \left(1 + 3\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\kappa T_{\sigma}}{m_{\sigma} + \dots} \right) + i\frac{\omega}{kv_{T\sigma}} \frac{\pi^{1/2}}{k^2 \lambda_D^2} exp(-\omega^2/k^2 v_{T\sigma}^2).$$
(11.69)

Mivel $\omega_{pe} \gg \omega_{pi}$, a 11.66 diszperziós egyenletben az ionok járulékát elhanyagoljuk és így kapjuk a komplex $\omega = \omega_r + i\omega_i$ gyökökre:

$$\omega_r^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + 3 \frac{k^2}{\omega_r^2} \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) \simeq \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2),$$

$$\omega_i = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{De}^3} \exp\left[-(1 + 3k^2 \lambda_{De}^2)/2k^2 \lambda_{De}^2 \right].$$
(11.70)

Korábban, a kétfolyadékképben a hullámok frekvenciája tisztán valós volt, ezért $\exp -i\omega t$ időfüggést feltételezve a hullámok nem csillapodtak. Most a pontosabb analízis megmutatta, hogy a frekvencia valójában komplex, tehát a hullámok amplitúdója $\exp -|\omega_i|t$ szerint lecseng. Számítsuk ki, milyen gyors ez a lecsengés! A hullám egy periódusideje $\tau = 2\pi/\omega_r$, azaz a csillapítás egy periódusidő alatt $\exp -|\omega_i|/\tau$. A frekvencia valós és képzetes részét 11.70 szerint behelyettesítve a csillapodás $\exp -|\omega_i|/\tau = \exp -(2\pi/6) \sim \exp(-1) \sim 0.3$, ami mindenképpen el nem hanyagolható effektus.

$$Z(\alpha) \simeq i\pi \exp(-\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2\alpha^2}\right).$$

²⁴A diszperziós függvény nagy argumentumokra érvényes közelítő alakja:

12. A plazma egyrészecskés leírása

A jegyzet legelején a plazmát különálló részecskék összességeként mutattuk be. Később megállapítottuk, hogy bár az ütközések a plazmát alkotó részecskék között igen ritkák lehetnek, az elektronok és ionok mozgása mégsem korrelálatlan, mivel a Coulomb-kölcsönhatás hatására olyan belső elektromágneses terek keletkeznek, melyek döntő módon befolyásolják az alkotóelemek mozgását. Ezért tudtunk a kinetikus egyenletből még ütközésmentes plazmákra is folyadékegyenleteket származtatni.

Ebben a fejezetben bemutatjuk a részecskéket kölcsönhatásmentes sokaságként leíró, úgynevezett *egyrészecske*képet. Benne a részecskék a Lorentz-erő hatására, kizárólag külső forrásból származó elektromos és mágneses terekben mozognak.

A Lorentz-erőt tartalmazó mozgásegyenlet analitikus megoldása tetszőleges elektromos és mágneses mezőben lehetetlen feladat. A plazmafizikában azonban szinte mindig megállja a helyét egy alapvető közelítés, éspedig az, hogy az elektromos és mégneses terek mind a tér-, mind az időkoordinátának csak gyenge függvényei. Hogy ez a gyenge függés pontosan mit is jelent, mindjárt látni fogjuk.

Megjegyzendő, hogy ebben a fejezetben $d/dt \underline{\text{nem}}$ a korábban használt konvektív derivált, hanem egyszerű időderivált. A részecskék helyét az $\mathbf{x}(t)$ koordináta, sebességét a $d\mathbf{x}(t)/dt = \dot{\mathbf{x}}(t)$ derivált, gyorsulását pedig a $d\mathbf{v}(t)/dt = \ddot{\mathbf{x}}(t)$ adja meg.

Tekintsük a mozgásegyenletet a Lorentz-erővel!

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{12.1}$$

Ha nincs elektromos tér, a mágneses tér pedig merőleges a részecske sebességére, akkor az egyenlet könnyen integrálható. Koordinátarendszerünk, mint mindig, most is mutasson a mágneses tér irányába!

$$\begin{array}{l}
m\ddot{v}_x = qv_y B\\
m\ddot{v}_y = -qv_x B
\end{array} \tag{12.2}$$

Ez az egyenletrendszer a részecske egy $r_L = mv/qB$ sugarú kör menti ($v^2 = v_x^2 + v_y^2$), $\omega_L = qB/m$ körfrekvenciájú mozgását írja le. Ennél a speciálisnál általánosabb esetben, ha a külső elektromos és mágneses terek időben az ω_L Larmor-frekvenciához, térben pedig az r_L Larmor-sugárhoz viszonyítva lassan változnak, akkor a részecskék mozgása felbontható egy gyors (Larmor-pálya menti) és egy lassú (drift) komponensre. Ehhez a felbontáshoz az a fizikai kép társítható, hogy a gyors komponens tulajdonképpen a körpályán való mozgás, míg a lassú komponens a körpályák középpontjainak lassú sodródása, driftje. Ennek a közelítésnek a neve: *Larmor-centrum* közelítés.

Ennek megfelelően bontsuk tehát fel az $\mathbf{x}(t)$ helyvektort és a $\mathbf{v}(t)$ sebességet! A *gc* alsó index – az angol *guiding center* szavakból – a Larmorcentrumra vonatkozó mennyiségeket jelöli:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{gc}(t) + \mathbf{r}_L(t), \quad \mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_{gc}(t) + \mathbf{v}_L(t).$$
(12.3)

Használjuk fel azt a kitételt, hogy a elektromos és mágneses terek térben lassan változnak, és fejtsük sorba a térerősséget illetve az indukcióvektort a részecske pillanatnyi helye körül!

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t) + \mathbf{r}_L(t)) \approx \mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla)\mathbf{E}$$
(12.4)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t) + \mathbf{r}_L(t)) \approx \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla)\mathbf{B}$$
(12.5)

Beírva a 12.3 és a 12.5 egyenletekben szereplő felbontásokat a 12.1 egyenletbe:

$$m\frac{\mathrm{d}[\mathbf{v}_{gc}(t) + \mathbf{v}_{L}(t)]}{\mathrm{d}t} = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{r}_{L}(t) \cdot \nabla \mathbf{E}\right] + q \left[\mathbf{v}_{gc}(t) + \mathbf{v}_{L}(t)\right] \times \left[\mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{r}_{L}(t) \cdot \nabla \mathbf{B}\right].$$
 (12.6)

A feltételezéseink szerint a Larmor-mozgásra vonatkozó $\mathbf{v}_L(t)$ sebesség éppen az alábbi Larmor-egyenlet megoldása.

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_L(t)}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{v}_L(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t))$$
(12.7)

Levonva ezt az egyenletet a 12.6 egyenletből:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{gc}(t)}{\mathrm{d}t} = q \left[\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{r}_{L}(t) \cdot \nabla \mathbf{E}\right] + q \{\mathbf{v}_{gc}(t) \times \left[\mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{r}_{L}(t) \cdot \nabla \mathbf{B}\right] + \mathbf{v}_{L}(t) \times \mathbf{r}_{L}(t) \cdot \nabla \mathbf{B}\}.$$

Ahhoz, hogy csak a Larmor-centrumra vonatkozó, a centrum lassú mozgását leíró egyenletet kapjunk, ezt az egyenletet időben ki kell átla-

golnunk egy Larmor-pályán való körülfordulásra. A Larmor-mozgást elsőrendben tartalmazó tagok időátlaga természetesen nulla.

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{gc}(t)}{\mathrm{d}t} = q\left[\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{v}_{gc}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \langle \mathbf{v}_L(t) \times \mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla \mathbf{B} \rangle\right]$$
(12.8)

Bontsuk fel a Larmor-centrum sebességét a mágneses térrel párhuzamos, és arra merőleges komponensekre! A driftsebesség megjelenését – a driftáramlásokhoz hasonló módon – most is a térre merőleges komponensben várjuk.

$$\mathbf{v}_{gc}(t) = \mathbf{v}_{\perp gc}(t) + v_{\parallel gc}(t)\hat{z}$$
(12.9)

A felbontást beírva a 12.8 egyenletbe, 12.8 bal oldala így alakul:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(v_{\parallel gc}(t)\hat{z}\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_{\parallel gc}(t)}{\mathrm{d}t}\hat{z} + \frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}t}v_{\parallel gc}(t).$$
(12.10)

A mágneses tér időderiváltját tartalmazó tagot külön is meg kell vizsgálnunk. Paraméterezzük a mágneses teret az erővonal mentén mért *s* ívhosszal. Akkor

$$\frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_{\parallel gc}(\hat{z}\cdot\nabla)\hat{z},$$
$$\frac{\mathrm{d}\hat{z}}{\mathrm{d}s} = (\hat{z}\cdot\nabla)\hat{z}.$$

mivel

.

(.)

Ezt felhasználva a 12.8 egyenlet már könnyen párhuzamos és merőleges komponensekre bontható.

$$m\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_{\parallel gc}(t)}{\mathrm{d}t}\hat{z} + v_{\parallel gc}^{2}(t)\hat{z}\cdot\nabla\hat{z}\right] = q\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + q\mathbf{v}_{gc}(t)\times\mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + q\langle\mathbf{v}_{L}(t)\times\mathbf{r}_{L}(t)\cdot\nabla\mathbf{B}\rangle \quad (12.11)$$

A párhuzamos komponens

$$m\frac{\mathrm{d}v_{\parallel gc}(t)}{\mathrm{d}t}\hat{z} = q\left[\hat{z}E_{\parallel}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \langle \mathbf{v}_{L}(t) \times \mathbf{r}_{L}(t) \cdot \nabla \mathbf{B} \rangle_{\parallel}\right], \qquad (12.12)$$

míg a merőleges komponens

$$m\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{\mathrm{d}t} + v_{\parallel gc}^{2}\hat{z}\cdot\nabla\hat{z}\right] = q\left[\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{v}_{gc}(t)\times\mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \langle\mathbf{v}_{L}(t)\times\mathbf{r}_{L}(t)\cdot\nabla\mathbf{B}\rangle_{\perp}\right].$$
 (12.13)

A 12.13 egyenletet a driftáramlásoknál megismert módszerrel fogjuk kiértékelni. Az egyenlet átrendezhető az alábbi alakra:

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_{\perp} + q\mathbf{v}_{gc} \times \mathbf{B},$$
(12.14)

ahol

$$\mathbf{F}_{\perp} = q \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + q \langle \mathbf{v}_L(t) \times \mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla \mathbf{B} \rangle_{\perp} + v_{\parallel gc}^2 \hat{z} \cdot \nabla \hat{z}.$$
(12.15)

A feltételezéseink szerint $\mathbf{v}_{\perp gc}(t)$ időváltozása lassú, tehát a 12.15 egyenlet bal oldalán az időderivált nulladrendben elhagyható. Az így kapott egyenletet B-vel vektoriálisan szorozva a driftsebesség nulladrendben kifejezhető:

$$\mathbf{v}_{\perp gc0} = rac{\mathbf{F}_{\perp} imes \mathbf{B}}{qB^2}.$$

Elsőrendű korrekciót kapunk, ha a driftsebességet $\mathbf{v}_{\perp gc} = \mathbf{v}_{\perp gc0} + \mathbf{v}_{\perp gc1}$ alakban keresük, ahol $\mathbf{v}_{\perp gc1}$ kicsi $\mathbf{v}_{\perp gc0}$ -hoz képest. Ekkor

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp gc0}}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{v}_{\perp gc1} \times \mathbf{B}.$$

Ismét a mágneses térrel vektoriálisan szorozva a $\mathbf{v}_{\perp gc1}$ kis korrekció kifejezhető

$$\mathbf{v}_{\perp gc1} = -\frac{m}{qB^2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_{\perp gc0}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{B}$$

Ennek a lineáris rendű kis korrekciónak a neve ebben az esetben is – miként a driftáramlásoknál – *polarizációs* drift. A 12.15 egyenlet jobb oldalán három tag áll. Az első tagból eredő drift az $E \times B$ drift, a harmadik tagból eredő drift a *görbületi* drift.

Értékeljük most ki az a 12.15 egyenlet jobb oldalának középső tagját! Az ebből a tagból eredő driftet, mivel benne a mágneses tér gradiense szerepel, az egyrészecskeképben *gradB* driftnek hívjuk.

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = q \langle \mathbf{v}_L(t) \times \mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla \mathbf{B} \rangle_\perp \tag{12.16}$$

Koordinátarendszerünk z tengelye természetesen a mágneses tér irányába mutat, és az x tengelyt vegyük fel úgy, hogy t = 0-ban a Larmorsebesség éppen x irányú legyen. Ekkor a Larmor-sebesség

$$\mathbf{v}_L(t) = v_L[\hat{x}\cos\omega_L t - \hat{y}\sin\omega_L t]$$

és

$$\omega_L = \frac{qB}{m}$$

a Larmor-frekvencia. A részecske koordinátája a Larmor-pályán

$$\mathbf{r}_L(t) = \frac{v_L}{\omega_L} [\hat{x} \sin \omega_L t + \hat{y} \cos \omega_L t]$$

Ezeket a kifejezéseket a 12.16 egyenletbe írva:

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = q \frac{v_L^2}{\omega_L} \langle [\hat{x} \cos \omega_L t - \hat{y} \sin \omega_L t] \times ([\hat{x} \sin \omega_L t + \hat{y} \cos \omega_L t] \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle.$$

Mivel $\langle \cos^2 \omega_L t \rangle = \langle \sin^2 \omega_L t \rangle = 1/2$, de $\langle \cos(\omega_L t) \sin(\omega_L t) \rangle = 0$, és $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, a 12.16 egyenlet elnyeri végső alakját:

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = -\frac{mv_L^2}{2B}\nabla B. \tag{12.17}$$

A gradB drift ezek után:

$$\mathbf{u}_{\nabla B} = \frac{\mathbf{F}_{\nabla B} \times \mathbf{B}}{qB^2} = -\frac{mv_L^2}{2qB^3} \nabla B \times \mathbf{B}.$$
 (12.18)

Összegyűjtve az imént származtatott drift értékeket, az alábbi kifejezéseket kapjuk – ebben a sorrendben – az $E \times B$, a gradB, a görbületi és a polarizációs driftekre:

$$\mathbf{u}_{E\times B} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} \tag{12.19}$$

$$\mathbf{u}_{\nabla B} = -\frac{mv_{L0}^2}{2qB^3} \nabla B \times \mathbf{B}$$
(12.20)

$$\mathbf{u}_{c} = \frac{mv_{\parallel gc}^{2}}{qB^{2}}\hat{z} \cdot \nabla \hat{z} \times \mathbf{B} = \frac{1}{qB^{2}} \left(\frac{mv_{\parallel gc}^{2}\hat{R}}{R}\right) \times \mathbf{B}$$
(12.21)

$$\mathbf{u}_{P} = -\frac{m}{qB^{2}} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{u}_{E} + \mathbf{u}_{\nabla B} + \mathbf{u}_{c}) \right] \times \mathbf{B}$$
(12.22)

Összevetve ezeket a kifejezéseket a 13.7 egyenletben szereplő tagokkal az azonosság azonnal látszik, kivéve hogy most nem jelent meg a diamágneses áramláshoz tartozó drift. Ez nem is csoda, hiszen a diamágneses áramlást a plazma nyomásának gradiense okozza, márpedig egyrészecskeképben a nyomás fogalma értelmezhetetlen.

12.1. A mágneses momentum megmaradása

A Larmor-centrum közelítés egy másik (a driftek meghatározása mellett) alkalmazása a részecskék mágneses momentumának megmaradása. Képzeljük magunkat egy v_{\perp} sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe. Ebben a rendszerben a részecske mágneses térre merőleges sebessége csak a Larmor-mozgásból ered, mert a driftsebesség térre merőleges komponensét a vonatkoztatási redszer megválasztásával "kitranszformáltuk".

Mivel v_{\perp} merőleges a mágneses térre, ezért a párhuzamos mozgásegyenletet nem befolyásolja a vonatkoztatási rendszer megválasztása:

$$m\frac{\mathrm{d}v_{\parallel}}{\mathrm{d}t} = qE_{\parallel} - \frac{mv_L^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial s}.$$
(12.23)

Itt *s* a szokásos módon a mágneses erővonal menti ívhosszat jelöli. Az egyenletet v_{\parallel} -sal szorozva energiaegyenletet kapunk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{m v_{\parallel}^2}{2} \right) = q E_{\parallel} v_{\parallel} - \frac{m v_L^2}{2B} v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s}.$$
(12.24)

Most szorozzuk skalárisan a Lorentz-egyenletet a v sebességgel!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \frac{mv_L^2}{2} \right) = qE_{\parallel}v_{\parallel} + q\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}, \qquad (12.25)$$

ahol \mathbf{v}_{\perp} a Larmor-pálya sebességvektora és $v_L = \sqrt{\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp}}$ ennek abszolútértéke. A 12.24 egyenletből a 12.25 egyenletet levonva kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv_L^2}{2}\right) = q\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} + \frac{mv_L^2}{2B}v_{\parallel}\frac{\partial B}{\partial s}.$$
(12.26)

Integráljuk a Larmor-pályára a Faraday-törvényt! (Mozgó vonatkoztatási rendszerünkben a mágneses tér *teljes időderiváltja* miatt örvényes elektromos tér keletkezik.)

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$
(12.27)

vagy

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\pi r_L^2 \frac{\partial B}{\partial t}.$$
(12.28)

Az integrálásnál figyelembe vettük, hogy a mágneses tér elegendően lassan változik ahhoz, hogy egy körülfordulás alatt a Larmor-pálya sugarát állandónak vegyük.

A 12.26 egyenlet tartalmazza a lokális \mathbf{E}_{\perp} elektromos teret, de a 12.28 egyenlet csak a vonalintegrálját adja meg. Átlagoljuk tehát az elektromos tér által a töltésen végzett $q\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} dt$ munkát a Larmor-pályára!

$$\langle q\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} \rangle_{pálya} = \frac{\omega_c}{2\pi} \int q\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} dt = -\frac{q\omega_c}{2\pi} \oint \mathbf{E}_{\perp} d\mathbf{l} = \frac{q\omega_c}{2} r_L^2 \frac{\partial B}{\partial t}$$
 (12.29)

Itt a $\mathbf{v}_{\perp} dt = -dl$ helyettesítéssel éltünk, mivel a részecskék mozgása diamágneses jellegű (az ionok mozgása "balkezes", a Stokes-tételben pedig az ívelem "jobbkezes"). Ezzel az eredménnyel a 12.26 egyenlet így alakul:

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{mv_L^2}{2} \right) \right\rangle_{p\acute{a}lya} = \frac{mv_L^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{mv_L^2}{2B} v_{\parallel} \frac{\partial B}{\partial s} = \frac{mv_L^2}{2B} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$
 (12.30)

Itt $\frac{dB}{dt}$ a töltés által érzékelt mágneses tér teljes időváltozása. Bevezetve a Larmor-mozgás $W_{\perp} = mv_L^2/2$ kinetikus energiáját, a 12.30 egyenlet egyszerűen felírható:

$$\frac{1}{W_{\perp}}\frac{\mathrm{d}W_{\perp}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},\tag{12.31}$$

aminek a megoldása

$$\frac{W_{\perp}}{B} \equiv \mu = \text{állandó.}$$
(12.32)

A μ mennyiséget a plazmafizikában *első adiabatikus invariáns*nak hívják, és egyszerűen megmutatható, hogy pontosan egyenlő a Larmorpályán keringő részecske m mágneses momentumával. Ugyanis egy r_L sugarú körön keringő q töltésű részecske $I = q\omega_c/2\pi$ áramerősségű áramhurkot hoz létre, aminek a felülete $A = \pi r_L^2$.

$$\mathbf{m} = \left(\frac{q\omega_c}{2\pi}\right)\pi r_L^2 = \frac{mv_L^2}{2B} = \mu$$

12.1.1. A mágneses tükör

Tekintsünk egy statikus, de helytől függő mágneses térben mozgó részecskét! A tér inhomogenitása legyen olyan, hogy a mágneses indukcióvektor nagysága az erővonal mentén változzon, azaz legyen $\partial B/\partial s \neq 0$. Könnyű belátni, hogy egy ilyen tér erővonalai nem lehetnek egyenesek, mert a $\mathbf{B} = B_z(z)\hat{z}$ alakban felvett mágneses tér divergenciája nem zérus. Az erővonalak tehát ezeknél a tereknél szükségképpen görbültek, és a legegyszerűbb, megengedhető mágneses tér $\mathbf{B} = B_z\hat{z} + B_r\hat{r}$ alakú (\hat{r} egy \hat{z} -ra merőleges egységvektor).

Statikus mágneses tér esetében $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, amiből következően $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, és a 12.23 egyenlet így írható:

$$m\frac{\mathrm{d}v_{\parallel}}{\mathrm{d}t} = -q\frac{\partial\phi}{\partial s} - \mu\frac{\partial B}{\partial s}.$$
(12.33)

Az egyenlet v_{\parallel} -sal való szorzása után kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{m v_{\parallel}^2}{2} + q\phi + \mu B \right] = 0.$$
(12.34)

Feltéve, hogy az elektrosztatikus potenciál időben állandó,

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + q\phi(s) + \mu B(s) = \text{állandó}$$
(12.35)

adódik. Ebből a kifejezésből az következik, hogy a $\mu B(s)$ mennyiség egyfajta effektív potenciálként viselkedik, mivel hozzáadódik az elektrosztatikus potenciál $q\phi(s)$ energiájához. A 12.35 egyenletből az is következik, hogy ha nincs is elektrosztatikus tér, a részecskék akkor is csapdázódni tudnak két erős mágneses terű tartomány között. Ilyen csapdázásra alkalmas mágneses térszerkezetet előállíthatunk például két, egymástól kissé eltávolított koaxiális tekerccsel. A mágneses térnek a tekercsek közepénél maximuma, a tekercsek között félúton pedig minimuma lesz.

Tegyük fel tehát, hogy nincs elektrosztatikus tér és így

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu B(s) = \text{állandó.}$$
(12.36)

Legyen a részecske a t = 0 időpontban az $s_0 = 0$ helyen, ami legyen éppen a minimális mágneses indukcióval bíró pont. Ekkor egy későbbi időpontra és pozícióra fennáll ez az egyenlet:

$$\frac{mv_{\parallel}^2(s)}{2} + \mu B(s) = \frac{mv_{\parallel 0}^2(s)}{2} + \mu B(s_0) = \frac{m(v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2)}{2} = W_0, \quad (12.37)$$

ahol W_0 a részecske teljes kinetikus energiája t = 0-kor. Ennek az egyenletnek a származtatásánál felhasználtuk, hogy $v_{\perp} = v_L$, azaz a Larmorsebesség megegyezik a merőleges irányú sebességgel. A 12.37 egyenletet rendezve a párhuzamos sebességre kapjuk:

$$v_{\parallel}(s) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[W_0 - \mu B(s)]}.$$
 (12.38)

Ha az erővonal mentén valahol $\mu B(s) = W_0$, akkor a párhuzamos sebességnek ugyanitt el kell tűnnie. Mivel ez egy instabil helyzet, a részecske párhuzamos sebességének előjelet kell váltania és a részecske elindul visszafelé. Olyan ez, mint amikor egy inga két maximális potenciális energiájú pont között oszcillál úgy, hogy potenciális és kinetikus energiáinak összege állandó.

A mágneses momentum megmaradásából az következik, hogy ha a részecske növekvő mágneses terű tartományon halad keresztül, akkor Larmor-sebességének is meg kell nőnie. A megfordulási pontot (ha van) az jellemzi, hogy a részecske teljes kinetikus energiája a mágneses térre merőleges mozgásában koncentrálódik. Tehát a $\mu B(s) = W_0$ megfordulási feltétel csak olyan részecskékre teljesülhet, amelyek kezdeti ($s_0 = 0$ -beli) párhuzamos sebessége "nem túl nagy" a merőleges sebességhez képest, hiszen a párhuzamos sebbességnek "el kell fogynia", mire a részecske a fordulóponthoz ér. Azok a részecskék, amelyek párhuzamos sebessége nagyobb a küszöbértéknél, nem fordulnak vissza, hanem áthaladnak a maximális mágneses terű térrészen.

A maximális és minimális mágneses indukció arányára kapjuk:

$$\frac{B_{min}}{B_{max}} < \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}.$$
(12.39)

Ha a részecske teljes kezdeti sebessége v_0 , és sebességvektora θ szöget zár be a mágneses erővonalakkal, akkor $v_{\parallel} = v_0 \sin \theta$ és $v_{\perp} = v_0 \cos \theta$, amiből a párhuzamos és merőleges sebességek aránya a θ szöggel egyértelműen jellemezhető. Ekkor a kritikus szögre a

$$\theta_{befogott} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{B_{min}}{B_{max}}}$$
(12.40)

érték adódik. Az ennél élesebb szögben haladó részecskék vissza fognak verődni a maximális mágneses indukciójú ponton, az ennél tompább szögben haladók viszont áthaladnak rajta.

Azt a mágneses konfigurációt, amelyben a részecskék az előbb leírt módon csapdázhatók, *mágneses tükör* elrendezésnek hívjuk.

13. Driftáramlások II

Ebben a fejezetben visszatérünk a driftáramlásokra, mert az egyrészecske driftek birtokában az áramlások újabb részleteit tárhatjuk fel.

Az egyrészecske driftek meghatározásánál a Lorentz-egyenlet rendezésére két paramétert használtunk: a Larmor-frekvencia arányát a tipikus időskálához és a Larmor-sugár arányát a tipikus térskálához. A driftáramlásoknál pedig a következő rendezési paramétereink (6. fejezet) voltak: a ciklotronfrekvencia viszonya a jellemző időskálához ($\delta_T = (\omega_{c\sigma} \cdot T_{skála})^{-1}$) és ugyancsak a ciklotronfrekvencia aránya ahhoz az időhöz, ami alatt a plazmafolyadék megteszi a tipikus térskálához tartozó utat ($\delta_L = (\omega_{c\sigma} \cdot L_{skála}/u_{\sigma})^{-1}$).

Belátható – de most bizonyítás nélkül adjuk meg –, hogy a korrekt driftrendezési eljárás keretében nemcsak az egyenleteket, hanem a plazma nyomástenzorát is rendeznünk kell a térbeli rendező paraméter, δ_L szerint, és figyelembe kell vennünk a δ_L rendű tagokat (de a magasabb rendűeket nem). Ekkor a nyomástenzorra a tagokat a rendező paraméter másodrendéig megtartva az alábbi kifejezés kapható:

$$\mathbf{P} = P\mathbf{I} + \left[\mathbf{P}_{CGL} - P\mathbf{I}\right]_1 + \left[m_{\sigma}n_{\sigma}\mathbf{u}_{\sigma}\mathbf{u}_{\sigma} + \mathbf{\Pi}\right]_2, \qquad (13.1)$$

ahol I az egységtenzor, Π a már ismert nyírási tenzor, \mathbf{P}_{CGL} pedig az úgynevezett Chew–Goldberger–Lowe-nyomástenzor, ami kifejezi azt, hogy mekkora a nyomáskülönbség a mágneses térrel párhuzamos és arra merőleges irányokban. Szokásos módon lokális derékszögű koordinátarendszert felvéve a CGL-nyomás így írható:

$$\mathbf{P}_{CGL} = P_{\perp} \mathbf{I} + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \hat{z} \hat{z} = \begin{pmatrix} P_{\perp} & 0 & 0\\ 0 & P_{\perp} & 0\\ 0 & 0 & P_{\parallel} \end{pmatrix}.$$
 (13.2)

Itt P_{\perp} a nyomás merőleges, míg P_{\parallel} a nyomás párhuzamos irányú értéke. A merőleges irányú nyomás a részecskék Larmor-mozgásával kapcsolatos, a párhuzamos irányú nyomás pedig a részecskék térrel párhuzamos sebbességével. Ebből világos, hogy a nyomás-anizotrópia csak a driftrendezés első rendjében, azaz δ_L rendben lesz számottevő, nulladrendben nem. A 13.1 egyenletben a jobb oldali harmadik tag δ_L^2 rendű, ezért a driftáramlásoknál elhanyagolható.

A 13.2 kifejezés indexes irásmódban a következő alakú (a továbbiakban elhagyjuk a CGL megjelölést, úgyis világos, hogy kétindexes nyomástenzor esetén a CGL-nyomásról van szó):

$$P_{ij} = P_{\perp} \delta_{ij} + (P_{||} - P_{\perp}) \hat{z}_i \hat{z}_j,$$
(13.3)

amit helyettesítsünk be az anizotróp nyomáseloszlásból származó driftáramlás-korrekció kiszámításához a 6.4 egyenletbe! A jobb követhetőség kedvéért használjuk az indexes írásmódot!

$$(\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma 0})_l = \left(\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}\right)_l - \frac{\varepsilon_{ljk} B_k \partial_i P_{ij}}{q_\sigma n_\sigma B^2}$$
(13.4)

Ebben a felírásban az $\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma 0}$ jelölést használtuk, hogy nyilvánvalóvá tegyük a különbséget $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ 6.4 alatti értékétől. Foglalkozzunk csak a jobb oldal második tagjának számlálójával!

$$\varepsilon_{ljk}B_k\partial_i P_{ij} = \varepsilon_{ljk}B_k\partial_i (P_\perp \delta_{ij} + (P_{||} - P_\perp)\hat{z}_i\hat{z}_j)$$

Kibontva a zárójeleket a következő tagokat kapjuk:

(1) $\varepsilon_{ljk}B_k\partial_jP_\perp$ (2) $\varepsilon_{ljk}B_k\hat{z}_i\hat{z}_j\partial_iP_{||}$ (3) $\varepsilon_{ljk}B_k\hat{z}_i\hat{z}_j\partial_iP_\perp$ (4) $\varepsilon_{ljk}B_kP_{||}\hat{z}_i\partial_i\hat{z}_j$ (5) $\varepsilon_{ljk}B_kP_\perp\hat{z}_i\partial_i\hat{z}_i$ (6) $\varepsilon_{ljk}B_kP_{||}\hat{z}_j\partial_i\hat{z}_i$ (7) $\varepsilon_{lik}B_kP_\perp\hat{z}_j\partial_i\hat{z}_i$

A (2)–(3) és a (6)–(7) tagok azonosan nullák, mert tartalmaznak egy $(\hat{z} \times \mathbf{B})_l$ tagot, ami nyilván nulla. Szedjük össze a megmaradt tagokat, térjünk vissza a vektoros írásmódra és boncoljuk tovább a 13.4 egyenlet jobb oldalának második tagját!

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_{\sigma} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^{2}} =$$

$$= \frac{\nabla P_{\sigma\perp} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^{2}} + \frac{P_{\sigma\parallel}(\hat{z} \cdot \nabla)\hat{z} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^{2}} - \frac{P_{\sigma\perp}(\hat{z} \cdot \nabla)\hat{z} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^{2}}$$
(13.5)

A jobb oldal első tagjának szintén *diamágneses* drift,²⁵ második tagjának pedig *görbületi* drift a neve. A görbületi drift elnevezést az indokolja, hogy $(\hat{z} \cdot \nabla)\hat{z}$ nem más, mint a mágneses tér κ görbületvektora. Az utolsó tagot még tovább kell boncolnunk, felhasználva a $(\hat{z} \cdot \nabla)\hat{z} = -\hat{z} \times \nabla \times \hat{z}$ azonosságot.

$$\boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B} = (\hat{z} \cdot \nabla)\hat{z} \times \mathbf{B} = -(\hat{z} \times \nabla \times \hat{z}) \times \mathbf{B} = -\hat{z} \times \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{B}\right) = -\hat{z} \times \left[\frac{1}{B}\nabla \times \mathbf{B} + B \times \nabla \left(\frac{1}{B}\right)\right] = \frac{\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{\nabla_{\perp} B}{B} \quad (13.6)$$

Foglaljuk össze a kapott eredményt!

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma 0} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{\nabla P_{\sigma \perp} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2} + \frac{P_{\sigma \parallel} \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2} - \frac{P_{\sigma \perp} \nabla_{\perp} B \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^3} - \frac{P_{\sigma \perp}}{B^2 / \mu_0} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2} \times \mathbf{B}$$
(13.7)

A 6. fejezetben megismert polarizációs driftet is figyelembe véve a driftáramlás sebességének végleges alakja, amely a rendezési paraméter lineáris rendjéig igaz:

$$\mathbf{u}_{\sigma\perp} = \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma\perp0} - \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma}B^2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}_{\sigma0}}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{B}.$$
 (13.8)

Vegyük észre, hogy a polarizációs driftben megtartottuk a nulladrendű 6.4 egyenlet alatti értéket, mivel a polarizációs drift már elsőrendű korrekció, nem vehető bele szintén elsőrendű tag, mert az már másodrendű korrekciókat eredményezne, és nem lenne rendezésünk konzekvens. A 13.7 egyenletben a görbületi drift után álló tényező a mágneses tér abszolútértékének megváltozásából származó, úgynevezett *gradB* \equiv *gradbé* drift. Az utolsó tagnak nincs kanonizált neve, leginkább *bétadrift*nek lehetne hívni, mert kis plazmabéta esetén (azaz amikor a mágneses nyomás sokkal nagyobb a kinetikus nyomásnál) elhanyagolható; véges β esetén azonban szerepet játszik.

A fenti, kétfolyadékképben származtatott driftsebesség kifejezések érdekessége, hogy azok, bár nagyon hasonlítanak az egyrészecske driftekre, nem származtathatóak az egyrészecske driftek összegeként. Ennek oka az, hogy a nyomás nem értelmezhető egyetlen részecskére, és bár a driftek hasonló alakúak, mégis más a fizikai tartalmuk.

²⁵Ez annyiban különbözik a korábban megismert kifejezéstől, hogy benne a merőleges irányú nyomás szerepel. Ez fejezi ki azt a fizikai tényt, hogy a diamágneses drift valójában csak a merőleges nyomás függvénye, azaz független a párhuzamos nyomástól.

14. Függelék

14.1. A Frenet-Serret-triéder

A jegyzetben sok helyen előfordult, hogy vektorokat és egyenleteket a mágneses térrel párhuzamos, illetve arra merőleges komponensekre bontottunk. Felbontásaink a jegyzet keretei között a levezetést és a megértést szolgálták, de konkrét feladatok kiszámításánál az ilyen "szimbolikus" felbontással nem tudnánk célt érni, mivel míg a mágneses térrel párhuzamos felbontás egyértelmű, addig a mágneses térre merőleges síkban végtelen sokféle bázisvektor megadható.

A Frenet–Serret-triéder vagy más néven a Frenet–Serret-rendszer egy olyan ortonormált bázisvektorokból álló koordinátarendszer, amely illeszkedik a mágneses geometriához, és a térrel párhuzamos és arra merőleges vektorkomponenseknek konkrét (persze a sok közül csak egy lehetséges) értelmet ad.

Parametrizáljuk a mágneses tér erővonalait egy, az erővonalon valahol kiválasztott, tetszőleges ponttól az erővonal mentén mért s távolsággal, azaz paraméterezzük az erővonalakat s ívhosszukkal. Ekkor a tér minden r pontjában a mágneses tér $\mathbf{B}(s)$ alakban adott.

Bizonyítás nélkül megadjuk, hogy ekkor

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \hat{z}$$

tangenciális (a mágneses térrel párhuzamos),

$$\hat{\mathbf{n}} = rac{rac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{d}s}}{\left|rac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{t}}}{\mathrm{d}s}
ight|}$$

normális (a mágneses térre merőleges),

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

pedig binormális (mindkét korábbi irányra merőleges) egységvektorok.

A 14.1. ábra szemlélteti az így előálló egységvektorokat. A normális irányú egységvektor nem más, mint a mágneses erővonalak görbületi egységvektora:

$$\hat{\mathbf{n}} = rac{\hat{z}\cdot
abla \hat{z}}{|\hat{z}\cdot
abla \hat{z}|} = \hat{oldsymbol{\kappa}}.$$

Ha a mágneses tér olyan, hogy az erővonalak egy felületben fekszenek (ilyen például egy axiálszimmetrikus plazmakonfiguráció egyensúlyi mágneses tere, 10.4 fejezet), akkor a normális irányú egységvektor (a görbületi vektor) felbontható a felülettel párhuzamos és arra merőleges komponensekre. A párhuzamos komponens neve *geodetikus görbület*, a merőleges komponens neve *normális görbület*. Bebizonyítható, hogy a geodetikus görbület a felszínre jellemző állandó (nyilván a vektor abszolút értéke csak).



14.1. ábra. A Frenet-Serret-rendszer

14.2. Vektorszámítás

A kontinuumok fizikájában általában, így ebben a jegyzetben is léptennyomon felbukkannak vektoralgebrai azonosságok, "trükkös" átalakítások. Az indexes számolásmód lényege, hogy a vektorokat és tenzorokat tartalmazó kifejezéseket, egyenleteket csak egyetlen komponensre írjuk fel, ezáltal a vektorokra vonatkozó összefüggések tulajdonképpen skalárokra vonatkoznak, ami nagyban megkönnyíti kezelésüket.

Tegyük fel, hogy van egy háromdimenziós vektorterünk valamely számtest felett, ebben a vektortérben adott egy $\{e_i\}$, i = 1,2,3 bázis. Ekkor a vektortér tetszőleges v eleme felírható:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} v^{i} \mathbf{e}_{i}$$

alakban. A felbontás egyértelmű és a $\{v^i\}$ számhármast a v vektor $\{e_i\}$ bázisra vonatkozó *kontravariáns komponens*einek nevezzük. Az elne-

vezés okát és matematikai tartalmát könnyen megérthetjük, amennyiben megfontoljuk, hogy miként viselkednek az adott v vektor komponensei, amikor az eredeti $\{e_i\}$ bázisról áttérünk egy másik $\{f_i\}$ bázisra. Természetesen ezen új bázist alkotó három vektor is a vektortér teljesen "legitim" vektora, ezért minden további nélkül kifejezhetők az eredeti $\{e_i\}$ bázisban:

$$\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^3 A_j^i \mathbf{e}_i.$$

Ugyanilyen alapon, mivel $\{\mathbf{f}_i\}$ bázist alkot, az eredeti $\{\mathbf{e}_i\}$ bázisvektorok mindegyike felírható ezen új bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^3 B_k^j \mathbf{f}_j.$$

Helyettesítsük be a fenti kifejezésbe az f_i kifejtését az $\{e_i\}$ bázisban!

$$\mathbf{e}_{k} = \sum_{j=1}^{3} B_{k}^{j} \sum_{i=1}^{3} A_{j}^{i} \mathbf{e}_{i} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} B_{k}^{j} A_{j}^{i} \mathbf{e}_{i}$$

A második egyenlőség után álló kifejezés felfogható úgy, mint egy lineáris kombináció, melynek kifejtési együtthatóit a $\sum_{j=1}^{3} B_k^j A_j^i$ alakban adjuk meg. Az is világos, hogy ezek a bonyolultnak tűnő együtthatók csak két értéket vehetnek fel: 0-át, amennyiben $k \neq i$, illetve 1-et, ha k = i. Ezen tulajdonságokkal bíró kétindexes matematikai objektum nagyon gyakran előfordul a számolásokban, és *Kronecker-delta* néven terjedt el a szakirodalomban. Definíciója tehát:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Ezen jelöléssel: $\delta_k^i = \sum_{j=1}^3 B_k^j A_j^i$. Az előbbi értelmezésből világos, hogy a Kronecker-delta a bázistranszformációk körében az egységelem szerepét tölti be, ebből pedig következik, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Eddig tehát azt állapítottuk meg, hogy az $\{e_i\} \mapsto \{f_i\}$ leképezést az A transzformáció (vagy, ha egy adott reprezentációra gondolunk, mondhatunk transzformációs mátrixot is) végzi. Most az a kérdés, hogy amennyiben egy tetszőleges vektort akarunk transzformálni, milyen leképezést kell alkalmazni. Az állítás az, hogy ezt a transzformációt a B leképezés szolgáltatja, amely az **A** inverze. Ezt könnyen beláthatjuk, ha felírjuk a **v** vektort a két bázisban:

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{3} \tilde{v}^{j} \mathbf{f}_{j},$$

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} v^{i} \mathbf{e}_{i} = \sum_{i=1}^{3} v^{i} \sum_{j=1}^{3} B_{i}^{j} \mathbf{f}_{j} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{\substack{i=1\\\tilde{v}^{j}}}^{3} v^{i} B_{i}^{j} \mathbf{f}_{j}$$

$$\implies \{\mathbf{e}_{i}\} \xrightarrow{\mathbf{A}} \{\mathbf{f}_{i}\} \{v^{j}\} \xrightarrow{\mathbf{B}} \{\tilde{v}^{j}\}.$$

Ezek alapján értelmet nyer a *kontravariáns* kifejezés, hiszen ez nem jelent mást, mint azt, hogy az egyik bázisból egy másik bázisba való áttérés során egy adott vektor komponensei, a bázisvektorokat transzformáló leképezés <u>inverzével</u> transzformálódnak.

Jelen összefoglalónak nem célja a lineáris algebra matematikailag pontos kiépítése, inkább csak emlékeztetni szeretnénk a már ismertnek feltételezett fogalmakra. Ilyen fontos fogalom a duális tér konstrukciója. Egy adott V vektortéren értelmezett $V \mapsto \mathcal{R}$ lineáris leképezések (lineáris formák) szintén vektorteret alkotnak, ez a V*-gal jelölt duális tér. Ebben a V* térben is van bázis, amelyben a duális tér vektorai kifejthetők. Megmutatható, hogy amennyiben az eredeti (direkt) térben áttérünk egyik bázisról a másikra (az A-val), ennek a "mozgásnak" a duális térben is van képe, ám ezt a B valósítja meg. Egy duális térbeli vektor komponensei ennek megfelelően az A-val transzformálódnak báziscsere esetén. Euklideszi vektorterekben értelmezett a skalárszorzat és a norma fogalma, ekkor megmutatható, hogy létezik egy kölcsönösen egyértelmű leképezés (izomorfizmus) az szóban forgó euklideszi vektortér és duálisa között, azaz minden vektornak megfeleltethető egy duális vektor, tehát a vektortér egy bázisához tartozik egy duális bázis, amelynek az izomorfizmus alapján van képe a vektortérben. Ilyen értelemben bármely vektornak definiálhatók a kontravariáns komponensei mellett a kovariáns komponensei is. A kétféle komponensek közötti kapcsolatot a $g_{ij} = \mathbf{e_i} \cdot \mathbf{e_j}$ fundamentális mátrix (metrikus tenzor) adja meg: $v_i = \sum_j g_{ij} v^j$. Az előbbiekből világos, hogy ortonormált bázis esetén $g_{ij} = \delta_{ij}$, ezért a kovariáns és kontravariáns komponensek azonosak! A továbbiakban nem fogunk felső és alsó indexeket használni, amivel feltesszük, hogy vektoraink ortonormált bázisokban vannak megadva. Képleteink egyszerűsítése okán a továbbiakban alkalmazni fogjuk

,

az ún. Einstein-konvenciót, mely szerint szorzatokban előforduló azonos indexekre (néma indexek) automatikusan összegzünk és külön nem jelöljük az összegzést. Például két vektor skalárszorzata:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_i u_j g_{ij} \underbrace{=}_{\text{ortonormált bázisban}} v_i u_j \delta_{ij} = v_i u_i \left(\equiv \sum_i v_i u_i \right).$$

Itt azonnal megjegyezzük, hogy a Kronecker-delta, amint az a fenti képlet harmadik egyenlősége után látható, úgy viselkedik, mint egy *indexcserélő operátor* – $j \rightarrow i$ indexcserét hajt végre az u_j komponensen. Ezen tulajdonságát az indexes számolások során gyakran kihasználjuk.

Foglalkozzunk a továbbiakban háromdimenziós, valós számtest fölötti euklideszi terekkel, jelöljük ezt \mathcal{R}^3 -el! Ezen vektortérben, a vektorok összeadása mellett definiálható az ún. *vektoriális szorzat*, melynek eredménye szintén eleme \mathcal{R}^3 -nek. Ez a $\mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ leképezés bilineáris, antikommutatív, disztributív, *nem asszociatív* és teljesíti a Jacobi-azonosságot. Az ilyen tulajdonságú { \mathcal{R}^3 , +,×} vektortereket Lie-algebráknak is szokták nevezni. Nézzük most, hogy miként járjunk el, amennyiben szeretnénk kiszámítani egy vektoriális szorzat komponenseit az { \mathbf{e}_i }, i = 1,2,3 bázisban!

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \mathbf{e_1} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \mathbf{e_2} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \mathbf{e_3}$$

A vektoriális szorzat ezen különleges antiszimmetrikus tulajdonsága lehetővé teszi, hogy az egyes komponenseket az ún. Levi–Civitaszimbólum (más néven teljesen antiszimmetrikus tenzor²⁶) segítségével kompakt alakban írjuk fel:

$$[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]_i = \varepsilon_{ijk} u_j v_k, \tag{14.1}$$

ahol

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3 \text{ számok páros permutációja} \\ -1, \text{ ha } i, j, k \text{ az } 1, 2, 3 \text{ számok páratlan permutációja} \\ 0, \text{ ha bármely két indexe megegyezik.} \end{cases}$$

²⁶Valójában a Levi–Civita-szimbólum nem is igazi tenzor, hanem *pszeudotenzor*, ugyanis a –1 Jacobi determinánsú ortogonális transzformációk (forgatás + tükrözés) hatására –1-szeresére változik. Ugyanezen oknál fogva szokták a vektorszorzatot magát is pszeudovektornak nevezni.

A Levi–Civita-szimbólum kapcsolatba hozható a Kronecker-delta szimbólummal. Ez az összefüggés gyümölcsözően :alkalmazható azokban az esetekben, amikor kétszeres vektorszorzatokat kell kiszámítanunk

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} =$$
(14.2)

$$=\delta_{il}(\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km})-\delta_{im}(\delta_{jl}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{kl})+\delta_{in}(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}).$$

Ezen általános alak nagymértékben egyszerűsíthető, amennyiben egy, kettő vagy akár mindhárom indexét összeejtjük. Az olvasó gyakorlásképpen ellenőrizheti az alábbi állításokat:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}, \\
\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{imn} &= 2\delta_{ij}, \\
\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 6.
\end{aligned}$$
(14.3)

Ezek után térjünk át a fentiek alkalmazására! A (14.3) összefüggést kamatoztassuk a kettős vektorszorzat kiszámításánál!

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= ? \\ \left[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \right]_i &= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = b_i (a_j c_j) - (a_j b_j) c_i \\ &\longrightarrow \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \end{aligned}$$

Most nézzük, miként működik az indexes számolási mód differenciáloperátorok esetén! Felhasználjuk, hogy formálisan egy vektor rotációja felírható a rot $\mathbf{v} \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ alakban, amivel azt jelöljük, hogy a rotáció algebrai tulajdonságai azonosak a vektoriális szorzatéval, azzal a fontos különbséggel, hogy a rotáció tartalmaz differenciálást. Egy vektor rotációjának *i*-edik komponense tehát $\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k$. Számítsuk most ki egy vektor rotációjának rotációját!

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = ?$$

$$[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})]_{i} = \varepsilon_{ijk}\partial_{j}\varepsilon_{klm}\partial_{l}v_{m} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\partial_{j}\partial_{l}v_{m}$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_{j}\partial_{l}v_{m} = \partial_{i}(\partial_{j}v_{j}) - (\partial_{j}\partial_{j})v_{i}$$

$$\longrightarrow \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^{2}\mathbf{v} \qquad (14.4)$$

A fentiekben kihasználtuk, hogy a v vektor minden komponensének mindenütt létezik a deriváltja és az folytonos, azaz igaz a $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ *Young-tétel*. Végül lássunk még egy nagyon hasznos példát! Indexes írásmódot használva mutassuk meg, hogy fennáll a következő azonosság!

$$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$
(14.5)

Az egyenlőség bal oldala indexesen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}A_{j}\varepsilon_{klm}\partial_{l}B_{m} + \varepsilon_{ijk}B_{j}\varepsilon_{klm}\partial_{l}A_{m} \\ &= \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)A_{j}\partial_{l}B_{m} + \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right)B_{j}\partial_{l}A_{m} \\ &= A_{j}\partial_{i}B_{j} + B_{j}\partial_{i}A_{j} - (A_{j}\partial_{j})B_{i} - (B_{j}\partial_{j})A_{i} \\ &= \partial_{i}(A_{j}B_{j}) - (A_{j}\partial_{j})B_{i} - (B_{j}\partial_{j})A_{i} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

A hidrodinamika alapegyenletében, a Navier–Stokes-egyenletben a konvektív deriváltban fellépő nemlineáris tagot gyakorta szokták átalakítani a fenti azonosság segítségével. Legyen most $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$ ($\mathbf{v} = az$ áramlási sebesség)! Ekkor:

$$2 \cdot \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\mathbf{v}^2) - 2 \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$
$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla(\frac{\mathbf{v}^2}{2}) - \mathbf{v} \times \Omega.$$
(14.6)

14.2.1. A leggyakoribb vektoralgebrai azonosságok

Ebben az alfejezetben összefoglaljuk a legfontosabb és leggyakrabban használt vektoralgebrai azonosságokat.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$(\nabla \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^{2} \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \psi = 0$$

14.3. A deriváltoperátor néhány reprezentációja

1. Descartes-koordinátarendszerben: a koordináták $\{x; y; z\}$

$$\nabla = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x}; \ \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}; \ \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

2. Hengerkoordináta-rendszerben: a koordináták $\{r; \phi; z\}$

$$\nabla = \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r}; \ \frac{\hat{\phi}}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}; \ \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

3. Gömbi koordinátarendszerben: a koordináták $\{r; \theta; \phi\}$

$$\nabla = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}; \ \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}; \ \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

14.4. Képletgyűjtemény

Itt összegyűjtöttük a plazmafizikában leggyakrabban előforduló mennyiségek kifejezéseit, jellemző értékeikkel együtt. A jellemző értékek kiszámításánál a termonukleáris fúziós plazmáknál a jelenlegi kísérletekben tipikusan előforduló $T_e = T_i = 100 \ eV$ hőmérsékletet, $n_e = 10^{19} m^{-3}$ elektronsűrűséget és 1T mágneses indukciót feltételeztünk.

- Debye-hossz

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_\sigma \frac{1}{\lambda_{D\sigma}^2},$$

ahol

$$\lambda_{D\sigma} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \kappa T_\sigma}{n_{0\sigma} q_\sigma^2}} = 7.4 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{T_\sigma}{n_{0\sigma}}} \ [m] \Longrightarrow 23 \ \mu m.$$

– Elektron Larmor-sugár

$$r_{Le} = \frac{\sqrt{\kappa T_e/m_e}}{|\omega_{ce}|} = 2.4 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{T_e}}{B} \ [m] \Longrightarrow 24 \ \mu m.$$

- Ion Larmor-sugár

$$r_{Li} = \frac{\sqrt{\kappa T_i/m_i}}{|\omega_{ci}|} = 1.0 \cdot 10^{-4} \frac{\sqrt{AT_i}}{B\sqrt{Z}} \ [m] \Longrightarrow 1.4 \ mm.$$

- Elektron plazmafrekvencia

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}} = 57 \sqrt{n_e} \ [Hz] \Longrightarrow 180 \ GHz.$$

- Ion plazmafrekvencia

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i q_i^2}{\varepsilon_0 m_i}} = 1.3 \sqrt{\frac{Z n_e}{A}} \ [Hz] \Longrightarrow 3 \ GHz.$$

- Elektronciklotron-frekvencia

$$|\omega_{ce}| = \frac{q_e B}{m_e} = 1.8 \cdot 10^{11} B \ [Hz] \Longrightarrow 180 \ GHz.$$

- Ionciklotron-frekvencia

$$|\omega_{ci}| = \frac{Zq_eB}{m_i} = 9.5 \cdot 10^7 \frac{ZB}{A} \ [Hz] \Longrightarrow 50 \ MHz.$$

– Elektron termikus átlagsebesség

$$v_{Te} = \sqrt{\frac{2\kappa T_e}{m_e}} = 5.9 \cdot 10^5 \sqrt{T_e} \left[\frac{m}{s}\right] \Longrightarrow 6 \cdot 10^6 \frac{m}{s}.$$

- Ion termikus átlagsebesség

$$v_{Ti} = \sqrt{\frac{2\kappa T_i}{m_i}} = 1.4 \cdot 10^4 \sqrt{T_i/A} \left[\frac{m}{s}\right] \Longrightarrow 10^5 \frac{m}{s}.$$

– Ionhangsebesség

$$c_s = \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_i}} = 9.8 \cdot 10^3 \sqrt{T_e/A} \left[\frac{m}{s}\right] \Longrightarrow 7 \cdot 10^4 \frac{m}{s}.$$

– Alfvén-sebesség

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 n_i m_i}} = 2.2 \cdot 10^{16} B \sqrt{\frac{Z}{An_e}} \left[\frac{m}{s}\right] \Longrightarrow 5 \cdot 10^6 \frac{m}{s}$$

14.5. Egyenletgyűjtemény

Kétfolyadék-egyenletek

$$\frac{\partial n_{\sigma}}{\partial t} + \nabla \cdot (n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma}) = 0$$
$$n_{\sigma} m_{\sigma} \frac{\mathrm{d} \mathbf{u}_{\sigma}}{\mathrm{d} t} = n_{\sigma} q_{\sigma} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\sigma} \times \mathbf{B}) - \nabla \mathbf{P}_{\sigma} - \mathbf{R}_{\sigma \alpha}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \frac{P_{\sigma}}{n_{\sigma}^{\gamma}} = 0$$

MHD-egyenletek

$$\begin{split} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) &= 0\\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} \right) &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}^{\text{MHD}},\\ \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{J}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{P^{MHD}}{\rho^{\gamma}} &= 0. \end{split}$$

A Maxwell-eloszlás

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n_{\sigma} \left(\frac{m_{\sigma}}{2\pi\kappa T_{\sigma}}\right)^{N/2} \exp\left(-m_{\sigma}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\sigma})^2 / 2\kappa T_{\sigma}\right)$$

A Maxwell-egyenletek

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} n_{\sigma} q_{\sigma}$$

Diszperziós relációk

Elektron plazmahullámok

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 \frac{\kappa T_{e0}}{m_e}$$

Ionakusztikus hullámok

$$\omega^{2} = \frac{k^{2}c_{s}^{2}}{1 + k^{2}\lambda_{De}^{2}} + 3k^{2}\frac{\kappa T_{i0}}{m_{i}}$$

Elektromágneses hullámok

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$$

Kompressziós Alfvén-hullámok

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 + k_\perp^2 c_s^2$$

Nyírási Alfvén-hullámok

$$\omega^2 = \frac{k_z^2 v_A^2}{1 + k_\perp c^2 / \omega_{pe}^2} \qquad \beta_e \ll m_e / m_i$$
$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 (1 + k_\perp^2 \rho_s^2) \qquad \beta_e \gg m_e / m_i$$

14.6. Irodalom

- [1] Fitzpatrick, Richard: Introduction to Plasma Physics: a graduate level course.
- [2] Freidberg, Jeffrey P.: Ideal Magnetohydrodynamics.
- [3] Bellan, Paul M.: Fundamentals of Plasma Physics.
- [4] Hazeltine, Richard D. és Meiss, James D.: Plasma Confinement.