

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Kar

Szatmáry Zoltán

Bevezetés a reaktorfizikába

Egyetemi jegyzet

Budapest, 2000

Tartalom

Előszó	6
1. Reaktorokról röviden	8
A láncreakció megvalósíthatósága	8
A négyfaktor-formula	10
A neutronok hasznosítása	11
A reaktorok fajtái	12
A reaktorfizika fejezetei	13
Történeti áttekintés	15
2. A transzportegyenlet	24
2.1. A transzportelmélet alapfogalmai	24
Hatáskeresztmetszetek	24
A neutrontér leírása	30
2.2. A transzportegyenlet két alakja	36
Differenciális alak	36
Kezdő- és peremfeltételek	37
Integrális alak	38
Megoldási lehetőségek	40
Kinetikus sajátérték	41
Sztatikus sajátérték. A kritikusság fogalma	42
2.3. A transzportegyenlet néhány ismert megoldása	43
A transzportegyenlet sajátértékei és sajátfüggvényei	45
A sajátfüggvények teljessége és ortogonalitása	47
A Green-függvény	51
A Milne-probléma	56
Végtelen féltér albédója	58
2.4. A transzportegyenlet közelítő megoldása	61
P _L közelítés	61
Aszimptotikus reaktorelmélet	71
S _N módszer	76
Utközési valószínűségek módszere	79
Monte Carlo módszerek	82
3. Diffúzióelmélet	84
3.1. A diffúzióegyenlet	84
A diffúzióegyenlet és a Fick-törvény	84
Kezdő- és peremteltételek	92
3.2. Az egycsoport-közelítés	94
3.3. Neutronforras vegtelen, nem-sokszorozo közegben. Green-fuggveny	9/
Pontforras.	9/
V onalforras	101
S1KIOITAS	102
3.4. A Heimholtz-egyenlet megoldasai	103
Gombgeometria	103
Hengeres geometria	104
	100
A unituzios nossz merese	100
5.5. Iuoiugges es kritikussag egycsoport közelitesden	108
Kinetikus sajatertekek egycsoport közelítésben	108
Sztatikus sajatertekek egycsoport közelltesben	111
5.0. Keaklorkinelikä	114
A politikan egyeniet.	115
A reciprokora-egyeniet	110

	A neutron-élettartam fizikai jelentése	120
	3.7. A reaktivitás mérése	122
	A reaktivitás mérése szuperkritikus állapotokban	123
	1/N módszer	123
	Pulzált neutronforrás módszere szubkritikus reaktorban	127
	Inverz kinetika	131
	Térfüggő effektusok	132
	3.8. Ingadozási jelenségek	133
	Rossi-a kísérlet	134
	Δ Feynman-kícárlet	139
	A regimian-Kischet	130
	Technológiai andetű zajely	139
4	rechnologiai eredetu zajok	142
4.	A neutronspektrum	145
	4.1. A hasadasi neutronok spektruma	145
	4.2. Lassulas rugalmas szóródások útján	148
	A szórás anizotropiája	153
	4.3. Lassulás homogén közegben	155
	Lassulás abszorpció nélkül. Placzek-tranziensek	155
	Lassulás hidrogénen, abszorbeáló közegben	160
	Lassulás az általános esetben	162
	Lassulási modellek	164
	4.4. A rezonanciaintegrál	167
	Rezonanciaabszorpció homogén közegben	167
	Rezonanciaabszorpció fűtőelemrácsokban	171
	A Doppler-effektus	174
	4.5. Termalizáció	178
	Termalizációs magfüggyények	178
	Termikus spektrum homovén közevben	183
	Termalizáció szabályos fűtőelemrácsokhan	185
	4 6 A Jassuló neutronok térbeli eloszlása	188
	Δ Fermi-féle koregyenlet	180
	A remainder magaldésai	109
	A kolegyellet megoldasal	190
	A migracios terulet	191
_	A terbeli eloszlas momentumai	192
5.	Tobbcsoport modszerek	194
	5.1. A tobbcsoport modszer (a diffuzioelmeletben)	194
	5.2. Sokcsoport lassuláselmélet	197
	5.3. Kevéscsoport diffúzióelmélet	202
	A kevéscsoport diffúzióegyenlet	202
	A véges differenciák módszere (X-Y geometria)	204
	A véges differenciák módszere (R–Z geometria)	207
	Határfeltételek	209
	Szabályozórudak kezelése	210
	5.4. A végesdifferencia-egyenletek megoldása iterációval	214
	Az egyenletrendszer felírása	214
	Belső iteráció	216
	Külső iteráció	218
	5.5. A reaktor számítási sémája	222
6	Termikus reaktorok	224
5.	6.1. Csupasz termikus reaktorok	227
	62 A reflektor	230
	Reflektált reaktor egycsonort elmélete	230
	Reflektált reaktor kátosoport elmélete	221
	Reflexian reasion kenesoport ennerete	234

6.3. Optimális fűtőelemrácsok	237
6.4. Reaktivitástényezők	242
A moderátor hőfoktényezője	243
Doppler-együttható	247
A bórsav hatása	249
Üregegyüttható	249
Nyomásegyüttható	250
Teljesítménytényező	250
Bórsavegyüttható	251
6.5. A reaktor megszaladása	251
7. Az adjungált függvény és alkalmazásai	258
7.1. Az adjungált egyenlet	259
Neutrontér és detektortér	259
Neutronértékesség	262
A transzportegyenlet adjungáltja	264
Adjungált egyenletek a transzportegyenlet egyes közelítéseiben, illetve változataiba	n265
7.2. Az adjungált függvény időfüggése	275
Neutronsűrűség és neutronértékesség	277
Forrásértékesség	279
Sztatikus sajátfüggvény	282
7.3. Variációs elvek	282
A transzportelmélet Lagrange-függvénye	282
Stacionárius képletek	284
7.4. Perturbációelmélet	286
A reaktivitás perturbációja	286
Szabályozórúd jelleggörbéje	288
A fluxus perturbációja	289
7.5. A pontkinetikai egyenlet és az effektív későneutron-hányad	293
Jelölések	295
A pontkinetikai egyenlet levezetése	296
Az effektív későneutron-hányad számítása	299
1. fuggelek. A Wigner–Wilkins-magfuggveny levezetese	304
2. fuggelek. Gauss-kvadratura	316
3. Tuggelek. Differencialis termalizacios modellek	318
F3.1. Termalizacio hidrogenatomokbol allo gazon	318
F3.2. Termailzacio nenez atomokool allo gazdan	320
F 5.5. Cadilnac szintetikus modelije	323
4. Tuggetek. A fluxus logaritmikus derivaltjanak a szamítasa	323
vegetetil leller esete	223 ברב
v atosagos szabályozóridban	541
Lassulas a szavalyuzuluuvall	
J. Tuggetek. I Olikhiletikai egyetilet ellergiatuggo esetekbeli	

Előszó

A fizikusok nagy része pályája során nem fog reaktorokkal közvetlen szakmai kapcsolatba kerülni. A 20. század végén azonban a legszélesebb körben merülnek fel az atomenergiával összefüggő problémák. A tapasztalat szerint a legtöbb probléma forrása félreértés vagy tájékozatlanság. Szükséges ezért, hogy legalább az alapfogalmakkal minden fizikus tisztában legyen, hiszen mit várhatunk az átlagembertől, ha a fizikusok sem tudják a választ?

E könyv nem kíván több lenni, mint amit a címe ígér: *bevezetés* a reaktorfizikába. Célja az alapok megismertetése, ezért a legnehezebb fogalmakat igyekeztem a lehető legegyszerűbb modellben bevezetni. Így lehetővé válik, hogy a könyvet azok is haszonnal forgassák, akik nem kívánnak a reaktorfizikában elmélyedni. Ugyanakkor a könyv tartalmaz kitekintést a 20. század végén használt bonyolultabb modellekre is, amelyek megismerése megkönnyíti a részletesebb kézikönyvek és szakcikkek olvasását. A könyv a hasonló című, 1989-ben megjelent egyetemi jegyzet jelentősen kibővített és átdolgozott változata, így használható a "reaktorfizika" című tárgy tankönyvéül is. A reaktorfizika teljes anyagát csak két további – még el nem készült – könyv alapján lehet megtanulni: "reaktorfizikai számítások" és "kísérleti reaktorfizika". Jóllehet a könyv kiindulópontja a fizikusoknak tartott egyetemi előadásom anyaga, a könyv hasznos referencia lehet mérnökök számára is, akik korábbi reaktorfizikai ismereteiket elmélyíteni kívánják.

A reaktorok olyan berendezések, amelyekben a maghasadások láncreakciója makroszkopikus léptékben megvalósul. Ennek megfelelően tárgyalásuk két részre bontható:

- a magreakciók, ezen belül a maghasadás fizikája,
- a neutrontranszport és -sokszorozás fizikája.

Az utóbbit szoktuk *reaktorfiziká*nak nevezni. Az előbbi témakört a magfizikai témájú könyvek ismertetik, ezért ebben a könyvben a magfizika alapjait ismertnek tételezem fel. Eltérően más, hasonló témájú könyvektől, nem adok magfizikai bevezetést. Mind-össze arra szorítkozom, hogy a magfizikai fogalmakat és jelöléseket – első felhasználásuk helyén – megemlítem. További magyarázatra ott van szükség, ahol a reaktorfizikai alkalmazás felfogása némileg eltér a magfizikai gondolkodásmódtól.

A tárgyalt anyag megértéséhez elégségesek azok az alapismeretek, amelyek minden fizikustól és mérnöktől elvárhatók. A már említett magfizikán kívül feltételez-

tem a parciális differenciálegyenletek és az ortogonális függvénysorok ismeretét. A levezetéseket igyekeztem a matematikai korrektség szabta határokon belül egyszerűsíteni. A reaktorfizikai alapfogalmak megértését ugyanis gátolnák a részletes és bonyolult matematikai levezetések. Meg kell azonban jegyezni, hogy a reaktorfizikát hivatásszerűen művelő kutatóknak az itt alkalmazottnál nagyobb matematikai apparátussal kell rendelkezniük – elsősorban a numerikus analízis területén. Külön megjelöltem azokat a fejezeteket, amelyek megértése ezeken is túlmenő matematikai ismereteket igényel.

A reaktorfizika irodalma nem tartozik a leggazdagabbak közé, ha csak a mindenki számára hozzáférhető könyveket és folyóiratokat tekintjük. Nemzetközi szinten talán négy folyóirat van, amelynek a tematikájába beletartoznak a reaktorfizikai témájú cikkek. Nem jobb a helyzet a kézikönyvek terén sem. Legfeljebb egy tucat lehet azoknak a nemzetközileg is elfogadott könyveknek a száma, amelyet a reaktorfizikusok rendszeresen forgatnak. Magyar nyelvű kézikönyv pedig egyáltalán nem született. Ha azonban az "irodalom" fogalmát kiterjesztjük a belső riportokra és kutatási jelentésekre, akkor a reaktorfizika az egyik legjobban dokumentált tudományterületnek minősül. Emiatt gondot okoztak az irodalmi hivatkozások, hiszen vagy teljességre törekszünk, és akkor a lista sok-sok oldal terjedelmű, de biztosan hiányos, vagy megelégszünk az ajánlható kézikönyvek és az előadott anyaghoz feltétlenül szükséges hivatkozásokkal. Az utóbbit választottam. A hivatkozások listája tartalmazza az ajánlható kézikönyveket, továbbá azokat a cikkeket és riportokat, amelyek tartalmát a könyv úgy tárgyalja, hogy a teljes megértéshez ajánlatos a hivatkozott cikket is megnézni. Az is szempont, hogy csak olyan hivatkozások szerepeljenek, amelyek a magyar olvasó számára Magyarországon hozzáférhetők.

A hivatkozásokkal kapcsolatban még egy megjegyzést teszek. A kutatók között nem ritka az a gyakorlat, hogy hivatkozásaikat mások munkáiból veszik át, de maguk a hivatkozott cikket vagy riportot nem olvassák el. Ez alól a reaktorfizikusok sem kivételek. Így terjednek elavult, más szerzők által már felülbírált adatok és a sok másolástól egyre hibásabb képletek. Könyvemben igyekeztem gondosabban eljárni, és csak korszerűnek tekinthető adatokat közölni. A többször másolt képletek érdekes példái a Placzek-tranziensek és a termalizációs magfüggvény, amelyek a legtöbb hivatkozott könyvben hibásak (ami alól idézett jegyzetem sem kivétel). A legjobb megoldásnak azt találtam, hogy megadtam a képletek levezetését.

Remélem, hogy a könyvet azok is haszonnal forgathatják, akik maguk nem fognak reaktorfizikusként működni, hanem csak a minden fizikustól és mérnöktől elvárható "általános műveltséget" kívánják megszerezni.

Szatmáry Zoltán

1. Reaktorokról röviden

A maghasadás felfedezése után hamar felismerték, hogy a maghasadásban keletkező neutronok esetleg felhasználhatók a maghasadások önfenntartó láncreakciójának a megvalósítására, és így az atommagban rejlő energia makroszkopikus méretekben hasznosíthatóvá válhat. Azokat a berendezéseket, amelyek ezt megvalósítják, *reaktor*oknak nevezzük.

A láncreakció megvalósíthatósága

A reaktorok működését a legegyszerűbben egy tiszta ²³⁵U-öt tartalmazó gömb példáján lehet megérteni. A reaktorban lévő neutronok ebben az izotópban az alábbi két magreakciót válthatják ki:¹

$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow 2 \text{ hasadvány} + \nu \text{ neutron} + \beta - \text{ és } \gamma \text{-sugarak} + \text{energia}$$
(1.1a)

és

~~~~

$$^{235}$$
U + n  $\rightarrow$   $^{236}$ U +  $\gamma$ . (1.1b)

Hasonló reakciók történnek számos nehéz elem és a neutron között. Az előbbit nevezzük *maghasadás*nak az utóbbit pedig *neutronbefogás*nak. (Neutronszórás is történhet, de ettől – egyelőre – eltekintünk.) A reaktorban egyidejűleg mindkét magreakció végbemegy. Gyakoriságuk függ a neutron energiájától és a hasadó mag fajtájától. Ha gyakoriságuk arányát *α*-val jelöljük, akkor a magreakcióknak

$$\frac{1}{1+\alpha}$$
 és  $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ 

hányada fog hasadásra, illetve befogásra vezetni. Ezek szerint tehát az <sup>235</sup>U-ben a neutronok által kiváltott *átlagos* magreakció az alábbi módon írható fel:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> A magfizikában a hasadás pillanatában keletkező atommagokat *hasadványok*nak, a végül megfigyelhető atomokat pedig hasadási termékeknek nevezik. A reaktorfizikában erre a megkülönböztetésre ritkán van szükség, mert a legtöbb témakör tárgyalásakor már csak a *hasadási termékek*kel találkozunk majd. Ezért itt helyesebb az utóbbi kifejezés. Mindenképpen kerülendő viszont a "hasadványtermék" kifejezés, mert az már pleonazmus.

$${}^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow \frac{2}{1+\alpha} \text{ hasadvány} + \frac{\alpha}{1+\alpha} {}^{236}\text{U} + \frac{\nu}{1+\alpha} \text{ neutron} + \beta \text{- és } \gamma \text{-sugarak} + \text{energia.}$$
(1.2)

Az itt szereplő

$$\eta = \frac{\nu}{1+\alpha} \tag{1.3}$$

a láncreakció megvalósíthatósága szempontjából a legfontosabb mennyiség: ha valamilyen atommagra  $\eta$  értéke minden neutronenergiára 1-nél kisebb, akkor ilyen atommaggal biztosan nem lehetséges önfenntartó láncreakció. Azokat az atommagokat szoktuk *hasadó mag*oknak nevezni, amelyek esetében 1 eV-nál kisebb energiájú, ún. *termikus* vagy *lassú neutronok*ra  $\eta > 1$ . (Ezek a páros-páratlan magok, tehát <sup>235</sup>U, <sup>233</sup>U, <sup>239</sup>Pu stb.) A hasadó magok mindegyikében  $\nu$  átlagos értéke 2,5 és 3,0,  $\eta$ -é pedig 1,75 és 3,0 között változik.

Ha a reaktorként tekintett gömb végtelen kiterjedésű, akkor minden neutron eltűnik valamilyen magreakcióban, de helyette  $\eta$  neutron keletkezik. Véges sugarú gömb esetében azonban véges annak a valószínűsége, hogy egy neutron a reaktorból ütközés nélkül kiszökik. Jelöljük *P*-vel annak a valószínűségét, hogy egy neutron nem szökik ki. Ekkor tehát magreakciónként átlagosan

$$k = \eta P \tag{1.4}$$

új neutront nyerünk. A *k* tényezőt a reaktor *sokszorozási tényező*jének nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a láncreakció akkor önfenntartó, ha k = 1. Ha viszont k > 1, akkor a reaktorban a neutronok száma egyre nő, vagyis ekkor a láncreakció divergens. Végül k < 1 esetén a láncreakció nem önfenntartó, hiszen ekkor a neutronok száma egyre csökken, és rövid idő alatt eltűnnek a reaktorból.

Ha  $\eta > 1$ , akkor a reaktort alkotó gömbnek van olyan sugara, amelynél k = 1. Ez könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy elegendően kis sugár mellett a hasadásban keletkező neutronok nagy valószínűséggel ütközés nélkül kirepülnek a reaktorból, vagyis *P* kicsi, tehát (1.4) szerint k < 1. Ha viszont a sugár elegendően nagy, akkor  $P \approx 1$ , tehát k > 1. *P* a sugárnak monoton növekvő függvénye, kell tehát lennie egy olyan sugárnak, amely mellett k = 1. Ezt a sugarat *kritikus méret*nek, a benne lévő hasadóanyag tömegét pedig *kritikus tömeg*nek nevezzük<sup>2</sup>. Ha egy reaktorban k = 1, akkor azt mondjuk, hogy a reaktor *kritikus*. Értelemszerűen k > 1 és k < 1 esetén szuperkritikus, illetve szubkritikus reaktorról beszélünk.

Egy tiszta urán gömb a gyakorlatban nem használható, hiszen csak nagyon kis mennyiségű energiát képes a környezetébe leadni. Emiatt minden reaktorban van hű-

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> A "kritikus" jelző magyarázata a reaktorfizika hőskorába nyúlik vissza: amikor az első atommáglyában fokozatosan növelték a hasadóanyag mennyiségét, így nevezték azt a tömeget, amelynél a láncreakció majd - várakozásuk szerint - önfenntartóvá válik. Az akkor még fennálló bizonytalanságokra való tekintettel érthető, hogy ezt az állapotot "kritikusnak" érezték.

tőközeg, és a reaktorok belső szerkezetét úgy alakítják ki, hogy az urán és a hűtőközeg közötti hőcsere optimális legyen. Az uránt általában  $UO_2$  kerámia formájában ún. *fűtőelemrudak*ban helyezik el, amelyek között hűtőközeg áramlik. Az utóbbi lehet folyadék (pl. víz, nehézvíz, cseppfolyós nátrium) vagy gáz (pl.  $CO_2$ , hélium). Ezen túlmenően a reaktorból kilépő intenzív sugárzástól védeni kell a környezetet, tehát a reaktort kívülről egy védő fallal kell körülvenni. Végeredményben a reaktorok meglehetősen bonyolult felépítésű, sok különböző fajta anyagot tartalmazó berendezések. Emiatt a *P* valószínűség meghatározása nem egyszerű feladat, mert ehhez ki kell tudni számítani a neutronoknak a reaktoron belül kialakuló térbeli eloszlását.

További bonyodalmat jelent, hogy a neutronok a hasadásban (átlagosan) 2 MeV energiával keletkeznek. A reaktort alkotó anyagok atommagjaival való ütközések a leggyakrabban sem hasadásra, sem befogásra nem vezetnek, hanem a neutronok csak szóródnak, miközben energiájuk csökken. Végeredményben a neutronoknak a reaktor összetételétől erősen függő energiaspektruma alakul ki, és az (1.4) alatt szereplő  $\eta$  és P tényezők a spektrumra vett átlagok. Ha a reaktor elegendő számban tartalmaz könnyű atommagokat (<sup>1</sup>H, <sup>2</sup>H, <sup>12</sup>C stb.), akkor a neutronok többsége termikus (1 eV-nál kisebb) energiára lassul le. (Szóródáskor ugyanis annál több energiát veszít a neutron, minél kisebb a szóró mag tömege.) Mivel a hasadási hatáskeresztmetszetek a termikus energiájú neutronokra a legnagyobbak, az ilven reaktorokban a láncreakciót a termikus neutronok tartják fenn. Ezért ezeket termikus reaktoroknak, a bennük lévő neutronlassító anyagokat pedig moderátoroknak nevezzük. Moderátort nem tartalmazó reaktorokban kevés termikus neutron van, így ezekben a láncreakciót 10-100 keV nagyságrendű energiájú, ún. gyors neutronok tartják fenn. Erre való tekintettel az ilyen reaktorokat gyors reaktoroknak nevezzük. Könyvünkben elsősorban a termikus reaktorokat tartjuk szem előtt, bár a legtöbb fejezetben írtak általában mindkét típusra egyaránt érvényesek.

#### A négyfaktor-formula

Az (1.4) alatti kifejezést valóságos reaktorok esetében további tényezőkkel kell kiegészíteni. Figyelembe kell mindenekelőtt venni, hogy a 2 MeV energián keletkező neutronok lassulás közben befogódhatnak nemhasadó magokban. Ebből a szempontból legjelentősebbek az <sup>238</sup>U-izotóp rezonanciái, ugyanis a tiszta <sup>235</sup>U túlságosan drága üzemanyag lenne. Ha a lassuló neutron energiája egy rezonanciaenergia közelébe esik, nagy valószínűséggel befogódik, és egy <sup>239</sup>U-mag keletkezik. Jelöljük *p*-vel annak a valószínűségét, hogy ez nem következik be. (*p*-t *rezonancia-kikerülési valószínűség*nek nevezzük.) A termikus energiára lelassult neutronoknak csak egy bizonyos *f* hányada lép a hasadóanyaggal reakcióba, a többi a szerkezeti anyagokban és a moderátorban fogódik be. (Ezért *f*-et *termikus hasznosítási tényező*nek nevezzük.) Szükség van végül az *ɛ gyorshasítási tényező*re, amely azt veszi figyelembe, hogy az <sup>238</sup>Uizotóp is hasad 0,8 MeV feletti energiájú neutronokra, és ez kis mértékben ugyan, de szintén hozzájárul a láncreakció fenntartásához. E három tényező figyelembevételével a sokszorozási tényezőt (1.4) helyett a

$$k = \eta f \rho \varepsilon P \tag{1.5a}$$

alakban írhatjuk fel.

Ha a reaktor minden irányban végtelen kiterjedésű, akkor P = 1, vagyis a sokszorozási tényező értéke

$$k_{\infty} = \eta f p \varepsilon, \tag{1.6}$$

amivel

$$k = k_{\infty} P. \tag{1.5b}$$

Az (1.6) összefüggést *négyfaktor-formulá*nak nevezzük. A nagy teljesítményű számítógépek megjelenéséig a reaktorfizika egyik alapvető képlete volt, egyes tényezőinek a mérésére speciális kísérleti módszereket dolgoztak ki. A későbbi fejezetekben csak kivételesen fogjuk használni, de a reaktorok e rövid áttekintésében hasznos segédeszköz.

Egy működő reaktorban a sokszorozási tényező értékének állandóan 1 körül kell lennie. Ha a teljesítményt növelni akarjuk, akkor *k* értékét 1 fölé visszük, ha pedig a reaktort le kívánjuk állítani, *k*-t 1-nél kisebbé kell tenni. A sokszorozási tényező változtathatósága érdekében a reaktorba kívülről mozgatható, nagy neutronbefogási hatáskeresztmetszetű rudakat, ún. *szabályozórud*akat építünk be, amelyek ki-be mozgatásával *k* értékét a kívánt értékre állíthatjuk be.

#### A neutronok hasznosítása

Térjünk vissza az (1.4) és (1.6) alatt szereplő  $\eta$  paraméterhez. Mint mondtuk, ez a reaktor neutronháztartásának kiinduló paramétere. A láncreakció fenntartásához 1 neutron szükséges, tehát ( $\eta$  – 1) neutron áll egyéb célokra rendelkezésre. Egy részük "haszontalanul" megy veszendőbe, mert a moderátorban és a szerkezeti anyagokban (pl. szabályozórudakban) fogódik be. A többi viszont hasznosítható. Ennek több módja van:

- (1) A reaktorból kiszökő neutronokból *neutronnyaláb*okat lehet kialakítani, amelyek különböző fizikai (és egyéb) kísérletek céljaira használhatók.
- (2) A reaktorba különböző anyagokat helyezhetünk, amelyekben neutronbefogás révén *új izotópok* keletkeznek.
- (3) Az üzemanyagban levő <sup>238</sup>U-izotópból neutronbefogás és kétszeres β<sup>-</sup>-bomlás útján új hasadóanyag, <sup>239</sup>Pu keletkezik.

Ha a reaktor rendeltetése az (1) és/vagy (2) szerinti, akkor *kutatóreaktor*ról beszélünk. Ahhoz, hogy ez minél hatékonyabban hasznosítsa a neutronokat, *p*-nek 1-hez közel kell lennie. Emiatt a kutatóreaktorokban általában magasan dúsított (20%, 36%, 90%) uránt alkalmaznak. A felszabaduló energia használhatatlan melléktermék. Ezért bennük a hűtőközeg hőmérséklete általában alacsony (100 °C alatti). A magas dúsítású urán ebből a szempontból is kedvező.

Erőművi reaktorokban az urán dúsítása alacsony, tehát *p* kicsi (0,6–0,9). Itt a neutronok a (3) szempont szerint hasznosulnak. Ezt nevezzük *konverzió*nak. Jellemzésére a *konverziós tényező*t használjuk:

$$C = \frac{\text{keletkezett Pu tömege}}{\text{elfogyott}^{235}\text{U tömege}}.$$
(1.7)

Termikus reaktorokban általában C < 1. A gyors reaktorokban azonban  $\eta$  értéke lényeges nagyobb, mint a termikus reaktorokban, és ezért elegendő számú neutron áll rendelkezésre ahhoz, hogy az <sup>238</sup>U-ban befogódjanak. Ebben az esetben már nem konverzióról, hanem *szaporítás*ról beszélünk, és az ilyen reaktorokat *szaporító reaktor*oknak nevezzük. Bennük tehát – az energiatermelés mellett – több hasadóanyag keletkezik, mint amennyi elfogy. Így válik lehetővé, hogy a természetben található, és az urán túlnyomó többségét kitevő <sup>238</sup>U teljes mennyiségét hasadóvá tegyük.

#### A reaktorok fajtái

Ahhoz, hogy egy adott szerkezetű és anyagi összetételű berendezés reaktorként működjön, nyilvánvalóan az szükséges, hogy  $k_{\infty} > 1$  legyen. Ekkor lehet olyan véges méretet találni, amelyhez tartozó (1-nél mindig kisebb) *P*-vel (1.5b) szerint k = 1 adódik. Tekintsük át röviden, milyen összetételű berendezésekkel lehet ezt megvalósítani.

Ha a fűtőelemek természetes uránt tartalmaznak, a moderátor mennyiségének alkalmas megválasztásával el lehet érni, hogy az  $\eta p \varepsilon$  szorzat 1-nél nagyobb legyen. A döntő tehát f értéke. Sajnos, a legközönségesebb moderátor, a könnyűvíz esetében a <sup>1</sup>H atommag viszonylag nagy befogási hatáskeresztmetszete miatt f lényegesen kisebb 1-nél, tehát könnyűvízzel moderált természetes uránban mindig  $k_{\infty} < 1$ . Természetes uránhoz csak elhanyagolható befogási hatáskeresztmetszetű moderátorok jönnek szóba, amelyekre  $f \approx 1$ . A gyakorlatban két moderátor tesz ennek a követelménynek eleget: a grafit (<sup>12</sup>C) és a nehézvíz (D<sub>2</sub>O). Ezekre  $k_{\infty}$  néhány századdal (tehát éppen csak) nagyobb 1-nél. Könnyűvíz moderátor esetében f kedvezőtlen értékét p növelésével kell ellensúlyozni, vagyis csökkenteni kell az <sup>238</sup>U részarányát, más szóval az uránt dúsítani kell. Az olcsó moderátorhoz tehát csak a nagy költséggel előállítható dúsított urán használható, viszont az olcsó természetes uránhoz drága moderátorra van szükség. Egy működő reaktor tehát semmiképpen sem olcsó.

A ma működő atomerőművek többségében néhány százalékra (2–4%) dúsított uránt és könnyűvíz moderátort használnak. Ezekben a hűtőközeg azonos a moderátorral. Hőmérséklete 300 °C közelében van. A vizes reaktoroknak két alaptípusuk van. Ha a nyomás nagy (12 MPa vagy több), a víz nem forr. Ez a *nyomottvizes* reaktor. A *forralóvizes* típusú reaktorban a nyomás lényegesen kisebb, és ezért benne a víz forr. Mindkét típusnak vannak előnyei és hátrányai, de ezek tárgyalása kívül esik a reaktorfizika területén. A legelterjedtebbek a nyomottvizes reaktorok. A paksi atomerőmű is ebbe a típusba tartozik.

Grafittal moderált reaktort számos ország fejlesztett ki. Az Egyesült Államokban ilyen reaktorok termelték a II. világháború alatt és után a nukleáris fegyverekhez felhasznált plutóniumot. Hűtőközegként vizet használtak. E reaktorok biztonságát nem tekintették kielégítőnek, emiatt belőlük nem fejlődött ki kereskedelmi célú atomerőmű. A Szovjetunió 1955-ben Obnyinszkban üzembe helyezett egy grafittal moderált és vízzel hűtött atomerőművet. (Ez volt a világ első atomerőműve: az általa elfogyasztott 5 MW villamos teljesítménnyel szemben 6 MW-ot adott a hálózatra.) Belőle fejlesztették ki a jó gazdasági mutatókkal rendelkező RBMK típust, amelyből 10-nél több, egyenként 1000 MW villamos teljesítményű reaktor épült. Sajnos – mint Csernobilban láttuk – ennek a típusnak a biztonsága nem kielégítő. Franciaország és Nagy-Britannia CO<sub>2</sub> gázzal hűtött grafitos reaktortípust fejlesztett ki. Gazdasági okokból a franciák abbahagyták ezek építését, de a britek egy ún. továbbfejlesztett változatot alakítottak ki. Ugyan ma még működnek ilyen reaktorok, de nem várható, hogy újabbak fognak épülni. Úgy tűnik tehát, hogy a grafitos reaktorok lassan "kimennek a divatból". Az is elképzelhető azonban, hogy ennek az ellenkezője következik be. Németországban kifejlesztettek egy speciális típust, amelynek az üzemanyagát grafitba ágyazott, mikronos méretű UO2 szemcsék alkotják. Hűtőközege hélium. Kezdetben csak speciális, magas hőmérsékletet (700-800 °C) igénylő alkalmazásokra szánták. Később azonban kiderült, hogy ennek a reaktornak a biztonsága minden más típusét felülmúlja. Emiatt a németeken kívül egyéb országok is bekapcsolódtak e típus fejlesztésébe, így e típus elterjedése nem zárható ki.<sup>3</sup>

Nehézvízzel moderált reaktorokat Kanadában és Franciaországban is kifejlesztettek, de kereskedelmi sikert csak a kanadai változat (CANDU) ért el. Benne mind a moderátor, mind a hűtőközeg nehézvíz. Gazdasági és biztonsági mutatói egyaránt kiemelkedők. Kanadán kívül egyelőre csak kevés ország épített ilyen reaktorokat.

Érdemes még megjegyezni, hogy az említetteken kívül a berillium is alkalmas moderátornak. Ilyen reaktorok azonban kereskedelmi célra nem épültek, de katonai célokra elterjedtek, elsősorban mint tengeralattjárók hajtóművének az energiaforrásai.

A gyors reaktorokban olyan hűtőközegre van szükség, amely csak kis mértékben lassítja a neutronokat, vagyis tömegszáma közepes. A gyakorlatban erre a célra eddig egyetlen anyag, a cseppfolyós nátrium bizonyult alkalmasnak. Fentebb láttuk, hogy a hasadóanyag szaporítása csak gyors reaktorban sikerült. A fennálló technológiai nehézségek miatt a fémhűtésű gyors reaktorok gazdasági jelentőségre csak akkor fognak szert tenni, amikor az urán ára annyira megnő, hogy kifizetődővé válik a plutónium ipari léptékben való termelése. A 20. század végén még nem ez a helyzet. Emiatt egyelőre csak az egyszerűbb technológiájú termikus reaktorok terjedtek el, és a megépült néhány gyors reaktor egyelőre prototípusnak tekintendő. Ezen a területen a legaktívabb ma Franciaország.

#### A reaktorfizika fejezetei

A reaktorfizikának három fő feladata van:

• a reaktor adott összetétele mellett meghatározni a neutronok időtől, helytől és sebességtől függő eloszlását;

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> E könyv megjelenésekor ezek a fejlesztések állnak.

- nyomon követni a reaktorban lejátszódó magreakciókat, vagyis megadni a reaktor összetételének a változását: a hasadóanyag fogyását, a plutónium és a hasadási termékek felhalmozódását stb.; ezt a jelenségkört *kiégés*nek nevezzük;
- módszereket adni a reaktor üzemvitele szempontjából fontos mennyiségek mérésére.

Mindezek alapjául szolgál a *transzportegyenlet* (Boltzmann-egyenlet). Tekintve, hogy ez az egyenlet még a numerikus eljárások számára is túlságosan bonyolult, általában az ún. *diffúziós közelítést* alkalmazzuk, ami azt jelenti, hogy a transzportegyenletnek egy közelítő alakjából, a *diffúzióegyenlet*ből indulunk ki. Alapvető jelentőségükre való tekintettel ezt a két egyenletet a 2. és 3. fejezetben teljes részletességgel tárgyaljuk. E két egyenlet *adjungáltja* érdekes fizikai jelentést hordoz. Ennek kifejtését a 7. fejezetben szintén megadjuk, de ez a fejezet nem szükséges a többi fejezet megértéséhez, viszont a gyakorló reaktorfizikus számára nélkülözhetetlen.

A diffúzióegyenletnek a gyakorlatban megkívánt pontossággal való megoldásához számítógépi programokra van szükség. Az alkalmazott számítási eljárások lényegének a megértéséhez is szükség van azonban a reaktorfizikai alapfogalmak ismeretére. Könyvünk elsődleges célja e fogalmak *megértése*. Ehhez viszont már nincs szükség részletes numerikus számításokra, hanem elégséges a következő egyszerű feltevéssel élni: a neutronok energia szerinti eloszlása (vagyis a *neutronspektrum*) a reaktor minden helyén ugyanolyan alakú. Mivel ez a reaktor belsejében, határfelületektől távol igaz, az ezen alapuló elméletet *aszimptotikus* elméletnek szokás nevezni. Gyakorlati célokra ugyan nem elég pontos, de a reaktor működését kvalitatíven jól tükrözi.

Ebben a közelítésben a diffúzióegyenlet két egyenletté válik szét: az egycsoport diffúzióegyenletté és az aszimptotikus lassulási egyenletté. A 3. fejezetben az előbbi segítségével tudjuk az alapfogalmak (kritikusság, reaktivitás, görbületi paraméter stb.) lényegét megérteni, továbbá egyszerű matematikai eszközökkel tárgyalni a *reaktorkinetikát*, vagyis a reaktor időfüggő jelenségeinek a törvényszerűségeit. Külön fejezetbe tartozik a *lassulás*, illetve annak utolsó szakasza, a *termalizáció*. Az ezzel foglalkozó 4. fejezet legfontosabb része a *rezonanciaabszorpció* és a *Doppler-effektus* tárgyalása, mert ennek nemcsak a reaktor neutronháztartása, hanem a plutóniumtermelés és a biztonság szempontjából is döntő szerepe van.

Az így megismert alapfogalmak segítségével ismertethetjük a gyakorlatban is kielégítő pontosságú eredményeket adó *többcsoport diffúzióegyenlet*et (5. fejezet). E könyv keretei azonban csak egy bevezető jellegű ismertetésre adnak módot. Hasonlóan bevezető jellegű a 8. fejezetben a kiégés tárgyalása is, mert itt is csak a jelenségek lényegére szorítkozhattunk. A 2–5. fejezetben tanultak alkalmazásaként áttekintjük a legfontosabb reaktortípus, a termikus reaktor néhány tulajdonságát (6. fejezet).

#### Történeti áttekintés

Miután a reaktorok működésének az alapjait megismertük, hasznos áttekinteni, történelmileg milyen sorrendben és kik fedezték fel a ma természetesnek tűnő ismereteket. A 19. század végére gyakorlatilag befejezettnek látszott a fizika, úgy tűnt, hogy már csak néhány fizikai állandó pontosabb meghatározása van hátra. Az akkori fizikát *klasszikus fizika* néven tartjuk számon. A századfordulón azonban drámai felfedezések láttak napvilágot. 1895-ben *Wilhelm Röntgen* felfedezte az X-sugarakat, amelyeket azóta egyes országokban (például nálunk) Röntgen-sugaraknak neveznek. 1896-ben *Henri Becquerel* felfedezte, hogy az uránérc hasonló sugárzást bocsát ki, amelyről 1898-ban *Marie és Pierre Curie* megmutatták, hogy három részből áll. Ők ezeket  $\alpha$ -,  $\beta$ - és  $\gamma$ -sugaraknak nevezték el. A jelenséget Marie Curie *radioaktivitás*nak, a sugárzást magát pedig *radioaktív sugárzás*nak nevezte el.

A következő nagy horderejű felfedezést Rutherford tette 1911-ben, amikor  $\alpha$ -részecskéknek aranyatomokon való szóródását vizsgálta: ennek során felfedezte az *atommag*ot. A szóráskísérletből kiderült, hogy az atommag átmérője 10 ezerszer kisebb, mint az atomé. Ennek alapján az atomokat a következőképpen képzelték el. A pozitív töltésű atommag körül keringenek a negatív töltésű elektronok. Mivel az atom kifelé elektronosan semleges, az atommag pozitív töltéseinek a száma megegyezik az elektronok számával, és mindkettő megegyezik a *Z* rendszámmal. A pozitív töltéseket nyilvánvalóan az atommagban levő *proton*ok töltése adja. Vegyük példának a radonizotópokat. A 222-es tömegszámú izotópban eszerint 86 proton van, de akkor mi adja a proton tömegénél 222-szer nagyobb tömeget? Erre a következő magyarázatot adták. Tudták, hogy  $\beta$ -bomláskor az atommagbál elektronok lépnek ki, ezért úgy képzelték, hogy a <sup>222</sup>Rn-izotóp atommagjában 222 proton és 136 (= 222–86) elektron van. Így tudták magyarázni a 86 pozitív töltést és a 222-es tömegszámot.

Ez az atommodell 1932-ig volt érvényben. Ebben az évben *James Chadwick* felfedezte a *neutront*. Ezzel az atommagról alkotott kép egy csapásra megváltozott: az atommagban nincsenek elektronok, hanem csak protonok és neutronok. A fenti példában tehát a <sup>222</sup>Rn-izotóp 222-es tömegszáma úgy jön ki, hogy van benne 86 proton és 136 neutron. Honnan jönnek akkor a  $\beta$ -bomlás elektronjai? Egyszerű a válasz:  $\beta$ -bomláskor egy neutron protonná alakul át, és eközben lép ki az elektron. Ezzel magyarázatot kaptak a korábban ismert *eltolási szabályok*ra:

- $\alpha$ -bomláskor a 4-es tömegszámú és Z = 2 töltésű He-atommagok lépnek ki az atommagból, tehát a visszamaradó izotóp tömegszáma 4-gyel, rendszáma pedig 2-vel csökken.
- β-bomláskor a tömegszám nem változik, viszont az atommag rendszáma (vagyis elektromos töltése) 1-gyel nő.

A neutron felfedezésének az eddigieknél is sokkal nagyobb jelentősége volt. Az elektromosan semleges neutron akadály nélkül be tud hatolni az atommagba, és át tudja azt alakítani. Már a neutron felfedezése előtt is próbáltak atomi részecskéket az atommagba lőni. Az első *magreakció*t (magátalakulást) Rutherford figyelte meg 1923ban. A továbbiak érdekében azonban mi nem ezt, hanem a Chadwick által megfigyelt magreakciót írjuk fel:

$${}^{4}_{2}\text{He} + {}^{9}_{4}\text{Be} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + {}^{1}_{0}\text{n}.$$
(1.8)

Itt egy  $\alpha$ -rész a berillium atommagját bombázza, aminek eredményeképpen egy szénatommag keletkezik, és egy neutron lép ki. Ezt a magreakciót nehezíti, hogy a bombázó  $\alpha$ -rész pozitív töltését taszítja az atommag pozitív töltése. Emiatt a magreakció csak akkor jöhet létre, ha az  $\alpha$ -rész energiája elég nagy ahhoz, hogy ezt a taszítást legyőzze. A neutron esetében ilyen taszítás nem lép fel, tehát (elvileg) tetszőleges energiájú neutronnal lehet valamilyen magreakciót kiváltani. Mivel az atommag meghatározza a kémiai tulajdonságot is, így lett a neutron a modern "bölcsek köve", amellyel esetleg *elemátalakulás*t lehet előidézni.

A neutronokkal sokan kezdtek kísérletezni, amelyeket az (1.8) alatti magreakcióval állítottak elő: berilliumot kevertek  $\alpha$ -sugárzó anyagokkal (pl. *polónium*mal), aminek révén olyan anyagot nyertek, amelyben gyakorlatilag minden  $\alpha$ -bomlás egy neutront eredményez. (A mai napig ezzel a módszerrel állítanak elő neutronforrásokat.) Ha egy atommag neutront nyel el, a természetes proton/neutron arányhoz képest több neutront fog tartalmazni. Elképzelhető, hogy neutrontöbbletétől  $\beta$ -bomlás révén fog megszabadulni, tehát rendszáma 1-gyel nő, vagyis új elemmé alakul át. Ezt a jelenséget nevezzük *mesterséges radioaktivitás*nak, amelyet *Frédéric Joliot-Curie* és felesége, *Irčne Curie* fedezett fel. A jelenséggel foglalkozott az ún. *római iskola* is, amelynek legnagyobb alakja *Enrico Fermi* volt.

Fermiék szisztematikusan megvizsgálták, melyik elemben lehet ilyen mesterséges radioaktivitást előidézni. Sok ilyen elemet találtak. Azt is észrevették, hogy a mesterséges radioaktivitás sokszorosára nő, ha az aktiválást vízben végzik, vagyis mind a neutronforrást, mind az aktiválandó anyagot víz alá teszik. A jelenség magyarázatára Fermi kidolgozta a *neutronlassulás* elméletét, amelynek a lényege a következő. A neutronforrásból kijövő neutronok nagy sebességgel (több ezer km/s sebességgel) repülnek. A víz hidrogénatomjaival ütközve energiájuk (sebességük) fokozatosan csökken, és eléri a hőmozgás energiáját. (Ma már tudjuk, hogy ekkor a neutron sebessége 2,2 km/s, tehát – sebességben számolva – több, mint ezerszeres lassulás következik be. Innen a "neutronlassulás" elnevezés.) Azt is felfedezték, hogy egyes anyagok a *lassú neutronok* hatására jobban aktiválódnak, mint a neutronforrásból kijövő gyors *neutronok*ra.

A mesterséges radioaktivitás létrejöttét a megjelenő  $\beta$ -sugárzás megfigyelése útján detektálták. A fentiekben láttuk, hogy  $\beta$ -bomláskor a bomló elem 1-gyel magasabb rendszámú elemmé alakul át, ami azt jelenti, hogy a természetben elő nem forduló elemet lehet előállítani, ha a legnagyobb rendszámút, az uránt neutronokkal besugározzuk. Ezt Fermiék meg is tették, és azt tapasztalták, amit vártak: a besugárzott uránból (a természetest lényegesen meghaladó mértékű)  $\beta$ -sugárzás lép ki. Ezzel bizonyítottnak vették, hogy sikerült új, ún. *transzurán* elemeket előállítani, amelyek létrejötte – mai ismereteink szerint – az alábbi egyenletben összegezhető:

$${}^{238}_{92}\text{U} + {}^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{239}_{92}\text{U} \xrightarrow{23,5 \text{ m}} {}^{239}_{93}\text{Np} \xrightarrow{2,35 \text{ d}} {}^{239}_{94}\text{Pu} .$$
(1.9)

(A nyilak fölé írt számok a  $\beta$ -bomlás *felezési idejét* adják meg.<sup>4</sup>) Eszerint egy neutron elnyelése révén 239-es tömegszámú uránizotóp keletkezik, amely 23,5 perc felezési idővel a 93-as rendszámú új elemmé alakul át, amelyet az akkoriban felfedezett Neptun bolygóról *neptúnium*nak neveztek el. Ez 2,35 nap felezési idővel tovább bomlik, és így a 94-es rendszámú elem, a Pluto bolygóról elnevezett *plutónium* keletkezik. Az utóbbi felezési ideje 24 ezer év, tehát (a szóban forgó kísérlet szempontjából) stabilnak tekinthető. A felfedezés tudományos jelentősége nyilvánvaló, így 1938-ban Fermi megkapta a fizikai Nobel-díjat. A felfedezés műszaki és katonai jelentőségét aligha lehet túlbecsülni, de ezt a 30-as években még nem lehetett előre látni.

Az (1.9) képletben szereplő két felezési időn kívül Fermiék még körülbelül húsz további felezési időt is megfigyeltek, de eredetüket nem értették. Ezt a kísérletet német vegyészek, *Otto Hahn* és *Fritz Strassmann* megismételték, és annak más értelmezést adtak. Rámutattak, hogy a megfigyelt  $\beta$ -sugárzás nem a periódusos rendszerben az uránon túli elemektől származik, hanem azt a periódusos rendszer közepén elhelyezkedő ritka földfémek környékén található elemek emittálják. Végül 1938-ban közülük elkülönítettek egy elemet, amelyet a báriummal azonosítottak. Erre a fizikus *Lise Meitner* azt a magyarázatot adta, hogy a neutronok hatására az urán atommagjai ketté hasadnak, és a megfigyelt  $\beta$ -sugárzás a *hasadási termékek*től is származhat. A felfedezésért Hahn 1944-ben kapott Nobel-díjat. Az olasz és a német kutatók között csak látszólagos az ellentmondás: ha az uránt neutronokkal bombázzuk, benne mind a maghasadás, mind az (1.9) szerinti reakció végbemehet. Egy atommag nagyon sokféleképpen hasadhat ketté. Lássunk példát ilyen magreakcióra is:

$${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U \rightarrow {}^{97}_{40}Zr + {}^{135}_{52}Te + 4 \times {}^{1}_{0}n$$
.

Az <sup>235</sup>U-ben bekövetkező hasadások 6,4%-a e szerint a reakció szerint történik. (Tehát ez az egyik leggyakoribb maghasadási reakció.) A hasadás felfedezését követően mások is hasonlóról számoltak be (*Otto Frisch, Irčne Joliot-Curie*).

Akkoriban csak sejtették, hogy a hasadási termékek bomlási sorozataiban fordulhatnak elő olyan izotópok, amelyek képesek egy neutron kilökésére. A jelenséget mai tudásunk alapján írjuk le. Tipikus példa a  $^{87}_{35}$ Br -ből kiinduló lánc, amely (az  $^{235}$ U esetében) a hasadások 1%-ában keletkezik. Ennek az izotópnak a felezési ideje 55,7 s, és β-bomlása két módon mehet végbe. A bomlások 30%-ban 8 MeV energiájú βrészecske lép ki a magból, és így  $^{87}_{36}$ Kr keletkezik, amely tovább bomlik. A bomlások 70%-ban viszont 2,6 MeV energiájú β-részecske lép ki, vagyis a  $^{87}_{36}$ Kr atommag 5,4 MeV gerjesztési energiával keletkezik, ami elégséges egy neutron kilökésére: egy (átlagosan) 0,25 MeV energiájú neutron lép ki, és így egy  $^{86}_{36}$ Kr atommag keletkezik (amely stabil). Ennek a valószínűsége 2,9%.<sup>5</sup> Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a  $^{87}_{35}$ Br -ből 55,7 s felezési idővel olyan izotóp keletkezik, amely a hasadások 0,01×0,7× 0,029 = 0,0002 hányadában, vagyis 0,02%-ában neutront bocsát ki. Arról van tehát

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Az időegységeket az alábbi módon jelöljük: s = másodperc, m = perc, h =óra, d = nap, a =év.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> A fennmaradó 97,1%-ban a gerjesztési energia egy 5,4 MeV energiájú γ-részecske formájában távozik, és ezt követően ugyanaz a bomlási sorozat folytatódik, mint az elsőnek említett, 30% gyakoriságú esetben. Témánk szempontjából csak a másik, a 2,9% valószínűségű folyamat érdekes.

szó, hogy nemcsak a hasadás pillanatában keletkeznek neutronok, hanem bizonyos késéssel is. Az előbbieket *prompt neutron*oknak, az utóbbiakat pedig *késő neutron*oknak nevezzük. Mai ismereteink szerint – a most részletezett példán kívül – 60-nál is több olyan hasadási termék van, amelynek valamelyik bomlásterméke neutronokat emittál. 1939-ben publikáltak olyan kísérletet, amely bizonyította ilyenek létezését.

*Szilárd Leó* ismerte fel, hogy a maghasadásban keletkező másodlagos neutronok további uránmagok hasítására használhatók fel, és így még több neutron keletkezik. Ezt nevezzük *hasadási láncreakció*nak. A maghasadásban felszabaduló óriási mennyiségű energiára való tekintettel rögtön nyilvánvaló volt, hogy a láncreakció révén nagy energiabőség állhat rendelkezésünkre, de felhasználásával korábban soha nem látott pusztító erejű bomba is készíthető. Végzetes következményekkel járt, hogy ezek a felismerések és a róluk szóló publikációk 1939-ben, a II. világháború kitörésének az évében jelentek meg.

A továbbiakban léptek színre a magyarok: Szilárd Leó, Teller Ede, Wigner Jenő. Ha hozzájuk vesszük még Neumann János nevét, megértjük, miért állítják a korszak vezető amerikai tudósai (pl. Alvin Weinberg), hogy "minden lényeges dologra a magyarok jöttek rá". Szilárd Leó szabadalmaztatta a hasadáson alapuló láncreakció elvét, Wigner Jenő volt az "első reaktormérnök"<sup>6</sup> (Weinberg szerint), Neumann pedig a számítógép atyja, azé az eszközé, amely nélkül a nukleáris technika nem jöhetett volna létre. A 30-as évek végén Európa számos tudósa menekült el Amerikába. A magyarok zsidó származásuk miatt, az olasz Fermi pedig felesége zsidó származása miatt, de nagyon sokan (pl. a dán Niels Bohr) attól való félelmükben, hogy tudásukat a hitleri Németország saját világhatalmi céljaira fogja felhasználni. Az Amerikába emigrált európaiak közül legjobban a magyarok féltek attól, hogy a náci hatalom kifejlesztheti az atomfegyvert. Ezért Szilárd Leó felszólította a tudományos közösséget, hogy a maghasadásra vonatkozóan állítsanak le minden publikációt. Rávették továbbá az akkor már szintén Amerikában élő Albert Einsteint, hogy 1939. augusztus 2-án írt nevezetes levelében erre a veszélyre Roosevelt elnök figyelmét felhívja. A közhiedelemmel ellentétben az említett három magyar tudós félelmei alaptalanok voltak: a hadban álló Németországnak nem volt esélye az atomfegyver létrehozására. Az amerikaiaknak erre nagyon hamar rá kellett jönniük. Mégis végrehajtották az atomfegyver kifejlesztésére irányuló Manhattan Projectet, mert előre látták, hogy a II. világháború után ez fogja az Egyesült Államokat szuperhatalommá tenni.

Niels Bohr elméleti úton arra a következtetésre jutott, hogy nagy erejű robbanás csak páros rendszámú és páratlan neutronszámú, ún. *páros-páratlan* magokkal lehetséges. A természetben csak egyetlen ilyen hasadóképes izotóp van:  $^{235}_{92}$ U, amely a természetes urán 0,7%-a, a túlnyomó többséget (99,3%) az  $^{238}_{92}$ U izotóp alkotja. Emiatt fejlesztették ki az izotóp-szétválasztás (*urándúsítás*) technológiáját. A nukleáris technikának ez az egyik legköltségesebb és legnagyobb műszaki felkészültséget igénylő művelete. A fő problémát az jelenti, hogy a két uránizotóp kémiailag azonos, tehát a szétválasztás csak tömegszámuk kis különbségén alapulhat. A nehézséget le-

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Wigner a 20. század egyik legnagyobb *fizikus*a, aki mindig a fizika legmélyebb kérdéseit kutatta. Ő csak annyiban *mérnök*, hogy a nukleáris technika számos kitűnő mérnöki ötlete is tőle származik.

küzdötték, és ezen az úton végül létrejött az a bomba, amelyet 1945. augusztus 6-án Hirosimára ledobtak.

Ezzel párhuzamosan egy másik úton is elindultak. Az (1.9) képlet szerinti magreakcióval az  $^{238}_{92}$ U-ból egy mesterséges páros-páratlan atommagot, a  $^{239}_{94}$ Pu-ot lehet előállítani, amelynek a hasadási tulajdonságai hasonlóak az  $^{235}_{92}$ U-éihez. Az elő-állításához szükséges neutronokat – makroszkopikus léptékben – csak láncreakció révén lehetett nyerni. Emiatt volt szükség a természetes uránnal működő reaktorra, amelyhez szükség van neutronlassító anyagra, ún. *moderátor*ra (lásd fentebb). A Fermi-féle lassuláselmélet szerint moderátornak csak kis tömegszámú, a neutronokat elhanyagolható mértékben elnyelő anyag alkalmas. A legjobb moderátor a *nehézvíz*, amelyben a víz (H<sub>2</sub>O, *könnyűvíz*) hidrogénjét a 2-es tömegszámú hidrogénizotóp, a *deutérium* helyettesíti (D<sub>2</sub>O).<sup>7</sup> Tekintve, hogy nehézvíz nem állt rendelkezésükre, nagy tisztaságú *grafit*ot használtak moderátorként.

Az első feladat annak demonstrálása volt, hogy a szabályozható hasadási láncreakció megvalósítható. Urán-dioxidból (UO2) rudakat készítettek, amelyeket grafittömbökbe fúrt lyukakban helyeztek el. Az így kapott tömböket Fermi vezetésével egymásra rakva fokozatosan építették fel az atommáglyát Chicagóban. A máglyában 1942. december 2-án indult meg az önfenntartó láncreakció. Ez a reaktor csak néhány watt teljesítményen üzemelt, így hűtést nem igényelt. Azon kívül, hogy demonstrálta a láncreakció megvalósíthatóságát, azt is megmutatta, hogy kellő számban léteznek késő neutronok, vagyis a láncreakció szabályozható. 1943. novemberében indítottak el egy nagyobb teljesítményű, levegővel hűtött reaktort, amelyet 1944. szeptemberében a plutónium ipari léptékű termelésére alkalmas, vízzel hűtött reaktorok követtek Hanfordban. A termelt plutóniumot a reaktorból kirakott uránrudakból kémiai úton lehetett kivonni. Ezt a műveletet újrafeldolgozásnak (reprocesszálásnak) nevezzük. Elvileg egyszerűbb, mint az urándúsítás, de csak elvileg, mert a nagy aktivitású hasadási termékek sok nehézséget okoznak. A hanfordi reaktorokban termelték meg azt a plutóniumot, amelyből az 1945. július 16-án Alamogordóban kipróbált, majd 1945. augusztus 9-én Nagaszakira ledobott bombákat készítették.

A háború után (már a 40-es években) gyorsan más országokban is épültek reaktorok (Franciaország, Kanada, Nagy-Britannia, Szovjetunió). Kanadában ezek csak kereskedelmi célokat szolgáltak, viszont a másik három ország az atomfegyvert *is* kifejlesztette. A Szovjetunió az amerikaiak által követett mindkét módszert alkalmazta: épített nagy kapacitású urándúsítót és a hanfordihoz hasonló, tehát grafittal moderált és vízzel hűtött plutóniumtermelő reaktorokat. Végül 1949-ben végrehajtotta az első kísérleti robbantást. A franciák és britek szén-dioxid hűtésű, grafitmoderátorú reaktorokban termelték meg a bombáikhoz szükséges plutóniumot, amelyek közül az elsőt 1960-ban, illetve 1952-ben robbantották fel. Ezekkel az eszközökkel nagy mennyiségű nukleáris fegyvert gyártottak le, vagyis megindult a *fegyverkezési verseny*, amelybe később további országok is bekapcsolódtak: Kína (1964) és India (1974). 1998-ban India újabb bombát robbantott, amit néhány nap múlva követték a pakisztáni bomba-

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> A 4.2. alfejezetben részletesen foglalkozunk a moderátorokkal. Ezeket az állításokat ott fogjuk igazolni.

kísérletek. Nyílt titok, hogy vannak még további országok, amelyek rendelkeznek bombával, bár még nem hajtottak végre kísérleti robbantást.

Az atomfegyverrel már rendelkező hatalmak hamar belátták, hogy annál valószínűbb egy nukleáris fegyverekkel vívott háborús konfliktus kitörése, minél több ország rendelkezik ilyen fegyverekkel. Ezért 1963 és 1968 között folytatott tárgyalásaik végül az *atomsorompó-szerződés*hez vezettek, amelyet akkor az Egyesült Államok, Nagy-Britannia és a Szovjetunió írt alá. Később további országok is csatlakoztak hozzá, az aláírók száma 180 fölé emelkedett. A szerződés célja a nukleáris fegyverek további terjedésének a megakadályozása. Betartásának az ellenőrzését az ENSZ szakosított szervére, az 1957-ben létrehozott, bécsi székhelyű Nemzetközi Atomenergia Ügynökségre (NAÜ)<sup>8</sup> bízták. A nukleáris fegyverekkel<sup>9</sup> kapcsolatban itt csak egyetlen jelentős eseményt említünk meg: 1963-ban született meg a *részlegesatomcsendszerződés*, amely megtiltotta a földfelszín felett végrehajtott robbantásokat. Ez nyitánya volt a fegyverzetkorlátozó egyezmények sorozatának.

Mielőtt a polgári célú reaktorokra térnénk, érdemes néhány szót ejteni az ún. *atomtitok*ról. Az első ezzel kapcsolatos ügy a Rosenberg-házaspár pere volt, akik jelentős mennyiségű titkos adatot adtak át a Szovjetuniónak. Még ma is találkozni olyan nézettel, hogy *ez* segítette a szovjeteket az atomfegyver létrehozásához. A helyzet valójában az, hogy az Egyesült Államok a legértékesebb információt az atombomba felrobbantásával szolgáltatta ki: *demonstrálta, hogy a fegyver létrehozható*. Ennek tudatában a részletproblémák sokkal könnyebben leküzdhetők, mint ahogy ez számos országban sikerült is. A Rosenberg-féle kémkedésnek mindössze annyi hatása lehetett, hogy meggyőzte Sztálint: vegye komolyan a saját atomtudósait. A titkolódzás így már az 50-es években oldódni kezdett, amikor 1955-ben Genfben megrendezték az I. konferenciát az atomenergia békés célú hasznosításáról. Ezt továbbiak követtek 1958-ban és 1964-ben, aminek eredményeképpen egyre több ismeret vált közkinccsé, és lassan elérkeztünk oda, hogy a titkolódzás ezen a területen sem haladja meg a szokásos ipari titoktartás szintjét.

A polgári célú alkalmazások az 50-es években jelentek meg. Az első reaktor, amely villamos áramot termelt, az amerikai EBR-1 gyors reaktor volt 1951-ben. A "világ első atomerőműve" címet a Szovjetunió 6 MW villamos teljesítményű reaktora kapta, amely 1955-ben Obnyinszkban először szolgáltatott a külső villamos hálózatra áramot. Ez ugyanúgy grafittal moderált és vízzel hűtött reaktor volt, mint a plutóniumtermelő reaktorok. Gyorsan következtek más országokban is a polgári célú atomerőművek: Nagy-Britannia (1956), Franciaország (1956), Kanada (1957), Svédország (1964), Japán (1969), Nyugat-Németország (1974) stb. A világ 34 országában 430 erőművi reaktor működik, összteljesítményük 363 ezer MW, a termelt villamos energiának körülbelül 17%-át adják. Épül további 38 reaktor 32 ezer MW öszteljesítménnyel. (1998. áprilisi adatok.)

Magyarországon az első reaktor 1959-ben épült a KFKI-ban<sup>10</sup>. Ez 2 MW hőteljesítményű *kutatóreaktor* volt, és fizikai kutatások céljaira szolgált. A reaktort két-

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> International Atomic Energy Agency (IAEA).

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> Aki a könyvet áttanulmányozza, meg fogja érteni a maghasadáson alapuló bomba működését, de a fegyvereknek nem szentelünk külön fejezetet.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup> A Magyar Tudományos Akadémia Központi Fizikai Kutató Intézete.

szer átépítették, teljesítménye jelenleg nagyobb (10 MW), de ez sem használható villamos energia termelésére. A rajta folyó kutatások tárgya nem maga a reaktor, hanem egyéb (izotópgyártás, szilárdtestfizika, kémia, magfizika stb.). 1971-ben helyezték üzembe a Budapest Műszaki Egyetem *oktatóreaktor*át, amely jelenleg is működik, hőteljesítménye 100 kW. A reaktorfizikai kutatások az 1961-ben épült ZR-1 jelű kritikus rendszeren indultak, amelyet öt további követett. Közülük az utolsó, a ZR-6 jelű rendszer 18 évig (1972/1990) volt üzemben, és rajta folytak annak a reaktortípusnak a fizikáját megalapozó mérések, amelybe a paksi atomerőmű is tartozik.<sup>11</sup> Magyarországon Pakson működik atomerőmű, amely az országban termelt villamos energiának közel a felét szolgáltatja. Az első reaktor 1982-ben, a negyedik és egyelőre utolsó 1988-ban került üzembe.

A nukleáris energiatermelés kilátásai nagyon kedvezőnek tűntek az 50-es években. Ezt jelzi Eisenhower elnök 1953-ban elmondott Atomok a békéért beszéde, amelyben arról beszélt, hogy "semmilyen merész elképzelés nem tűnik lehetetlennek". Ez volt a folyamatos növekedés korszaka, amelynek szellemét legjobban az indai Babha szavai jellemzik: "A legdrágább energia a meg nem termelt energia." 1963-ban lépett üzembe az első, a villamos energiát kereskedelmileg is versenyképes áron termelő reaktor. Ezt követően nagy számban rendeltek meg és helyeztek üzembe atomerőműveket. Mindez alaposan megváltozott a két olajválságot követő gazdasági recesszió miatt: a fejlődés lelassult, sőt sok megrendelt reaktort visszamondtak. A helyzetet súlyosbította két üzemzavar: 1978-ban Harrisburgban (Egyesült Államok) megolvadt a TMI-2 reaktor, majd 1986-ban bekövetkezett a csernobili atomerőmű súlyos balesete. Az előbbi "csak" komoly anyagi kárt okozott, és nem járt személyi sérüléssel, mert a biztonsági rendszerek annak ellenére is megvédték a környezetet és a személyzetet, hogy az operátorok több hibát is elkövettek. Az atomerőművek biztonságát világszerte egyre többen kezdték vitatni. Az ellenzők tábora szélesedett a csernobili katasztrófa után. Ez volt az első olyan baleset, amely atomerőműben emberéleteket követelt. Mindkét baleset sok tanulságot hozott, és a biztonsági előírások jelentős szigorítását eredményezte.

Az atomerőművek a hidegháborús idők óta nem tudnak szabadulni az atombomba terhes emlékétől. Itt nem csak arról van szó, hogy sokan még ma sem különböztetik meg a reaktort az atombombától,<sup>12</sup> hanem arról is, hogy a reaktorokban *lehet* fegyverkészítésre alkalmas hasadóanyagot, plutóniumot előállítani. A keletkező plutóniumból akkor lehet fegyvert készíteni, ha a reaktorból kirakott nukleáris üzemanyagból azt kivonjuk, vagyis az üzemanyagot újra feldolgozzuk. Amíg viszont az elhasznált üzemanyagban van, erre alkalmatlan. A nukleáris fegyverek elterjedésének a problémája a 70-es években annyi aggodalmat okozott, hogy Ford elnök 1976-ban moratóriumot mondott ki az újrafeldolgozásra, majd 1978-ban Carter elnök be is tiltotta azt. Az ő sürgetésére más országok is hasonló tilalmat mondtak ki. Fontos kivé-

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup> A mérések 10 ország kutatóinak együttműködésében folytak, mintegy 50 kísérleti reaktorfizikus közreműködésével. Ha a háttérben folyó elméleti kutatásokat is figyelembe vesszük, a résztvevők száma 100-ra becsülhető. Nemzetközi elismertségüket jelzi, hogy eredményeik 1996-ban bekerültek az OECD országoknak a különböző reaktorfajták kritikussági adatait összesítő kézikönyvébe. Ebből derül ki, hogy a ZR-6 mérési program a reaktorfizika történetének világszinten is egyik legnagyobb léptékű kísérleti vállalkozása volt.

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup> A 6.5. alfejezetben megmutatjuk, hogy egy jól tervezett reaktor nem válhat atombombává. Csernobilban csak azért robbanhatott fel egy reaktor, mert tervezői jó néhány hibát elkövettek.

telek: Franciaország és Oroszország. Ez a tilalom súlyos korlátozást jelent a hasadási energia hosszú távú hasznosítására vonatkozóan, hiszen – ha érvényben marad – csak az urán 0,7%-át kitevő <sup>235</sup>U-ban rejlő energiát hasznosítjuk. Ha viszont az elhasznált üzemanyag újrafeldolgozását ipari léptékben folytatjuk, akkor elvileg a teljes uránmennyiséget hasznosíthatjuk energiatermelésre. A két opció közötti különbség 140-szeres, tehát nagyon jelentős.

| Év   | Fizikai felfedezés  | Polgári alkalmazás      | Katonai alkalmazás      |
|------|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1895 | Röntgen-sugarak     |                         |                         |
| 1896 | radioaktív sugárzás |                         |                         |
| 1911 | atommag             |                         |                         |
| 1932 | neutron             |                         |                         |
| 1935 | mesterséges radio-  |                         |                         |
|      | aktivitás           |                         |                         |
| 1939 | maghasadás          |                         |                         |
| 1942 | az első reaktor     |                         |                         |
| 1943 |                     |                         | Manhattan projekt indí- |
|      |                     |                         | tása                    |
| 1945 |                     |                         | első amerikai atom-     |
|      |                     |                         | bombák                  |
| 1949 |                     |                         | szovjet atombomba       |
| 1951 |                     | reaktor először termel  |                         |
|      |                     | villamos áramot         |                         |
| 1952 |                     |                         | brit atombomba          |
| 1953 |                     | "Atomok a békéért"      |                         |
|      |                     | (Eisenhower beszéde)    |                         |
| 1955 |                     | világ első atomerőműve  |                         |
| 1957 |                     |                         | NAÜ (IAEA) létrehozá-   |
| 1050 |                     | 1                       | sa                      |
| 1959 |                     | kutatoreaktor Magyar-   |                         |
| 1000 |                     | orszagon                | f                       |
| 1960 |                     | 1 '.'1 1 1 1            | Irancia atombomba       |
| 1961 |                     | kritikus rendszer Ma-   |                         |
| 1062 |                     | gyarorszagon            | négalagas atomasand     |
| 1905 |                     | elso versenykepes       | reszieges atomcsenu-    |
| 1964 |                     | atomeroniu              | kínai atombomba         |
| 1968 |                     |                         | atomsoromnó-szerződés   |
| 1971 |                     | oktatóreaktor a Mű-     | atomsorompo-szerzodes   |
| 17/1 |                     | egyetemen               |                         |
| 1974 |                     |                         | indiai atombomba        |
| 1977 |                     | Carter elnök betiltia a |                         |
| 17/1 |                     | reprocesszálást         |                         |
| 1979 |                     | a TMI-2 üzemzavar       |                         |
| 1982 |                     | I. blokk Pakson         |                         |
| 1986 |                     | a csernobili baleset    |                         |
| 1988 |                     | IV. blokk Pakson        |                         |

1.1. táblázat. A nukleáris technika fejlődésének legjelentősebb (pozitív és negatív) eseményei (köztük a legfontosabb hazai események)

## 2. A transzportegyenlet

## 2.1. A transzportelmélet alapfogalmai

#### Hatáskeresztmetszetek

A neutrontranszport-elméletben a hatáskeresztmetszet segítségével fejezzük ki annak a valószínűségét, hogy az egyes atommagok a különböző fajta magreakciókban részt vesznek. Tekintsünk egy cm<sup>3</sup>-enként N atommagot tartalmazó, vékony<sup>13</sup> céltárgyat, amelynek egy cm<sup>2</sup>-ére I neutron esik merőlegesen (21.1. ábra). A térfogategységben bekövetkező magreakciók R számát

$$R = NI\sigma$$

alakban fejezzük ki, ahol  $\sigma$  a vizsgált reakciótípus *mikroszkopikus* hatáskeresztmetszete. Tekintve, hogy felület dimenziójú mennyiségről van szó, továbbá az atommag átmérője 10<sup>-12</sup> cm nagyságrendű, a hatáskeresztmetszet természetes egysége a *barn*:

1 barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>.

A szokásos felületegységek helyett az SI rendszer a magfizikában és a reaktorfizikában – kivételesen – megengedi ezt a már régóta használatos egységet.



21.1. ábra. Kollimált neutronnyaláb és egy céltárgy kölcsönhatása

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup> A "vékonyság" itt azt jelenti, hogy elhanyagolható egy atommagnak egy másik által való "takarása".



21.2. ábra. Kollimált neutronnyaláb gyengülése

Véges vastagságú anyagon való áthaladáskor a neutronnyaláb gyengül az anyagban található atommagok sűrűségének és hatáskeresztmetszetének a függvényében. Tekintsük a 21.2. *ábrát*. Az anyagra kívülről cm<sup>2</sup>-enként  $I_0$  neutron esik be a céltárgyra merőlegesen. A neutronnyalábból egy *x* cm vastagságú rétegen csak ennél kevesebb, I(x) számú neutron fog áthaladni, mivel a közben bekövetkező magreakciók a nyalábhoz tartozó neutronok számát csökkentik. Ha az anyag egy cm<sup>3</sup>-ében *N* számú atommag van, akkor az (*x*, *x*+d*x*) közé eső rétegben bekövetkező csökkenésre a

$$-dI(x) = I(x)N\sigma dx$$
(21.1)

összefüggést írhatjuk fel, amiből egyszerűen kapjuk, hogy

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma x}.$$
 (21.2)

Itt

$$\Sigma = N\sigma \tag{21.3}$$

a *makroszkopikus* hatáskeresztmetszet. Szokásos egysége: 1/cm. Fizikai jelentése: a magreakciónak a neutron által megtett út 1 cm-ére vonatkozó valószínűsége. Megjegyezzük, hogy (21.2) csak akkor igaz, ha  $\Sigma$  a *teljes* hatáskeresztmetszet (lásd alább). Az N magsűrűséget a g/cm<sup>3</sup>-ben mért  $\rho$  makroszkopikus sűrűséggel az

$$N = \frac{0,60221\,\rho}{A} \tag{21.4}$$

képlet kapcsolja össze, ahol *A* az atommag tömegszáma. Az itt szereplő állandót a *Loschmidt-szám*ból kaptuk annak figyelembevételével, hogy a mikroszkopikus hatáskeresztmetszetet barnban mérjük. A (21.4) képlet a magsűrűséget tehát 1/(cm·barn) egységekben adja. Ha ezt egy barn-ban mért mikroszkopikus hatáskeresztmetszettel szorozzuk, 1/cm-ben mért makroszkopikus hatáskeresztmetszetet kapunk eredményül. A hatáskeresztmetszetek két szempontból is additívak. *Először*, a különböző típusú magreakciók együttes hatáskeresztmetszete a rész-hatáskeresztmetszetek öszszege. Például, az *abszorpciós* hatáskeresztmetszetet a *befogási* és a *hasadási* hatáskeresztmetszetből a

$$\sigma_{\rm a} = \sigma_{\rm c} + \sigma_{\rm f} \,, \tag{21.5a}$$

a teljes hatáskeresztmetszetet pedig a

$$\sigma_{\rm t} = \sigma_{\rm a} + \sigma_{\rm s} \tag{21.5b}$$

képlettel számíthatjuk ki, ahol  $\sigma_s$  a *rugalmas szórási* hatáskeresztmetszet. (Ha *rugal-matlan szórás* is van, akkor (21.5b) jobb oldalán még egy  $\sigma_{in}$  tagot is szerepeltetni kell.) A mikroszkopikus hatáskeresztmetszetek összeadásának az az alapja, hogy a különböző fajta magreakciók egymást kizáró események, amelyek valószínűségét összeadva megkapjuk az összetett esemény valószínűségét. *Másodszor*, egy különböző fajtájú atommagokból álló keverék makroszkopikus hatáskeresztmetszetét a különböző fajta magok mikroszkopikus hatáskeresztmetszetének a lineáris kombinációja adja ki. Például, a keverék abszorpciós makroszkopikus hatáskeresztmetszetét a

$$\Sigma_{a} = N_{1}\sigma_{a1} + N_{2}\sigma_{a2} + \cdots$$
(21.5c)

képlettel számíthatjuk ki, ahol  $N_i$  és  $\sigma_{ai}$  az *i*-edik fajta mag sűrűsége, illetve abszorpciós mikroszkopikus hatáskeresztmetszete (*i* = 1, 2, ...). Az összeadásnak ugyanaz a magyarázata, mint az előbbi esetben: a különböző fajta magokon bekövetkező magreakciók egymást kizáró események.

A makroszkopikus hatáskeresztmetszet reciprokát *átlagos szabad úthossz*nak szoktuk nevezni. Annyiféle szabad úthosszról lehet beszélni, ahányféle hatáskeresztmetszet van. Szemléletes és egyszerű fizikai jelentést azonban csak  $1/\Sigma_t$ -nek lehet adni: annak a távolságnak a várható értéke, amelyet a neutron ütközés nélkül megtesz. Ezt könnyen megkaphatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy – mint könnyen belátható [vö. 21.2. *ábra* és (21.2) egyenlet] – annak a valószínűsége, hogy az első ütközés az (x, x+dx) intervallumban történik:

$$e^{-\Sigma_t x} \Sigma_t dx$$

amivel a kérdéses várható érték:

$$M(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-\Sigma_{t}x} \Sigma_{t} x dx = \frac{1}{\Sigma_{t}}.$$

A többi szabad úthossz értelmezése bonyolultabb. Nézzük például  $1/\Sigma_a$  fizikai jelentését. Annak a valószínűsége, hogy a neutron *n*-edik ütközése abszorpcióra fog vezetni:

$$\frac{\Sigma_{\rm a}}{\Sigma_{\rm t}} \left(\frac{\Sigma_{\rm s}}{\Sigma_{\rm t}}\right)^{n-1},$$

hiszen az abszorpciót (*n*–1) szórás előzi meg, és egy ütközés  $\Sigma_a/\Sigma_t$  és  $\Sigma_s/\Sigma_t$  valószínűséggel vezet abszorpcióra, illetve szórásra (*n* = 1, 2, ...). Ebben az esetben a cikkcakkban megtett út átlagos hossza *n*/ $\Sigma_t$ . Az abszorpcióig megtett út várható értéke tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Sigma_{a}}{\Sigma_{t}} \left(\frac{\Sigma_{s}}{\Sigma_{t}}\right)^{n-1} \frac{n}{\Sigma_{t}} = \frac{1}{\Sigma_{a}}$$

Ha ugyanezt az első hasadásig megtett útra számoljuk végig,  $\Sigma_f / \Sigma_a^2$  jön ki,  $1/\Sigma_f$  tehát nem értelmezhető így.

A hatáskeresztmetszetek általában függnek a magreakciót kiváltó neutron energiájától. E függés jellege atommagonként és reakciófajtánként nagyon eltérő lehet. Például, a potenciálszórási hatáskeresztmetszet széles energiatartományban gyakorlatilag állandó, viszont a befogási és a hasadási hatáskeresztmetszet igen gyors, rezonanciaszerű változásokat is mutathat. Az előbbire példaként a 21.3. ábrán látható a hidrogén szórási hatáskeresztmetszete. Az utóbbira a 21.4. ábra mutat példát (az <sup>238</sup>U teljes hatáskeresztmetszete). Ezen túlmenően a hatáskeresztmetszetek nagysága atommagról atommagra is nagyon eltérő lehet. Például, a deutérium abszorpciós hatáskeresztmetszete 1 mbarn, szemben a <sup>135</sup>Xe-tel, amelyre ugyanez (1 eV-nál kisebb energiájú neutronokra) a millió barnt is meghaladja. Mint látni fogjuk, ennek komoly következményei vannak mind a reaktorok működésére, mind a reaktorelméletre vonatkozóan. A különböző atommagok hatáskeresztmetszeteinek a neutronenergiától való függését a reaktorfizika a magfizikai mérések eredményeiből veszi. A világ több vezető laboratóriumában foglalkoznak a magfizikusok által mért adatok kritikai elemzésével (ún. evaluálásával), aminek az eredményeképpen időről időre ún. magadatkönyvtárakat publikálnak. A forgalomban lévő könyvtárak nagy (néha a milliót is meghaladó) számú adatot tartalmaznak, amelyeket a reaktorfizikusok numerikus számításaikban használnak fel. Tekintve azonban, hogy - mint mondtuk - az egyes hatáskeresztmetszetek jellegének és nagyságának komoly befolyása van a reaktorelméletre, a reaktorfizikusnak éppen úgy ismernie kell az egyes izotópok hatáskeresztmetszeteit (nagyságukat és a neutronenergiától való függésük jellegét), mint a biológusnak az egyes növény- és állatfajok tulajdonságait.



21.3. ábra. A <sup>1</sup>H szórási hatáskeresztmetszete (mért adatok)



21.4. ábra. Az <sup>238</sup>U teljes hatáskeresztmetszete

A szórási hatáskeresztmetszetre vonatkozóan az energiától való függésen túlmenő részletezésre is szükség van, hiszen nem mindegy, hogy a szóródás után a neutron milyen energiával és milyen irányban repül tovább. Ezért a  $\sigma_s(E)$  szórási hatáskeresztmetszet mellett bevezetjük a *szórási magfüggvény* fogalmát:

$$\sigma_{\rm s}(E \to E', \vec{\Omega} \to \vec{\Omega}') {\rm d}E' {\rm d}\vec{\Omega}'$$

annak a szórási magreakciónak a hatáskeresztmetszete, amelyben egy  $\Omega$  irányban repülő *E* energiájú neutron a szóródás után az (*E'*, *E'*+d*E'*) intervallumba eső energiával, az  $\Omega'$  körüli d $\Omega'$  térszögben repül tovább. ( $\Omega$  és  $\Omega'$  a neutron sebességének az irányába mutató egységvektorok.) Bizonyos kristályos anyagoktól eltekintve a szórási magfüggvény nem függ külön-külön az  $\Omega$  és  $\Omega'$  irányoktól, hanem csak az általuk bezárt szögtől, tehát végső soron az  $\Omega\Omega'$  skalár szorzattól. Ha még ettől sem függ, akkor *izotrop* szórásról beszélünk, és ilyenkor a magfüggvény a

$$\sigma_{\rm s}(E \to E', \vec{\Omega}\vec{\Omega}') = \frac{\sigma_{\rm s}(E \to E')}{4\pi}$$

alakban írható fel. Ilyennek szoktuk tekinteni a rugalmatlan szórást, de ez gyakran elfogadható közelítés a rugalmas szórás esetében is. Végül a hatáskeresztmetszetek additivitásából következik, hogy

$$\sigma_{\rm s}(E) = \int_{4\pi 0}^{\infty} \sigma_{\rm s}(E \to E', \vec{\Omega}\vec{\Omega}') \, \mathrm{d}E' \mathrm{d}\vec{\Omega}'.$$

Ha a szóródás analógiájára a hasadás esetében is definiálunk egy magfüggvényt, akkor egy egyszerű, elfajult alakot kapunk:

$$\sigma_{\rm f}(E \to E', \vec{\Omega}\vec{\Omega}') = \frac{f(E')\nu(E)\Sigma_{\rm f}(E)}{4\pi},$$

mivel a hasadásban keletkező neutronok irányeloszlása izotrop, továbbá f(E') energiaspektrumuk független a hasadást kiváltó neutron *E* energiájától. v(E) a hasadásban keletkező neutronok száma, amely viszont *E'*-től független.<sup>14</sup> v értéke 0 és 6 között változhat. Valószínűségi eloszlásfüggvénye <sup>235</sup>U-re a *38.1. ábrán* látható. v(E) erre vonatkozó átlag. A jelölés egyszerűsítése érdekében  $v(E)\Sigma_{f}(E)$  helyett gyakran  $v\Sigma_{f}(E)$ t írunk, ami nem jelenti azt, hogy *v*-t *E*-től függetlennek tekintenénk.

Az eddigiekben a neutronnal ütköző atommagot nyugalomban levőnek tekintettük, pedig a valóságban hőmozgást végez. A magfizikában definiált hatáskeresztmetszet mindig a neutronnak a tömegközépponti rendszerben (TKR) vett energiájára vonatkozik, viszont a reaktorfizikában *E* konzekvensen a laboratóriumi rendszerben (LR) vett energia. Ennek az ellentmondásnak a feloldására szolgál az *effektív hatáskeresztmetszet*.

Legyen a neutron és a mag sebessége LR-ben rendre v és V. A magok hőmozgását a P(V) valószínűségi sűrűségfüggvénnyel írjuk le. A mondottak szerint a magfizikai hatáskeresztmetszet a

$$v_{\rm r} = |\mathbf{v} - \mathbf{V}|$$

relatív sebességtől függ. Azoknak a magoknak a sűrűsége, amelyek sebessége a V körüli dV sebesség-térfogatelembe esik, NP(V)dV, tehát ezek makroszkopikus hatáskeresztmetszete:

$$N\sigma(v_{\rm r})P(\mathbf{V})\mathrm{d}\mathbf{V}$$

Az ütköző neutron d*t* idő alatt ezekhez a magokhoz képest  $v_r dt$  utat tesz meg, tehát a magreakció valószínűsége:

$$Nv_{\rm r}\sigma(v_{\rm r})P(\mathbf{V})\mathrm{d}\mathbf{V}\mathrm{d}t$$
.

Ha ezt integráljuk V-re, megkapjuk a magreakció teljes valószínűségét.

Ha az ütköző mag nem mozogna, ugyanez a valószínűség *N* $\sigma$ *v*d*t* lenne. Az effektív hatáskeresztmetszet az a mennyiség, amely ugyanezzel a formulával helyesen adja meg a magreakció valószínűségét:

$$Nv\sigma_{\rm eff}(v)dt = \int Nv_{\rm r}\sigma(v_{\rm r})P(\mathbf{V})d\mathbf{V}dt$$
,

vagyis

$$\sigma_{\rm eff}(v) = \frac{1}{v} \int v_{\rm r} \sigma(v_{\rm r}) P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} . \qquad (21.6)$$

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup> Ezek a kijelentések ugyan közelítőek, de a reaktorfizikában jó közelítéssel mindig elfogadhatók.

Az 1/v hatáskeresztmetszet az egyetlen kivétel, amelyre az effektív hatáskeresztmetszet megegyezik a magfizikaival. Ekkor ugyanis  $v_r \sigma(v_r) = v \sigma(v)$ , amivel

$$\sigma_{\rm eff}(v) = \sigma(v) \int P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \sigma(v).$$

Minden más esetben a kettő egymástól eltér. A reaktorfizikának két fejezete van, ahol ez fontos szerepet játszik: a Doppler-effektus (4.4. alfejezet) és a termalizáció (4.5. alfejezet).

Amikor a magfizikusok hatáskeresztmetszetet mérnek, az effektív hatáskeresztmetszetet mérik. Ezért közölniük kell, hogy a mérést milyen hőmérsékleten végezték. Ha ez ismert, a mérési eredményt vissza lehet számolni a magfizikai hatáskeresztmetszetre, és ennek alapján az effektív hatáskeresztmetszet tetszőleges másik hőmérsékletre is előállítható. A korszerű hatáskeresztmetszet-kezelő programok ezeket a műveleteket a szükséges pontossággal elvégzik.

Befejezésül megjegyezzük, hogy amikor a hőmérséklet csökken, a  $P(\mathbf{V})$  sűrűségfüggvény egyre szűkül, és 0 K közelében egy  $\delta$ -függvényhez tart. Ezért  $v_r \approx v$ . Ekkor tehát az effektív hatáskeresztmetszet tart a magfizikaihoz. Erre való tekintettel az utóbbit gyakran "0 K-re redukált hatáskeresztmetszetnek" szoktuk nevezni.

#### A neutrontér leírása

Az eddigiekben szigorúan egy irányban repülő, azonos energiájú neutronokból álló nyalábokat tekintettünk. A valóságos esetekben azonban a különböző neutronok energiája egymástól eltér, és repülésük iránya sem ugyanaz. Általában tehát csak a neutronok hely, energia és repülési irány szerinti *eloszlásá*ról beszélhetünk, amit *neutrontér*nek is szoktunk nevezni. A neutrontranszport-elmélet két központi fogalma a neutronsűrűség és a neutronfluxus. Definíciójuk a következő. Tekintsük azokat a neutronokat, amelyek az **r** helyvektorhoz tartozó hely dV térfogatú környezetében vannak, az  $\vec{\Omega}$  egységvektor körüli d $\vec{\Omega}$  kúpszögbe eső irányban repülnek, és energiájuk az (*E*, *E*+d*E*) intervallumba esik. Ha a fázistér említett tartománya mindegyik változó szerint végtelen kicsi, akkor ezeknek a neutronoknak a számát

$$n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}V \mathrm{d}E \mathrm{d}\vec{\Omega}$$

alakban írhatjuk fel. Itt  $n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  a *neutronsűrűség*, amely általában attól is függ, hogy melyik *t* időpontban tekintjük a neutronteret. A definícióból következik, hogy első három változójára vonatkozóan  $n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  sűrűség dimenziójú.

Nézzük ezek után, hogyan fejezhető ki ebben az általános esetben egy kiválasztott magreakció gyakorisága. Jelöljük *v*-vel az *E* energiájú neutronok sebességét. Ezek tehát d*t* idő alatt ds = vdt utat futnak be. Annak a valószínűsége, hogy ezalatt magreakciót váltanak ki [vö. (21.1) és (21.3)]:

$$\Sigma ds = \Sigma v dt$$
.

A fentiekben tekintett fázis-térfogatelembe eső neutronok által kiváltott magreakciók száma tehát:

$$\Sigma vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}V \mathrm{d}E \mathrm{d}t$$

Az itt megjelenő  $vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  szorzatot *neutronfluxus*nak nevezzük:

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$$

A mondottak értelmében a  $\Sigma \Phi$  szorzat megadja a tekintett fázis-térfogatelembe eső neutronok által 1 s alatt kiváltott magreakciók számát, osztva a fázis-térfogatelem nagyságával.

A neutronfluxusnak szemléletes fizikai jelentése van. Tekintsünk egy d**f** felületelemet az **r** pont közelében (21.5. *ábra*), és számítsuk ki, hogy 1 s alatt hány olyan neutron halad rajta keresztül, amelyek energiája az (E, E+dE) intervallumba esik, és az  $\vec{\Omega}$  körüli d $\vec{\Omega}$  kúpszögben lévő irányban repülnek. Nyilvánvaló, hogy dt idő alatt az ábrára berajzolt d**f** alapú,  $\vec{\Omega}$ -val párhuzamos tengelyű és vdt hosszúságú hengerben levő valamennyi neutron át fog haladni a kiszemelt felületelemen. Mivel a henger térfogata d $V = (\vec{\Omega} d\mathbf{f}) \cdot vdt$ , ezeknek a neutronoknak a száma:

$$n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}E\mathrm{d}\vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega}\mathrm{d}\mathbf{f}) \cdot v\mathrm{d}t = \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}E\mathrm{d}\vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega}\mathrm{d}\mathbf{f}) \cdot \mathrm{d}t .$$



21.5. *ábra*. Az  $\hat{\Omega}$  irányban haladó neutronnyalábnak az a része fog d*t* idő alatt áthaladni a d**f** felületvektorú felületdarabon, amely a *v*d*t* hosszúságú hengerben van.

Ebből következik, hogy  $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega}$  megadja az  $\vec{\Omega}$  irányra merőlegesen elhelyezett egységnyi felületen időegység alatt áthaladó neutronok számát.

Erre való tekintettel a fluxust sokan egyfajta áramsűrűségnek szokták tekinteni. Ha csak az  $\vec{\Omega}$  irányban ütközés nélkül repülő neutronokat tekintjük, akkor  $\vec{\Omega} \boldsymbol{\Phi}$ -t valóban hasznos áramsűrűség-vektornak tekinteni. Tekintsünk például egy V térfogatot, és számítsuk ki a térfogatból kiáramló és az oda beáramló neutronok számának a különbségét, tehát a *nettó kifolyás*t. Ha a kiszemelt térfogatelem felületének minden pontjában a df felületvektort kifelé irányítjuk, akkor az időegységre vonatkozó nettó kifolyást a

$$\mathrm{d}E\mathrm{d}\vec{\Omega}\oint \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t)\cdot\left(\vec{\Omega}\mathrm{d}\mathbf{f}\right)$$

felületi integrál adja meg, hiszen a térfogatba befelé repülő neutronokra  $\hat{\Omega}$ df negatív, a kifelé repülőkre pedig pozitív, vagyis az integrál a nettó kifolyást előjelhelyesen adja meg. (Más szóval: akkor pozitív, ha több neutron repül ki, mint amennyi berepül.) A Gauss-tétel segítségével ez térfogati integrállá alakítható át:

$$\oint \boldsymbol{\Phi} \left( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \right) \cdot \left( \vec{\Omega} d\mathbf{f} \right) = \int \operatorname{div} \left( \vec{\Omega} \boldsymbol{\Phi} \left( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \right) \right) dV =$$
$$= \int \vec{\Omega} \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi} \left( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \right) dV,$$

ahol a div és grad operátorok az **r** változóra hatnak. Ebből látszik, hogy az

$$\vec{\Omega}$$
 grad  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ 

kifejezésnek is szemléletes fizikai jelentése van: az  $\hat{\Omega}$  irányba repülő neutronoknak a térfogategységből való, egységnyi időre vonatkozó nettó kifolyása. Ez az észrevétel még hasznos lesz a transzportegyenlet elemzésekor.

Jól kollimált nyalábok esetében tehát van némi létjogosultsága annak, hogy a fluxusnak áramsűrűségszerű értelmezést adjunk. Ez hasznos lehet például a fénysugarak esetében, ha a szórt fény elhanyagolható. A neutrontranszport-elméletben azonban nem egyetlen irányban repülő neutronokkal foglalkozunk, hanem általában olyan neutronterek leírására van szükség, amelyekben a neutronok minden irányban repülnek. Ezért itt a fluxusnak ez a fajta értelmezése nem segíti a jelenségek megértését. Egyébként is, a "neutronáram" kifejezésnek a neutrontranszport-elméletben az alábbi, matematikailag pontosan meghatározott jelentése van, amely a fentitől eltér.

Fejtsük a fluxust az  $\hat{\Omega}$  változó gömbfüggvényei szerint haladó sorba. Az így kapott sor első két tagja:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + \dots$$
(21.7)

Ha itt az *L*-edrendű gömbfüggvényekig menő sor szerepelne, akkor P<sub>L</sub> közelítésről beszélnénk. (Erről részletesebben van szó a 2.4. alfejezetben.) Eszerint (21.7) a P<sub>1</sub> közelítés. Mint közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhető, az itt szereplő együtthatófüggvények az alábbi módon fejezhetők ki az eredeti  $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  függvénnyel:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}\vec{\Omega}, \qquad (21.8a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \vec{\Omega} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}\vec{\Omega}.$$
 (21.8b)

A  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  függvényt – az eredeti  $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  függvényhez hasonlóan – szintén fluxusnak szoktuk nevezni. A reaktorfizikában szokásos jelölésmód szerint köztük csak a kiírt argumentumok alapján teszünk különbséget. Amikor a későbbi fejezetekben fluxusról beszélünk, mindig  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ -re gondolunk. Ha szükséges a két mennyiség megkülönböztetése, a  $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  függvényt szögfüggő fluxusnak nevezzük. Könyvünk további részében ehhez a megkülönböztetéshez konzekvensen ragaszkodni fogunk.

Jóllehet a szögfüggő fluxusból kiindulva  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ -nek is lehet fizikai jelentést adni, ez már annyira kevéssé szemléletes, hogy elhagyjuk. Helyette azonban egy másik jelentés a gyakorlatban is hasznos.<sup>15</sup> Tekintsünk egy V térfogatot, és számoljuk össze, mekkora utat tesznek meg benne egy infinitezimális d*t* idő alatt az (*E*, *E*+d*E*) intervallumba eső energiájú neutronok. Ha sebességüket *v*-vel jelöljük, akkor ez az út

$$dE \int_{V} n(\mathbf{r}, E, t) v dt dV = dE dt \int_{V} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t) dV.$$

Azt kaptuk tehát, hogy a kiszemelt energiájú, az **r** pont körüli térfogategységben levő neutronok 1 s alatt összesen  $\Phi(\mathbf{r}, E, t) dE$  utat tesznek meg. Mivel annak a valószínűsége, hogy a megtett út hosszegységén magreakció következzen be, éppen a kiszemelt reakció makroszkopikus hatáskeresztmetszete ( $\Sigma$ ), a  $\Sigma \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE$  szorzat megadja az **r** hely körüli egységnyi térfogatban időegység alatt bekövetkező magreakciók számát, a *reakciógyakoriság*ot.

A  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  vektort *neutronáram*nak nevezzük, amelynek a szögfüggő fluxushoz hasonlóan szintén szemléletes fizikai jelentése van. Vegyünk az  $\mathbf{r}$  pont közelében egy irányított d $\mathbf{f}$  felületelemet, és tekintsük külön azoknak a neutronoknak a számát, amelyek  $\mathbf{\Omega}$  repülési irányára  $\mathbf{\Omega}$ d $\mathbf{f} > 0$ , továbbá azokat, amelyekre  $\mathbf{\Omega}$ d $\mathbf{f} < 0$ . Megmutatjuk, hogy  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ d $\mathbf{f}$  a két szám különbsége. Az alábbiak végig az (E, E+dE) intervallumba eső energiájú neutronokra fognak vonatkozni. A könnyebb kifejezés kedvéért az erre való utalást, továbbá az emiatt fellépő dE szorzótényezőt a képletekből elhagyjuk. Legyen d $\mathbf{f}$  iránya először a z tengely iránya (21.6. *ábra*). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$J_{z}^{+} = \int_{\Omega_{z}>0} \Omega_{z} \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \,\mathrm{d}\vec{\Omega} \,, \tag{21.9a}$$

$$J_{z}^{-} = -\int_{\Omega_{z}<0} \Omega_{z} \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} .$$
(21.9b)

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup> Egyes könyvek közvetlenül ennek a fizikai jelentésnek az alapján definiálják a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxust. A tapasztalat szerint ennek megértése a hallgatóknak – első hallásra – nehézséget okoz.

A szögfüggő fluxus fent részletezett fizikai jelentése szerint az előbbi integrál megadja az *x*–*y* síkot alulról felfelé átlépő neutronok időegység alatti számát, az utóbbi pedig a felülről lefelé haladókét. Helyettesítsük be ide  $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  (21.7)-ben felírt kifejezését, és vegyük figyelembe az alábbi – könnyen ellenőrizhető – összefüggéseket:

$$\int_{\Omega_{z}>0} \Omega_{z} d\bar{\Omega} = - \int_{\Omega_{z}<0} \Omega_{z} d\bar{\Omega} = \pi,$$

$$\int_{\Omega_{z}>0} \Omega_{z}^{2} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega_{z}<0} \Omega_{z}^{2} d\bar{\Omega} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\int_{\Omega_{z}>0} \Omega_{x} \Omega_{y} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega_{z}>0} \Omega_{x} \Omega_{z} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega_{z}>0} \Omega_{y} \Omega_{z} d\bar{\Omega} = 0,$$

$$\int_{\Omega_{z}<0} \Omega_{x} \Omega_{y} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega_{z}<0} \Omega_{x} \Omega_{z} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega_{z}<0} \Omega_{y} \Omega_{z} d\bar{\Omega} = 0.$$



Ellenőrzésükhöz figyelembe kell venni az alábbi összefüggéseket (lásd 21.6. ábra):

$$\begin{split} \Omega_{\rm x} &= \sin\theta\cos\varphi,\\ \Omega_{\rm y} &= \sin\theta\sin\varphi,\\ \Omega_{\rm z} &= \cos\theta, \end{split}$$

továbbá:

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

végül az integrálási tartományok a következők:

$$\Omega_{z} < 0: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$$

és

$$\Omega_{z} > 0: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

A fenti integrálok figyelembevételével a (21.9) egyenletekből kapjuk:

$$J_{z}^{+} = \frac{1}{4} \Phi(\mathbf{r}, E, t) + \frac{1}{2} J_{z}(\mathbf{r}, E, t), \qquad (21.10a)$$

$$J_{z}^{-} = \frac{1}{4} \Phi(\mathbf{r}, E, t) - \frac{1}{2} J_{z}(\mathbf{r}, E, t), \qquad (21.10b)$$

amiből rögtön látható, hogy a két szám különbsége valóban a neutronáram z komponensét adja meg:

$$J_{\mathrm{z}} = J_{\mathrm{z}}^{+} - J_{\mathrm{z}}^{-}.$$

Teljesen analóg eredményt kapnánk, ha ezeket a számításokat az x vagy y tengelyre vonatkozóan végeznénk el. Ha egy tetszőleges helyzetű d**f** felületelemet tekintünk, a fentiek analógiájára okoskodhatunk:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) \mathrm{d}\mathbf{f} = \int_{4\pi} (\vec{\Omega} \mathrm{d}\mathbf{f}) \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}\vec{\Omega} =$$
$$= \int_{\vec{\Omega} \mathrm{d}\mathbf{f} > 0} (\vec{\Omega} \mathrm{d}\mathbf{f}) \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}\vec{\Omega} + \int_{\vec{\Omega} \mathrm{d}\mathbf{f} < 0} (\vec{\Omega} \mathrm{d}\mathbf{f}) \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}\vec{\Omega} .$$

Könnyű belátni, hogy az itt szereplő két integrál analóg a (21.9a)-ban és (21.9b)-ben felírt mennyiségekkel. Vezessük be ezért a következő jelöléseket:

$$J_{\rm f}^{+} = \int_{\vec{\Omega} d\mathbf{f} > 0} \left( \vec{\Omega} d\mathbf{f} \right) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} \qquad \text{és} \qquad J_{\rm f}^{-} = - \int_{\vec{\Omega} d\mathbf{f} < 0} \left( \vec{\Omega} d\mathbf{f} \right) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} \,.$$

Így **J**d**f** valóban a két mennyiség különbségét, tehát a felületelemen keresztül történő nettó neutronáramlást adja meg:

$$\mathbf{Jdf} = J_{\mathrm{f}}^{+} - J_{\mathrm{f}}^{-}.$$

Ha most a különböző irányítású, azonos területű d**f** felületelemeket tekintjük, a **J**d**f** skalár szorzat akkor a legnagyobb, ha **J** és d**f** iránya azonos. Ebből következik, hogy a  $J(\mathbf{r}, E, t)$  vektor iránya az az irány, amerre a nettó neutronáramlás a legnagyobb.

#### 2.2. A transzportegyenlet két alakja

#### Differenciális alak

A *transzportegyenlet* (*Boltzmann-egyenlet*) a reaktorfizika alapegyenlete. Fizikai jelentését tekintve a neutronok által kiváltott magreakciók mérlegét fejezi ki. Tekintsük – szokás szerint – a fázistérnek azt az elemét, amelyhez az **r** pont körüli dV térfogatelem, az  $\vec{\Omega}$  sebességirány körüli d $\vec{\Omega}$  térszög és az (*E*, *E*+d*E*) neutronenergiaintervallum tartozik. A továbbiakban az ebben a fázis-térfogatelemben található neutronokat "kiszemelt nyaláb"-nak fogjuk nevezni. A *t* időpontban a hozzá tartozó neutronok száma – definíció szerint –  $n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dV dE d\vec{\Omega}$ . d*t* idő múlva a kiszemelt nya-

láb egy része az  $\mathbf{r}+v\Omega dt$  hely környezetében lesz található, másik része pedig magreakciót fog kiváltani, így a kiszemelt nyaláb számára elvész: ha a kiváltott magreakció abszorpció, akkor a magreakciót kiváltó neutronok végleg eltűnnek, ha viszont szóródás, akkor a szóródott neutronok a más irányokban, más energiával repülő neutronnyalábokban jelennek meg. A kiszemelt nyaláb számára így elvesző neutronok helyébe újabbak lépnek, amelyeket a többi neutronnyaláb által ez alatt a dt idő alatt kiváltott magreakciók (vagy esetleg külső neutronforrások) termelnek. Ha az utóbbiak számát

$$Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}V \mathrm{d}E \mathrm{d}\vec{\Omega} \mathrm{d}t$$

alakban írjuk fel, akkor az elmondottak a következőképpen fejezhetők ki matematikai formában:

$$\left[ n \left( \mathbf{r} + v \vec{\Omega} dt, E, \vec{\Omega}, t + dt \right) - n \left( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \right) \right] dV dE d\vec{\Omega} \cong$$
  
$$\cong - \mathcal{E}_{t} (\mathbf{r}, E) \Phi \left( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \right) dV dE d\vec{\Omega} dt + Q \left( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \right) dV dE d\vec{\Omega} dt$$

amiből d $t \rightarrow 0$  határátmenettel kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}n(\mathbf{r}(t), E, \vec{\Omega}, t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} + \vec{\Omega}v \operatorname{grad} n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \\ = -\Sigma_{\mathrm{t}}(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) + Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t).$$

Mint a most felírt összefüggésből látható, a hatáskeresztmetszetekről általában azt tételezzük fel, hogy az **r** helykoordinátától és az *E* energiától függnek. A kapott összefüggés jobb oldalán minden tagot a fluxussal kifejezve kapjuk a *neutrontranszportegyenlet* (*Boltzmann-egyenlet*) differenciális alakját:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} =$$
$$= -\vec{\Omega} \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) - \boldsymbol{\Sigma}_{t}(\mathbf{r}, E) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \boldsymbol{Q}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t).$$
(22.1a)
A fentiekben mondottak alapján világos, mely folyamatok mérlegét fejezi ki ez az egyenlet. A 2.1. alfejezetben láttuk, hogy a jobb oldal első tagja a kiszemelt nyalábból való nettó kifolyást adja meg. Ez és az összes magreakciókat együttesen számba vevő második tag csökkenti, a harmadik, az ún. *forrástag* által leírt neutrontermelés pedig növeli a kiszemelt nyalábhoz tartozó neutronok számát. A három tag eredője adja meg a neutronsűrűség időegységre vonatkozó megváltozását.

A reaktorfizikában leggyakrabban előforduló *neutrontermelő* magreakciók a következők (zárójelben megnevezzük az integráloperátornak megfelelő magreakciót):

$$Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) =$$
(22.1b)

(rugalmas szórás) 
$$= \int_{4\pi0}^{\infty} \Sigma_{s} (\mathbf{r}, E' \to E, \vec{\Omega}\vec{\Omega}') \Phi(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}' + \frac{f(E)}{4\pi} \int_{4\pi0}^{\infty} \nu(E') \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}' +$$
(hasadás)

(rugalmatlan szórás) 
$$+\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi 0}^{\infty} \Sigma_{in}(\mathbf{r}, E' \to E) \Phi(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}' +$$

(külső forrás)  $+ S(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t).$ 

Az utolsó tagban a "külső forrás" megjelölés azt jelenti, hogy ez a tag független a fluxustól. A tagok száma természetesen tovább szaporítható. Például, időben gyorsan változó neutronterek esetében a hasadási tagot két részre kell bontani: az egyik tag leírja a prompt neutronokat (ez a fluxus *t* időponthoz tartozó értékétől függ), a másik tag pedig a késő neutronokat. Ez a fluxus t' < t időpontbeli értékeitől függ a 3.6. alfejezetben leírt módon.

## Kezdő- és peremfeltételek

A (22.1) transzportegyenlethez kezdő- és peremfeltételek tartoznak. A *kezdő-feltétel*nek az elsőrendű differenciálegyenleteknél megszokott egyszerű alakja van: a t = 0 időpontban meg kell adnunk a szögfüggő fluxus értékét:

$$\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t\right)\Big|_{t=0} = \boldsymbol{\Phi}_{i}\left(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}\right), \qquad (22.2a)$$

ahol a jobb oldalon tetszőleges (az alábbi peremfeltételt kielégítő) nemnegatív függvény állhat. A szokásos *peremfeltétel* azt fejezi ki, hogy a reaktor (vagy általánosabban a vizsgált rendszer) vákuummal határos külső felületén nincs a reaktor belseje felé mutató irányban repülő neutron. Tehát a vákuummal határos *konvex* felületen lévő valamennyi  $\mathbf{r}_{s}$  pontban (21.7. *ábra*) megköveteljük, hogy

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_{s}, E, \vec{\Omega}, t) = 0, \quad \text{ha} \quad \mathbf{N}_{s}\vec{\Omega} < 0 \tag{22.2b}$$

teljesüljön minden E energiára és minden t időpontra. Itt fontos kikötés, hogy a felületnek konvexnek kell lennie, mert konkáv felületen mindig van olyan kifelé repülő neutron, amely a reaktorba a vákuumon keresztül visszatér. Természetesen ebben az utóbbi esetben is lehet adekvát peremfeltételt szerkeszteni, de ennek részleteibe nem megyünk bele. Végül megjegyezzük, hogy a fluxus a reaktor belsejében az **r** változó deriválható függvénye.



22.1. *ábra*. A reaktor külső (vákuummal határos) felületén a szögfüggő fluxus eltűnik a befelé mutató neutronirányokra.

#### Integrális alak

A (22.1) egyenlet – típusát tekintve – *integro-differenciálegyenlet*. Létezik egy csak integráloperátorokat tartalmazó, (22.1)-gyel teljesen egyenértékű integrálegyenlet (ti. a transzportegyenlet alább levezetendő *integrális alak*ja), de megfordítva már nem igaz: speciális esetektől (pl. hidrogénmagokon való lassulástól) eltekintve nem helyettesíthető olyan differenciálegyenlettel, amely nem tartalmaz integráloperátorokat. Ennek az a körülmény az oka, hogy szóródáskor és maghasadáskor a neutron energiája és sebességének iránya ugrásszerűen megváltozik. Ez pedig csak integráloperátorral írható le.

A transzportegyenlet további kellemetlen tulajdonsága, hogy a benne szereplő operátorok nem önadjungáltak – szemben például a kvantummechanikában fellépő operátorokkal. Ennek az a következménye, hogy a neutrontranszport-jelenségek teljes megértéséhez elengedhetetlen a (22.1)-hez adjungált egyenlet felírása is, és a megoldásként adódó adjungált függvény kiszámítása is. A fizika más területein nagyon hasznos variációs elvek is csak a fluxusra és az adjungált függvényre együttesen fogalmazhatók meg, de külön-külön egyikre sem. Ezekre a kérdésekre a 7. fejezetben még visszatérünk.



22.2. ábra. A neutron helyvektora ( $\mathbf{r}$ ) és az idő (t) a neutronpálya egyes pontjaiban

A transzportegyenlet integrális alakjának a levezetéséhez tekintsük a kiszemelt neutronnyaláb pályáját (22.2. *ábra*). A pálya mentén mért *s* helykoordináta 0-pontját vegyük fel valamilyen (egyébként tetszőleges)  $\mathbf{r}_0$  pontban, ahol a nyaláb a  $t_0$  időpontban tartózkodik. Innen számítva *s* út megtétele után a nyaláb az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\overline{\Omega} \tag{22.3a}$$

helyen található a

$$t = t_0 + \frac{s}{v} \tag{22.3b}$$

időpontban. (21.1) és (21.2) egyszerű általánosítása útján könnyen le lehet vezetni, hogy a kiszemelt nyalábnak az s' és s koordinátájú (s' < s) pontok között való gyengülését az

$$\exp\left(-\overline{\mathcal{L}_{t}(s'\to s)}\right)$$

tényező adja meg, ahol a kitevőben szereplő kifejezés az ún. optikai úthossz:

$$\overline{\mathcal{L}_{t}(s' \to s)} = \int_{s'}^{s} \mathcal{L}_{t}\left(\mathbf{r}_{0} + s''\vec{\Omega}, E\right) ds'' .$$
(22.4)

Ha az összes s' < s pontban keletkező neutronok számát ezzel a tényezővel gyengítve összegezzük, akkor megkapjuk az *s* ponthoz tartozó szögfüggő fluxust:

$$\boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \int_{-\infty}^{s} \exp\left(-\overline{\boldsymbol{\varSigma}_{t}(s' \to s)}\right) \cdot \boldsymbol{Q}\left(\mathbf{r}_{0} + s'\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}, t_{0} + \frac{s'}{v}\right) \mathrm{d}s', \qquad (22.5)$$

ahol  $Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  a (22.1b)-ben definiált forrástag. Az egyenlet bal oldalán az  $\mathbf{r}$  és t argumentumokat (22.3)-ból kell behelyettesíteni. A most kapott (22.5) egyenlet a transzportegyenlet *integrális alak*ja. A benne szereplő integráloperátort *Peierls*-operátornak vagy egyszerűen csak *transzportoperátor*nak szoktuk nevezni. Az s' szerint való integrálás alsó határa a gyakorlatban nem szükségképpen  $-\infty$ , hanem a reaktornak az a határpontja, ahol a nyaláb pályáját  $-\infty$  felé meghosszabbítva kapott egyenes a (konvex) határfelületet metszi. Vegyük észre, hogy ez nem más, mint a (22.2b) alatti peremfeltétel.

Nem nehéz belátni, hogy (22.5) valóban ekvivalens (22.1a)-val. Deriváljuk mindkét oldalt *s* szerint. A bal oldal deriváltja [vö. (22.3)]:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t\right)}{\mathrm{d}s} = \vec{\Omega}\mathrm{grad}\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t\right) + \frac{1}{v}\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t\right)}{\partial t}.$$

A jobb oldal deriváltja [vö. (22.3) és (22.4)]:

$$-\mathcal{\Sigma}_{t}(\mathbf{r}, E)\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) + Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t),$$

amit az előbbivel egyenlővé téve éppen a (22.1a) alatti differenciális alakot kapjuk.

Tisztán abszorbeáló közegben (22.1b) szerint  $Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  csak a külső forrásból, vagyis  $S(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ -ből áll. Ebben az esetben (22.5) rögtön meg is adja a transzportegyenlet megoldását. Neutronregeneráció esetében, tehát amikor  $Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  függ a szögfüggő fluxustól, (22.5) valóságos integrálegyenlet. Megoldásához az esetek többségében valamilyen numerikus (általában iterációs) eljárásra van szükség.

#### Megoldási lehetőségek

A (22.1) transzportegyenlet analitikus megoldása csak idealizált esetekben van meg, amelyek közül néhányat a 2.3. alfejezetben ismertetünk. Mindegyikben feltételezzük, hogy a neutronspektrum minden pontban azonos alakú.<sup>16</sup> Minden más esetben numerikus módszereket alkalmazunk. A differenciális alak numerikus kezeléséhez a differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal, az integrálokat pedig téglányöszszegekkel közelítjük: ezen a módon algebrai egyenletrendszerhez jutunk, amelynek a megoldása – legalábbis elvileg – elképzelhető. Sajnos, még a legnagyobb teljesítményű számítógépek sem teszik lehetővé, hogy az egyenletnek mind a 7 változója szerint ezt megtegyük, mert kilátástalanul sok változós algebrai problémához jutunk el. A gyakorlatban vannak ugyan programok, amelyek ezt alkalmazzák (az ún.  $S_N$ *módszert*), de ezek két vagy három dimenzióban már meglehetősen nehézkesek. A másik lehetséges kiindulás az integrális alak, amelyre önként kínálkozik valamilyen

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup> Ebben az esetben az *E* energiaváltozót el lehet hagyni.

iterációs módszer alkalmazása. Ez az oka annak, hogy numerikus számításokban nagyon gyakran ebből az integrális alakból indulunk ki, de ez is csak erősen redukált dimenziószám mellett lehetséges. A sokszoros integrálok numerikus kiszámítása nagyon sok gépidőt igényel. Különösen akkor van ez így, amikor a reaktor geometriája bonyolult – azaz sok különböző anyagi minőségű tartományból áll –, mert ilyenkor az optikai úthossz (22.4) szerinti kiszámításához szükséges sugáranalízis nagyon elbonyolódhat. Gyakorlati problémák kezelésére emiatt a leggyakrabban (22.1) egyik közelítéséből, a *diffúzióegyenlet*ből indulunk ki, amellyel a 3. fejezetben fogunk foglalkozni. Előbb azonban a 2.4. alfejezetben összefoglaljuk a legfontosabb közelítő módszereket.

Az időtől való függést numerikus számításokban ritkán kezeljük explicit módon. Ilyen kivétel például üzemzavari tranziensek tárgyalása, aminek keretében időben gyors, erős térbeli visszacsatolásokkal járó dinamikai folyamatokat kell leírni. Az esetek többségében azonban a *t* változót egyszerűen ki lehet küszöbölni. Ennek az a módja, hogy az időtől függő problémát *sajátérték-problémá*vá redukáljuk. Az alábbi két módszert nemcsak a transzportegyenletben magában, hanem annak bármilyen közelítésében is alkalmazni lehet.

#### Kinetikus sajátérték

Az első módszer a *kinetikus sajátérték* bevezetése. Tételezzük fel, hogy a fluxus az idő és a többi változó szerint szeparálható:

$$\boldsymbol{\Phi}\!\left(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t\right) = T\!\left(t\right) \cdot \boldsymbol{\Phi}\!\left(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}\right),$$

amit a transzportegyenlet (22.1a) differenciális alakjába helyettesítve könnyen beláthatjuk, hogy az időtől függő rész csak

$$T(t) = e^{\omega t}$$

alakú lehet, ha (22.1b)-ben  $S \equiv 0$ . Amikor tehát az egyenletbe a

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \mathbf{e}^{\omega t} \cdot \boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$$
(22.6a)

próbakifejezést helyettesítjük, az

$$\frac{\omega}{v}\boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) =$$

$$= -\vec{\Omega}\operatorname{grad}\boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) - \boldsymbol{\Sigma}_{t}(\mathbf{r}, E)\boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) + \boldsymbol{Q}_{\omega}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$$
(22.6b)

sajátérték-egyenletre jutunk, amelyben  $Q_{\omega}$ -t  $\Phi_{\omega}$ -val (22.1b) szerint kell kifejezni ( $S \equiv 0$  mellett). A (22.6) egyenleteket *kinetikai sajátérték-egyenlet*nek nevezzük. A sajátértékek spektruma az általános esetben diszkrét és folytonos részekből tevődik össze.

Vegyük észre, hogy (22.6b)-ben az  $\omega/v$  tényező ugyanolyan szerepet játszik, mint a  $\Sigma_t$  hatáskeresztmetszet. Emiatt formálisan úgy lehet tekinteni, mintha a  $\Sigma_a(\mathbf{r}, E)$ abszorpciós hatáskeresztmetszet helyett

$$\Sigma_{\rm a}(\mathbf{r},E) + \frac{\omega}{v}$$

jelent volna meg. Emiatt  $\omega/v$ -t szokás *időabszorpciós hatáskeresztmetszet*nek is nevezni. Bevezetésével a transzportegyenlet időtől független alakúra redukálódik.

#### Sztatikus sajátérték. A kritikusság fogalma

A másik módszer a *sztatikus sajátérték* bevezetése. Ha a reaktorban a láncreakció önfenntartó, akkor matematikailag ez azt jelenti, hogy a fluxus időben állandó, vagyis (22.1a) bal oldalán a *t* szerinti derivált eltűnik ( $S \equiv 0$  mellett). *Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a reaktor kritikus*. Minden más esetben a *t* szerinti derivált 0-tól különbözik. Képzeljük el, hogy a láncreakciót a következő (a gyakorlatban természetesen kivihetetlen) fogással tesszük önfenntartóvá: (22.1b) hasadási tagjában *v* értékét oly módon változtatjuk meg, hogy a transzportegyenletnek legyen időtől független megoldása. Írjuk tehát (22.1b)-ben *v*(*E*) helyére a

$$\nu'(E) = \frac{\nu(E)}{k} \tag{22.7}$$

mennyiséget, és válasszuk meg k értékét a fentiek szerint megkívánt módon. Így kapjuk a *sztatikus sajátérték-egyenlet*et, amely formálisan szintén időtől független transzportegyenlet.

A 3. fejezetben egyszerű közelítésben mindkét sajátérték-problémát tanulmányozni fogjuk. Látjuk majd, hogy a legnagyobb sztatikus sajátérték nem más, mint az 1. fejezetben heurisztikusan bevezetett sokszorozási tényező matematikai definíciója. Az is ki fog derülni, hogy a reaktor kritikusságának az a feltétele, hogy e két sajátérték-problémában legyen olyan sajátérték, amelyre  $\omega = 0$ , illetve k = 1.

A legnagyobb sztatikus sajátértéket  $k_{\text{eff}}$ -fel jelöljük. Ez a reaktor alapvető integrális<sup>17</sup> jellemzője. Fontos, hogy a transzportegyenlet minden közelítésében a fentiek szerint lehet definiálni. Így tehát a kritikusság legáltalánosabb definíciója:

 $k_{\rm eff} = 1$ . (22.8)

A későbbi fejezetekben látni fogjuk, hogy egyes esetekben ez szemléletes, egyszerű feltételekkel helyettesíthető.

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup> Az "integrális" jelzőt abban az értelemben használjuk, hogy a szóban forgó mennyiség a reaktor egészére vonatkozik – szemben például a fluxussal, a hatáskeresztmetszetekkel, amelyek a reaktoron belül helyről helyre változó mennyiségek lehetnek.

A kritikussággal kapcsolatban még megjegyzendő, hogy a reaktor *kvalitatív* jellemzője: egy reaktor attól függetlenül kritikus, hogy mennyi benne a fluxus abszolút értéke. Ez az állítás egyszerűen következik abból, hogy a transzportegyenlet lineáris. Forrásmentes esetben a fluxust tetszőleges állandóval megszorozhatjuk, ettől a megoldás még megoldás marad. Más a helyzet azonban, amikor a reaktorban a fluxustól függő visszacsatolások vannak. Erre a 6. és 8. fejezetekben látunk majd példát.

A most bevezetett két sajátérték-egyenlet között van egy lényeges elvi különbség. A  $\Phi_{\omega}$  kinetikus sajátfüggvényeket a valóságban meg lehet figyelni, amikor a reaktor teljesítménye éppen e<sup> $\omega t$ </sup>-vel arányosan változik. Ezzel szemben a sztatikus sajátfüggvények – a  $k_{\text{eff}} = 1$  eset kivételével – a valóságban nem figyelhetők meg, hiszen a  $\nu$  paraméter magfizikai állandó, és nincs arra mód, hogy a (22.7) szerinti változtatást a valóságban is véghez vigyük. Ez az oka annak, hogy – bármilyen fontos lenne a gyakorlatban – a  $k_{\text{eff}}$  sajátértéket elvileg lehetetlen kísérletileg közvetlenül megmérni. Mérésére csak közelítő módszereink vannak (vö. 3.7. alfejezet).

Erre való tekintettel a 60-as években volt egy olyan irányzat, amely tagadta a sztatikus sajátérték létjogosultságát, és az  $\omega$  kinetikus sajátértéket próbálta a középpontba helyezni. A 70-es évekre ez visszaszorult. Egyrészt tisztázódtak azok a feltételek, amelyek teljesülése esetén  $k_{eff}$  kielégítő pontossággal mérhető [23], másrészt a reaktorfizikai számítások fejlődésével  $k_{eff}$  jól számolható mennyiséggé vált. Volt egy gyakorlati ok is: az  $\omega$  sajátérték mérése olyan berendezéseket igényel, amelyek atomerőművekhez csak körülményesen telepíthetők.

## 2.3. A transzportegyenlet néhány ismert megoldása<sup>18</sup>

A transzportegyenlet szerkezete különbözik a matematikai fizika jól ismert egyenleteiétől. Emiatt nagyon korlátozott azoknak a problémáknak az osztálya, amelyek zárt formában megoldhatók, ugyanis a megoldást csak nagyon egyszerű és idealizált esetekben sikerült megtalálni. Emiatt közelítő módszereket vagyunk kénytelenek alkalmazni, amelyek pontossága gyakran nehezen ellenőrizhető. Itt válnak érdekessé a zárt formában előállítható megoldások: felhasználhatók a közelítő módszerek *matematikai* ellenőrzésére. A közelítő módszerek legfontosabb típusait a 2.4. alfejezetben tárgyaljuk.

Ebben a fejezetben három problémával foglalkozunk:

- pontforrás által létrehozott neutrontér (Green-függvény) kiszámítása,
- Milne-probléma: végtelen féltérben kialakuló neutroneloszlás,
- végtelen féltér albédója: egy kívülről beeső neutronnyalábból visszaszórt neutronok részaránya.

Mindhárom probléma esetében feltételezzük, hogy a neutronszórás izotrop, és nem változtatja meg a neutronok sebességét. (Ezt az ún. *egycsoport közelítést* a 3. fejezetben pontosabban fogjuk definiálni.) További idealizáció, hogy csak egyetlen térbeli dimenziót tekintünk sík geometriában, és csak homogén közeget vizsgálunk.

<sup>&</sup>lt;sup>18</sup> E fejezet tanulmányozása első olvasáskor kihagyható.

Mindezeknek az egyszerűsítéseknek az ellenére a transzportegyenlet kezeléséhez ki kell lépni a valós analízis köréből, és igénybe kell venni disztribúcióelmélet [7] és a komplex függvénytan eszközeit. Ezért az alábbiakban a levezetések többségét el kell hagynunk, és meg kell elégednünk a végeredmények egyszerű közlésével. A levezetések részletei megtalálhatók Case és Zweifel könyvében [3]. Az ismertetendő módszert általában *Case-módszer* néven szokták idézni. Általánosítható az anizotrop szórás esetére is [4], de a lényeg megértéséhez elegendő lesz az izotrop szórás esetét tárgyalni.

Az egycsoport közelítés miatt a transzportegyenletből elhagyhatjuk az E energiaváltozót. A neutronszórás feltételezett izotropiája szerint a szórási magfüggvény így írható:

$$\Sigma_{\rm s}(\mathbf{r},\vec{\Omega}\vec{\Omega}')=\frac{\Sigma_{\rm s}}{4\pi}.$$

Az **r** térváltozót elhagytuk, mert a vizsgált közeg homogén. Analóg módon egyszerűsödik a (22.1b) képletben szereplő hasadási és rugalmatlan szórási tag is. Az ezeknek megfelelő hatáskeresztmetszeteket beolvaszthatjuk  $\Sigma_s$ -be. A sík geometria miatt a fluxus csak az *x* térváltozótól és az  $\vec{\Omega}$  vektor  $\mu = \Omega_x$  komponensétől függ: <sup>19</sup>

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, \boldsymbol{E}, \vec{\Omega}) = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}).$$

Ezzel a (22.1) transzportegyenlet a következő alakba megy át:

$$0 = -\mu \frac{\partial \psi(x,\mu)}{\partial x} - \Sigma_t \psi(x,\mu) + \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu') d\mu' + S(x,\mu).$$

A  $\Sigma_s/\Sigma_t$  hányadost *c*-vel jelöljük. Sokszorozó rendszerben c > 1; abszorpciómentes esetben c = 1; végül c < 1 felel meg az abszorbeáló, nem-sokszorozó rendszernek. Osszuk el a transzportegyenletet  $\Sigma_t$ -vel:

$$\mu \frac{\partial \psi(x,\mu)}{\partial (\Sigma_{t}x)} + \psi(x,\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu') d\mu' + \frac{S(x,\mu)}{\Sigma_{t}}$$

Az itt megjelenő  $\Sigma_t x$  szorzat az optikai távolság [vö. (22.4)]. Mivel a közeg homogén, minden mennyiséget tekinthetünk x helyett  $x' = \Sigma_t x$  függvényének is. Az egyszerűség kedvéért a fejezet hátralevő részében x'-ből a vesszőt elhagyjuk, továbbá  $S/\Sigma_t$  helyett S-et írunk.<sup>20</sup> A későbbiekben vizsgálandó egyenlet tehát a következő alakú:

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup> Megjegyezzük, hogy  $\psi(x,\mu)$  az egységnyi *térszög*re vonatkozik. Attól, hogy  $\vec{\Omega}$  komponensei közül csak  $\mu$ -től függ, még nem válik  $\mu$  szerinti sűrűségfüggvénnyé.

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup> Ha jobban tetszik, másképp is felfoghatjuk ezt az egyszerűsítést: olyan hosszúságegységet választunk, amelyben  $\Sigma_{t} = 1$ .

$$\mu \frac{\partial \psi(x,\mu)}{\partial x} + \psi(x,\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu') d\mu' + S(x,\mu).$$
(23.1)

A transzportegyenlet sajátértékei és sajátfüggvényei

A (23.1) egyenletben tegyük az  $S(x,\mu)$  forrástagot 0-val egyenlővé, és az így kapott homogén egyenlet megoldásait keressük a

$$\psi_{\kappa}(x,\mu) = \varphi_{\kappa}(\mu) e^{-x/\kappa}$$

alakban, amelyet (23.1)-be helyettesítve az

$$\left(1 - \frac{\mu}{\kappa}\right)\varphi_{\kappa}(\mu) = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_{\kappa}(\mu')d\mu'$$
(23.2)

sajátérték-egyenletet kapjuk. Mivel a sajátfüggvény normálása tetszőleges, választhatjuk a kényelmes

$$\int_{-1}^{1} \varphi_{\kappa}(\mu') d\mu' = 1$$
(23.3)

normálást.<sup>21</sup> Ezzel (23.2) így írható:

$$(\kappa - \mu)\varphi_{\kappa}(\mu) = \frac{c\kappa}{2}.$$
(23.4)

Legutóbbi egyenletünk csak látszólag egyszerű. A  $\mu$  változó a [-1, 1] intervallumban változik. Ha tehát  $\kappa$ ezen kívüli értéket vesz fel, akkor a sajátfüggvény:

$$\varphi_{\kappa}(\mu) = \frac{c\kappa}{2} \frac{1}{\kappa - \mu}.$$
(23.5)

Amikor azonban  $\kappa \in [-1, 1]$  is meg van engedve, akkor (23.5)-höz hozzáadhatunk egy  $\delta$ -függvényt:

$$\varphi_{\kappa}(\mu) = \frac{c\kappa}{2} \frac{1}{\kappa - \mu} + \lambda(\kappa)\delta(\kappa - \mu),$$

ahol  $\lambda(x)$  tetszőleges függvény. Ez szintén megoldása a (23.4) egyenletnek, hiszen definíció szerint x minden értékére  $x \delta(x) = 0$ . A sajátfüggvényt a transzportegyenletbe

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup> Ehhez ki kell zárnunk azt az eshetőséget, hogy az integrál eltűnik. Belátható [3], hogy ezt tényleg ki lehet zárni. Megjegyezzük továbbá, hogy ezzel a normálással a sajátfüggvények – a korábbiaktól eltérően – már nem egységnyi térszögre, hanem  $\mu$  egységnyi intervallumára vonatkoznak.

helyettesítve  $\mu$  szerint kell integrálnunk. Mint láttuk, az  $1/(\kappa - \mu)$  tag lehet szinguláris, tehát értelmeznünk kell a rá vonatkozó integrált. Megállapodunk abban, hogy az integrál Cauchy-féle főértékét vesszük, amit egy P betűvel jelzünk:

$$\varphi_{\kappa}(\mu) = \frac{c\kappa}{2} \operatorname{P} \frac{1}{\kappa - \mu} + \lambda(\kappa)\delta(\kappa - \mu).$$
(23.6)

Tekintve, hogy mind a  $\delta$ -függvénynek, mind a főértéknek csak az integráljel alatt van értelme, a (23.6) alatti megoldás nem tekinthető a szokásos értelemben vett függvénynek, hanem *általánosított függvény*, *disztribúció* [7].  $\kappa \notin$  [-1, 1] esetén (23.6) természetesen átmegy a szokásos értelemben is függvénynek tekinthető (23.5) sajátfüggvénybe.

Láttuk, hogy minden  $\kappa \in [-1, 1]$  sajátérték. Az alábbiakban megvizsgáljuk, van-e ezen kívül még más sajátérték, vagyis lehetséges-e  $\kappa \notin [-1, 1]$ . A (23.5) sajátfüggvényt a transzportegyenletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy  $\kappa$ -nak ehhez a következő egyenletet kell kielégítenie:

$$\Lambda(\kappa) \equiv 1 - \frac{c\kappa}{2} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\kappa - \mu} = 0.$$
(23.7)

Mivel most az integrandus nem szinguláris, könnyen kiszámíthatjuk:<sup>22</sup>

$$\Lambda(\kappa) = 1 - \frac{c\kappa}{2} \ln \frac{1+1/\kappa}{1-1/\kappa} = 1 - c\kappa \operatorname{arth} \frac{1}{\kappa}.$$
(23.8)

Ez a függvény a komplex síkon mindenütt analitikus, de a [-1, 1] intervallumon vágása van. Az arth(1/ $\kappa$ ) függvény több értékű, a (23.8) képletben a főágát kell venni. A későbbiek kedvéért bevezetjük még a következő jelölést. Legyen *z* olyan komplex szám, amelynek valós része Re(*z*) =  $\kappa \in [-1, 1]$ , továbbá tartson Im(*z*) felülről, illetve alulról 0-hoz, vagyis legyen Im(*z*)  $\rightarrow \pm 0$ . Könnyen belátható, hogy  $\Lambda(z)$  határértéke különböző:

$$\Lambda^{\pm}(\kappa) = 1 - \frac{c\kappa}{2} \operatorname{P} \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{\kappa - \mu} \pm \frac{i\pi c\kappa}{2} = 1 + \frac{c\kappa}{2} \ln \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \pm \frac{i\pi c\kappa}{2}.$$
 (23.9)

A "+" felső index az Im(z) > 0, a "-" felső index pedig az Im(z) < 0 értékeken keresztül kapott határértéket jelöli.

A definíciók alapján egyszerűen belátható, hogy  $\Lambda(\kappa) = \Lambda(-\kappa)$ . Komplex függvénytani megfontolásokkal be lehet bizonyítani [3], hogy a (23.7) egyenletnek két gyöke van. A  $\Lambda(\kappa)$  függvény párossága miatt ezek egymás negatívjai:  $\pm \kappa_0$ . Értékük a következő módon függ *c*-től:

<sup>&</sup>lt;sup>22</sup> A *A*(*k*) függvényt *diszperziós függvény*nek nevezzük.

- c < 1 esetében a két gyök a valós tengelyen van, és abszolút értékük 1-nél nagyobb,
- c > 1 esetében a két gyök a képzetes tengelyen van,
- $c \rightarrow 1$  esetében a két gyök a végtelenbe tart.<sup>23</sup>

A most talált két diszkrét gyökhöz tartozó sajátfüggvényeket a következőképpen jelöljük:

$$\varphi_{0\pm}(\mu) = \pm \frac{c\kappa_0}{2} \frac{1}{\pm \kappa_0 - \mu}.$$
(23.10)

Befejezésül – a normálási feltétel alapján – meghatározzuk a  $\kappa \in [-1, 1]$  sajátérték-kontinuumhoz tartozó sajátfüggvényekben szereplő  $\lambda(\kappa)$  függvényt. Ha (23.6)-ot (23.3)-ba helyettesítjük, egyszerűen kapjuk:

$$\lambda(\kappa) = 1 - \frac{c\kappa}{2} \operatorname{P} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\mu}{\kappa - \mu} = 1 - c\kappa \operatorname{arth} \kappa.$$
(23.11)

Ezt a (23.9) alatt bevezetett függvényekkel is kifejezhetjük:

$$\lambda(\kappa) = \frac{1}{2} \Big[ \Lambda^+(\kappa) + \Lambda^-(\kappa) \Big].$$

## A sajátfüggvények teljessége és ortogonalitása

A Case-módszer lényege, hogy a vizsgált probléma megoldását a sajátfüggvények szerinti sor, illetve integrál alakjában keressük. Ezért meg kell vizsgálnunk a sajátfüggvények teljességének és ortogonalitásának a kérdését. Az ortogonalitás nagyon egyszerűen belátható. Írjuk fel a (23.2) egyenletet  $\kappa$ -helyett  $\kappa'$ -re, majd szorozzunk be  $\varphi_{\kappa'}(\mu)$ -vel, illetve  $\varphi_{\kappa}(\mu)$ -vel, integráljunk  $\mu$  szerint, és vonjuk ki a két kapott egyenletet egymásból:

$$\left(\frac{1}{\kappa'}-\frac{1}{\kappa}\right)\int_{-1}^{1}\mu\varphi_{\kappa}(\mu)\varphi_{\kappa'}(\mu)\,\mathrm{d}\mu=0\,,$$

vagyis:

$$\int_{-1}^{1} \mu \varphi_{\kappa'}(\mu) \varphi_{\kappa'}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = 0, \qquad \text{ha } \kappa \neq \kappa'.$$
(23.12)

<sup>&</sup>lt;sup>23</sup> Ez az eset az alábbiakban külön vizsgálandó lenne, de ettől eltekintünk.

A módszer alkalmazásához szükség van a sajátfüggvények normájára, vagyis négyzetük integráljára. A diszkrét sajátértékek esetében ez nem okoz különösebb problémát, mivel némi számolás után kapjuk:

$$N_{0+} \equiv \int_{-1}^{1} \mu \varphi_{0+}^{2}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{c}{2} \kappa_{0}^{3} \left( \frac{c}{\kappa_{0}^{2} - 1} - \frac{1}{\kappa_{0}^{2}} \right), \tag{23.13}$$

továbbá

$$N_{0-} = -N_{0+}$$
.

Lényegesen nehezebb a helyzet a folytonos sajátértékek esetében, ugyanis a megfelelő sajátfüggvények nem négyzetesen integrálható függvények, vagyis normájuk végtelen. A problémát a következőképpen tudjuk megkerülni. Legyen  $f(\mu)$  tetszőleges függvény, amelyet a sajátfüggvények segítségével kívánunk előállítani:

$$f(\mu) = \int_{-1}^{1} A(\kappa') \varphi_{\kappa'}(\mu) \,\mathrm{d}\kappa' \,, \qquad (23.14)$$

ahol  $A(\kappa)$  meghatározandó együtthatófüggvény. Olyan  $N(\kappa)$  normálási tényezőt keresünk tehát, amely a hasonló sorfejtéseknél szokásos

$$A(\kappa)N(\kappa) = \int_{-1}^{1} \mu \varphi_{\kappa}(\mu) f(\mu) \, \mathrm{d}\mu$$

összefüggés alapján lehetővé teszi az együtthatófüggvény kiszámítását. Helyettesítsük ebbe az egyenletbe  $f(\mu)$ -t a (23.14) képletből:

$$N(\kappa) = \frac{1}{A(\kappa)} \int_{-1}^{1} \mu \varphi_{\kappa}(\mu) \int_{-1}^{1} A(\kappa') \varphi_{\kappa'}(\mu) \, \mathrm{d}\kappa' \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Érdemes megjegyezni, hogy itt azzal a ritka esettel állunk szemben, amikor – a bennük szereplő függvények szingularitása miatt – az integrálok sorrendje nem cserélhető fel. Bonyolult levezetés eredményeképpen az adódik [3], hogy minden szóba jövő  $A(\kappa)$  függvényre fennáll:

$$N(\kappa) = \kappa \Lambda^{+}(\kappa) \Lambda^{-}(\kappa) = \kappa \left[ \lambda^{2}(\kappa) + \frac{\pi^{2}c^{2}\kappa^{2}}{4} \right] =$$

$$= \kappa \left[ \left( 1 - c\kappa \operatorname{arth} \kappa \right)^{2} + \frac{\pi^{2}c^{2}\kappa^{2}}{4} \right].$$
(23.15)

Az itt szereplő függvényeket a (23.9) és (23.11) képletekben definiáltuk. Könnyen belátható, hogy az  $N(\kappa)$ -ra felírt három formula egymással megegyező eredményt ad. A folytonos sajátértékekre vonatkozó normálás és ortogonalitás a következő alakban összegezhető:

$$\int_{-1}^{1} \mu \varphi_{\kappa}(\mu) \varphi_{\kappa'}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = N(\kappa) \, \delta(\kappa - \kappa') \, .$$

.

Hátravan még a teljesség kérdése. Erre vonatkozóan bizonyítás nélkül idézzük a következő tételt [3]. A [-1, 1] *intervallumban definiált*  $\psi(\mu)$  függvények széles osztályára fennáll, hogy lehet olyan  $a_{0+}$  és  $a_{0-}$  együtthatókat, illetve A( $\kappa$ ) együtthatófüggvényt találni, amelyekkel

$$\psi(\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^{1} A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu) \,\mathrm{d}\kappa \,.$$

Bizonyos alkalmazások esetében az eddigi eredmények nem elégségesek. A transzportegyenlethez tartozó határfeltételek ugyanis különbséget tesznek a [–1, 0] és [0, 1] részintervallumokba eső  $\mu$ -höz tartozó fluxusértékek között.<sup>24</sup> Ezért szükség van a félintervallumhoz tartozó ortogonalitási és teljességi tételekre is.

Először a teljességre vonatkozó állítást mondjuk ki [3]: A [0, 1] intervallumban definiált  $\psi(\mu)$  függvények széles osztályára fennáll, hogy lehet olyan  $a_{0+}$  együtthatót és A( $\kappa$ ) együtthatófüggvényt találni, amelyekkel

$$\psi(\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu) \,\mathrm{d}\kappa \,.$$

Analóg állítást lehet a [–1, 0] félintervallumra vonatkozóan is megfogalmazni.

Az ortogonalitásra vonatkozó fenti megállapítások csak bizonyos módosítással vihetők át a félintervallumra. Ha ugyanis a sajátfüggvények a teljes intervallumban ortogonálisak [vö. (23.12)], csak egy alkalmas  $W(\mu)$  súlyfüggvénnyel lehetnek ortogonálisak a [-1, 0] vagy a [0, 1] félintervallumban. A  $W(\mu)$  függvény meghatározásához be kell vezetni a Case-módszer egyik legfontosabb függvényét, az X(z) függvényt, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik [3]:

- a függvénynek vágása van a [0, 1] intervallumban, de azon kívül analitikus;
- a [0, 1] intervallumban fennáll:

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)},$$

<sup>&</sup>lt;sup>24</sup> Ennek a megkülönböztetésnek a szükségessége világossá fog válni a Milne-probléma és az albédó tárgyalásakor.

ahol az  $X^{\pm}(\mu)$  egyoldali határértékek ugyanúgy származtatandók az X(z) függvényből, mint  $\Lambda^{\pm}(\mu)$  a  $\Lambda(z)$  függvényből [vö. (23.9) képlet];

•  $X(z) \sim 1/z$  a végtelenben.

Egy ilyen függvényt a következőképpen lehet konstruálni. A (23.9)-ben felírt  $\Lambda^+(z)$  komplex szám argumentumát a következőképpen jelöljük:

$$\Theta(z) = \arctan\left(\frac{\frac{\pi cz}{2}}{1 + \frac{cz}{2}\ln\frac{1-z}{1+z}}\right).$$

Amikor *z* értéke 0 és 1 között változik, zárójelben levő tört nevezője monoton csökken 1 és  $-\infty$  között. Van tehát olyan  $z_0$ , amelyre a nevező eltűnik. 0-tól  $z_0$ -ig  $\Theta(z)$  értéke monoton nő 0-tól  $\pi/2$ -ig. Ha  $z > z_0$  értékekre a  $\Theta(z)$  függvényt nem az arctg függvény főága mentén, hanem  $\pi/2$ -től folytatjuk tovább, az adódik, hogy  $\Theta(z)$  monoton nő 0 és  $\pi$  között, amikor *z* értéke 0-tól 1-ig nő. Ennek alapján meg lehet mutatni, hogy az

$$X_0(z) = \exp\left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Theta(\mu) \mathrm{d}\mu}{\mu - z}\right]$$
(23.16a)

függvény analitikus a [0, 1] intervallumban. Az intervallum belsejében ez nyilvánvaló. A határpontokról pedig a következőt mondhatjuk. z = 0 esetében az exponenciálisban levő integrál minden  $\mu$ -re véges és analitikus, hiszen  $\mu \rightarrow 0$  esetén  $\Theta(\mu)/\mu$  határértéke véges. 1-hez közeli *z*-kre be lehet látni, hogy az integrandus és  $\ln(1 - z)$  hányadosa véges, így ilyen *z*-re  $X_0(z)$  arányos (1 - z)-vel. Tehát az

$$X(z) = \frac{X_0(z)}{1-z}$$
(23.16b)

függvény mindenben megfelel a fenti követelményeknek. Az X(z) függvény kiszámítására nem a (23.16) alatti explicit képlet az egyetlen lehetőség. A függvény ugyanis kielégíti a következő nemlineáris integrálegyenletet [3]:

$$X(z) = \frac{c}{2(1-c)} \int_{-1}^{0} \frac{\mu d\mu}{(\kappa_0^2 - \mu^2) X(\mu)(\mu + z)}$$

Ebből következik, hogy elég a függvényt a [-1, 0] intervallumon ismerni, hiszen ennek az összefüggésnek az alapján bármilyen más *z*-re ki lehet számítani. A  $z \in [-1, 0]$ értékekre vonatkozóan pedig az egyenlet iterációval megoldható.  $z \in [0, 1]$  esetén az integrál főértékét kell venni. A [3] kézikönyv ezekre a *z*-kre részletes táblázatokat közöl. Az X(z) függvény a végtelenben 1/z-vel arányos.

X(z) segítségével kifejezhető az ortogonalitást biztosító  $W(\mu)$  súlyfüggvény:

$$W(\mu) = \gamma(\mu) \left(\kappa_0 - \mu\right), \tag{23.17}$$

ahol

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} \frac{X^{-}(\mu)}{\Lambda^{-}(\mu)} = \frac{c\mu}{2} \frac{1}{X(-\mu)(\kappa_{0}^{2} - \mu^{2})(1 - c)}.$$
(23.18)

Az itt szereplő második képlet azért előnyös, mert csak folytonos függvények szerepelnek benne. A [0, 1] intervallumba eső  $\mu$ -kre ugyanis az  $X(-\mu)$  függvény folytonos. Befejezésül megadjuk a normálási képleteket:

$$\int_{0}^{1} \varphi_{\kappa}(\mu) \varphi_{\kappa'}(\mu) W(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{W(\kappa)}{\kappa} N(\kappa) \, \delta(\kappa - \kappa'), \qquad (23.19a)$$

$$\int_{0}^{1} \varphi_{\kappa}(\mu) \varphi_{0+}(\mu) W(\mu) \, \mathrm{d}\mu = 0, \qquad (23.19b)$$

$$\int_{0}^{1} \varphi_{\kappa}(\mu) \varphi_{0-}(\mu) W(\mu) \, \mathrm{d}\mu = c \,\kappa \kappa_{0} \, X(-\kappa_{0}) \, \varphi_{0-}(\kappa) \,, \qquad (23.19c)$$

$$\int_{0}^{1} \varphi_{0\pm}(\mu) \varphi_{0\pm}(\mu) W(\mu) \,\mathrm{d}\mu = \mp \left(\frac{c\kappa_0}{2}\right)^2 X(\pm\kappa_0), \qquad (23.19\mathrm{d})$$

$$\int_{0}^{1} \varphi_{-\kappa}(\mu) \varphi_{0+}(\mu) W(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \mp \frac{c^2 \kappa \kappa_0}{4} \, X(-\kappa) \,, \tag{23.19e}$$

$$\int_{0}^{1} \varphi_{-\kappa}(\mu) \varphi_{\kappa'}(\mu) W(\mu) \,\mathrm{d}\mu = \frac{c\kappa'}{2} \varphi_{-\kappa}(\kappa') (\kappa_0 + \kappa) X(-\kappa) \,. \tag{23.19f}$$

A későbbiekben szükség lesz még a következő azonosságra:

$$\int_{0}^{1} \frac{\kappa \varphi_{\kappa}(\mu) \varphi_{\kappa}(\mu')}{(\kappa_{0} - \kappa) \gamma(\kappa) N(\kappa)} \, \mathrm{d}\kappa = \frac{1}{\kappa_{0} - \mu} \left[ \frac{1}{X(\kappa_{0})(\kappa_{0} - \mu')} - \frac{1}{X(\mu)(\mu - \mu')} \right], \quad (23.20a)$$
$$\mu < 0, \ \mu' > 0.$$

Ezt az összefüggést még a [3] könyv is bizonyítás nélkül közli, mert levezetése annyira hosszadalmas. (Egyébként Cauchy tételén alapul.) Bizonyítható [3] továbbá a következő összefüggés:

$$X(z) = \int_{0}^{1} \frac{\gamma(\mu)}{\mu - z} d\mu.$$
 (23.20b)

A Green-függvény

A Green-függvény izotrop pont-, sík- vagy vonalforrás körül kialakuló, a neutronirányokra integrált fluxus nem-sokszorozó homogén közegben. Megmutatjuk, hogy meghatározásához elegendő az izotrop síkforráshoz tartozó neutronteret kiszámítani. Legyen  $G_{\text{pont}}(\mathbf{r'} \rightarrow \mathbf{r})$  az  $\mathbf{r'}$  helyen levő pontforrás hatására az  $\mathbf{r}$  helyen kialakuló fluxus, továbbá  $G_{\text{sík}}(x' \rightarrow x)$  az x' helyen levő síkforrás hatására az x helyen kialakuló fluxus. (Vagyis ezek a pont-, illetve a síkforrás Green-függvényei.) A kettő között nyilván fennáll a következő összefüggés:

$$G_{\text{sik}}(x' \to x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dz' G_{\text{pont}}(\mathbf{r}' \to \mathbf{r}) = \int_{0}^{\infty} dr' \int_{0}^{2\pi} d\theta' r' G_{\text{pont}}(\mathbf{r}' \to \mathbf{r}),$$

ahol (x', y', z') és  $(r', \theta, z')$  az **r'** helyvektor derékszögű, illetve hengeres koordinátái. A korábbiaktól eltérően az itt szereplő koordináták nem optikai, hanem geometriai méreteket jelentenek. Szimmetriaokokból mindkét függvény csak a

$$\xi = |x - x'|,$$
 illetve  $\rho = |\mathbf{r'} - \mathbf{r}|$ 

távolságoktól függ. Emiatt a  $\theta$  azimutszögre való integrálás  $2\pi$ -vel való szorzást jelent. Végeredményben tehát írhatjuk:

$$G_{\rm sfk}(\xi) = 2\pi \int_{0}^{\infty} r' G_{\rm pont}(\rho) \, \mathrm{d}r' \, .$$

Mivel  $\rho^2 = \xi^2 + r'^2$ , az r' szerinti integrálás – helyettesítéssel –  $\rho$  szerinti integrállá alakítható át:

$$G_{\rm sik}(\xi) = 2\pi \int_{\xi}^{\infty} \rho G_{\rm pont}(\rho) \, \mathrm{d}\rho,$$

amelyet  $\boldsymbol{\xi}$ szerint deriválva egyszerű összefüggést kapunk a két Green-függvény között:

$$G_{\text{pont}}(\xi) = -\frac{1}{2\pi\xi} \frac{\mathrm{d}G_{\mathrm{sik}}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}.$$

Következésképpen elég a síkforrás Green-függvényét kiszámítani. A fentiekben követett módszerrel ebből a vonalforrás Green-függvényét is kifejezhetjük a síkforráséval, de a vonatkozó képlet felírásától eltekintünk.

A későbbiekben az optikai méretek függvényeként fogjuk kiszámítani a síkforráshoz tartozó fluxust. Ahhoz, hogy az  $r = \Sigma_{t} \rho$  optikai koordináta függvényében helyesen kapjuk meg a pontforrás Green-függvényét, utolsó képletünket a következőképpen kell alkalmaznunk:

$$G_{\text{pont}}(r) = -\frac{1}{2\pi\rho} \frac{\mathrm{d}G_{\text{sik}}(r)}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{\Sigma_{\text{t}}}{2\pi r} \frac{\mathrm{d}G_{\text{sik}}(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{\Sigma_{\text{t}}^2}{2\pi r} \frac{\mathrm{d}G_{\text{sik}}(r)}{\mathrm{d}r}.$$
 (23.21)

A síkforrás Green-függvényét a (23.1) szerinti transzportegyenlet következő alakjának megoldásaként kapjuk:

$$\mu \frac{\partial \psi(x,\mu)}{\partial x} + \psi(x,\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu') d\mu' + \frac{\delta(x)}{4\pi}.$$
(23.22)

A síkforrást az x = 0 helyre helyeztük, amit az egyenlet eltolási szimmetriája miatt megtehettünk. Az  $x \neq 0$  helyeken a homogén egyenletet kell megoldanunk, és a síkforrást határfeltétellel helyettesíthetjük. Integráljuk ugyanis (23.22)-t a [ $-\varepsilon, \varepsilon$ ] intervallumban, majd  $\varepsilon$ -nal tartsunk 0-hoz. A bal oldal második és a jobb oldal első tagjából kapott integrálok határértéke nyilván 0, tehát a határfeltétel:<sup>25</sup>

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \mu \left[ \psi(\varepsilon, \mu) - \psi(-\varepsilon, \mu) \right] \right\} = \mu \left[ \psi(+0, \mu) - \psi(-0, \mu) \right] = \frac{1}{4\pi}.$$
 (23.23)

Tekintve, hogy a közeg nem sokszorozó (c < 1), megköveteljük a

$$\lim_{|x|\to\infty}\psi(x,\mu)=0$$

határérték fennállását is.

Mivel a sajátfüggvények kielégítik a homogén transzportegyenletet, problémánk megoldását a következő alakban kereshetjük:

$$x > 0: \qquad \psi(x,\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu)e^{-x/\kappa_0} + \int_0^1 A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)e^{-x/\kappa}d\kappa , \qquad (23.24a)$$

x < 0: 
$$\psi(x,\mu) = -a_{0-}\varphi_{0-}(\mu)e^{x/\kappa_0} - \int_{-1}^{0} A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)e^{-x/\kappa}d\kappa$$
. (23.24b)

Az utóbbi egyenletben csak a továbbiak egyszerűsítése érdekében használunk negatív előjeleket. Végezzük el mindkét egyenletben az  $x \rightarrow 0$  határátmenetet:

$$\psi(+0,\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_{0}^{1} A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)d\kappa,$$
  
$$\psi(-0,\mu) = -a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) - \int_{-1}^{0} A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)d\kappa,$$

<sup>&</sup>lt;sup>25</sup> Bár ez nem látszik közvetlenül, a jobb oldal dimenziója cm<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup>sr<sup>-1</sup>, hiszen a sík minden felületegysége 1 s alatt  $1/4\pi$  neutront emittál az egységnyi térszögbe. Ebből következik, hogy a megoldásul kapott  $\psi(x,\mu)$  függvény dimenzióhelyesen a szögfüggő fluxust fogja jelenteni.

majd vonjuk ki őket egymásból. Ekkor (23.23) szerint a következő összefüggést kapjuk:

$$\frac{1}{4\pi\mu} = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^{1} A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu) \mathrm{d}\kappa.$$

Az itt szereplő együtthatókat a (23.12) ortogonalitási egyenlet alapján határozhatjuk meg:

$$a_{0\pm} = \frac{1}{N_{0\pm}} \int_{-1}^{1} \frac{\mu \varphi_{0\pm}(\mu)}{4\pi \mu} \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{4\pi N_{0\pm}},$$

ha a (23.3) normálási feltételt is figyelembe vesszük. Hasonlóan

$$A(\kappa)=\frac{1}{4\pi N(\kappa)}.$$

Az  $N_{0\pm}$  és  $N(\kappa)$  normálási tényezőket a (23.13), illetve (23.15) egyenletek adják meg.

Ha a most kapott együtthatókat és együtthatófüggvényt a (23.24) egyenletekbe helyettesítjük, megkapjuk a transzportegyenletnek a határfeltételeket kielégítő megoldását. A keresett Green-függvényt a neutronirányokra való integrálással kapjuk meg, ami egyrészt  $2\pi$ -vel való szorzást, másrészt  $\mu$  szerint való integrálást jelent:

$$G_{\rm sík}(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} \psi(x,\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-x/\kappa_0}}{N_{0+}} + \int_{0}^{1} \frac{e^{-x/\kappa}}{N(\kappa)} \, \mathrm{d}\kappa \right], \qquad x > 0.$$

x < 0-ra a függvény párossága miatt nem kell külön képletet felírni. (23.22) alapján kapjuk a pontforráshoz tartozó Green-függvényt:

$$G_{\text{pont}}(r) = \frac{\Sigma_{\text{t}}^2}{4\pi r} \left[ \frac{\mathrm{e}^{-r/\kappa_0}}{\kappa_0 N_{0+}} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-r/\kappa}}{\kappa N(\kappa)} \mathrm{d}\kappa \right].$$

A szögletes zárójelen belül levő első tagot *aszimptotikus* megoldásnak, a második tagot pedig *tranziens* megoldásnak szoktuk nevezni. Ugyanis – mint látni fogjuk – az utóbbi sokkal gyorsabban csökken, mint az előbbi. A 23.1. ábrán összehasonlítjuk a teljes Green-függvényt a tranziens tag járulékával.

A kapott Green-függvénynek érdemes megvizsgálni a kis és nagy *r*-ek mellett mutatott aszimptotikus viselkedését. A tranziens tag értéke kis *r* mellett elsősorban az  $N(\kappa)$  normálási tényezőnek kis  $\kappa$ -kra felvett értékeitől függ. (23.15)-ből látható, hogy  $\kappa$ kis értékeire  $N(\kappa) \approx \kappa$ ; tehát a tranziens tag értéke ekkor:

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-r/\kappa}}{\kappa \mathrm{V}(\kappa)} \mathrm{d}\kappa \approx \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{-r/\kappa}}{\kappa^{2}} \mathrm{d}\kappa = \left[\frac{1}{r} \mathrm{e}^{-r/\kappa}\right]_{\kappa=0}^{1} = \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r}$$

vagyis kis r-re

$$G_{\text{pont}}(r) \approx \frac{\Sigma_{\text{t}}^2}{4\pi r} \left[ \frac{1}{\kappa_0 N_{0+}} + \frac{\mathrm{e}^{-r}}{r} \right] \approx \frac{\Sigma_{\text{t}}^2 \mathrm{e}^{-r}}{4\pi r^2} = \frac{\mathrm{e}^{-\Sigma_{\text{t}}\rho}}{4\pi \rho^2},$$

ahol – mint korábban –  $r = \Sigma_t \rho$ . Ez az eredmény egyszerűen értelmezhető. Az exponenciális tényező annak a valószínűsége, hogy a forrásneutron  $\rho$  távolságot ütközés nélkül megtesz. Az  $1/4\pi\rho^2$  tag pedig a megszokott négyzetes csökkenést fejezi ki, pontosabban: annak a valószínűsége, hogy a forrásneutron a forrástól  $\rho$  távolságban levő egységnyi felületdarab által kifeszített térszögbe eső irányban indul el.



23.1. *ábra*. A pontforráshoz tartozó Green-függvény és a tranziens tag összehasonlítása (c = 0.98). Az egyszerűség kedvéért  $\Sigma_t = 1$ .

A nagy *r*-ekre vonatkozó aszimptotika meghatározásához észrevesszük, hogy a tranziens megoldás legalább  $e^{-r}$  rendben tart nullához, hiszen az integrálban szereplő exponenciális tényező felső határa  $e^{-r}$ . A másik tagban  $\kappa_0 > 1$ , tehát ennek a csökkenése lassabb, mint a másiké, vagyis nagy *r*-ekre ez válik dominánssá. Ezért neveztük ezt a tagot aszimptotikus megoldásnak. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez már nem a távolság négyzetével, hanem lényegesen lassabban csökken, hiszen 1/r-rel arányos. Ebben is érződik a többszöri szóródások hatása, amely lassítja a fluxus csökkenését.

E rész befejezéséül kiszámítjuk az aszimptotikus megoldás második momentumát:

$$\overline{r^2} = \frac{\int\limits_0^\infty r^2 G_{\text{pont}}^{\text{asz.}}(r) 4\pi r^2 dr}{\int\limits_0^\infty G_{\text{pont}}^{\text{asz.}}(r) 4\pi r^2 dr} = 6\kappa_0^2,$$

amint azt egyszerűen levezethetjük. Erre a mennyiségre a 3. fejezetben lesz szükségünk. Látni fogjuk, hogy az ott bevezetett *L* diffúziós hossznak  $\kappa_0/\Sigma_t$  a transzportelméleti analogonja.

## A Milne-probléma

A *Milne-probléma* eredetileg a csillagászatban merült fel, amikor a csillagok felületén kilépő sugárzás irány szerinti eloszlását vizsgálták. Ennek a problémának idealizált megfogalmazása a következő: adva van egy végtelen féltér (x > 0), amelyben a végtelen távolban van egy végtelen erősségű síkforrás, és keressük a  $\psi(x,\mu)$  fluxust a határfelület közelében.

A transzportelmélet nyelvén ez a következőképpen hangzik. Az  $x \rightarrow +\infty$  határesetben a fluxus a

$$\psi(x,\mu) \to \varphi_{0-}(\mu) \mathrm{e}^{x/\kappa_0}$$

aszimptotikát követi, továbbá minden pozitív *x*-re a homogén transzportegyenletet, x = 0-ra pedig a (22.2) szerinti határfeltételt elégíti ki, vagyis

$$\psi(0,\mu) = 0,$$
 ha  $\mu > 0.$  (23.25)

Az elmondottak szerint tehát a megoldást a következő alakban kereshetjük:

$$\psi(x,\mu) = \varphi_{0-}(\mu)e^{x/\kappa_0} + a_{0+}\varphi_{0+}(\mu)e^{-x/\kappa_0} + \int_0^1 A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)e^{-x/\kappa}d\kappa.$$
(23.26)

 $x \rightarrow 0$  határátmenettel az ismeretlen együtthatókra (23.25) szerint a

$$-\varphi_{0-}(\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_{0}^{1} A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)\mathrm{d}\kappa, \qquad \mu \ge 0$$

egyenletet írhatjuk fel.

Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy az ismeretlen együtthatók a

$$-\varphi_{0-}(\mu) = -\frac{c\kappa_0}{2} \frac{1}{\kappa_0 + \mu}$$

függvény sorfejtési együtthatói. A (23.19a), (23.19c) és (23.19d) normálási képletek alapján egyszerűen levezethetjük, hogy

$$a_{0+} = \frac{X(-\kappa_0)}{X(\kappa_0)} \tag{23.27}$$

és

$$A(\kappa) = -\frac{\int\limits_{0}^{1} W(\mu)\varphi_{\kappa}(\mu)\varphi_{0-}(\mu)d\mu}{W(\kappa)N(\kappa)/\kappa} = -\frac{c\kappa_{0}X(-\kappa_{0})\varphi_{0-}(\kappa)\kappa^{2}}{(\kappa_{0}-\kappa)\gamma(\kappa)N(\kappa)}.$$

Mint a Green-függvény esetében, a (23.26) megoldásban szereplő integrál növekvő x-szel most is lényegesen gyorsabban tűnik el, mint a második tag. Ezért a megoldás első két tagját aszimptotikus megoldásnak fogjuk nevezni, amely csak az x = 0 határfelülettől elegendően távol érvényes. Ennek a neutronirányokra való integrálját tehát nevezhetjük aszimptotikus fluxusnak:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\text{asz.}}(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} \left[ \varphi_{0-}(\mu) \mathrm{e}^{x/\kappa_{0}} + a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) \mathrm{e}^{-x/\kappa_{0}} \right] \mathrm{d}\mu.$$

A sajátfüggvények (23.3) szerinti normálását kihasználva, ez a következő alakban adódik:

$$\Phi_{\text{asz.}}(x) = 2\pi \left( e^{x/\kappa_0} + a_{0+} e^{-x/\kappa_0} \right).$$

A diffúzióelmélet (lásd 3. fejezet) szempontjából lényeges az az x = -d < 0 hely, ahol ennek a függvénynek a negatív *x*-ek felé való extrapoláltja eltűnik. Egyszerűen levezethetjük, hogy *d* kielégíti az

$$a_{0+} = -\mathrm{e}^{-2d/\kappa_0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi - 2d/\kappa_0}$$

egyenletet, amiből

$$d = \frac{\kappa_0}{2} \left( -\ln a_{0+} + \mathrm{i}\pi \right).$$

Ha ide  $a_{0+}$  értékét (23.27)-ből behelyettesítjük, akkor (23.16) szerint a *d extrapolációs távolság* explicit alakja:

$$d = \frac{c}{2} \int_{0}^{1} \frac{\mu}{N(\mu)} \left[ 1 + \frac{c\mu^2}{1 - \mu^2} \right] \kappa_0 \operatorname{arth} \frac{\mu}{\kappa_0} \, \mathrm{d}\mu \,.$$
(23.28)

*c* szélső értékeire ezt – sorfejtéssel – egyszerűbb alakra lehet hozni:

$$c \ll 1$$
:  $cd(c) = 1 - \frac{c}{2} \ln \frac{2}{c};$  (23.29a)

1-c << 1: 
$$cd(c) = 0.710446 \cdot \left[1 - 0.0199(1 - c)^2 + ...\right].$$
 (23.29b)

A kiszökő neutronok szögeloszlását (23.26)-ból kaphatjuk x = 0 helyettesítéssel ( $\mu < 0$ -ra):

$$\psi(0,\mu) = \varphi_{0-}(\mu) + a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_{0}^{1} A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)d\kappa$$

amely a (23.20) azonosságok felhasználásával – hosszadalmas, de elemi számítással – zárt alakra hozható [3]:

$$\psi(0,\mu) = \frac{c\kappa_0^2 X(-\kappa_0)}{X(\mu) (\kappa_0^2 - \mu^2)}.$$
(23.30)

Végtelen féltér albédója

Egy végtelen, forrásmentes, homogén féltér ( $x \ge 0$ ) határfelületére essen egy azonos  $\vec{\Omega}_0$  irányban repülő neutronokból álló nyaláb.  $\vec{\Omega}_0 x$  komponensét  $\mu_0$ -lal jelöljük ( $\mu_0 > 0$ ). Keressük a közegen belül kialakuló fluxust és a visszaszórt neutronok szögeloszlását a  $\mu < 0$  irányokra. Ez utóbbiak és a belépő neutronok teljes számának az arányát nevezzük a közeg *albédó*jának.

A közeg belsejében kialakuló  $\psi(x,\mu)$  neutronfluxus pozitív *x*-ekre kielégíti a homogén transzportegyenletet, tehát a

$$\psi(x,\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu)e^{-x/\kappa_0} + \int_0^1 A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)e^{-x/\kappa}d\kappa$$
(23.31)

alakban kereshetjük. Határfeltételünk pedig a következő:

$$\Psi(0,\mu) = \delta(\mu - \mu_0), \qquad \mu_0, \mu > 0.$$
(23.32)

Ez azt jelenti, hogy a teljes térszögre integrált fluxus az x = 0 síkban  $2\pi$ . Ha alábbi eredményeinket egységnyi belépő fluxusra kívánjuk vonatkoztatni, azokat  $2\pi$ -vel el kell majd osztanunk. Az ismeretlen együtthatók meghatározására tehát a

$$\delta(\mu-\mu_0) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\kappa)\varphi_{\kappa}(\mu)\mathrm{d}\kappa, \qquad \mu \ge 0$$

egyenletet kapjuk. A (23.19) normálási képletek alapján levezethetjük:

$$\frac{N(\kappa)}{\kappa}W(\kappa)A(\kappa)=W(\mu_0)\varphi_{\kappa}(\mu_0),$$

amiből

$$A(\kappa) = \frac{\kappa W(\mu_0) \varphi_{\kappa}(\mu_0)}{N(\kappa) W(\kappa)} = \frac{\kappa (\kappa_0 - \mu_0) \gamma(\mu_0) \varphi_{\kappa}(\mu_0)}{(\kappa_0 - \kappa) \gamma(\kappa) N(\kappa)}.$$

A *W* és *N* függvényeket (23.17)-ben, illetve (23.15)-ben adtuk meg. Az  $a_{0+}$  együtthatóra hasonlóan kapunk egyenletet:

$$-\left(\frac{c\kappa_0}{2}\right)^2 X(\kappa_0) a_{0+} = W(\mu_0) \varphi_{0+}(\mu_0),$$

amiből némi számolás után adódik [vö. (23.10), (23.17) és (23.18)]:

$$a_{0+} = -\frac{2\gamma(\mu_0)}{c\kappa_0 X(\kappa_0)}.$$
(23.33)

Ha (23.31)-et integráljuk  $\mu$  szerint, megkapjuk a fluxus térfüggését:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \int_{-1}^{1} \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{\mu} = a_{0+} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}/\kappa_0} + \int_{0}^{1} A(\boldsymbol{\kappa}) \mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}/\kappa} \mathrm{d}\boldsymbol{\kappa},$$

ahol felhasználtuk a (23.3) normálási feltételt. E fluxus térfüggése emlékeztet a síkforrás Green-függvényének a térfüggésére: van egy gyorsan 0-hoz tartó összetevője (a  $\kappa$ szerinti integrál) és egy másik, amely  $\kappa_0$  relaxációs hosszal tart 0-hoz. Az utóbbit most is nevezhetjük aszimptotikus fluxusnak. Együtthatója (23.33) szerint  $\chi(\mu_0)$ -lal arányosan függ a beeső neutronnyaláb irányától. [A  $\chi(\mu)$  függvényt (23.18)-ban adtuk meg.]

A kilépő fluxus irányfüggését úgy kapjuk, hogy (23.31)-ben x = 0-t helyettesítünk. Az együtthatók kiszámolt értékét figyelembe véve:

$$\psi(0,\mu) = -\frac{2\gamma(\mu_0)}{c\kappa_0 X(\kappa_0)}\varphi_{0+}(\mu) + W(\mu_0)\int_0^1 \frac{\kappa\varphi_{\kappa}(\mu_0)\varphi_{\kappa}(\mu)}{(\kappa_0 - \kappa)\gamma(\kappa)N(\kappa)}d\kappa.$$

Itt közvetlenül alkalmazható a (23.20) azonosság. Ha figyelembe vesszük még a (23.10) képletet is, ez az eloszlás zárt alakban állítható elő:

$$\psi(0,\mu) = \frac{(\kappa_0 - \mu_0)\gamma(\mu_0)}{X(\mu)(\kappa_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)}, \qquad \mu < 0.$$
(23.34)

A kilépő neutronok teljes számát a 2.1. alfejezetben az általános esetre vonatkozóan már felírtuk [vö. (21.9)]. Az ott írtak szerint ezt – esetünkben – az

$$\alpha(\mu_0) = \int_{-1}^{0} \psi(0,\mu) \mu d\mu = \int_{-1}^{0} \frac{(\kappa_0 - \mu_0) \gamma(\mu_0)}{X(\mu)(\kappa_0 - \mu)(\mu_0 - \mu)} \mu d\mu$$
(23.35)

integrál adja meg.<sup>26</sup>

Az albédó kiszámításához ezt még el kell osztani a belépő neutronok teljes számával. Eddigi képleteink egy párhuzamos neutronnyalábra vonatkoznak. A gyakorlatban azonban a belépő neutronok szögeloszlása nem ilyen, hanem a neutronirányok teljes tartományát kitölti. Ezért az albédó számítására akkor érdemes visszatérni, amikor a belépő szögeloszlásról ennél többet tudunk. Ilyen esetre látunk példát a 4. függelékben.

Érdemes megnézni a kilépő neutronoknak (23.34) szerinti szögeloszlását  $\mu_0$ különböző értékeire. c = 0,98 esetében ezt mutatják a 23.2. *ábrán* látható görbék. Érdemes megfigyelni, hogy  $\mu_0 \approx 0,5$ -től (vagyis körülbelül a 30°-os beeséstől) kezdődően a szögeloszlásnak maximuma van. A várakozásnak megfelelően a visszaszórt neutronok teljes száma annál nagyobb, minél közelebb van a beeső nyaláb a merőlegeshez ( $\mu_0 = 1$ ). A (23.35) szerinti integrál az *F4.1. ábrán* látható  $\mu_0$  függvényében.



23.2. ábra. A kilépő neutronok szögeloszlása (c = 0.98). A görbék paramétere  $\mu_0$ .

<sup>&</sup>lt;sup>26</sup> Ezt az integrált még meg kellene szoroznunk  $2\pi$ -vel, ha (23.32) határfeltétel egyetlen belépő neutronra vonatkozna. Mivel azonban éppen  $2\pi$  neutronra vonatkozik, a  $2\pi$ -vel való szorzás megtörténtnek tekinthető.

# 2.4. A transzportegyenlet közelítő megoldása<sup>27</sup>

A 2.3. alfejezetben olvasható a transzportegyenlet egzakt megoldása három idealizált esetre vonatkozóan. A gyakorlati esetekben csak közelítő, numerikus módszerek állnak rendelkezésünkre. Például a valóságos reaktorok egyik alapproblémája a hengeres geometriájú elemi cellában kialakuló neutronspektrum kiszámítása. Az előzőkben általunk tárgyalt sík- és gömbgeometriára vonatkozóan talált megoldások nem vihetők át a hengeres geometriára. A Case-módszer számára továbbá lényeges az egycsoport közelítés, márpedig a gyakorlatban alapvető fontosságú a neutronspektrum kiszámítása.

A jelen fejezetben röviden vázoljuk a közelítő módszerek három alaptípusát:

- a gömbfüggvények szerinti sorfejtésen alapuló P<sub>L</sub> közelítés,
- az  $\overline{\Omega}$  változó szerinti diszkrét ordináták módszere, az  $S_N$  módszer,
- a transzportegyenlet integrális alakján alapuló ütközési valószínűségek módszere.

Mindhárom módszer egy adott energián kialakuló térbeli eloszlás kiszámítására szolgál, amelyet még össze kell kapcsolni a neutronspektrum számításával. Ezért e három módszert egycsoport közelítésben ismertetjük. A neutronspektrum számításának az alapja az *aszimptotikus reaktorelmélet*. Nem túlzás azt állítani, hogy ez a reaktorfizikai számítások alapja. Végül meg kell említenünk a Monte Carlo módszert, bár az – szigorúan véve – nem tekinthető közelítő módszernek.

Az alábbiak elsajátítása még nem teszi képessé az Olvasót konkrét számítások elvégzésére, de megkönnyíti a számítási módszereket részletesen tárgyaló könyvek olvasását. Az említett módszerek közül kettőt részletesen is tárgyalni fogunk a későbbi fejezetekben: a *diffúzióelmélet*et, amely a P<sub>1</sub> módszer egyik változata (3. fejezet), továbbá az *aszimptotikus lassuláselmélet*et (4. fejezet).

### P<sub>L</sub> közelítés

A P<sub>L</sub> közelítést síkgeometriában ismertetjük, amelyben a  $\Phi(\mathbf{r},\vec{\Omega})$  szögfüggő

fluxus csak az x koordinátától és az  $\overline{\Omega}$  vektor  $\mu = \Omega_x$  komponensétől függ:  $\Phi(x,\mu)$ . A (22.1b) transzportegyenlet alakja ebben az esetben a következő:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu)}{\partial x} + \Sigma_{t} \Phi(x,\mu) = \Sigma_{s} \int_{4\pi} \chi(\vec{\Omega}\vec{\Omega}') \Phi(x,\mu') d\vec{\Omega}' + S(x,\mu), \qquad (24.1)$$

ahol  $\chi(\vec{\Omega}\vec{\Omega}')$  a szórási szög  $\mu_0 = \vec{\Omega}\vec{\Omega}'$  koszinuszának valószínűségi sűrűségfüggvénye. Az  $S(x,\mu)$  forrástag lehet külső forrás is, de általában a hasadások és a neutronlassulás által termelt neutronokat jelenti. A módszert egycsoport modellben ismertetjük,

<sup>&</sup>lt;sup>27</sup> Ez az alfejezet – a 2.3. alfejezethez hasonlóan – első olvasáskor kihagyható. A kezdő olvasónak azt ajánljuk, hogy csak a 3. fejezet áttanulmányozása után térjen vissza erre a fejezetre.

de a fejezet végén megmutatjuk, hogyan általánosítható energiától függő esetekre. A  $\chi(\vec{\Omega}\vec{\Omega}')$  függvényt sorba fejtjük a Legendre-polinomok szerint:<sup>28</sup>

$$\chi\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}'\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \chi_{\ell} P_{\ell}\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}'\right).$$
(24.2)

Az itt szereplő Legendre-polinomokat az ismert addíciós képlet segítségével kifejezzük az  $\vec{\Omega}$  és  $\vec{\Omega}'$  egységvektorok gömbfüggvényeivel:

$$P_{\ell}\left(\vec{\Omega}\vec{\Omega}'\right) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^{*}\left(\vec{\Omega}\right) Y_{\ell m}\left(\vec{\Omega}'\right),$$

ahol nemnegatív m-re

$$Y_{\ell m}\left(\vec{\Omega}\right) = Y_{\ell m}\left(\theta,\varphi\right) = e^{\mathrm{i}m\varphi} \frac{(-\sin\theta)^m}{\ell! 2^\ell} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}\left(\cos^2\theta-1\right)^\ell}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{\ell+m}},$$

negatív m-re pedig

$$Y_{\ell,-m}\left(\vec{\Omega}\right) = \left(-1\right)^m Y_{\ell m}^*\left(\vec{\Omega}\right).$$

A \* komplex konjugáltat jelent. Mivel  $d\vec{\Omega}' = d\mu d\phi$ , a (24.1)-ben szereplő integrálban először  $\phi$  szerint integrálunk. Könnyen belátható, hogy

$$\int_{0}^{2\pi} Y_{\ell m}\left(\vec{\Omega}'\right) \mathrm{d}\varphi' = 2\pi Y_{\ell 0}\left(\vec{\Omega}'\right) \delta_{m 0} = 2\pi P_{\ell}(\mu') \,\delta_{m 0} \,.$$

Mindezek alapján a (24.1) alatti integrál  $\mu$  szerinti integrállá alakítható át:

$$\int_{4\pi} \chi(\vec{\Omega}\vec{\Omega}') \Phi(x,\mu') \, \mathrm{d}\vec{\Omega}' = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \int_{4\pi} \chi_{\ell} P_{\ell}(\vec{\Omega}\vec{\Omega}') \Phi(x,\mu') \, \mathrm{d}\vec{\Omega}' =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \chi_{\ell} \int_{4\pi} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^{*}(\vec{\Omega}) Y_{\ell m}(\vec{\Omega}') \Phi(x,\mu') \, \mathrm{d}\vec{\Omega}' =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \chi_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_{-1}^{1} P_{\ell}(\mu') \Phi(x,\mu') \, \mathrm{d}\mu' \, .$$

A (24.1) transzportegyenletet tehát a következő alakra hoztuk:

<sup>&</sup>lt;sup>28</sup> A Legendre-polinomokat és a gömbfüggvényeket ismertnek tételezzük fel. Ha matematikai kézikönyv nem áll rendelkezésre (például a [10] monográfia), minden szükséges képlet megtalálható az [1] és [3] könyvekben.

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu)}{\partial x} + \Sigma_{t} \Phi(x,\mu) =$$

$$= \Sigma_{s} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \chi_{\ell} P_{\ell}(\mu) \int_{-1}^{1} P_{\ell}(\mu') \Phi(x,\mu') d\mu' + S(x,\mu). \qquad (24.3)$$

A neutronforrás általában izotrop:

$$S(x,\mu)=\frac{S_0(x)}{4\pi}.$$

A szórási magfüggvényhez hasonlóan fejtsük sorba a fluxust is:

$$\Phi(x,\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \, \Phi_{\ell}(x) P_{\ell}(\mu), \qquad (24.4a)$$

ahol a sorfejtési együtthatókat a Legendre-polinomok ortogonalitása alapján állíthatjuk elő:

$$\Phi_{\ell}(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} \Phi(x,\mu) P_{\ell}(\mu) \, \mathrm{d}\mu \,, \qquad (24.4b)$$

hiszen fennáll:

$$\int_{-1}^{1} P_{\ell}(\mu) P_{\ell'}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'}.$$

Mindezt figyelembe véve a (24.3) egyenlet így írható:

$$\sum_{\ell'=0}^{\infty} \frac{2\ell'+1}{4\pi} P_{\ell'}(\mu) \left[ \mu \frac{\mathrm{d} \boldsymbol{\Phi}_{\ell'}(x)}{\mathrm{d} x} + \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}} \boldsymbol{\Phi}_{\ell'}(x) - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{s}} \boldsymbol{\chi}_{\ell'} \boldsymbol{\Phi}_{\ell'}(x) \right] = \frac{S_0(x)}{4\pi}.$$

Ahhoz, hogy ebből az egyes  $\Phi_l(x)$  együtthatókra egyenleteket kapjunk, fel kell használnunk a következő rekurziós képletet:

$$\mu P_{\ell}(\mu) = \frac{(\ell+1)P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu)}{2\ell+1}.$$

Ha ezt az előző egyenletbe helyettesítjük, majd  $2\pi P_{\ell}(\mu)$ -vel beszorzunk, és  $\mu$  szerint integrálunk, az ortogonalitási reláció figyelembevételével a következő egyenletrend-szert kapjuk:

$$\frac{\ell}{2\ell+1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\ell-1}(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\ell+1}{2\ell+1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{\ell+1}(x)}{\mathrm{d}x} + (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{\chi}_{\ell})\boldsymbol{\Phi}_{\ell}(x) = S_{0}(x)\boldsymbol{\delta}_{\ell0}. \qquad (24.5)$$
$$(\ell = 0, 1, 2, ...)$$

Ezt az egyenletrendszert a gyakorlatban természetesen nem folytathatjuk a végtelenségig, egy bizonyos tagnál meg kell szakítanunk. Ha az utolsó kiszámított függvény  $\ell = L$ -hez tartozik, akkor  $P_L$  közelítésről beszélünk. Ebben az esetben tehát (24.5) csak az  $\ell = 0, 1, 2, ..., L$ –1-re érvényes, viszont  $\ell = L$ -re elhagyjuk a (L+1) indexű függvényt:

$$\frac{L}{2L+1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_{L-1}(x)}{\mathrm{d}x} + \left(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{s}}\boldsymbol{\chi}_{L}\right)\boldsymbol{\Phi}_{L}(x) = 0.$$
(24.6)

A  $\Phi_{L+1}(x)$  függvényt tehát 0-val tettük egyenlővé. A kapott közönséges differenciálegyenlet-rendszert általában a véges differenciák módszerével szoktuk megoldani: a differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal közelítjük. Így algebrai egyenletrendszert kapunk, amelyet valamilyen iterációval oldunk meg. Ennek részleteibe nem megyünk bele.

Végeredményben tehát nem tettünk mást, mint hogy a (24.4a) alatti sort az *L*-edik tag után levágtuk:

$$\Phi(x,\mu) \cong \sum_{\ell=0}^{L} \frac{2\ell+1}{4\pi} \, \Phi_{\ell}(x) P_{\ell}(\mu).$$
(24.7)

Ennek az elhanyagolásnak következményei vannak a határfeltételekre. A (22.2) szerinti határfeltétel megköveteli, hogy a fluxus minden befelé mutató neutronirányra eltűnjön. Legyen a vákuummal határos felület az x = 0 sík, amelytől jobbra található a vizsgált közeg. Ekkor a transzport-határfeltétel megköveteli:

$$\Phi(0,\mu) = 0, \qquad \mu > 0.$$
 (24.8)

Mivel a  $P_L(\mu)$  Legendre-polinom *L*-edfokú, a fluxusnak (24.7) alatti közelítése  $\mu$ -nek szintén *L*-edfokú polinomja. Ha egy polinom a [0, 1] intervallum minden pontjában eltűnik, a polinom minden együtthatója 0-val egyenlő, ami képtelenség. Emiatt a túlságosan szigorú (24.8) határfeltételt enyhíteni kell. Két megoldás terjedt el a gyakorlatban:

Marshak-határfeltétel: megköveteljük, hogy a fluxus páratlan momentumai eltűnjenek:

$$\int_{0}^{1} \Phi(0,\mu) P_{\ell}(\mu) d\mu = 0, \qquad \ell = 1, 3, ..., L.$$
(24.9)

*Mark-határfeltétel*: megköveteljük, hogy fluxus néhány kiszemelt  $\mu$  értékre eltűnjön:

$$\Phi(0,\mu_j) = 0, \qquad j = 1, 2, ..., (L+1)/2.$$
 (24.10)

A (24.10) feltétel számára kiválasztott  $\mu_j$  értékek a  $P_{L+1}(\mu)$  Legendre-polinom pozitív gyökei.<sup>29</sup> Mindkét határfeltétel megfogalmazása feltételezi, hogy *L* páratlan. Ez a gyakorlatban így is van: P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub>, P<sub>5</sub>, ... közelítéseket szokás alkalmazni, de nem használjuk a P<sub>2</sub>, P<sub>4</sub>, P<sub>6</sub>, ... közelítéseket, bár ez matematikailag lehetséges lenne. A dolog okára az S<sub>N</sub> módszer tárgyalásakor térünk vissza.

A vákuummal határos felületen felírt határfeltételeken kívül még megköveteljük, hogy mindegyik  $\Phi_{\ell}(x)$  függvény folytonos legyen különböző anyagi minőségű közegek határfelületén. Ennek az az oka, hogy a  $\Phi(x,\mu)$  függvény x-ben folytonos  $\mu$ minden értékére. (24.4b) szerint ugyanennek kell érvényesnek maradnia a sorfejtési együtthatókra is. Felmerül még a kérdés, hogy adott *L*-re melyik határfeltétel vezet pontosabb eredményekre. A tapasztalat szerint kis *L*-ekre a Marshak-, közepes *L*-ekre pedig a Mark-határfeltétel ad pontosabb eredményeket. Nagy *L*-ekre a kettő egyenértékű. A 3. fejezetben részletesen foglalkozunk a P<sub>1</sub> közelítés egy speciális változatával, a *diffúziós közelítés*sel. A most mondottak szerint tehát a diffúziós határfeltételeket a Marshak-határfeltételből célszerű levezetni.

Befejezésül megvizsgáljuk a P<sub>L</sub> közelítés pontosságát: néhány következményét összevetjük a 2.3. alfejezetben kapott egzakt eredményekkel. Példaképpen a P<sub>1</sub> és P<sub>3</sub> közelítéseket vizsgáljuk meg, amelyekre vonatkozóan kiszámítjuk a homogén egyenlet sajátértékeit és az extrapolációs távolságot. A (23.1) egyenlet mintájára áttérünk az optikai hosszakra, és ismét bevezetjük a  $c = \Sigma_s / \Sigma_t$  jelölést. Izotrop szórás esetében ( $\chi_\ell = 0, \ell > 0$ ) a P<sub>3</sub> egyenletek (24.5) és (24.6) alapján:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_1(x)}{\mathrm{d}x} + (1-c)\Phi_0(x) = S_0(x), \qquad (24.11a)$$

$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}\Phi_0(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}\Phi_2(x)}{\mathrm{d}x} + \Phi_1(x) = 0, \qquad (24.11b)$$

$$\frac{2}{5}\frac{\mathrm{d}\Phi_1(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{5}\frac{\mathrm{d}\Phi_3(x)}{\mathrm{d}x} + \Phi_2(x) = 0, \qquad (24.11c)$$

$$\frac{3}{7}\frac{\mathrm{d}\Phi_2(x)}{\mathrm{d}x} + \Phi_3(x) = 0.$$
(24.11d)

A 2.3. alfejezetben követett gondolatmenetnek megfelelően a megoldást

$$\Phi_{\ell}(x) = \varphi_{\ell}(\kappa) e^{-x/\kappa}, \qquad \ell = 0, 1, 2, 3$$
 (24.12)

alakban keressük. Ha ezt a (24.11) egyenletrendszerbe helyettesítjük,  $\kappa^2$ -re másodfokú egyenletet kapunk, amelynek mindkét megoldása pozitív (c < 1 mellett):

<sup>&</sup>lt;sup>29</sup> Ebben az a logika, hogy így a (24.7) levágott sor után következő első tag, az (*L*+1)-edik szintén 0 a kiválasztott  $\mu$  értékekre, amivel javul a közelítés.

$$\kappa_{1,2}^{2} = \frac{7 + 11(1-c) \pm \sqrt{\left[7 + 11(1-c)\right]^{2} - 756(1-c)/5}}{42(1-c)}.$$
(24.13)

Összesen 4 sajátérték van, amelyek ezek négyzetgyökei. Adott  $\kappa$ -ra a próbafüggvények együtthatói:

$$\varphi_{0}(\kappa) \equiv 1, \qquad \qquad \varphi_{1}(\kappa) = (1-c)\kappa, \varphi_{2}(\kappa) = \frac{3(1-c)\kappa^{2}-1}{2}, \qquad \qquad \varphi_{3}(\kappa) = \frac{3}{7\kappa}\varphi_{2}(\kappa).$$
(24.14)

Először vizsgáljuk meg a sajátértékeket. Az egzakt megoldás szerint talált  $\pm \kappa_0$  sajátértékek megfelelői a (24.13)-ban a gyök előtti pozitív előjellel kapott mennyiség négyzetgyökei ( $\kappa_{1+}$  és  $\kappa_{1-}$ ). Ezekre igaz ugyanis, hogy végtelenhez tartanak a  $c \rightarrow 1$  határesetben.<sup>30</sup> A negatív előjelhez tartozó mennyiség 1-nél kisebb, tehát ennek a négyzetgyökei felelnek meg az egzakt megoldás szerinti sajátértékek kontinuumának. Ez általában is igaz: ahogy nő a P<sub>L</sub> közelítés rendje, továbbra is csak két olyan sajátérték van, amelyek abszolút értéke 1-nél nagyobb, a többi a [-1, 1] intervallumba esik. Növekvő *L*-lel az utóbbiak egyre sűrűbben kitöltik a [-1, 1] intervallumot. Mivel a P<sub>L</sub> közelítést elsősorban gyengén abszorbeáló közegekben alkalmazzuk (amikor  $c \approx 1$ ), érdemes megvizsgálni a sajátértékek (1 – *c*) szerinti sorfejtését. Ha (24.13)-at (1 – *c*) szerint sorba fejtjük, a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{1}{\kappa_1^2} = 3(1-c) \left[ 1 - \frac{4}{5} (1-c) \right] + O(1-c)^3, \qquad (24.15a)$$

$$\frac{1}{\kappa_2^2} = \frac{35}{9} \left[ 1 + \frac{4}{5} (1 - c) \right] + O(1 - c)^2.$$
(24.15b)

Ha a (23.7) egyenletben elvégezzük ugyanezt a sorfejtést, azt találjuk, hogy a megadott rendig a két sorfejtés megegyezik. Ismét egy általánosságban is érvényes tulajdonságot találtunk: a P<sub>L</sub> közelítés esetében az egyezés rendje  $(1 - c)^{(L+1)/2}$  (a [-1, 1] intervallumon kívül eső sajátértékek esetében).

Az extrapolációs távolságot a Milne-probléma megoldása alapján számítjuk ki. A 2.3. alfejezetben követett gondolatmenet szerint az  $x \rightarrow \infty$  határesetben érvényes megoldás a (24.15a) alatti szám negatív négyzetgyökével fejezhető ki:

$$\Phi(x,\mu) \to \sum_{\ell=0}^{3} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\mu) \varphi_{\ell}(\kappa_{1-}) e^{-x/\kappa_{1-}}.$$

Ez a függvény a végtelenhez tart – a Milne-probléma definíciója szerint. Véges *x*-re figyelembe kell venni az  $x \rightarrow \infty$  határesetben eltűnő tagokat is:

<sup>&</sup>lt;sup>30</sup> Lásd a (23.7) egyenlet megoldásáról mondottakat.

$$\boldsymbol{\Phi}(x,\mu) = \sum_{\ell=0}^{3} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\mu) \Big[ \varphi_{\ell}(\kappa_{1-}) e^{-x/\kappa_{1-}} + a_{1+}\varphi_{\ell}(\kappa_{1+}) e^{-x/\kappa_{1+}} + a_{2+}\varphi_{\ell}(\kappa_{2+}) e^{-x/\kappa_{2+}} \Big].$$
(24.16)

A neutronirányokra integrált fluxus ebből egyszerűen adódik:

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} \boldsymbol{\Phi}(x,\mu) \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{-x/\kappa_{1-}} + a_{1+} \mathrm{e}^{-x/\kappa_{1+}} + a_{2+} \mathrm{e}^{-x/\kappa_{2+}} \,. \tag{24.17}$$

Itt figyelembe vettük, hogy  $P_0(\mu)$  kivételével mindegyik Legendre-polinom integrálja eltűnik, továbbá hogy  $\varphi_0(\kappa) \equiv 1$  [vö. (24.14)]. Az utolsó tag a *tranziens* megoldás, amely az x = 0 határfelülettől távolodva gyorsan eltűnik. Az első kettő összege az *aszimptotikus* megoldás, és – definíció szerint – a *d* extrapolációs távolság azt a helyet adja meg, ahol ennek a negatív *x*-ek felé való extrapoláltja eltűnik. Mivel

$$\kappa_{1-}=-\kappa_{1+},$$

könnyű belátni, hogy

$$d = -\frac{\kappa_{1+}}{2}\ln(-a_{1+}).$$
(24.18)

A (24.17)-ben szereplő  $a_{1+}$  és  $a_{2+}$  együtthatókat a Marshak-határfeltétel alapján határozzuk meg [vö. (24.9)]. Ehhez szükségünk van az alábbi, könnyen ellenőrizhető összefüggésekre:

$$\int_{0}^{1} \mu P_{0}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2}, \qquad \int_{0}^{1} \mu P_{1}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{3}, \qquad \int_{0}^{1} \mu P_{2}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{8}, \qquad \int_{0}^{1} \mu P_{3}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = 0,$$
  
$$\int_{0}^{1} \mu^{3} P_{0}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{4}, \qquad \int_{0}^{1} \mu^{3} P_{1}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{5}, \qquad \int_{0}^{1} \mu^{3} P_{2}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{8}, \qquad \int_{0}^{1} \mu^{3} P_{3}(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \frac{2}{35}.$$

Ha tehát (24.9)-et  $\ell = 1$  és  $\ell = 3$  mellett alkalmazzuk a (24.16)-ban adott függvényre, a következő egyenlőségekre jutunk:

$$Y_1(\kappa_{1-}) + a_{1+}Y_1(\kappa_{1+}) + a_{2+}Y_1(\kappa_{2+}) = 0, \qquad (24.19a)$$

$$Y_3(\kappa_{1-}) + a_{1+}Y_3(\kappa_{1+}) + a_{2+}Y_3(\kappa_{2+}) = 0, \qquad (24.19b)$$

ahol

$$Y_1(\kappa) = \frac{\varphi_0(\kappa)}{2} + \varphi_1(\kappa) + \frac{5\varphi_2(\kappa)}{8},$$
  
$$Y_3(\kappa) = \frac{\varphi_0(\kappa)}{4} + \frac{3\varphi_1(\kappa)}{5} + \frac{5\varphi_2(\kappa)}{8} + \frac{2\varphi_3(\kappa)}{5}.$$

A (24.19) egyenlőségek alapján ki tudjuk számítani a keresett együtthatókat. Ezután (24.18) adja az extrapolációs távolságot. Ez az extrapoláció látszik a 24.1. ábrán c = 0,98 esetében. A 24.1. táblázatban (1 - c) különböző értékeire összehasonlítjuk ennek az értékeit a (23.29) képlet alapján számolt egzakt extrapolációs távolsággal. A táblázatba felvettük a P<sub>1</sub> közelítésből adódó eredményeket is (lásd alább).



24.1. ábra. Az aszimptotikus fluxus extrapolációja a negatív x-ek felé. A d extrapolációs távolságot az a pont adja, ahol az extrapolált görbe (szaggatott vonal) az x-tengelyt metszi. A számítás  $P_3$  közelítésben történt (c = 0.98)

24.1. táblázat. Extrapolációs távolság és sajátértékek P<sub>1</sub> és P<sub>3</sub> közelítésben, valamint az egzakt megoldás szerint

| С     | P <sub>1</sub> |         | P <sub>3</sub> |                        |         | Egzakt  |         |
|-------|----------------|---------|----------------|------------------------|---------|---------|---------|
|       | $K_{+}$        | d       | $\kappa_{1+}$  | <i>K</i> <sub>2+</sub> | d       | K       | d       |
| 0,90  | 1,82574        | 0,69892 | 1,90273        | 0,48657                | 0,78226 | 1,90321 | 0,78923 |
| 0,92  | 2,04124        | 0,69201 | 2,10943        | 0,49070                | 0,76627 | 2,10970 | 0,77213 |
| 0,94  | 2,35702        | 0,68534 | 2,41547        | 0,49482                | 0,75032 | 2,41560 | 0,75574 |
| 0,96  | 2,88675        | 0,67891 | 2,93398        | 0,49893                | 0,73480 | 2,93402 | 0,74002 |
| 0,98  | 4,08248        | 0,67269 | 4,11551        | 0,50302                | 0,71973 | 4,11552 | 0,72494 |
| 0,99  | 5,77350        | 0,66965 | 5,79673        | 0,50506                | 0,71236 | 5,79673 | 0,71762 |
| 0,999 | 18,2574        | 0,66696 | 18,2647        | 0,50689                | 0,70582 | 18,2647 | 0,71117 |
| 1,0   | $\infty$       | 0,66667 | $\infty$       | 0,50709                | 0,70510 | 8       | 0,71045 |

A 24.1. táblázatból több dolog látszik:

- Az itt vizsgált kis abszorpciójú közegekben (c > 0,9) a P<sub>3</sub> közelítés meglehetősen pontos. Mind az aszimptotikus sajátérték, mind az extrapolációs távolság 1%-on belül egyezik az egzakt értékekkel.
- A jó egyezésen belül megfigyelhető, hogy a P<sub>3</sub> közelítés szisztematikusan kisebb extrapolációs távolságokra vezet.
- Érdemes még észrevenni, hogy az extrapolációs távolság erősen függ az abszorpció mértékétől: az abszorpció növekedésével nő. Ennek ellenére a diffúzióelméletben (3. fejezet) általában az abszorpciómentes határesethez (c = 1) tartozó értéket

(0,71045) szoktuk használni. Optikai méreteit tekintve kis méretű rendszerek leírásában azonban okozhat hibát ez az elhanyagolás.



24.2. *ábra*. A vákuummal határos felületen kifolyó neutronok szögeloszlása ( $\mu < 0$ ) az egzakt megoldás és a P<sub>3</sub> közelítés szerint (c = 0.98)

A határfelületen a vákuum felé kifolyó neutronok szögeloszlását úgy kapjuk meg, hogy (24.16)-ban x = 0-t helyettesítünk:

$$\Phi(0,\mu) = \sum_{\ell=0}^{3} \frac{2\ell+1}{4\pi} P_{\ell}(\mu) \Big[ \varphi_{\ell}(\kappa_{1-}) + a_{1+} \varphi_{\ell}(\kappa_{1+}) + a_{2+} \varphi_{\ell}(\kappa_{2+}) \Big], \qquad \mu < 0.$$

A 24.2. *ábrán* ezt hasonlítjuk össze a (23.30) alatt kiszámított egzakt szögeloszlással.<sup>31</sup> A  $\mu < 0$  tartományban kielégítő az egyezés. A  $\mu > 0$  tartományban viszont látható, hogy a (24.8) határfeltétel csak rossz közelítéssel elégül ki.

A  $P_3$  közelítés jelentős javulást jelent a  $P_1$  közelítéshez képest. Befejezésül nézzük meg ennek a mértékét. (24.11) mintájára felírhatjuk a  $P_1$  egyenleteket:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_{1}(x)}{\mathrm{d}x} + (1-c)\Phi_{0}(x) = S_{0}(x),$$
  
$$\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}\Phi_{0}(x)}{\mathrm{d}x} + \Phi_{1}(x) = 0,$$

Ha ezekre is alkalmazzuk a (24.12) próbafüggvényeket ( $\ell = 0$  és  $\ell = 1$ ), egyszerűen beláthatjuk, hogy a P<sub>1</sub> közelítésben csak egyetlen  $\kappa^2$  adódik:

$$\frac{1}{\kappa^2} = 3(1-c).$$

Ez láthatóan a (24.15) sorfejtés első tagja.  $\varphi_0$ -ra és  $\varphi_1$ -re érvényesek maradnak a (24.14) egyenletek. Tekintve, hogy nincs tranziens megoldás, (24.17) helyett egyszerűbb képlet adja meg a fluxust:

<sup>&</sup>lt;sup>31</sup> A sajátfüggvényeknek a (23.3) szerinti normálása miatt az egzakt eloszlást el kell osztani  $2\pi$ -vel, hogy a P<sub>3</sub> közelítésben kapott eloszlással összehasonlítható legyen.

$$\Phi(x) = 2\pi \int_{-1}^{1} \Phi(x,\mu) \, \mathrm{d}\mu = \mathrm{e}^{-x/\kappa_{-}} + a_{+} \mathrm{e}^{-x/\kappa_{+}} \, .$$

Az itt szereplő  $a_+$  együtthatót a (24.19) egyenletek analógiájára határozhatjuk meg:<sup>32</sup>

$$a_+ = -\frac{3\kappa_+ - 2}{3\kappa_+ + 2},$$

és (24.18) mintájára számítjuk ki az extrapolációs távolságot:

$$d = \frac{\kappa_+}{2} \ln \frac{3\kappa_+ + 2}{3\kappa_+ - 2}.$$

A 24.1. táblázatban a P<sub>1</sub> közelítés oszlopaiban szereplő adatokat ezekkel a képletekkel számítottuk ki.

Látható a táblázatból, hogy a P<sub>1</sub> közelítés már lényegesen pontatlanabbul adja a sajátértéket, mint a P<sub>3</sub> közelítés, de ennél fontosabb eltérés az extrapolációs távolság kis értéke. Az abszorpciómentes határesetben d = 2/3, ami jelentős eltérés. Ezért szoktuk a diffúzióelméletben (3. fejezet) ezt az egzakt 0,71045-re javítani. A P<sub>1</sub> közelítésnek van még egy további fogyatékossága: nem jelenik meg benne a tranziens megoldás. Itt ugyan csak egy végtelen félteret vizsgáltunk, de nem nehéz belátni, hogy magasabb közelítésekben a tranziens megoldások minden olyan határfelület közelében megjelennek, amely különböző anyagi minőségű tartományokat választ el egymástól. Mivel ezek a P<sub>1</sub> közelítésben hiányoznak, bizonyos számítási hibára kell felkészülnünk, amikor sok ilyen tartomány együttes leírására használjuk. Ugyanez a megállapítás természetesen vonatkozik a diffúzióelméletre is.

Befejezésül megmutatjuk, hogy az eddigiekben az egycsoport modell szerint ismertetett módszert egyszerűen lehet általánosítani az energiától függő esetekre. A (24.2) alatti sorfejtés megfelelője:

$$\Sigma_{s}(E' \to E, \mu_{0}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{\ell}(E' \to E) P_{\ell}(\mu_{0}).$$
(24.2a)

A fluxus sorfejtése a (24.4) egyenletekből úgy adódik, hogy bennük egyszerűen feltüntetjük az *E* energiaváltozót. Az ezt követő levezetés szintén megismételhető *mutatis mutandis*:

$$\int_{4\pi} \Sigma_{s}(E' \to E, \mu_{0}) \Phi(x, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' =$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} P_{\ell}(\mu) \int_{-1}^{1} \Sigma_{\ell}(E' \to E) P_{\ell}(\mu') \Phi(x, E', \mu') d\mu' =$$

<sup>&</sup>lt;sup>32</sup> A számítás részleteit az Olvasóra bízzuk.

$$=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{2\ell+1}{4\pi}P_{\ell}(\mu)\Sigma_{\ell}(E'\to E)\Phi_{\ell}(x,E').$$

Ezt felhasználva kapjuk a (24.5a) egyenletrendszer energiától függő megfelelőjét:

$$\frac{\ell}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell-1}(x,E)}{\partial x} + \frac{\ell+1}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell+1}(x,E)}{\partial x} + \Sigma_{t}(E) \Phi_{\ell}(x,E) =$$
$$= S_{0}(x,E) \delta_{\ell 0} + \int_{0}^{\infty} \Sigma_{\ell}(E' \to E) \Phi_{\ell}(x,E') dE', \qquad (\ell = 0, 1, 2, ...).$$
(24.5a)

## Aszimptotikus reaktorelmélet

Általános reaktorfizikai tapasztalat, hogy egy homogén tartományon belül, a határfelületektől elegendően távol a neutronspektrum alakja független a helytől. Ezt a kísérletileg alátámasztott megfigyelést *a reaktorfizika alaptételé*nek szoktuk nevezni. Ha a vizsgált közegben van ilyen tartomány, akkor azt *aszimptotikus* tartománynak nevezzük.<sup>33</sup> Az aszimptotikus tartomány létezése nagyon megkönnyíti a dolgunkat, mivel benne a fluxus az **r** térváltozó és a többi változó szerint szeparálható. Az ilyen helyzetek leírására szolgál az *aszimptotikus reaktorelmélet*. Jelentősége abban áll, hogy segítségével meg tudjuk határozni egy adott anyagi minőségű, homogén tartományra jellemző, a környezettől független neutronspektrumot.

A definícióból következik, hogy az aszimptotikus tartományban kialakuló neutronspektrum gyakorlatilag független a reaktor külső alakjától. Ezért a tárgyalás egyszerűsítése érdekében célszerű a legegyszerűbb geometriát alapul venni: két párhuzamos, az y és z irányban végtelen sík által határolt tartományt. Ebben az esetben a fluxus csak az x koordinátától és az  $\overline{\Omega}$  vektor  $\mu = \Omega_x$  komponensétől függ:

$$\Phi(\mathbf{r}, \vec{\Omega}, E) = \Phi(x, \mu, E).$$

Az aszimptotikus tartományra vonatkozó feltevés pedig így írható:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{E}). \tag{24.20}$$

Az elméletet lineárisan anizotrop szórási modellben ismertetjük, ami azt jelenti, hogy (24.2a)-ban megállunk a második tagnál:

$$\Sigma_{\rm s}(E' \to E, \mu_0) = \frac{1}{4\pi} \Sigma_0(E' \to E) + \frac{3}{4\pi} \mu_0 \Sigma_1(E' \to E). \tag{24.21}$$

<sup>&</sup>lt;sup>33</sup> Egyáltalán nem biztos, hogy ilyen tartomány létezik. Egy olyan reaktorban, amelyben a különböző anyagi minőségű tartományok optikai méretei kicsik, vagyis a határfelületek egymáshoz közel vannak, egyik tartományban sem alakul ki térben állandó alakú neutronspektrum. A kísérleti reaktorfizika egyik legkomolyabb problémája annak eldöntése, hogy a vizsgált reaktorban létezik-e aszimptotikus tartomány vagy sem.

Az egyszerűség kedvéért ebben a magfüggvényben egyesítjük a rugalmas és rugalmatlan szórást leíró magfüggvényeket. [Gyakorlati számításokban persze külön magfüggvényeket használunk, vö. (22.1b).] Reaktorok aktív zónája esetében általában elegendő a lineáris közelítés.<sup>34</sup> A lineáris szórási anizotropia mellett, egydimenziós modellben a transzportegyenlet így írható:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu,E)}{\partial x} + \Sigma_{t}(E)\Phi(x,\mu,E) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{4\pi} \left[ \Sigma_{0}(E' \to E) + 3\mu_{0}\Sigma_{1}(E' \to E) \right] \Phi(x,\mu',E') d\vec{\Omega}' dE' + \frac{f(E)}{4\pi k_{\text{eff}}} \int_{0}^{\infty} \int_{4\pi} \nu \Sigma_{f}(E') \Phi(x,\mu',E') d\vec{\Omega}' dE' , \qquad (24.22)$$

ahol f(E) a hasadási spektrum,  $k_{eff}$  a sokszorozási tényező (sztatikus sajátérték, vö. 2.2. alfejezet), továbbá

$$\mu_0 = \vec{\Omega}\vec{\Omega}' = \mu\mu' + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - {\mu'}^2}\cos(\varphi - \varphi')$$
(24.23)

a szórási szög koszinusza a laboratóriumi rendszerben,

$$\mathrm{d}\vec{\Omega}' = \mathrm{d}\mu'\mathrm{d}\varphi'\,,$$

 $\varphi$  az azimutszög. (24.23) alapján egyszerű belátni, hogy az  $\vec{\Omega}'$ -re vonatkozó integráláson belül  $\mu_0$ -nak  $\varphi'$  szerinti integrálja  $2\pi\mu\mu'$ -vel egyenlő. Ezt figyelembe véve (24.22) így írható:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu,E)}{\partial x} + \Sigma_{t}(E)\Phi(x,\mu,E) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \Sigma_{0}(E' \to E) \Phi(x,E') dE' + \frac{3\mu}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \Sigma_{1}(E' \to E) J(x,E') dE' + \frac{1}{4\pi} F(x,E)$$

ahol

$$\Phi(x,E) = 2\pi \int_{-1}^{1} \Phi(x,\mu,E) d\mu,$$
$$J(x,E) = 2\pi \int_{-1}^{1} \mu \Phi(x,\mu,E) d\mu$$

<sup>&</sup>lt;sup>34</sup> Magasabb közelítésre lehet szükség az ún. *mély behatolási* (angolul: deep penetration) probléma tárgyalásában, vagyis biológiai védelmek számításakor. Az aszimptotikus elmélet általánosítható ezekre a magasabb közelítésekre is.
$$F(x,E) = \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_{0}^{\infty} v \Sigma_{f}(E') \Phi(x,E') dE'$$

A P<sub>L</sub> közelítéssel összevetve látható, hogy ezek rendre a  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$ ,  $S_0$  függvények megfelelői [vö. (24.2)].

Helyettesítsük most a (24.20) próbakifejezést utóbbi egyenletünkbe, majd oszszunk  $\phi(x) \cdot \psi(\mu, E)$ -vel. Azt kapjuk<sup>35</sup>, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} = \pm \mathrm{i}B\phi(x)$$

vagyis

$$\phi(x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}Bx},$$

ahol *B* (egyelőre ismeretlen) állandó. A  $\mu$ -től és energiától függő rész pedig a következő egyenletet elégíti ki:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{t}(E) \pm iB\mu \end{bmatrix} \psi_{\pm}(\mu, E) =$$
(24.24)  
=  $\frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \Sigma_{0}(E' \to E) \psi_{\pm}(E') dE' + \frac{3\mu}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \Sigma_{1}(E' \to E) J_{\pm}(E') dE' + \frac{1}{4\pi} F_{\pm}(E),$ 

ahol

$$\psi_{\pm}(E) = 2\pi \int_{-1}^{1} \psi_{\pm}(\mu, E) d\mu,$$
  

$$J_{\pm}(E) = 2\pi \int_{-1}^{1} \mu \psi_{\pm}(\mu, E) d\mu,$$
  

$$F_{\pm}(E) = \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_{0}^{\infty} \nu \Sigma_{f}(E') \psi_{\pm}(E') dE'.$$

Ezen a ponton vissza kell térnünk a szögfüggő fluxus (24.20) szerinti szeparálásának a problémájára. A 24.3. *ábra* szerint a szögfüggés nyilván nem *lehet* szeparálható, hiszen a szögeloszlás x > 0 esetében a  $\mu > 0$  irányok, x < 0 esetében pedig a  $\mu < 0$  irányok felé mutat anizotropiát. Erre való tekintettel a szögfüggő fluxus csak a fenti két megoldás szuperpozíciója lehet:

$$\Phi(x,\mu,E) = a_{+}\psi_{+}(\mu,E)e^{iBx} + a_{-}\psi_{-}(\mu,E)e^{-iBx}, \qquad (24.25)$$

 $<sup>^{35}</sup>$  Javasoljuk, hogy az Olvasó részletezze ezeket a számításokat. A továbbiakban nem részletezett számítások ellenőrzésében támaszkodhat a  $\rm P_L$  közelítésnél részletezett levezetésekre.

ahol az  $a_+$  és  $a_-$  együtthatók a fluxus normálása és a határfeltételek alapján határozhatók meg. Értéküknek természetesen biztosítaniuk kell, hogy a (24.25) szerint számított szögfüggő fluxus valós legyen.



24.3. ábra. A szögfüggő fluxus anizotropiájának helyfüggése

A (24.20) alatt bevezetett függvényt fejtsük a Legendre-polinomok szerint sorba:

$$\psi(\mu, E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell + 1}{4\pi} \psi_{\ell}(E) P_{\ell}(\mu), \qquad (24.26)$$

ahol

$$\psi_{\ell}(E) = 2\pi \int_{-1}^{1} \psi(\mu, E) P_{\ell}(\mu) d\mu.$$
 (24.27)

A fenti jelölésekkel

$$P_0(\mu) \equiv 1; \qquad \qquad \psi_0(E) = \psi(E)$$
$$P_1(\mu) = \mu; \qquad \qquad \psi_1(E) = J(E).$$

ban a harmadiktól kezdve mindegyik tagot ( $\ell > 1$ ) elhanyagoljuk:

és

$$\psi(\mu, E) \cong \frac{1}{4\pi} \psi(E) + \frac{3}{4\pi} \mu J(E).$$
 (24.28)

Helyettesítsük ezt (24.24)-be. Az így kapott egyenletet először integráljuk  $\vec{\Omega}$  szerint, majd szorozzuk meg  $\mu$ -vel és utána ismét integráljuk  $\vec{\Omega}$  szerint.<sup>36</sup> Elemi számítások után kapjuk:

<sup>&</sup>lt;sup>36</sup> Az  $\vec{\Omega}$  szerinti integrálás esetünkben  $2\pi$ -vel való szorzást és  $\mu$  szerint a [-1, 1] intervallumban való integrálást jelent.

$$\Sigma_{t}(E)\psi_{\pm}(E)\pm iBJ_{\pm}(E) = \int_{0}^{\infty} \Sigma_{0}(E' \to E)\psi_{\pm}(E')dE' + F_{\pm}(E), \qquad (24.29a)$$

$$\Sigma_{t}(E)J_{\pm}(E) \pm \frac{\mathrm{i}B}{3}\psi_{\pm}(E) = \int_{0}^{\infty} \Sigma_{1}(E' \to E)J_{\pm}(E')\mathrm{d}E' \quad (24.29\mathrm{b})$$

Ezek az aszimptotikus elmélet  $P_1$  közelítésének alapegyenletei. Érvényességük elsősorban a (24.28) sorfejtés pontosságától függ. A későbbiekben visszatérünk arra, hogy (24.24)-ből kiindulva nem az az egyedül lehetséges út, amelyet a fentiekben követettünk.

A (24.29)-ben megjelenik a következő két integrál:

$$L_0^{\pm}(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_0(E' \to E) \psi_{\pm}(E') dE' ,$$
  
$$L_1^{\pm}(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_1(E' \to E) J_{\pm}(E') dE' .$$

Mindkettő fizikai jelentése világos: az izotrop, illetve az anizotrop lassulás által létrehozott neutronforrásnak az *E* energia körüli egységnyi energiaintervallumra vonatkozó része. A 4. fejezetben foglalkozni fogunk az előbbire vonatkozó különböző közelítésekkel és – általában – a (24.29) lassulási egyenlet megoldásával. A jelen fejezetben elsősorban azt mutatjuk meg, hogy a korábban egycsoport közelítésben kidolgozott  $P_L$  közelítés hogyan kapcsolható össze az energiaspektrum számításával.

A (24.29) egyenletek mellett létezik egy másik közelítés is, az ún.  $B_1$  közelítés, amely bizonyos tekintetben pontosabb, mint a P<sub>1</sub> közelítés. Az eltérés látszólag minimális. Mielőtt a (24.24) egyenletben a fluxust sorba fejtenénk, előbb kifejezzük:

$$\psi_{\pm}(\mu, E) = \frac{L_0^{\pm}(E) + 3\mu L_1^{\pm}(E) + F_{\pm}(E)}{4\pi (\Sigma_t(E) \pm iB\mu)},$$

és csak ezután hajtjuk végre a (24.26) szerinti sorfejtést. Így a P<sub>1</sub> közelítéshez formálisan hasonló egyenletekhez jutunk, de a módszernek megvan az az előnyös tulajdonsága, hogy pontossága nem a fluxus (24.28) szerinti sorfejtésének, hanem a szórási magfüggvény (24.21) szerinti sorfejtésének a pontosságától függ. Mivel tudjuk, hogy az utóbbi meglehetősen pontos a reaktorok aktív zónájának a leírásához, a B<sub>1</sub> közelítéssel jó pontosságú neutronspektrumot lehet kapni. A kérdés részletesebb tárgyalása a reaktorfizikai számításokkal foglalkozó kézikönyvekben található.

Befejezésül megjegyezzük, hogy a (24.29) egyenletekben két ismeretlen paraméter található: *B* és  $k_{eff}$ . (24.29) mindkettőre vonatkozóan sajátérték-egyenlet, vagyis ha az egyik adott, akkor a (24.29) egyenletek csak a másik speciális értékei mellett oldhatók meg. Végeredményben tehát *B* és  $k_{eff}$  között egyértelmű kapcsolat van. Ehhez a későbbi fejezetekben többször vissza fogunk térni, sőt bizonyos esetekben meg is fogjuk határozni ezt a kapcsolatot. Itt mindössze annyit jegyzünk meg, hogy (24.25) alapján a szögre integrált fluxus

$$\Phi(x,E) = \psi(E) \cos Bx$$

alakban adódik. A kísérleti reaktorfizikában éppen a  $\cos Bx$  alakú térfüggés<sup>37</sup> kialakulásának kísérleti kimutatásával bizonyítjuk az aszimptotikus tartomány létezését. Ekkor tehát *B* kísérletileg meghatározható. Mivel a mérést mindig kritikus állapotban végezzük, a mért *B* értéket az aszimptotikus egyenletekbe helyettesítve  $k_{eff} = 1$ -et kell kapnunk a számított sajátértékre. Ez biztosítja a használt lassulási modell és hatáskeresztmetszetek legerősebb kísérleti ellenőrzését.<sup>38</sup>

Végeredményben tehát megmutattuk, miért alapvető jelentőségű az aszimptotikus reaktorelmélet: *matematikai szempontból a legegyszerűbb olyan elmélet, amely nem idealizált, hanem kísérletileg is megfigyelhető, reális mennyiségekre vonatkozik.* Ezen túlmenően az aszimptotikus elméletben számolt neutronspektrumot használjuk a kevéscsoport elmélet (5. fejezet) állandóinak a számítására. Ez az oka annak, hogy a 4. fejezetben olyan nagy figyelmet szentelünk majd az aszimptotikus spektrum számításának.

### $S_N m \delta dszer$

A véges ordináták módszerének első változatát Wick javasolta [8], és Chandrasekhar dolgozta ki [9]. Ők a  $P_L$  közelítésből indultak ki, és így módszerük azzal majdnem teljesen egyenértékű. Később ezt Carlson [11] módosította. A ma használatos programok az általa kidolgozott eljárás különböző változatain alapulnak. Mindkét módszert a (23.1) egyenlet alapján ismertetjük:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu)}{\partial x} + \Phi(x,\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{1} \Phi(x,\mu') d\mu' + S(x,\mu).$$
(24.30)

Az itt szereplő integrált Gauss-kvadratúrával közelítjük:

$$\int_{-1}^{1} \Phi(x,\mu') \,\mathrm{d}\mu' \approx \sum_{k'} w_{k'} \Phi(x,\mu_{k'}),$$

ahol  $\mu_k$  a  $P_{L+1}(\mu)$  Legendre-polinom egyik gyöke,  $w_k$  alkalmas állandó (k = 1, 2, ..., L+1). E konstansok értékét és a Gauss-kvadratúra tulajdonságait a 2. függelékben foglaljuk össze. Ha a (24.30) egyenletet mindegyik gyökre felírjuk, akkor egy zárt egyenletrendszert kapunk a  $\Phi(x, \mu_k)$  függvényekre:

<sup>&</sup>lt;sup>37</sup> Hengeres geometriában a térfüggést a  $J_0(Bx)$  Bessel-függvény adja meg.

<sup>&</sup>lt;sup>38</sup> A diffúzióelméletben  $B^2$ -et anyagi görbületi paraméternek fogjuk nevezni.

$$\mu_k \frac{\partial \Phi(x,\mu_k)}{\partial x} + \Phi(x,\mu_k) = \frac{c}{2} \sum_{k'} w_{k'} \Phi(x,\mu_{k'}) + S(x,\mu_k), \qquad (24.31)$$

amely valamilyen módszerrel (például az x szerinti véges differenciák módszerével) megoldható. (24.31)-ben N = L+1 egyenletet írtunk fel N ismeretlenre.

Belátjuk, hogy ez egyenértékű a PL közelítéssel, amely szerint a fluxust a

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) \cong \sum_{\ell=0}^{L} \frac{2\ell+1}{4\pi} \, \boldsymbol{\Phi}_{\ell}(\boldsymbol{x}) P_{\ell}(\boldsymbol{\mu}) \tag{24.32}$$

képlettel közelítjük. Mivel ez  $\mu$ -nek *L*-edfokú polinomja, integrálját egzaktul állítja elő a fenti Gauss-kvadratúra. (Ennek bizonyítását a 2. függelékben adjuk meg.) A (24.32) közelítésnek csak akkor van értelme, ha sem az  $S(x,\mu)$  forrás, sem a szórás anizotropiája nem tartalmaz  $\ell > L$  indexű tagokat. Az egyszerűség kedvéért (24.30)ban feltettük, hogy a szórás izotrop, de az alábbiak érvényesek anizotrop szórás esetében is. Ha (24.32)-t (24.30)-ba helyettesítjük, a bal oldal első tagja:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu)}{\partial x} = \sum_{\ell=0}^{L} \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_{\ell}(x)}{\mathrm{d}x} \mu P_{\ell}(\mu),$$

amely – adott *x* mellett –  $\mu$ -nek (*L*+1)-edfokú polinomja. A többi tag azonban legfeljebb *L*-edfokú, vagyis összegük egzaktul előállítható Lagrange-interpolációval (vö. 2. függelék). Más szóval: a P<sub>L</sub> közelítés akkor lenne egzakt, ha minden  $\mu$ -re fennállna:<sup>39</sup>

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu)}{\partial x} = \sum_{k} \mu_{k} \frac{\partial \Phi(x,\mu_{k})}{\partial x} u_{k}(\mu).$$
(24.33)

Ez nyilván lehetetlen, tehát legfeljebb arról lehet szó, hogy a (24.33) egyenlőség  $\mu$  egyes diszkrét értékeire fennálljon. Azt állítjuk, hogy ezek a  $\mu = \mu_k$  értékek. Ezt értjük azon, hogy az S<sub>N</sub> közelítés egyenértékű a P<sub>L</sub> közelítéssel (N = L+1 mellett). Ahhoz, hogy ezt belássuk, szorozzuk meg (24.32)-t  $\mu$ -vel, és alkalmazzuk a Legendre-polinomok rekurziós képletét:

$$\mu \Phi(x,\mu) \cong \sum_{\ell=0}^{L} \frac{2\ell+1}{4\pi} \, \Phi_{\ell}(x) \mu P_{\ell}(\mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{L} \Phi_{\ell}(x) \left[ (\ell+1) P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu) \right].$$

Eszerint  $\mu \Phi(x,\mu)$  amiatt (*L*+1)-edfokú, mert megjelenik benne egy  $P_{L+1}(\mu)$ -vel arányos tag. Ha ezt levonjuk belőle, *L*-edfokúvá válik, és a maradék pontosan előállítható Lagrange-interpolációval:

$$\mu \Phi^*(x,\mu) \equiv \mu \Phi(x,\mu) - \frac{L+1}{4\pi} \Phi_L(x) P_{L+1}(\mu) = \sum_k \mu_k \Phi^*(x,\mu_k) u_k(\mu).$$

<sup>&</sup>lt;sup>39</sup> Itt  $u_k(\mu)$  minden *k*-ra *L*-edfokú polinom, amelyre teljesül, hogy  $u_k(\mu_j) = \delta_{kj}$ , lásd 2. függelék.

Mivel azonban minden *k*-ra  $P_{L+1}(\mu_k) = 0$ , pontosan fennáll az is, hogy

$$\mu_k \Phi^*(x,\mu_k) = \mu_k \Phi(x,\mu_k).$$

Ha ezt előbbi egyenletünkbe írjuk, majd *x* szerint deriválunk, a következőt kapjuk:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x,\mu)}{\partial x} - \frac{L+1}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_L(x)}{\mathrm{d}x} P_{L+1}(\mu) = \sum_k \mu_k \frac{\partial \Phi(x,\mu_k)}{\partial x} u_k(\mu).$$

(24.33)-mal ellentétben ez minden  $\mu$ -re egzakt. Ha itt  $\mu$  helyére  $\mu_k$ -t helyettesítjük, a bal oldal második tagja eltűnik, vagyis megkaptuk, amit állítottunk: (24.33) pontosan érvényes minden  $\mu = \mu_k$ -ra.

Most érkeztünk el oda, hogy megvilágítsuk, miért nem érdemes páros indexű  $P_L$  közelítést alkalmazni. Mint láttuk, a  $P_L$  közelítés egy N = L+1 véges ordinátájú módszernek felel meg. Ha *L* páros, *N* páratlan. Ekkor a  $P_{L+1}(\mu)$  polinom páratlan, tehát a  $\mu_k$  gyökök között a  $\mu_0 = 0$  is előfordul, ami azt jelenti, hogy a (24.31) egyenletrendszer megoldásával  $\Phi(x,0)$ -t is kiszámítjuk. Ennek a függvénynek azonban a határfelületeken szakadása lehet, de legalábbis meredeken változhat a határfelületek közelében. Gondoljunk például a vákuummal határos felületre. A közeg felől nézve  $\Phi(x,0)$  határértéke véges,<sup>40</sup> viszont a vákuum felőli határérték eltűnik [vö. (22.2)]. Emiatt a kapott megoldás pontatlanná válik. Az általános tapasztalat azt mutatja, hogy egy páros indexű  $P_L$  közelítés pontatlanabb eredményt ad, mint az 1-gyel kisebb (tehát páratlan) indexű  $P_L$  közelítés. Több munkával tehát rosszabb eredményt kapunk. Ezért alakult ki az a gyakorlat, hogy a  $P_L$  közelítést mindig páratlan indexszel, az  $S_N$  módszert viszont páros indexszel alkalmazzuk.

Carlson az előbbitől eltérő felfogásban alkalmazta a véges ordináták módszerét. Az ő módszere ugyanolyan egyszerű, mint az előbbi, de az integrált nem Gausskvadratúrával, hanem trapézszabállyal közelítjük. A [–1, 1] intervallumot felosztjuk *N* intervallumra: [ $\mu_{i-1}$ ,  $\mu_i$ ], (i = 1, 2, ..., N), ahol  $\mu_0 = -1$  és  $\mu_N = 1$ . A felosztás nem szükségképpen egyenletes. Minden intervallumon belül a fluxust lineáris függvénnyel közelítjük:

$$\Phi(x,\mu) \cong \frac{\mu - \mu_{i-1}}{\mu_i - \mu_{i-1}} \Phi_i(x) + \frac{\mu_i - \mu}{\mu_i - \mu_{i-1}} \Phi_{i-1}(x), \qquad \mu_{i-1} \le \mu \le \mu_i, \qquad (24.34)$$

ahol  $\Phi_i(x) = \Phi(x,\mu_i)$ . Először kiszámítjuk a szórási integrál közelítését:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \Phi(x, \mu') \, \mathrm{d}\mu' \cong \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (\mu_i - \mu_{i-1}) (\Phi_i(x) + \Phi_{i-1}(x)).$$
(24.35)

<sup>&</sup>lt;sup>40</sup> Ha például (23.30)-ban  $\mu \rightarrow 0$ , a határérték véges.

A továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – az x argumentumot elhagyjuk: f,  $\Phi_i$  stb. Ha ezt és (24.34)-et (24.30)-ba helyettesítjük, majd  $\mu$  szerint minden részintervallumra integrálunk, akkor közülük az *i*-edikre a következőt kapjuk (i = 1, 2, ..., N):

$$\frac{\mu_{i} - \mu_{i-1}}{6} \left[ (2\mu_{i} + \mu_{i-1}) \frac{\mathrm{d}\Phi_{i}}{\mathrm{d}x} + (\mu_{i} + 2\mu_{i-1}) \frac{\mathrm{d}\Phi_{i-1}}{\mathrm{d}x} \right] + \frac{\mu_{i} - \mu_{i-1}}{2} (\Phi_{i} + \Phi_{i-1}) = \frac{c}{2} (\mu_{i} - \mu_{i-1}) f + \frac{\mu_{i} - \mu_{i-1}}{2} (S_{i} + S_{i-1}).$$
(24.36)

Ez *N* egyenlet. Mivel (*N*+1) ismeretlenünk van, még egy további egyenletre van szükségünk. (*N*+1)-edik egyenletként a (24.30) egyenletet felírjuk  $\mu$  = -1-re is:

$$-\frac{\mathrm{d}\Phi_0}{\mathrm{d}x} + \Phi_0 = \frac{c}{2}f + S_0.$$
(24.37)

A (24.35)–(24.37) egyenletekből álló rendszert S<sub>N</sub> egyenletrendszernek nevezzük.

Carlson  $S_N$  módszere, továbbá Wick és Chandrasekhar módszere csupán két példa a transzportegyenlet olyan közelítéseire, amelyekben a szórási integrált véges ordinátákkal közelítjük. Ezek mind csak az integrálás és az interpoláció módjában térnek el egymástól. Carlson itt ismertetett módszere azért terjedt el széles körben, mert kényelmesen terjeszthető ki az itt tárgyalt síkgeometriától eltérő geometriákra is. Bár az  $S_N$  módszerbe is beépíthető a szórási anizotropia figyelembevétele, ez a  $P_L$  közelítésben természetesebb. A ma használatos  $S_N$  programok az integrálási súlyok és az integrálási alappontok megválasztásának változatos sémáit alkalmazzák.

#### Útközési valószínűségek módszere

Az *ütközési valószínűségek módszere* a transzportegyenlet integrális alakján alapuló közelítő módszer. A (22.5) egyenletet írjuk fel időtől független alakban:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_{-\infty}^{s} e^{-\overline{\Sigma_{t}(s' \to s)}} \cdot Q(\mathbf{r}', E, \vec{\Omega}) ds', \qquad (24.38)$$

ahol

$$\overline{\mathcal{L}_{t}(s' \to s)} = \int_{s'}^{s} \mathcal{L}_{t}(\mathbf{r}_{0} + s'' \vec{\Omega}, E) \, \mathrm{d}s''$$

az  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s \vec{\Omega}$  és  $\mathbf{r'} = \mathbf{r}_0 + s' \vec{\Omega}$  pontok közötti optikai távolság. Az  $\exp\left(-\overline{\Sigma_t(s' \to s)}\right)$  tényező annak a valószínűsége, hogy a neutron ezt az utat ütközés nélkül megteszi. Az ütközési valószínűségek módszerét leginkább abban az esetben alkalmazzuk, amikor a neutronforrás izotrop, vagyis amikor

$$Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\infty} \Sigma_{0}(\mathbf{r}, E' \to E) \Phi(\mathbf{r}, E') \, \mathrm{d}E' + \frac{F_{0}(\mathbf{r}, E)}{4\pi} = \frac{q(\mathbf{r}, E)}{4\pi}, \qquad (24.39)$$

ahol  $F_0(\mathbf{r}, E)$  a hasadások által létrehozott forrás, továbbá  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E)$  a (szögre integrált) fluxus.  $\Sigma_0$  magában foglalja a rugalmas és rugalmatlan szórások járulékát. Ha (24.38)at  $\boldsymbol{\Omega}$ -ra integráljuk, akkor egy  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E)$ -ben zárt integrálegyenletet kapunk.<sup>41</sup> A jobb oldal  $\boldsymbol{\Omega}$  szerinti integrálja egyszerűsíthető. Ha ugyanis **r**-et rögzítjük, az s' és  $\boldsymbol{\Omega}$  szerinti integrál **r'** szerinti térintegrállá válik, hiszen az utóbbi térfogateleme így írható:

$$\mathrm{d}V' = (s-s')^2 \,\mathrm{d}s' \mathrm{d}\vec{\Omega} = \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^2 \,\mathrm{d}s' \mathrm{d}\vec{\Omega} ,$$

amivel (24.38)  $\vec{\Omega}$  szerinti integrálja:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E) = \int q(\mathbf{r}', E) \frac{\mathrm{e}^{-\overline{\Sigma_{t}(s' \to s)}}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{2}} \,\mathrm{d}V' \,. \tag{24.40}$$

Meg lehet mutatni, hogy a (24.40)-ben szereplő magfüggvénynek a következő, az ütközési valószínűségek módszere szempontjából alapvető fizikai jelentése van:

$$\frac{\mathrm{e}^{-\overline{\Sigma_{t}(s'\to s)}}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r'}|^{2}} = n(\mathbf{r'}\to\mathbf{r})$$

az **r**'helyen levő egységnyi izotrop pontforrás által az **r** helyen ütközés nélkül létrehozott fluxus. E tétel alapján – legalábbis elvileg – tetszőleges geometriai elrendezésre vonatkozóan meg tudjuk mondani, hogy az egyik helyen kialakuló neutronforrás egy másik helyen milyen ütközés nélküli neutronfluxust hoz létre.

Nem véletlen, hogy ez a módszer konzekvensen *ütközés nélküli fluxus*sal dolgozik. Ha ugyanis nem történik ütközés, nem változik meg a neutron energiája. Ez teszi lehetővé a neutronspektrum és a térbeli eloszlás számításának a szétcsatolását: a keresett  $\Phi(\mathbf{r}, E)$  fluxusra egy közelítő értéket felvéve először (24.39) szerint kiszámítjuk a  $q(\mathbf{r}, E)$  neutronforrást, majd ezt állandónak tartva a  $\Phi(\mathbf{r}, E)$  fluxust (24.38) szerint újraszámoljuk, amelyet felhasználva javítjuk a neutronforrást, és így tovább, amíg az újraszámolt mennyiségek konvergálnak. Ez az iterációs séma lehetővé teszi, hogy a térbeli eloszlás újraszámolása az egycsoport transzportelmélet segítségével történjen – természetesen minden E energiára külön-külön.

A továbbiakban levezetjük az adott neutronforrás mellett a fluxus számítására szolgáló összefüggéseket. Mivel ez az egycsoport elmélet szerint történik, az *E* ener-

<sup>&</sup>lt;sup>41</sup> Ez csak izotrop szórás esetében lehetséges. Amikor a szórás anizotrop, ezt általában az ún. *transzport korrekció*val vesszük figyelembe, amely abban áll, hogy  $\Sigma_t$  helyébe a (31.7b)-ben definiált  $\Sigma_{tr}$ -ot írjuk. Ez természetesen csak közelítés.

giát a képletekből elhagyjuk. Osszuk fel a teret  $V_i$  térfogatokra<sup>42</sup>, amelyek belsejében a hatáskeresztmetszetek állandók. Vezessük be az átlagos fluxust és neutronforrást:

$$\boldsymbol{\Phi}_{i} = \frac{\int \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) \mathrm{d}V}{V_{i}} \qquad \text{és} \qquad q_{i} = \frac{\int \boldsymbol{q}(\mathbf{r}) \mathrm{d}V}{V_{i}}.$$

(24.40)-ben az **r'** szerinti térintegrált bontsuk fel az ezekre a térfogatokra való integrálok összegére. Ennek érdekében definiáljuk a *transzport mátrix*ot:<sup>43</sup>

$$T_{ji} = \frac{\int\limits_{V_j} dV_j \int\limits_{V_i} \frac{dV_i}{V_i} n(\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i) q(\mathbf{r}_j)}{q_j}.$$

Ha a  $V_i$  térfogatok kicsik, reális feltenni, hogy mind a forrás, mind a fluxus egy-egy térfogaton belül állandó. Ezzel a transzport mátrix egyszerűbb alakra hozható:

$$T_{ji} = \frac{1}{V_i} \int_{V_j} dV_j \int_{V_i} dV_i n \left( \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i \right).$$
(24.41)

 $T_{ji}$  fizikai jelentése a következő: a V<sub>j</sub> térfogatban egységnyi neutronforrás-sűrűség hatására a V<sub>i</sub> térfogatban (ütközés nélkül) kialakuló átlagos fluxus. Az egycsoport transzportelméletből ismert az ún. *reciprocitási tétel*:

$$n(\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i) = n(\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_j).$$

Ebből következik, hogy

$$V_i T_{ji} = V_j T_{ij} \,,$$

amivel a kiszámítandó mátrixelemek száma lényegesen csökken.

Végül integráljuk a (24.40) egyenletet  $V_i$ -re, majd ennek eredményét osszuk el  $V_i$ -vel:

$$\boldsymbol{\Phi}_i = \sum_j T_{ji} \boldsymbol{q}_j \,. \tag{24.42}$$

Ennek az egyenletnek az alapján lehet a fluxus új iteráltját kiszámítani. A részleteket illetően a szakkönyvekre utalunk. A módszer nevében szereplő ütközési valószínűsé-

<sup>&</sup>lt;sup>42</sup> V<sub>i</sub> jelentése kettős: egyrészt jelenti magát a térrészt (V<sub>i</sub>), másrészt ennek térfogatát (V<sub>i</sub>). A kettő között a szedés módja tesz különbséget: álló betű a térrészt, dűlt betű a térrész térfogatát jelöli.

<sup>&</sup>lt;sup>43</sup> Jóllehet fizikai értelmük rokon, jelentős különbségek vannak a transzport magfüggvény és a transzport mátrix között. Például az előbbi dimenziója cm<sup>-2</sup>, az utóbbié pedig cm.

gek egyszerű kapcsolatban állnak a transzport magfüggvénnyel. Ha a fenti gondolatmenetben nem az  $n(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i)$  ütközés nélküli fluxusból, hanem a

$$p(\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i) = \mathcal{L}_{t}(\mathbf{r}_i)n(\mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_i)$$

ütközési sűrűségből indulunk ki, a

$$p_{ji} = \Sigma_j^{t} V_i \Sigma_i^{t} T_{ji} = p_{ij}$$

ütközési valószínűségekre jutunk, amelyek segítségével (24.42) helyett a

$$V_i \Sigma_i^{\mathsf{t}} \boldsymbol{\Phi}_i = \sum_j p_{ji} \frac{q_j}{\Sigma_j^{\mathsf{t}}}$$

egyenletre jutunk. Az egész módszer az ebben egyenletben szereplő  $p_{ij}$  mennyiségekről kapta a nevét.

A módszer kulcsa a transzport mátrix számítása, ugyanis ez szolgál a vizsgált rendszer geometriájának és anyagi összetételének a leírására. A módszert legelőször hengeres geometriára vonatkozóan dolgozták ki, amelyben a V<sub>i</sub> térfogatok végtelen hosszú hengeres gyűrűk. (Ez a geometria felel meg a reaktorok elemi cellájának, vö.  $45.2 \ abra$ .) Számos, akkor kidolgozott program van még a mai napig is használatban. Közülük a legsikeresebb a THERMOS program volt [12], amelyről részletesen a 4.6. alfejezetben lesz szó. A számítástechnikai lehetőségek fejlődése magával hozta, hogy a módszert lényegesen bonyolultabb geometriákra vonatkozóan is alkalmazni lehessen. Egyes szakemberek ezt tekintik a jövő útjának, ugyanis – a Monte Carlo módszereket leszámítva – nem ismert más módszer, amellyel a legbonyolultabb geometriákat is ilyen egyszerűen lehetne figyelembe venni. Nem szabad azonban elfelejteni, hogy az ütközési valószínűségek módszerében lényeges megszorítás a szórás izotropiája, ami nem mindig felel meg a tényleges helyzetnek.

### Monte Carlo módszerek

A transzportegyenlet megoldásának közvetlen módszere a *Monte Carlo módszer*. Segítségével számítógépen a valósághoz hűen szimulálhatjuk a neutronoknak a vizsgált közegben való mozgását. Ebben a könyvben nem térhetünk ki a módszernek még csak vázlatos ismertetésére sem. Jó összefoglalás található a [13] monográfiában. Ezért csak néhány megjegyzést teszünk a módszer jelentőségét és lehetőségeit illetően.

 Tulajdonképpen a Monte Carlo módszer a "végső megoldás", hiszen segítségével, kellően nagy számú neutron pályájának a szimulálásával tetszőlegesen pontos eredményt el tudunk érni. (Erre való tekintettel a Monte Carlo módszer nem minősíthető közelítő módszernek.) A pontosságnak azonban nemcsak a számítási idő szab korlátot, hanem a számításban felhasznált hatáskeresztmetszetek pontossága is, amelyről tudjuk, hogy még javításra szorul. A modern reaktorfizikai kutatások homlokterében éppen a hatáskeresztmetszet-adatok pontosítása és validálása<sup>44</sup> áll, amihez nem Monte Carlo, hanem determinisztikus számítási módszereket (például aszimptotikus reaktorelméletet) kell használnunk.

- A fentiekben ismertetett számítási módszerek a dolog természetéből fakadóan csak többé-kevésbé idealizált esetekre alkalmazhatók. Az idealizáció leginkább a geometriai bonyolultság megengedhető mértékére vonatkozik. Nos, a Monte Carlo módszer az egyetlen lehetőség nagyon bonyolult, háromdimenziós geometriájú rendszerek olyan tárgyalására, amelyben nem okoz gondot a rugalmas szórás anizotropiája. Természetesen korlátozások itt is vannak. Bonyolult geometriák beprogramozása ugyanis szintén bonyolult feladat. Például, csak 1996-ban váltak általánosan hozzáférhetővé olyan Monte Carlo programok, amelyek megengedték, hogy a különböző anyagi minőségű tartományokat elválasztó síkok ne legyenek párhuzamosak a koordinátatengelyekkel. A sík, gömb és henger alakú felületeknél bonyolultabb elválasztó felületeket (kúpot, dőlt hengereket stb.) is megengedő programok pedig még nem léteznek. (Ha vannak is, nem kerültek általános használatba.)
- A Monte Carlo módszer elsősorban *integrálok* kiszámításában hatékony. Ezért a legtöbb program alapfunkciója a k<sub>eff</sub> sajátérték számítása. Differenciális mennyiségek, mint például a Φ(**r**,*E*, Ω) szögfüggő fluxus számítása nem jön szóba, legfeljebb ennek bizonyos tartományokra és energiaintervallumokra való integrálása. A Monte Carlo módszer különösen fontos alkalmazási területe a sugárzás árnyékolásának (biológiai védelemnek) a számítása (lenne). A sugárzás itt rendszerint egy nagy térfogatból (például a reaktorból) indul, és a sugárzás dózisát néhány kiszemelt pontban keressük, amelynek a kiszámítására a szokásos Monte Carlo programok alkalmatlanok. Ilyen problémák tárgyalására született meg az ún. *adjungált* Monte Carlo módszer [13], amelynek elvi alapjait a 7. fejezetben, a "Forrásérté-kesség" című részben tárgyaljuk. Ha azonban a sugárforrás is pontszerű, a Monte Carlo módszeren alapuló megoldás mindenképpen nagyon nehézkes.

Az e fejezetben elmondottakból következik, hogy a reaktorfizikusnak ismernie kell az összes módszereket, és minden problémára meg kell találnia az adekvát megoldási módszert. Aki nem ismeri a rendelkezésre álló módszerek teljes körét, az előbbutóbb bajba kerül, mert olyan módszer alkalmazását próbálja erőltetni, amely az adott esetben nem lenne használható. A legtöbb módszer alkalmazásához általánosan elfogadott programok állnak rendelkezésre, amelyek nemzetközi programkönyvtárakból beszerezhetők. A jó reaktorfizikus végül mégis eljut oda, hogy saját programokat kezd fejleszteni, vagy legalábbis a meglévő programokat kezdi módosítgatni.

<sup>&</sup>lt;sup>44</sup> A *validálás* a felhasznált eszközök – esetünkben a hatáskeresztmetszetek – pontosságának *hatósági érvényű* meghatározását jelenti.

# 3. Diffúzióelmélet

A reaktorfizika alapfogalmait a transzportelmélet legismertebb és egyben legegyszerűbb közelítő változata, a *diffúzióelmélet* alapján ismertetjük. A 3.1. alfejezetben levezetjük a *diffúzióegyenlet*et, és meghatározzuk érvényességének feltételeit. Az elmélet legegyszerűbb formája az *egycsoport*-diffúzióelmélet, amelynek a neutronspektrum oldaláról az *aszimptotikus lassuláselmélet* felel meg. Az előbbit a 3.2. alfejezetben, az utóbbit pedig a 4. fejezetben tárgyaljuk. Összetett, több zónás rendszerekben már nem érvényes az egycsoport-elmélet. Ezekben át kell térni a *többcsoport* módszerekre, amelyeket az 5. fejezetben tárgyaljuk. A legfontosabb fogalmat, a kritikusságot és a vele összefüggő mennyiséget, a  $k_{eff}$  sokszorozási tényezőt a 2.2. alfejezet végén teljes általánosságban már bevezettük. Konkrétabb értelmezésére az egycsoport-diffúzióelmélet keretében még visszatérünk.

A diffúzióelmélet alapja a  $P_1$  közelítés, amelynek a lényegét a 2.4. alfejezetben ismertetjük. Tekintve, hogy a 2.4. alfejezetet első olvasásra kihagyhatónak tartjuk, a diffúzióelméletet önállóan fejtjük ki. Emiatt a két fejezet között elkerülhetetlenek bizonyos átfedések. Azok számára, akik a 2.4. alfejezetet áttanulmányozták, megadjuk a szükséges kereszthivatkozásokat.

## 3.1. A diffúzióegyenlet

A diffúzióegyenlet a transzportegyenlet leggyakrabban használt közelítése. Tekintve, hogy magával az egyenlettel – egyszerűbb formában – a fizika és a fizikaikémia számos területén találkozhatunk, az alábbi levezetés nem csak a reaktorfizika szempontjából érdekes.

# A diffúzióegyenlet és a Fick-törvény

A transzportegyenlet megoldását megkönnyítené, ha meg tudnánk szabadulni az  $\vec{\Omega}$  változótól. Ennek érdekében integráljuk (22.1a)-t  $\vec{\Omega}$  szerint. (21.8) figyelembevételével a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) - \boldsymbol{\Sigma}_{t}(\mathbf{r}, E)\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t) + Q_{0}(\mathbf{r}, E, t), \quad (31.1)$$

ahol

$$Q_0(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \mathrm{d}\vec{\Omega}$$

Látszik, hogy az  $\vec{\Omega}$  változót akkor tudjuk kiküszöbölni, ha sikerül a  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  neutronáramot a  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t)$  fluxussal kifejezni.

(22.5) alapján később be fogjuk látni, hogy ez egzaktul lehetséges abban az esetben, amikor a rugalmas szórás izotrop. Az általános esetben azonban ez csak bizonyos elhanyagolásokkal történhet. Nézzük először ezt az általános esetet. (21.7) analógiájára fejtsük a rugalmas szórási magfüggvényt is a gömbfüggvények szerint haladó sorba:

$$\Sigma_{\rm s}(\mathbf{r}, E' \to E, \vec{\Omega}\vec{\Omega}') = \frac{1}{4\pi} \Sigma_{\rm s0}(\mathbf{r}, E' \to E) + \frac{3}{4\pi} \Sigma_{\rm s1}(\mathbf{r}, E' \to E) \cdot \vec{\Omega}\vec{\Omega}' + \dots$$

Ha ezt (22.1b)-be helyettesítjük és az  $\vec{\Omega}'$ -re vonatkozó integrálást elvégezzük, akkor (21.8) figyelembevételével a rugalmas szórási tag az

$$\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \to E) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' + \frac{3\vec{\Omega}}{4\pi}\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E' \to E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E', t) dE'$$

alakban adódik. Végeredményben tehát a teljes forrástagot a

$$Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} Q_0(\mathbf{r}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{\Omega} \cdot \mathbf{Q}_1(\mathbf{r}, E, t)$$
(31.2)

képlet adja meg, ahol  $Q_0(\mathbf{r}, E, t)$  már csak a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxustól függ:

$$Q_0(\mathbf{r}, E, t) = \tag{31.3a}$$

(rugalmas szórás)  $= \int_{0}^{\infty} \Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \to E) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' +$ 

(hasadás) + 
$$f(E) \int_{0}^{\infty} \nu(E') \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' +$$

(rugalmatlan szórás) +  $\int_{0}^{\infty} \Sigma_{in}(\mathbf{r}, E' \to E) \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' +$ 

(külső forrás)  $+ S(\mathbf{r}, E, t)$ ,

továbbá

 $\infty$ 

$$\mathbf{Q}_{1}(\mathbf{r}, E, t) = \int_{0}^{\infty} \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E' \to E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E', t) dE'.$$
(31.3b)

Az egyszerűség kedvéért feltettük, hogy a külső forrás izotrop. Ellenkező esetben a külső forrás is adna járulékot (31.3b)-ben.

 $\Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \to E)$  fizikai jelentése egyszerű:  $\Sigma_{s0}(\mathbf{r}, E' \to E)dE$  annak a rugalmas szórásnak a hatáskeresztmetszete, amelyben egy *E'* energiájú neutron energiája szóródás után az (*E*, *E*+d*E*) intervallumba esik.  $\Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E' \to E)$  fizikai jelentésére még visszatérünk.

Ahhoz, hogy a **J**(**r**,*E*,*t*) áramot a fluxussal kifejezzük, egy (31.1)-től független egyenletre van szükségünk. Egy ilyen egyenlet levezetése érdekében helyettesítsük  $\Phi$ (**r**,*E*, $\overline{\Omega}$ ,*t*)-t (21.7)-ből, Q(**r**,*E*, $\overline{\Omega}$ ,*t*)-t pedig (31.2)-ből (22.1a)-ba, majd szorozzunk be  $\overline{\Omega}$ -val, végül integráljunk  $\overline{\Omega}$  szerint. A számolás eredménye a következő:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} = -\frac{1}{3} \operatorname{grad} \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, t) - \boldsymbol{\varSigma}_{t}(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + \\ + \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{\varSigma}_{s1}(\mathbf{r}, E' \to E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E', t) dE' .$$
(31.4)

Ennek az egyenletnek a levezetésében csak a jobb oldal első és harmadik tagja nem triviális. Az itt megadott alakhoz vezető számolás hosszadalmas, így csak a levezetés vázlatát adjuk meg, amelynek alapján a részleteket az Olvasó maga is kidolgozhatja. Nézzük először a jobb oldal első tagját. (21.7) alapján

$$\vec{\Omega} \operatorname{grad} \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \left( \boldsymbol{\varOmega}_{\mathrm{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{\varOmega}_{\mathrm{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{\varOmega}_{\mathrm{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \\ \times \left[ \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{\varPhi}(\mathbf{r}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \left( \boldsymbol{\varOmega}_{\mathrm{x}} J_{\mathrm{x}}(\mathbf{r}, E, t) + \boldsymbol{\varOmega}_{\mathrm{y}} J_{\mathrm{y}}(\mathbf{r}, E, t) + \boldsymbol{\varOmega}_{\mathrm{z}} J_{\mathrm{z}}(\mathbf{r}, E, t) \right) \right].$$

Ha (22.1a)-t külön-külön  $\Omega_x$ -szel,  $\Omega_y$ -nal és  $\Omega_z$ -vel beszorozzuk, majd integrálunk  $\tilde{\Omega}$ -ra, akkor a kapott kifejezésben a következő integrálok lépnek fel, amelyek – három kivételével – mind eltűnnek:

$$\begin{split} &\int_{4\pi} \Omega_x^2 d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_y^2 d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_z^2 d\vec{\Omega} = \frac{4\pi}{3}, \\ &\int_{4\pi} \Omega_x \Omega_y d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_x \Omega_z d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_y \Omega_z d\vec{\Omega} = 0, \end{split}$$

$$\begin{split} &\int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}}^{3} d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{y}} \Omega_{\mathbf{x}}^{2} d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{z}} \Omega_{\mathbf{x}}^{2} d\vec{\Omega} = 0, \\ &\int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{y}}^{3} d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}} \Omega_{\mathbf{y}}^{2} d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{z}} \Omega_{\mathbf{y}}^{2} d\vec{\Omega} = 0, \\ &\int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{z}}^{3} d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}} \Omega_{\mathbf{z}}^{2} d\vec{\Omega} = \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{y}} \Omega_{\mathbf{z}}^{2} d\vec{\Omega} = 0, \\ &\int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}} \Omega_{\mathbf{y}} \Omega_{\mathbf{z}} d\vec{\Omega} = 0. \end{split}$$

Ha az x komponenst tekintjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\int_{4\pi} \Omega_{\rm x} \vec{\Omega} \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi} \left( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \right) d\vec{\Omega} = \frac{1}{3} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi} \left( \mathbf{r}, E, t \right)}{\partial x}.$$

Hasonlóan adódik a (31.4) alatti vektoregyenlet *y* és *z* komponensében is az egyenlet jobb oldalának az első tagja. Nézzük most (31.4) jobb oldalának a harmadik tagját. Ha (22.1a)-ban  $Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  helyére (31.2)-t helyettesítjük, majd  $\Omega_x$ -szel szorzunk, és  $\vec{\Omega}$  szerint integrálunk, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{split} &\int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}} Q \big( \mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t \big) \mathrm{d}\vec{\Omega} \ = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}} Q_0 \big( \mathbf{r}, E, t \big) \mathrm{d}\vec{\Omega} + \\ &+ \frac{3}{4\pi} \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}} \Big[ \Omega_{\mathbf{x}} Q_{1\mathbf{x}} \big( \mathbf{r}, E, t \big) + \Omega_{\mathbf{y}} Q_{1\mathbf{y}} \big( \mathbf{r}, E, t \big) + \Omega_{\mathbf{z}} Q_{1\mathbf{z}} \big( \mathbf{r}, E, t \big) \Big] \mathrm{d}\vec{\Omega} = \\ &= \frac{3}{4\pi} Q_{1\mathbf{x}} \big( \mathbf{r}, E, t \big) \int_{4\pi} \Omega_{\mathbf{x}}^2 \mathrm{d}\vec{\Omega} = Q_{1\mathbf{x}} \big( \mathbf{r}, E, t \big) \,, \end{split}$$

hiszen az elhagyott tagok integrálja a fenti képletek szerint eltűnik. Ezzel megkaptuk a (31.4) vektoregyenlet *x* komponensében a jobb oldalon szereplő harmadik tagot. Hasonlóan kaphatjuk meg az *y* és *z* komponensek megfelelő tagjait is.

A (31.4) egyenlet jelenti a (31.1)-hez keresett kiegészítő kapcsolatot a fluxus és az áram között. Ezzel tulajdonképpen elértük a célunkat: sikerült az  $\Omega$  változót kiküszöbölnünk, és végeredményben egy zárt egyenletrendszert kaptunk. Ezek a P<sub>1</sub> egyenletek<sup>45</sup>, amelyek annyiban közelítők, hogy (21.7)-ben megálltunk az első két tagnál. A diffúzióegyenlet azonban csak a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxust tartalmazza. Levezetéséhez ki kell küszöbölnünk a  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  áramot is, amihez további elhanyagolásokat kell tennünk: a bal oldalról elhagyjuk az idő szerinti deriváltat, a jobb oldalon pedig az utolsó tagban a magfüggvényt a  $\sum_{s1}(\mathbf{r}, E) \delta(E - E')$  függvénnyel helyettesítjük:

<sup>87</sup> 

<sup>&</sup>lt;sup>45</sup> Vö. (24.5a).

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E' \to E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E', t) dE' \approx \Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t), \qquad (31.5a)$$

ahol  $\Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E)$  kifejezhető a  $\vartheta_0$  szórási szög átlagos koszinuszával<sup>46</sup> (cos  $\vartheta_0 = \vec{\Omega} \vec{\Omega'}$ ):

$$\Sigma_{s1}(\mathbf{r}, E) = \Sigma_{s}(\mathbf{r}, E) \cdot \overline{\cos \vartheta_{0}} . \qquad (31.5b)$$

A felsorolt elhanyagolásokkal (31.4)-ből adódik, hogy

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = -D(E) \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t), \qquad (31.6)$$

ahol

$$D(E) = \frac{\lambda_{\rm tr}}{3} \tag{31.7a}$$

a diffúziós együttható és

$$\lambda_{\rm tr} = \frac{1}{\Sigma_{\rm tr}} = \frac{1}{\Sigma_{\rm t} - \Sigma_{\rm s} \overline{\cos \vartheta_0}} \tag{31.7b}$$

a *transzport szabad úthossz*,  $\Sigma_{tr}$  pedig a *transzport hatáskeresztmetszet*. Helyettesítsük  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  értékét (31.6)-ból (31.1)-be:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} = \operatorname{div}[D(E) \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t)] - \boldsymbol{\Sigma}_{t}(\mathbf{r}, E)\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t) + Q_{0}(\mathbf{r}, E, t), \quad (31.8)$$

ahol  $Q_0(\mathbf{r}, E, t)$  és a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxus közötti kapcsolatot (31.3a) adja meg. A most kapott egyenletet nevezzük *diffúzióegyenlet*nek, (31.6) pedig a fizika és a fizikai-kémia több területéről ismert *Fick-törvény*.

Mind numerikus számításokban, mind elméleti megfontolásokban a leggyakrabban a (31.8) alatti diffúzióegyenletből indulunk ki. Ennek az az oka, hogy matematikailag sokkal jobban kezelhető, mint a transzportegyenlet. A diffúzióegyenletben szereplő tagok fizikai jelentése a transzportegyenlettel való analógia alapján világos. A jobb oldal első tagja azonban igényel némi magyarázatot. Integráljuk ezt a tagot egy, az **r** pont körül lévő kis V térfogatra, és alkalmazzuk a Gauss-tételt (az argumentumokat most az egyszerűség kedvéért elhagyjuk):

$$\int_{\mathbf{V}} \operatorname{div}(D \operatorname{grad} \boldsymbol{\varPhi}) \, \mathrm{d}V = \oint D \operatorname{grad} \boldsymbol{\varPhi} \, \mathrm{d}\mathbf{f} = -\oint \mathbf{J} \mathrm{d}\mathbf{f} \; .$$

<sup>&</sup>lt;sup>46</sup> Ennek belátása ennek a könyvnek a keretein belül nem lehetséges.

Jdf fizikai jelentését a 2.1. alfejezetben részletesen megbeszéltük. Így kapjuk (31.8) szóban forgó tagjának a fizikai jelentését: a térfogategységbe időegység alatt bediffundáló neutronok nettó száma (vagyis a be- és kidiffundálók számának a különbsége).

Nézzük meg ezek után, milyen feltételek mellett jogosak a levezetésben tett elhanyagolások.

### (1) A fluxus anizotropiája

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rugalmas szórás izotrop. Ebben az esetben (31.2)-ben a második tag eltűnik, amit (22.5)-be írva kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{s} \exp\left(-\overline{\boldsymbol{\Sigma}_{t}(s' \to s)}\right) \cdot Q_{0}(\mathbf{r}', E, t') \mathrm{d}s'.$$
(31.9)

Látszik ebből, hogy izotrop szórás esetében a szögeloszlást, azaz a szögfüggő fluxusnak  $\vec{\Omega}$ -tól való függését a (szögre integrált)  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxusnak **r**-től való függése már egyértelműen meghatározza. Ha ez a függés erős, akkor  $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  erősen függ a szögtől is, vagyis erős a fluxus anizotropiája.



31.1. ábra. Egy szabályozórúd környezete

Példaképpen tekintsük a 31.1. *ábrát*, amely egy szabályozórúd környezetét mutatja. A rúd belsejében  $\Sigma_a \gg \Sigma_s$ , továbbá a rúd optikai méretei [vö. (22.4)] nagyok, vagyis

 $\Sigma_{t}d >> 1.$ 

Ezt úgy szoktuk kifejezni, hogy a rúd "fekete".  $\Sigma_s$  kicsiny volta miatt a rúd belsejében lévő pontokban  $Q_0(\mathbf{r}, E, t)$  kicsi, a rúdon kívül lévő pontokban viszont nagy (hiszen ott moderátor van). Ezt (31.9)-ben figyelembe véve,  $\Phi(\mathbf{r}, E, \overline{\Omega}, t)$  értéke a B pontban az Aból B-be mutató  $\overline{\Omega}$  irányra kicsi, de a B-ből A-ba mutató  $\overline{\Omega}$ -ra nagy. A szögfüggő fluxus tehát B-ben erősen anizotrop, és a neutronok többsége a rúd felé repül, vagyis a B pontban a  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  neutronáram-vektor a rúd felé mutat. Az irányfüggés olyan erős, hogy amikor  $\overline{\Omega}$  a "kifelé" irányokról a "befelé" irányokra vált át,  $\Phi(\mathbf{r}, E, \overline{\Omega}, t)$  értéke szinte ugrásszerűen megnő. Ilyen helyzetekre a (21.7) alakú lineáris irányfüggés rossz közelítés. Ugyanakkor a szögfüggő fluxus értéke az A pontban minden  $\Omega$ -ra kicsi, hiszen  $Q_0(\mathbf{r}, E, t)$  csak a rúdon kívüli **r** pontokban számottevő, de az ilyen pontokat Aval összekötő irányokban repülő neutronnyalábokra a transzport-magfüggvény a rúd feketesége miatt kicsi. Következésképpen a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxus értéke az A pontban kicsi, a B pontban pedig nagy, vagyis a fluxus az AB egyenes mentén gyorsan változik, és gradiense a rúdból kifelé mutat.

Ezt a helyzetet általánosítva kimondhatjuk tehát, hogy a nettó neutronáramlás a nagy fluxusú helyekről a kis fluxusú helyek felé történik – mégpedig annál nagyobb mértékben, minél nagyobb a fluxus gradiense. Éppen ezt fejezi ki a (31.6) alatti Fick-törvény, amely a *31.1 ábra* szerinti esetben kvalitatíven annyiban igaz, hogy erős szögfüggéssel (vagy ami ugyanaz: nagy neutronárammal) nagy fluxusgradiens párosul, de a törvény kvantitatíven már nem állja meg a helyét. Az elmondottakból látszik, hogy a (21.7) alatti sorfejtés mikor elfogadható:

- erős abszorbensektől távol és
- olyan helyeken, ahol a fluxus helyfüggése gyenge.

Minden más esetben figyelembe kellene venni a (21.7)-ben elhanyagolt magasabb rendű tagokat.

(31.9) alapján matematikailag is plauzibilissé lehet tenni, hogy a Fick-törvény csak térben lassan változó eloszlások mellett igaz. Heurisztikus gondolatmenetünk egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy a neutronszórás nem változtatja meg a neutron energiáját, továbbá  $Q_0(\mathbf{r}', E, t')$ -t fejtsük sorba:

$$Q_0(\mathbf{r}', E, t') \approx \Sigma_s(E) \Phi(\mathbf{r}', E, t') \approx \Sigma_s(E) \Big[ \Phi(\mathbf{r}, E, t) + \vec{\Omega}(s' - s) \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, E, t) + \dots \Big].$$

Itt feltettük még, hogy az **r** pontnak abban a környezetében, amelyben a transzportmagfüggvény számottevő, a közeg homogén (vagyis a hatáskeresztmetszetek nem függnek a helytől), továbbá hogy a fluxusnak a *t*-től való függése gyenge. Ezt (31.9)be helyettesítve, majd mindkét oldalt  $\vec{\Omega}$ -val beszorozva és  $\vec{\Omega}$  szerint integrálva megkapjuk (31.6)-ot, de most a diffúziós együtthatóra (31.7)-től kissé eltérő érték adódik:<sup>47</sup>

$$D(E) \approx \frac{1}{3} \frac{\Sigma_{\rm s}(E)}{\left[\Sigma_{\rm t}(E)\right]^2}.$$

Ha a fluxus térben gyorsan változik, a lineárisnál magasabb rendű tagokat is figyelembe kell venni. Ebben az esetben a Fick-törvénytől eltérő összefüggésre jutunk.

(2) Az áram idő szerinti deriváltja

<sup>&</sup>lt;sup>47</sup> Ez azért tér el a korábbitól, mert egy sor egyszerűsítő feltevést vezettünk be. Természetesen (31.7) a pontos képlet.

A Fick-törvény levezetéséhez (31.4)-ben elhagytuk  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ -nek az idő szerint vett deriváltját. Ez az elhanyagolás kivételes esetektől eltekintve mindig megengedhető. Az időtől függő jelenségek legjobban a (22.6) alatti kinetikus sajátérték-probléma alapján vizsgálhatók. Ha a szóban forgó elhanyagolást nem tesszük, akkor a diffúziós együttható  $\omega$ -tól függővé válik, mert ekkor (31.7) helyett

$$D_{\omega} = \frac{1/3}{\Sigma_{\rm t} - \Sigma_{\rm s} \overline{\cos \vartheta_0} + \omega/v}$$

adódik. Nézzük meg, hogy az  $\omega'v$  időabszorpciós hatáskeresztmetszet elhanyagolása a gyakorlatban mekkora hibát okoz. A legnagyobb abszolút értékű időállandók a pulzált reaktivitásmérésben szoktak fellépni (vö. 3.6. alfejezet), amikor  $\omega$  nagyságrendje 100/s. v a termikus neutronokra 2200 m/s, tehát  $\omega'v$  nagyságrendje 0,01/cm (de több-nyire 0,001/cm vagy kisebb). D szokásos értékeit figyelembe véve ennek az elhanyagolása még ilyen gyorsan változó neutronterek esetében sem okoz néhány %-nál nagyobb hibát. Az esetek többségében azonban a folyamatok olyan lassúak (vagyis  $\omega$  olyan kicsi), hogy a  $\partial J/\partial t$  derivált valóban elhanyagolható.

A fenti értelemben még gyorsabban változó neutronterek leírásához ez a derivált nem hagyható el. Ilyenkor azonban (31.8) helyett egy *telegráf-egyenletre* emlékeztető egyenletet kapunk, amely az idő szerint másodrendű deriváltat is tartalmaz. Ennek viszont már hullámszerű megoldásai vannak. Neutronhullámokat azonban reaktorokban nem szoktunk megfigyelni. (Itt természetesen nem kvantummechanikai értelemben vett hullámokról van szó, hanem csupán a neutronsűrűség hullámszerű hely- és időfüggéséről.)

#### (3) A szórási magfüggvény anizotropiája

A (31.5a) alatt tett elhanyagolás által okozott hiba attól függ, mekkora a szóró atommag tömege. Könnyű atommagok esetében itt hibát követhetünk el, ezért numerikus számításokban a legkönnyebb atommagoknál (<sup>1</sup>H, <sup>2</sup>H, ...) a  $\Sigma_{s1}(E' \rightarrow E)$  magfüggvényt célszerű pontosan figyelembe venni, de ennek részleteit nem tárgyaljuk.



31.2. ábra. Extrapolációs távolság és extrapolációs felület

### Kezdő- és peremfeltételek

Befejezésül meg kell adnunk a kezdő- és peremfeltételeket. A kezdőfeltétel egyszerűen (22.2a)-nak  $\Omega$ -ra vett integrálja, így külön fel sem írjuk. A peremfeltételek már nem ennyire egyszerűek, hiszen a vizsgált rendszer (konvex) külső felületén (22.2b) szerint meg kellene követelünk, hogy a fluxus minden befelé mutató neutronirányra eltűnjön (22.1. ábra). A diffúziós közelítésben erről szó sem lehet, hiszen (21.7) alapján ez azt jelentené, hogy mind a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxus, mind a  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  neutronáram a felület minden pontjában eltűnik, aminek a valósághoz nem sok köze van. A könnyebb írásmód kedvéért tegyük fel, hogy a koordinátarendszer z tengelye egybeesik a külső felület kiszemelt pontjában kifelé mutató  $\mathbf{N}_{\rm s}$  normálissal. Ez azt jelenti, hogy korábbi képleteinkben a z szerinti deriváltakat helyettesíthetjük a  $-\mathbf{N}_{\rm s}$  irányban vett deriváltakkal. Peremfeltételként megköveteljük, hogy a (21.10b) alatt felírt  $J_{\rm z}^+$  tűnjön el a külső felületen:<sup>48</sup>

$$\frac{\Phi(\mathbf{r}_{s}, E, t)}{4} + \frac{J_{z}(\mathbf{r}_{s}, E, t)}{2} = 0.$$

A (31.6) Fick-törvény és (31.7) figyelembevételével ez azt jelenti, hogy a felület  $\mathbf{r}_s$  pontjaiban

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_{s}, E, t) = \frac{2}{3} \lambda_{tr} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_{s}, E, t)}{\partial z}.$$
(31.10)

Ennek a határfeltételnek szemléletes értelmet tudunk adni (*31.2. ábra*). Ha a fluxusnak **r**-től való függését a határfelületen kívülre, a függvénygörbe érintője mentén lineárisan extrapoláljuk, akkor a fluxus az ábrára berajzolt *d* távolságban tűnik el. (31.10) alapján azt kapjuk, hogy

$$d = \frac{2}{3}\lambda_{\rm tr}.$$
 (31.11a)

Képzeljük el, hogy a vizsgált rendszer külső felületét minden pontban ezzel a *d extrapolációs távolság*gal kijjebb toljuk. Az így kapott felületet *extrapolált felület*nek nevezzük. Ennek alapján (31.10)-et a következőképpen is megfogalmazhatjuk: *a fluxus értéke az extrapolált felület pontjaiban eltűnik*. Tekintve, hogy a transzport szabad úthossz általában függ az *E* energiától, (31.10) minden energiára más extrapolált felületet eredményez. A diffúzióelméletben azonban ezt el szoktuk hanyagolni, és egy energiától független extrapolációs távolságot használunk, amelynek az értékét – rendszerint – az epitermikus energiákhoz (lásd 4. fejezet) tartozó szabad úthosszból számítjuk ki.

<sup>&</sup>lt;sup>48</sup> Könnyen belátható, hogy ez ugyanaz, mint a (24.9) alatt felírt Marshak-határfeltétel.

Fentebb már volt szó arról, hogy a diffúziós közelítés erős abszorbenseket tartalmazó tartományok határának a közelében nem érvényes. A vizsgált rendszer külső felületén kívül vákuum van, ami a neutronok számára tökéletes abszorbensnek tekinthető, hiszen onnan egyetlen neutron sem kerül vissza a rendszerbe. A 2.3. alfejezetben pontosan kiszámoltuk a végtelen féltér extrapolációs távolságát [vö. (23.28) képlet], amelyet a 2.4. alfejezetben összevetettünk közelítő megoldások extrapolációjával. A P<sub>3</sub> közelítésben a *31.2. ábrá*nak megfelelő extrapoláció a *24.1. ábrá*n látható. A közeg abszorpciójának a függvényében a *24.1. táblázat*ban adjuk meg a különböző közelítéseknek megfelelő extrapolációs távolságokat. Látható ebből, hogy – kis abszorpció mellett – az extrapolációs távolságot (31.11a)-hoz képest egy kissé meg kell növelni:<sup>49</sup>

 $d = 0.71\lambda_{\rm tr}$ . (31.11b)

Ha ezzel számoljuk az extrapolált felület helyzetét, a diffúzióegyenlet megoldása *a közeg belsejében* közelebb lesz a transzportegyenlet pontos megoldásához. Mint a 24.1. és 31.1. *ábrák*on is látszik, a határfelület közelében az eltérés nagyobb lesz, de ezt elhanyagoljuk. A diffúzióelmélet keretében ennél pontosabb közelítést nem lehet elérni. Megjegyezzük még, hogy a vákuummal határos közeg abszorpciójának növekedésével az extrapolációs távolságot is meg kellene növelni (vö. 24.1. táblázat), de ezt a gyakorlatban kevesen teszik meg.

A vizsgált rendszer homogén tartományait elválasztó, belső felületein mind a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxus, mind a  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$  neutronáram folytonosan változik. Mivel azonban ilyen felületeken a diffúziós együttható ugrásszerűen változik, a Fick-törvényből következik, hogy itt a fluxus gradiensének szakadása van.

Vannak olyan belső felületek is, amelyeken *belül* a diffúziós közelítés nem érvényes. Ilyen például a szabályozórudak felülete (lásd fentebb). Ezeken ún. *albédóhatárfeltételt* szoktunk előírni, amelynek lényege a következő. Jellemezzük a rudat a rúdba befelé és onnan kifelé diffundáló neutronok számának a hányadosával, az *albédó*val (*a*). Ha – a 31.2. *ábrá*hoz hasonóan – a z tengelyt ismét a rúd felületére merőlegesen vesszük fel, akkor (21.9) szerint írhatjuk:

$$a = \frac{J_{\rm N}^-}{J_{\rm N}^+} = \frac{J_{\rm Z}^+}{J_{\rm Z}^-},\tag{31.12}$$

amiből (21.10) és (31.6) figyelembevételével könnyen levezethetjük a

$$-\frac{\partial \ln \Phi}{\partial \mathbf{N}_{s}} = \frac{\partial \ln \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2D} \frac{1-a}{1+a}$$
(31.13)

*logaritmikus határfeltételt.* (Vegyük észre, hogy a = 0-val visszakapjuk (31.10)-et.) Az ilyen típusú határfeltételek teszik lehetővé, hogy a diffúziós közelítést a transzportegyenlet magasabb közelítéseivel kombináljuk: a szabályozórúd albédóját valami-

<sup>&</sup>lt;sup>49</sup> A 2.3. és 2.4. alfejezetekben ismertetett számítások izotrop szórásra vonatkoztak. Ekkor  $\lambda_{tr} = \lambda_t$ , és ekkor a pontos érték:  $d = 0,7104\lambda_t$ . (31.11b)-ben ezt visszük át az anizotrop szórás esetére.

lyen módon külön kiszámítjuk, majd a diffúzióegyenlet megoldásakor a rúd belsejét a számításból kirekesztjük, és a felületén egy (31.13) alakú peremfeltételt írunk elő. Az 5.3. alfejezetben látni fogjuk ennek alkalmazását.

Az albédónak végtelen féltér esetére vonatkozó számításával foglalkozunk a 2.3. alfejezetben. Az ott ismertetett egzakt megoldást a 4. függelékben alkalmazzuk konkrét esetekre. Ez természetesen idealizált eset, amelynek a vizsgálata csak metodikai szempontból érdekes. A gyakorlatban előforduló, valóságos szabályozórudakra vonatkozóan az albédót nem sikerül egzakt módon kiszámítani. Az egyik legjobb megoldás a Monte Carlo módszer alkalmazása. A 4. függelék egy ilyen számítási sémát is ismertet.

### 3.2. Az egycsoport-közelítés

A (31.8) diffúzióegyenletet folytonos energiaváltozóval csak kivételes esetben sikerül megoldani. Emiatt az energiaváltozót diszkretizáljuk, aminek legegyszerűbb változata az *egycsoport-közelítés*. Az egycsoport-diffúzióelméletet gyakorlati számításokban ma már nem használjuk, mert meglehetősen durva közelítés. Ugyanakkor tulajdonképpen ez az egyetlen elmélet, amelyben numerikus eljárások nélkül is lehet számszerű eredményekre jutni, és ennélfogva a reaktorfizika számos fogalmát legkönnyebben ennek az elméletnek a keretében lehet *megérteni*. Ez az oka annak, hogy a reaktorok működésének az alapjait ilyen leegyszerűsített modellben tárgyaljuk. A fellépő differenciálegyenletek megoldási módszerei szokványosak, így ezeket ismertnek tételezzük fel, és a matematikai levezetéseknek többnyire csak a végeredményét adjuk meg. Ajánlatos azonban, hogy az Olvasó ezeknek részletesen számoljon utána.

Az egycsoport-elmélet kiindulópontja a reaktorelmélet alaptételének nevezett megállapítás, amely szerint homogén reaktorban a  $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$  fluxus az  $\mathbf{r}$  és E változók szerint szeparálható:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, t) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, t) \cdot \boldsymbol{\psi}(E) . \qquad (32.1)$$

(32.1) érvényessége a kísérleti reaktorfizika mindennapos tapasztalata: a reaktor belsejében, a határfelületektől távol, a különböző energiájú neutronokat különböző érzékenységgel detektáló detektorokkal ugyanazt a térbeli eloszlást mérjük. Ha (32.1)-et beírjuk a (31.8) diffúzióegyenletbe, majd *E* szerint integrálunk, akkor az

$$\frac{1}{\overline{\upsilon}}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\Delta \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\Sigma}_{a}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) + \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Sigma}_{f}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) + S(\mathbf{r},t)$$
(32.2)

összefüggést kapjuk, ahol

$$D = \frac{\int_{0}^{\infty} D(E)\psi(E)dE}{\int_{0}^{\infty} \psi(E)dE},$$
(32.3a)

$$\Sigma_{a} = \frac{\int_{0}^{\infty} \Sigma_{a}(E)\psi(E)dE}{\int_{0}^{\infty} \psi(E)dE},$$
(32.3b)  

$$v\Sigma_{f} = \frac{\int_{0}^{\infty} v\Sigma_{f}(E)\psi(E)dE}{\int_{0}^{\infty} \psi(E)dE}.$$
(32.3c)  

$$\frac{1}{\overline{v}} = \frac{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\overline{v}}\psi(E)dE}{\int_{0}^{\infty} \psi(E)dE},$$
(32.3d)  

$$S(\mathbf{r},t) = \frac{\int_{0}^{\infty} S(\mathbf{r},E,t)dE}{\int_{0}^{\infty} \psi(E)dE}.$$
(32.3e)

(32.2) levezetésekor figyelembe vettük, hogy  $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s + \Sigma_{in}$ , és

$$\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \Sigma_{s0}(E' \to E) \psi(E') dE dE' = \int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E) \psi(E) dE,$$
  
$$\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \Sigma_{in}(E' \to E) \psi(E') dE dE' = \int_{0}^{\infty} \Sigma_{in}(E) \psi(E) dE.$$

A (32.3) egyenletek által definiált átlagokat *egycsoport állandók*nak nevezzük. Látható (31.3a)-ból, hogy a (32.1) feltevés szerint  $Q_0(\mathbf{r}, E)$  is szeparálható:

$$Q_0(\mathbf{r}, E, t) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, t) \cdot q_0(E) + S(\mathbf{r}, E, t).$$

Nézzük meg, hogy a (32.1) közelítésben mi a kritikusság feltétele, vagyis nézzük meg, hogy a (32.1) feltevésnek milyen következményei vannak időtől független, forrásmentes esetben ( $S \equiv 0$ ). Tegyük tehát (31.8)-ban a *t* szerinti deriváltat 0-val egyenlővé, és hagyjuk el  $Q_0$ -ból az *S* külső forrást. Ha  $\Phi(\mathbf{r}, E) = \Phi(\mathbf{r}) \cdot \psi(E)$ -t írunk  $\Phi(\mathbf{r}, E)$  helyébe, akkor –  $\Phi(\mathbf{r}) \psi(E) D(E)$ -vel való osztás után – (31.8) így írható:

$$-\frac{\Delta \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})}{\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})} = \frac{-\boldsymbol{\Sigma}_{t}(E)\boldsymbol{\psi}(E) + q_{0}(E)}{D(E)\boldsymbol{\psi}(E)},$$

ahol figyelembe vettük, hogy most

$$Q_0(\mathbf{r}, E) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) \cdot q_0(E).$$

A bal oldal csak **r**-től, a jobb oldal csak *E*-től függ, tehát egymással csak úgy lehetnek egyenlők minden **r**-re és *E*-re, ha mindkettő állandó. Jelöljük ezt az állandót  $B^2$ -tel. Így azt kapjuk, hogy  $\Phi(\mathbf{r})$  egy *Helmholtz-egyenlet*et elégít ki:

$$\Delta \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) + B^2 \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (32.4)$$

melyben  $B^2$  a reaktor alakjától és geometriai méreteitől függő sajátérték. (32.4)-nek ugyanis csak olyan megoldásai fogadhatók el, amelyek a reaktor extrapolált külső felületén eltűnnek.  $B^2$  neve: *geometriai görbületi paraméter*. Jele:  $B_g^2$ . (32.4) megoldására a későbbiekben több példát fogunk még látni, és ezek során a "görbületi" jelző értelmére is magyarázatot kapunk majd.

Vegyük most az előbbi egyenlet jobb oldalát. Ha ezt is  $B^2$ -tel tesszük egyenlővé, akkor a

$$-[D(E)B^{2} + \Sigma_{t}(E)]\psi(E) + q_{0}(E) = 0$$
(32.5a)

egyenletet kapjuk, amelyben [vö. (31.3a)]

$$q_0(E) = \int_0^\infty \Sigma_{s0}(E' \to E) \psi(E') dE' + \int_0^\infty \Sigma_{in}(E' \to E) \psi(E') dE' + f(E) \int_0^\infty \nu \Sigma_f(E') \psi(E') dE'.$$
(32.5b)

Ezt az egyenletet *aszimptotikus lassulási egyenlet*nek nevezzük. Az "aszimptotikus" jelző arra utal, hogy általában csak a reaktor középső részén, a határfelületektől elegendően nagy távolságra érvényes. A megoldásként kapott neutronspektrumot felhasználhatjuk a (32.3) alatti csoportállandók számítására.<sup>50</sup>

A (32.5) egyenlet megoldásával a 4. fejezetben részletesen fogunk foglalkozni. Annyi azonban különösebb analízis nélkül is látszik, hogy (32.5) is sajátérték-egyenlet  $B^2$ -re vonatkozóan, amelynek a sajátértékét *anyagi görbületi paraméter*nek nevezzük, és  $B_m^2$ -tel jelöljük. Az elnevezésnek az a magyarázata, hogy ez a sajátérték csak a reaktor anyagi jellemzőitől függ. (32.4) és (32.5) sajátértékeit a reaktornak egymástól teljesen független tulajdonságai határozzák meg: az előbbit a reaktor geometriája, az utóbbit pedig anyagi összetétele. Gondolatmenetünkből következik, hogy  $B_g^2 = B_m^2$ , amikor a (31.8) diffúzióegyenletnek van időtől független megoldása. Az elmondottak

 $<sup>^{50}</sup>$  Az aszimptotikus reaktorelméletet a 2.4. alfejezetben általánosabb formában is értelmezzük. Ott nem a diffúzióegyenletből, hanem a P<sub>1</sub> egyenletekből indulunk ki. Ezért az ottani egyenletekben benne maradt a neutronáram. Az utóbbiak a pontosabbak, mert figyelembe veszik az anizotrop lassulást.

alapján tehát – aszimptotikus diffúzióelméletben – a kritikusság feltétele az, hogy *a* geometriai és az anyagi görbületi paraméter egymással egyenlő legyen. Általában azonban a kettő nem egyenlő egymással:  $B_g^2 \neq B_m^2$ . Ilyenkor (31.8)-nak nincs időtől független megoldása, a fluxus időben nő vagy csökken. A 3.5. alfejezetben ennek a feltételeit és az időfüggés módját részletesen tanulmányozni fogjuk.

Mint mondtuk, az anyagi görbületi paramétert a (32.5) aszimptotikus lassulási egyenlet sajátértékeként szoktuk kiszámítani.<sup>51</sup> A most bevezetett egycsoport közelítésben rögtön fel is írhatjuk az anyagi görbületi paramétert: (32.2)-ben  $\partial \Phi/\partial t = 0$  és S = 0 mellett  $\Delta \Phi(\mathbf{r})$  helyébe  $-B_m^2 \Phi(\mathbf{r})$ -et írunk:

$$\left(DB_{\rm m}^2+\nu\Sigma_{\rm t}-\Sigma_{\rm a}\right)\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})=0\,,$$

vagyis

$$B_{\rm m}^2 = \frac{\nu \Sigma_{\rm f} - \Sigma_{\rm a}}{D} \,. \tag{32.6}$$

A reaktorfizika hőskorában (az 1940-es években) az egyetlen használható elmélet az egycsoport diffúzióelmélet volt. Akkor azonban az egycsoport állandókat közvetlen méréssel határozták meg, mert a (32.5) egyenlet megoldásához sem részletes hatáskeresztmetszet-adatok, sem pedig nagy teljesítményű számítógépek nem álltak még rendelkezésre.

### 3.3. Neutronforrás végtelen, nem-sokszorozó közegben. Green-függvény

Vizsgáljunk először olyan, minden irányban végtelen kiterjedésű homogén közegeket, amelyekben nincsenek hasadásra képes izotópok. Ezekben időtől független neutronterek csak időben állandó külső neutronforrás jelenlétében tudnak fennmaradni. A (32.2) diffúzióegyenletet ennek megfelelően a

$$D\Delta \Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) = 0$$
(33.1)

alakban írjuk fel, amelyben  $S(\mathbf{r})$  a külső neutronforrás. A gyakorlat szempontjából három idealizált eset érdekes: pont-, vonal- és síkforrás. Nézzük ezeket külön-külön.

#### Pontforrás

Legyen a koordináta-rendszer origójában egy pontszerű forrás, amely 1 s alatt 1 neutront termel, tehát legyen

$$S(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

<sup>&</sup>lt;sup>51</sup> A gyakorlatban használt programok a (24.29) alatti  $P_1$  egyenletek (illetve a velük rokon  $B_1$  egyenletek) megoldásával teszik ezt.

Ebben az esetben (33.1) megoldása nyilván csak a gömbi *r*-koordinátától függ, vagyis a Laplace-operátort a

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left( r^2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} \left( r\Phi \right)$$
(33.2)

alakban írhatjuk fel. Ezt (33.1)-be írva a kapott differenciálegyenletnek  $r \rightarrow \infty$  mellett véges megoldásait az origón kívüli pontokban

$$\boldsymbol{\Phi}(r) = C \frac{\mathrm{e}^{-r/L}}{r}$$

alakban kereshetjük, ahol

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}.$$
(33.3)

A *C* együttható meghatározása érdekében tekintsünk egy, az origó köré írt  $\varepsilon$ -sugarú gömböt, majd  $\varepsilon$ -nal tartsunk 0-hoz. Számítsuk ki a gömb felületén belülről kifelé haladó neutronok nettó számát, és tegyük ennek határértékét a forrás által termelt neutronok számával egyenlővé:

$$1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( 4\pi\varepsilon^2 J(\varepsilon) \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left( -4\pi\varepsilon^2 D \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \Big|_{r=\varepsilon} \right) = 4\pi DC \,,$$

amiből a (33.1) egyenlet megoldása:

$$\boldsymbol{\Phi}(r) = \frac{\mathrm{e}^{-r/L}}{4\pi Dr}.$$
(33.4)

A most kapott megoldásnak az origóban 1/r rendű szingularitása van (33.1. ábra).

(33.4) jelentősége abban áll, hogy Green-függvénynek használható. Ha térben folytonosan elosztott  $S(\mathbf{r})$  neutronforrással van dolgunk, akkor (33.1) megoldását az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = \int S(\mathbf{r}') \frac{\mathrm{e}^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/L}}{4\pi D|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathrm{d}V', \qquad (33.5)$$

ahol az integrálást a teljes térre kell kiterjeszteni. Abban az esetben, amikor az  $S(\mathbf{r})$  forrás függ a fluxustól, (33.5) jelenti a (33.1) differenciálegyenlet integrális megfelelőjét. (33.4)-et *diffúziós magfüggvény*nek nevezzük. A diffúzióelméletben ez felel meg a (22.5)-ben szereplő transzport-magfüggvénynek.



33.1. ábra. Diffúziós magfüggvények



33.2. ábra. Termikus neutron cikcakk alakú pályája a keletkezéstől az abszorpcióig

(33.4) felhasználásával a (33.3) alatt definiált  $L^2$ -nek szemléletes fizikai jelentést tudunk adni. Számítsuk ki annak a távolságnak a négyzetes átlagát, ahol a neutronok abszorbeálódnak. Ezt az alábbi, egyszerűen kiszámítható integrál adja meg:

$$M(r^{2}) = \int_{0}^{\infty} r^{2} \Sigma_{a} \frac{e^{-r/L}}{4\pi Dr} 4\pi r^{2} dr = 6L^{2}.$$
(33.6)

Erre való tekintettel *L*-et *diffúziós hossz*nak,  $L^2$ -et pedig *diffúziós terület*nek nevezzük.<sup>52</sup> A 33.2. *ábrá*n illusztráljuk az elmondottakat: a cikcakk alakú pályán egy szakasz átlagos hossza  $1/\Sigma_t$ , viszont a keletkezés helyétől az abszorpció helyéig berajzolt

<sup>&</sup>lt;sup>52</sup> A diffúziós terület és diffúziós hossz elnevezést általában akkor használjuk, amikor a (33.1) egyenlet a termikus neutronokra vonatkozik. A teljes spektrum esetében általában *migrációs terület*ről beszélünk (vö. 4.6. alfejezet). A jelen fejezetben ennek a megkülönböztetésnek nincs jelentősége.

vektor hosszának négyzetes átlaga *L*. Ezt meg kell különböztetni a cikkcakk vonal teljes hosszától, amelynek értéke  $1/\Sigma_a$  (vö. 2.1. alfejezet).

A (33.5)-ben felírt diffúziós magfüggvényt érdemes összevetni a 2.3. alfejezetben kiszámított transzportelméleti Green-függvénnyel.<sup>53</sup> Az utóbbiban a szórást izotropnak vettük, tehát  $\Sigma_{tr} = \Sigma_{t}$ , vagyis  $D = 1/(3\Sigma_{t})$ . Ezzel

$$L^2 = \frac{1}{3\Sigma_{\rm t}\Sigma_{\rm a}}.$$

*L*-nek transzportelméleti megfelelője a  $\kappa_0/\Sigma_t$  relaxációs hossz, ahol  $\kappa_0$  a (23.7) egyenlet megoldása. Ha  $\Sigma_a/\Sigma_t \ll 1$ , sorfejtéssel egyszerűen kapjuk, hogy

$$\kappa_0^2 = \frac{\Sigma_s}{3\Sigma_a} + O\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_t}\right)^2.$$

Ha  $\Sigma_s / \Sigma_t \approx 1$ ,  $\kappa_0^2 / \Sigma_t^2 \approx L^2$ , és a közelítés annál jobb, minél kisebb  $\Sigma_a$ . Ebben nincs semmi meglepő, hiszen tudjuk, hogy a diffúzióelmélet akkor jó közelítés, amikor  $\Sigma_a$  kicsi.

Megmutatjuk még, hogy ebben a határesetben a (33.4) alatti függvény a transzportelméleti Green-függvény aszimptotikus részével egyezik meg. Ha a (23.13) alatti  $N_{0+}$  normálási tényezőt  $1 - c = \Sigma_a/\Sigma_t$  szerint sorba fejtjük, meg lehet mutatni, hogy

$$\lim_{c \to 1} \kappa_0 N_{0+} = \frac{1}{3},$$

amivel az aszimptotikus rész

$$\frac{\Sigma_{\mathrm{t}}\mathrm{e}^{-r\Sigma_{\mathrm{t}}/\kappa_{0}}}{4\pi r\kappa_{0}N_{0+}}\approx\frac{\mathrm{e}^{-r/L}}{4\pi r/3\Sigma_{\mathrm{t}}}=\frac{\mathrm{e}^{-r/L}}{4\pi Dr}.$$

A pontforrás közelében ehhez járul még a tranziens rész, amelyről a 2.3. alfejezetben láttuk, hogy az

$$\frac{\mathrm{e}^{-r\varSigma_{\mathrm{t}}}}{4\pi r^2}$$

képlettel közelíthető. A 23.1. *ábra* szerint kis *r*-re ez a tag dominál, de egy  $\lambda_t$  szabad úthosszon belül elhanyagolhatóvá válik. Mint a 2.3. alfejezetben megbeszéltük, ez a

<sup>&</sup>lt;sup>53</sup> A 2.3. alfejezetben alkalmazott jelölésektől eltérően itt *r* a geometriai távolságot jelenti. Ezért az ottani képletekben *r* helyére  $r\Sigma_t$ ,  $\kappa$  helyére pedig  $\kappa \Sigma_t$  írandó ahhoz, hogy az itteni képletekkel összevethetők legyenek.

tranziens tag a még egyszer sem ütközött forrásneutronok járuléka, amelyről a diffúzióelmélet nem képes számot adni.

#### Vonalforrás

Vonalforrás esetében a z tengely mentén elhelyezkedő, az x és y irányokban végtelenül keskeny, vonalszerű izotrop neutronforrást képzelünk el, amely hosszegységenként 1 s alatt 1 neutront termel. Ebben az esetben  $\Phi(\mathbf{r})$  csak a hengeres r koordinátától fog függni, és – ha a vizsgált közeg minden irányban végtelen – a Laplaceoperátort a

$$\Delta \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left( r \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}r} \right)$$

alakban írhatjuk fel, amit (33.1)-be írva r > 0 esetén a Bessel-féle differenciálegyenletre jutunk:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} - \frac{\Phi}{L^2} = 0 \,.$$

Ennek az egyenletnek  $r \rightarrow \infty$  mellett véges megoldásait a

$$\Phi(r) = CK_0\left(\frac{r}{L}\right)$$

alakban kereshetjük. A *C* együttható meghatározására ugyanúgy okoskodhatunk, mint pontforrás esetében: a *z* tengely körül vegyünk fel egy  $\varepsilon$  sugarú hengert, majd  $\varepsilon$ -nal tartsunk 0-hoz. A henger hosszegységnyi darabjának a felületén kifelé haladó neutronszám határértékére felírhatjuk, hogy

$$1 = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi\varepsilon J(\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi\varepsilon D \frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi\varepsilon D \frac{C}{L} K_1\left(\frac{\varepsilon}{L}\right) = 2\pi D C$$

Ezzel a vonalforrás által létrehozott térbeli neutroneloszlás:

$$\boldsymbol{\Phi}(r) = \frac{K_0(r/L)}{2\pi D}.$$
(33.7)

Az itt fellépő  $K_0(x)$  függvénynek x = 0 közelében  $\ln x$  rendű szingularitása van, következésképpen a (33.7) megoldás  $r \rightarrow 0$  esetén  $\ln r$  rendben tart a végtelenbe (33.1. *áb-ra*).

(33.5) analógiájára ez is tekinthető Green-függvénynek, továbbá erre vonatkozóan is képezhetjük a (33.6)-nak megfelelő négyzetes átlagot:

$$M(r^{2}) = \int_{0}^{\infty} r^{2} \Sigma_{a} \frac{K_{0}(r/L)}{2\pi D} 2\pi r \, dr = 4L^{2}.$$
(33.8)

Síkforrás

Síkforrás esetében az y-z síkban egy síkszerű, az x irányban végtelenül vékony izotrop forrást képzelünk el, amelynek minden cm<sup>2</sup>-e 1 s alatt 1 neutront termel. Ebben az esetben a (33.1) egyenlet az  $x \neq 0$  pontokban az alábbi egyszerű alakba megy át:

$$D\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}x^2} - \Sigma_\mathrm{a}\Phi = 0\,,$$

hiszen  $\Phi(\mathbf{r})$  most nyilvánvalóan csak x-től függ. E differenciálegyenlet  $x \to \pm \infty$  mellett véges megoldásait a

$$\Phi(x) = C \mathrm{e}^{-|x|/L}$$

alakban kereshetjük. A *C* együttható meghatározása céljából tekintsük a neutronáramot az  $x = +\varepsilon$  és az  $x = -\varepsilon$  síkokban, majd  $\varepsilon$  tartson 0-hoz. Nem nehéz belátni, hogy

$$1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ J(+\varepsilon) - J(-\varepsilon) \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ -DC \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{-x/L} \right]_{x=\varepsilon} + DC \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{x/L} \Big|_{x=-\varepsilon} = \frac{2CD}{L},$$

amiből

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \frac{L}{2D} \,\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|/L} \tag{33.9}$$

adja a végső megoldást. Ez már nem szinguláris az x = 0 síkban (33.1. *ábra*), viszont ott nem differenciálható, vagyis a neutronáramnak szakadása van.

(33.5) analógiájára (33.9) is tekinthető Green-függvénynek, továbbá rá vonatkozóan is képezhetjük a (33.6)-ban és (33.8)-ban kiszámított négyzetes átlagot:

$$M(x^{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2} \Sigma_{a} \frac{e^{-|x|/L}}{2D} L dx = 2L^{2}.$$
 (33.10)

Ha (33.6)-ot, (33.8)-at és (33.10)-et összevetjük, feltűnik, hogy a dimenziószám csökkenésével egyre csökken a négyzetes átlag. Úgy is fogalmazhatunk, hogy mindegyik térbeli dimenzióhoz külön-külön  $2L^2$  nagyságú négyzetes átlag rendelhető.

### 3.4. A Helmholtz-egyenlet megoldásai

Hasadóképes izotópokat tartalmazó sokszorozó rendszerek tárgyalásakor legtöbbször a (32.4) Helmholtz-egyenlet megoldásából indulunk ki. Ezért az alábbiakban néhány speciális geometriára vonatkozóan megoldjuk az egyenletet.

#### Gömbgeometria

Gömb alakú reaktorban  $\Phi(\mathbf{r})$  csak a gömbi *r* koordinátától függ, így a Laplaceoperátort (33.2) adja meg. Ezt (32.4)-be írva, a kapott egyenlet általános megoldása:

$$r\Phi(r) = C_1 \sin Br + C_2 \cos Br.$$

Mivel  $r \rightarrow 0$  esetén  $\Phi(r)$ -nek végesnek kell lennie, csak a

$$\varPhi(r) = \frac{\sin Br}{r} \tag{34.1}$$

alakú megoldások felelnek meg. Ha a reaktor extrapolált sugarát R-rel jelöljük, akkor a határfeltétel szerint B-nek ki kell elégítenie a

$$\sin BR = 0$$

egyenletet, ahonnan a sajátértékek sorozata:

$$B_n = n \frac{\pi}{R}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

A megfelelő

$$\Phi_n(r) = \frac{\sin(n\pi r/R)}{r} \qquad (n = 1, 2, ...) \tag{34.2}$$

sajátfüggvények közül az n = 1-hez tartozó  $\Phi_1(r)$  az egész [0, R) tartományban (tehát a reaktor belső pontjaiban) pozitív, viszont a többi sajátfüggvény egyaránt felvesz pozitív és negatív értékeket. A  $\Phi_1(r)$  sajátfüggvényt ezért *alapmódus*nak nevezzük. A (34.2) függvények teljes rendszert alkotnak. Első három tagjukat a 34.1. ábrán mutatjuk be. Látható, hogy az n index növekedésével nő az előjelváltások száma.



34.2. ábra. A hengeres geometria radiális sajátfüggvényei

# Hengeres geometria

Henger alakú reaktorban  $\Phi(\mathbf{r})$  csak az *r* és *z* hengerkoordinátáktól függ, amelyekben kifejezve a Laplace-operátor alakja a következő:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Legyen először a reaktor axiális irányban végtelen hosszú. Ekkor  $\Phi(r,z)$  z-től független, és (32.4) így írható:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} + B^2\Phi = 0, \qquad (34.3)$$

amelynek  $r \rightarrow 0$  esetén véges megoldása a  $J_0(x)$  Bessel-függvény felhasználásával:

$$\Phi(r)=J_0(Br).$$

Ha a henger extrapolált sugara *R*, akkor a határfeltételek szerint *B*-nek ki kell elégítenie a

$$J_0(BR) = 0$$

egyenletet, amiből a sajátértékek sorozata:

$$B_n = \frac{\alpha_n}{R}, \qquad (n = 1, 2, ...)$$

ahol  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , ... a  $J_0(x)$  Bessel-függvény gyökhelyei ( $\alpha_1 = 2,4048$ ;  $\alpha_2 = 5,5201$ ;  $\alpha_3 = 8,6537$ ;  $\alpha_4 = 11,7915$  stb.). A megfelelő

$$\Phi_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) \qquad (n = 1, 2, ...)$$
(34.4)

sajátfüggvények közül az  $\alpha_1 = 2,4048$ -hez tartozó  $\Phi_1(r)$  alapmódus az egész [0, *R*) tartományban pozitív. A (34.4) alatti függvények teljes rendszert alkotnak. A *34.2. ábra* mutatja az első három hengeres sajátfüggvényt.

Véges magasságú henger esetében a sajátfüggvényeket az r és z változók szétválasztásával kereshetjük meg:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{G}}(\boldsymbol{z}),$$

ahol  $\mathcal{R}(r)$  egy (34.3) alakú egyenletet,  $\mathcal{G}(z)$  pedig egy

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{\mathcal{J}}}{\mathrm{d}z^2} + B^2 \mathbf{\mathcal{J}} = 0$$

alakút elégít ki. A fentiek analógiájára az utóbbi sajátértékei:

$$B_{\ell} = \ell \frac{\pi}{H} \tag{34.5}$$

és sajátfüggvényei:

$$\mathcal{G}_{\ell}(z) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{H}z\right), \qquad (\ell = 1, 2, ...), \qquad (34.6)$$

ha a reaktor extrapolált magassága *H*. Itt jegyezzük meg, hogy radiális irányban végtelen kiterjedésű, ún. *síkgeometriájú* reaktorban (34.5) és (34.6) adja meg a sajátértékek és sajátfüggvények teljes rendszerét. (34.4) alapján a radiális tényező lehetséges értékei:

$$\boldsymbol{\mathcal{R}}_n(r) = J_0\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_n}{R}r\right).$$

A véges magasságú, henger alakú reaktorra vonatkozó sajátértékeket és sajátfüggvényeket az előbbiek kombinációja adja meg:

$$B_{n\ell}^2 = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{H}\right)^2 \tag{34.7}$$

és

$$\boldsymbol{\Phi}_{n\ell}(r,z) = J_0\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_n}{R}r\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{H}z\right), \qquad (n, \ \ell = 1, 2, ...). \tag{34.8}$$

Közülük az n = l = 1 indexekhez tartozó alapmódus az egyetlen, amely a reaktor minden belső pontjában pozitív. A (34.8)-ban definiált függvények teljes rendszert alkotnak.



#### **Téglatest**

Téglatest alakú reaktor esetében (amelynek extrapolált méretei legyenek a, b és c, lásd 34.3. *ábra*) a fentiek mintájára

$$\Phi(x,y,z) = \mathbf{X}(x) \cdot \mathbf{Y}(y) \cdot \mathbf{Z}(z)$$

szerinti szeparációt alkalmazunk. (34.5) és (34.6) általánosításával a sajátértékek és sajátfüggvények teljes rendszere:

$$B_{n\ell k}^{2} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2} + \left(\frac{\ell\pi}{b}\right)^{2} + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^{2},$$
  
$$\Phi_{n\ell k}(x, y, z) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{k\pi}{c}z\right), \qquad (n, \ \ell, \ k = 1, 2, ...).$$

A reaktor belsejében végig pozitív alapmódus a  $\Phi_{111}(x,y,z)$  sajátfüggvény.

## A diffúziós hossz mérése

Az eddigiekben használt módszerek és talált sajátfüggvények gyakorlati alkalmazását egy példával illusztráljuk. Tekintsük azt a kísérleti elrendezést, amelyet az Ldiffúziós hossz mérésére szoktunk használni (34.4. *ábra*): egy R (extrapolált) sugarú, végtelen hosszúnak tekinthető henger z = 0 síkjában egy síkforrást helyezünk el.<sup>54</sup> A síkforrásra kapott (33.9) magfüggvény alapján z > 0-ra a henger tengelye mentén z-vel exponenciálisan csökkenő neutronfluxust várunk, amelynek a relaxációs hossza azonban az L diffúziós hossznál kisebb, hiszen a neutronok számát most nemcsak a neutronabszorpció, hanem a henger palástja mentén való neutronkifolyás is csökkenti. Ha a relaxációs hosszt sikerül összekapcsolni L-lel, akkor az exponenciális csökkenés kísérleti megfigyeléséből az L diffúziós hosszt meg tudjuk határozni. Látni fogjuk, hogy ez valóban így is van. Erre való tekintettel a 34.4. *ábrá*n bemutatott mérést *exponenciális kísérlet*nek nevezzük.



34.4. ábra. Diffúziós hossz mérése

Szimmetriaokokból a  $\Phi(\mathbf{r})$  fluxus most csak az r és z hengeres koordinátáktól függ. A  $\Phi(r,z)$  függvényt adott z-nél fejtsük a (34.4) alatti hengeres sajátfüggvények szerint sorba:

$$\Phi(r,z) = \sum_{n} \mathscr{F}_{n}(z) J_{0}\left(\frac{\alpha_{n}}{R}r\right), \qquad (34.9)$$

amit (33.1)-be helyettesítve és a sajátfüggvények ortogonalitását kihasználva a  $\mathcal{F}_n(z)$  függvényekre a

$$\frac{\mathrm{d}^{2}\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{n}(z)}{\mathrm{d}z^{2}} - \left[\frac{1}{L^{2}} + \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_{n}}{R}\right)^{2}\right]\boldsymbol{\mathfrak{F}}_{n}(z) = 0$$

egyenletet kapjuk (z > 0). Ennek  $z \rightarrow +\infty$  mellett véges megoldása:

$$\mathcal{G}_n(z) = \mathrm{e}^{-z/L_n},$$

ahol

<sup>&</sup>lt;sup>54</sup> Valójában pontforrást használunk. Tőle elegendően nagy távolságban kiválaszthatunk egy síkot, és az abban kialakuló neutroneloszlást úgy tekinthetjük, mint egy síkforrást.

$$\frac{1}{L_n^2} = \frac{1}{L^2} + \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2.$$
(34.10)

A kapott függvényeket – alkalmas  $C_n$  együtthatókkal kombinálva<sup>55</sup> – (34.9)-be helyettesítjük, és azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{z}) = \sum_{n} C_{n} \, \mathrm{e}^{-\boldsymbol{z}/L_{n}} \, J_{0}\!\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}_{n}}{R}\boldsymbol{r}\right). \tag{34.11}$$

(34.10)-ből látszik, hogy  $L_1 > L_2 > ...$ , vagyis elegendően nagy *z*-re (34.11)-ben az n = 1-nek megfelelő tag mellett az n > 1 indexű tagok elhanyagolhatók. A várakozásnak megfelelően tehát azt kaptuk, hogy – egy bizonyos *z* távolságtól kezdve – a fluxus *z*-nek valóban exponenciálisan csökkenő függvénye. A relaxációs hossz  $L_1$ , amelynek mért értékét felhasználva az *L* diffúziós hossz (34.10)-ből n = 1 helyettesítéssel meghatározható.

## 3.5. Időfüggés és kritikusság egycsoport közelítésben

A 2.2. alfejezetben a kritikusságot úgy definiáltuk, hogy a reaktorban külső neutronforrás nélkül időtől független neutroneloszlás alakulhat ki. Az egycsoport diffúziós közelítés elég egyszerű ahhoz, hogy az ott általánosságban mondottakat kézzelfoghatóbbá tegyük. Először a 2.2. alfejezetben bevezetett kinetikus sajátértékeket fogjuk meghatározni, majd ebből kiindulva tárgyaljuk a sztatikus sajátérték-problémát.

#### Kinetikus sajátértékek egycsoport közelítésben

A (32.2) alatti időtől függő egycsoport diffúzióegyenletet írjuk fel a következő alakban:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, t) + (v \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{f}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{a}}) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, t), \qquad (35.1)$$

amelyet a

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)\Big|_{t=0} = \boldsymbol{\Phi}_{i}(\mathbf{r})$$

kezdőfeltétellel kell megoldanunk.<sup>56</sup> Az előző fejezetben több esetben meghatároztuk a (32.4) egyenlet sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek teljes rendszerét. Jelöljük ezt most  $B_n^2$ -tel és  $\Phi_n(\mathbf{r})$ -rel (n = 1, 2, ...). Be fogjuk látni, hogy ha a  $\Phi(\mathbf{r},t)$  függvényt ezek szerint sorba fejtjük, akkor (35.1)-et csak egy

108

<sup>&</sup>lt;sup>55</sup> Ezek az együtthatók attól függnek, milyen a z = 0 síkban kialakuló síkforrás erősségének az r koordinátától való függése. Látni fogjuk, hogy a gyakorlatban a  $C_n$  együtthatóknak nincs jelentőségük.

<sup>&</sup>lt;sup>56</sup> Itt az "i" index a latin eredetű "iniciális" (= kezdeti) szó rövidítése. Nem tévesztendő össze a más fejezetekben szereplő "i" indexszel (= 1, 2, 3, ...), amelyet dőlt betűvel szedünk.
$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) = \sum_{n} f_{n} e^{\omega_{n} t} \boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r})$$
(35.2)

alakú sor elégítheti ki, ahol az  $\omega_h$  időállandókat az

$$\omega_n = \left(-DB_n^2 + \nu \Sigma_{\rm f} - \Sigma_{\rm a}\right) v \tag{35.3}$$

képletek adják meg. t = 0 helyettesítéssel kapjuk, hogy az  $f_n$  együtthatók  $\Phi_i(\mathbf{r})$  sorfejtési együtthatói:

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{i}}(\mathbf{r}) = \sum_{n} f_{n} \boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r}) \,.$$

A (35.2) és (35.3) egyenletek levezetése a következő. Mivel a sajátfüggvények teljes rendszert alkotnak,  $\Phi(\mathbf{r},t)$ -t írhatjuk a

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) = \sum_{n} F_{n}(t)\boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r})$$

alakban, ahol  $F_n(t)$  az időnek egyelőre ismeretlen függvénye. Ezt (35.1)-be helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy  $\Delta \Phi_n(\mathbf{r}) = -B_n^2 \Phi_n(\mathbf{r})$ :

$$\frac{1}{v}\sum_{n}F_{n}'(t)\boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r})=\sum_{n}\left(-DB_{n}^{2}+v\boldsymbol{\Sigma}_{f}-\boldsymbol{\Sigma}_{a}\right)F_{n}(t)\boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r}).$$

A  $\Phi_n(\mathbf{r})$  függvények ortogonalitása miatt ez csak akkor állhat fenn minden **r**-re és *t*-re, ha

$$F_n'(t) = \omega_n F_n(t)$$

minden *n*-re, ahol  $\omega_n$ -et (35.3) adja meg. Ebből pedig az következik, hogy alkalmas  $f_n$  együtthatóval

$$F_n(t) = f_n \mathrm{e}^{\omega_n t},$$

ahogy (35.2)-ben állítjuk.

A 3.4. alfejezetben láttuk, hogy a legkisebb sajátértékhez, vagyis  $B_1^2$ -hez tartozó  $\Phi_1(\mathbf{r})$  alapmódus a reaktor belsejében végig pozitív. Ennek alapján (35.3)-ból következik, hogy az  $\omega_n$  időállandók közül  $\omega_1$  a legnagyobb, ami azt jelenti, hogy elegendően hosszú idő elteltével (35.2)-ben az alapmódus mellett a többi tag járuléka elhanyagolható:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) \approx f_1 e^{\omega_1 t} \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{r}). \tag{35.4}$$

Azt az érdekes eredményt kaptuk tehát, hogy a térbeli neutroneloszlás (azaz a fluxusnak **r**-től való függése) a  $\Phi_i(\mathbf{r})$  *kezdeti eloszlás alakjától függetlenül* mindig átmegy az alapmódusba, ha elegendően hosszú ideig várunk.<sup>57</sup> A kezdeti eloszlásnak legfeljebb az  $f_1$  együttható értékére van hatása. Ez a "felejtési" tulajdonság minden, a transzportegyenlettel leírható *diffúzív* rendszerre jellemző.

(35.4)-ből következik, hogy – ha időtől független neutroneloszlás egyáltalán létezik –, akkor az nem lehet más, mint az alapmódus. A kritikusság feltétele tehát:  $\omega_l = 0$ . Abban az esetben, amikor  $\omega_l < 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ -re a fluxus 0-hoz tart: ilyen reaktorban nem lehetséges önfenntartó láncreakció. Amikor  $\omega_l > 0$ , a fluxus *t*-vel exponenciálisan nő, amíg valamilyen külső beavatkozás (pl. egy szabályozórúd működése) ezt meg nem állítja. Az előbbi esetben *szubkritikus*, az utóbbi esetben pedig *szuperkritikus* reaktorról beszélünk. (35.3) alapján tehát a kritikusság feltétele:

$$B_1^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} = B_m^2,$$
(35.5)

hiszen erre a  $B_1^2$ -re  $\omega_l = 0$ . ( $B_m^2$ -et (32.6)-ban írtuk fel.) A 3.2. alfejezetben megfogalmazott feltételt (mely szerint a geometriai és az anyagi görbületi paraméternek egymással meg kell egyeznie) akkor kapjuk vissza, ha  $B_1^2$ -et tekintjük a  $B_g^2$  geometriai görbületi paraméternek.

Ha a Helmholtz-egyenlet korábban felírt (34.2), (34.4), (34.6) stb. megoldásainak bármelyikét is nézzük, azt találjuk, hogy a méretek növekedésekor  $B_1^2$  csökken, és a sajátfüggvény egyre laposabb lesz. Minél nagyobb  $B_1^2$ , annál "görbébb" a sajátfüggvény. Ezért nevezzük  $B_1^2$ -et *görbületi* paraméternek.

(35.5) így is írható:

$$1 = \frac{v\Sigma_{\rm f}}{DB_{\rm l}^2 + \Sigma_{\rm a}} = \frac{v\Sigma_{\rm f}\Phi}{DB_{\rm l}^2\Phi + \Sigma_{\rm a}\Phi}.$$

A diffúzióegyenlet levezetésekor megbeszéltük, hogy a  $-D\Delta \Phi = DB^2 \Phi$  mennyiség a térfogategységből való nettó neutronkifolyást adja meg. Szavakban tehát ez az egyenlőség így fejezhető ki:

neutrontermelés = neutronkifolyás + neutronabszorpció.

Könnyen belátható, hogy szuperkritikus reaktorban a neutrontermelés, szubkritikus reaktorban pedig a neutronfogyás (tehát a kifolyás és az abszorpció együttesen) van túlsúlyban.

<sup>&</sup>lt;sup>57</sup> Ez az állítás nem csak az egycsoport elméletben igaz.

Sztatikus sajátértékek egycsoport közelítésben

A (35.1) időfüggő egyenletnek megfelelő sztatikus sajátérték-egyenlet (vö. 2.2. alfejezet):

$$D\Delta \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\Sigma}_{a} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} \nu \boldsymbol{\Sigma}_{f} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (35.6)$$

amelyet Helmholtz-egyenletté rendezhetünk át [lásd (32.4)]:

$$\Box \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) + \frac{\frac{1}{k} \nu \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{f}} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{a}}}{D} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a Helmholtz-egyenlet mindegyik sajátértékének megfelel egy sztatikus sajátérték, a sajátfüggvények pedig ugyanazok:

$$k_n = \frac{\nu \Sigma_f}{DB_n^2 + \Sigma_a}, \qquad n = 1, 2, ...$$
 (35.7)

Mivel a  $B_n^2$  sajártétékek monoton növekvő sorozatot alkotnak,  $k_1 > k_2 > ...$  Közülük a legnagyobb n = 1-hez tartozik, tehát a 2.2. alfejezetben mondottak szerint:

$$k_{\rm eff} = \frac{\nu \Sigma_{\rm f}}{DB_1^2 + \Sigma_{\rm a}}.$$
(35.8)

Mivel kritikus reaktorban  $k_{\text{eff}} = 1$  [vö. (22.8)], ehelyett gyakran a *reaktivitás*t használjuk:

$$\rho = \frac{k_{\rm eff} - 1}{k_{\rm eff}} = 1 - \frac{1}{k_{\rm eff}} \,. \tag{35.9}$$

Nyilvánvaló, hogy szub-, illetve szuperkritikus reaktorban rendre  $\rho < 0$  ( $k_{\text{eff}} < 1$ ) és  $\rho > 0$  ( $k_{\text{eff}} > 1$ ).

Azt a méretet, amelynél (35.5) teljesül, *kritikus méret*nek, a benne foglalt hasadóanyag tömegét pedig *kritikus tömeg*nek nevezzük. Az anyagi jellemzőkön kívül a kritikus tömeg erősen függ a reaktor alakjától is. Nézzünk például egy henger alakú reaktort. (34.7) és (35.5) alapján a henger R és H (extrapolált) méreteinek ki kell elégíteniük az

$$\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = B_{\rm m}^2$$

összefüggést ( $\alpha_1 = 2,4048...$ ). A reaktor tehát végtelen sok összetartozó (R, H) értékpár mellett lehet kritikus. Nem nehéz belátni, hogy a kritikus tömeg akkor a legkisebb, amikor

$$H/R = \pi \sqrt{2}/\alpha_1 = 1,85...$$

Ettől eltérő méretarányok mellett a kritikus tömeg nagyobb, sőt, bizonyos méreteknél a kritikusság nem is lehetséges. Például, ha az *R* sugár olyan kicsi, hogy

$$\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2 > B_{\rm m}^2,$$

akkor egy akár végtelen hosszú henger sem lehet kritikus. Ezt az észrevételt jól ki lehet használni olyan üzemekben, amelyekben urán- vagy plutóniumoldatokat keringetnek csővezetékekben: itt ugyanis ügyelni kell arra, hogy a feldolgozott oldat semmilyen körülmények között se válhasson kritikussá, amit úgy lehet elérni, hogy a cső sugarát a fenti feltétel szerinti értelemben elegendően kicsinek választják.

E rész befejezéseképpen a kritikusság fogalomköréből még két fogalommal kell megismerkednünk. Minden irányban végtelen kiterjedésű reaktorban a geometriai görbületi paraméter eltűnik:  $B_1^2 = 0$ . (35.8) alapján ekkor a sokszorozási tényező értéke

$$k_{\infty} = \frac{\nu \Sigma_{\rm f}}{\Sigma_{\rm a}} \,.$$

Ahhoz, hogy egy anyagból (vagy anyagok egy keverékéből) egyáltalán lehessen reaktort építeni, mindenképpen szükséges, hogy  $k_{\infty} > 1$  legyen. Ellenkező esetben az ilyen anyagból felépített véges méretű reaktor csak szubkritikus lehet. Ebből a szempontból hasznos, ha az anyagi görbületi paramétert (35.5) helyett a

$$B_{\rm m}^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$$

alakban írjuk fel, ahol *L* a (33.3)-ban definiált diffúziós hossz. Ha  $k_{\infty} < 1$  miatt  $B_{\rm m}^2 < 0$ , akkor a  $B_1^2 = B_{\rm m}^2$  kritikussági feltétel nem teljesíthető, hiszen definíció szerint mindig:  $B_1^2 \ge 0$ .

(35.8)-at írjuk át a

$$k_{\rm eff} = k_{\infty} P_{\rm NL} \tag{35.10a}$$

alakba, ahol a

$$P_{\rm NL} = \frac{1}{1 + L^2 B_1^2} \tag{35.10b}$$

jelölést alkalmaztuk.  $P_{\rm NL}$  neve *bennmaradási valószínűség*:<sup>58</sup> annak a valószínűsége, hogy egy neutron nem szökik ki a reaktorból, hanem ott abszorbeálódik, vagyis

$$P_{\rm NL} = \frac{\Sigma_{\rm a} \Phi}{DB_{\rm l}^2 \Phi + \Sigma_{\rm a} \Phi}$$

Ez pedig a (35.10b) alatti kifejezéssel egyenlő. E mennyiségek fizikai jelentése alapján könnyen érthető most már a (35.10a) egyenlet fizikai tartalma is. A sokszorozási tényezőnek ilyen módon való tényezőkre bontása a transzportegyenlet magasabb közelítéseiben is értelmes, legfeljebb a  $k_{\infty}$  és  $P_{\rm NL}$  tényezők számítása lesz bonyolultabb.

Számos ismeretterjesztő munkában és előadásban – de néha még tankönyvekben is – az alábbi módon magyarázzák a kritikus méretet: "a neutrontermelés a térfogattal arányos, a kifolyás a felülettel; mivel a felület/térfogat arány a méretekkel csökken, kis méreteknél a neutronkifolyás van túlsúlyban, nagy méreteknél pedig a neutrontermelés, tehát van egy közbenső méret, amelynél a kettő egymással egyensúlyban van". Tényleg van ilyen méret, de az egésznek kevés köze van a valósághoz. A kifogásolt állításból ugyanis az következne, hogy a termelés és a kifolyás viszonya a térfogat és a felület arányának felelne meg, vagyis a lineáris méretekkel arányosan nőne. Példaképpen vegyünk egy gömb alakú reaktort, amelyre (34.1) adja meg a fluxus térbeli eloszlását. Az időegység alatt a reaktorban keletkező neutronok száma:

$$\int_{0}^{R} \nu \Sigma_{\rm f} \, \frac{\sin Br}{r} \, 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 4\nu \Sigma_{\rm f} R^2,$$

az időegység alatt kifolyó neutronok száma pedig:

$$-4\pi R^2 D \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R} = 4\pi^2 D \,.$$

Tehát a fluxusnak (34.1) szerinti normálásakor a neutronkifolyás a reaktor méretétől éppen független, a neutrontermelés (és természetesen az abszorpció is)  $R^2$ -tel, tehát a felülettel arányos. A két mennyiség viszonya ily módon – a kifogásolt állítással ellentétben –  $R^2$ -tel és nem *R*-rel arányos. Ha másfajta normálást választunk, még meglepőbb következtetésre juthatunk. Tartsuk például a reaktor teljesítményét állandónak: ekkor a fentiek szerint a neutrontermelés válik a méretektől függetlenné, viszont a neutronkifolyás a felülettel nem egyenesen, hanem éppen fordítottan arányosnak adódik.

Nem nehéz megtalálni, hol a hiba a kifogásolt okoskodásban: nem veszi tekintetbe, hogy *a fluxus a térben nem állandó*. Ha ugyanis  $\Phi(r) = \Phi_0$  (állandó) lenne, akkor az időegység alatt termelt neutronok száma

<sup>&</sup>lt;sup>58</sup> Az "NL" index az angol "non-leakage" (szó szerint "nemkiszökés") kifejezésnek a reaktorfizikában bevett rövidítése. Ezért tartottuk meg a magyar szövegben is.

$$\int_{0}^{R} v \Sigma_{\mathrm{f}} \Phi_0 4\pi r^2 \mathrm{d}r = v \Sigma_{\mathrm{f}} \Phi_0 \frac{4\pi R^3}{3},$$

a kifolyás pedig [vö. (21.10)]:

$$4\pi R^2 \frac{\Phi_0}{4}$$

lenne, vagyis ezek a mennyiségek tényleg a térfogattal, illetve a felülettel lennének arányosak. A valóságnak megfelelő és első látásra paradox viszonyok tehát abból fakadnak, hogy a fluxus nem állandó, hanem a reaktor széle felé nullára csökken.

## 3.6. Reaktorkinetika

A reaktorkinetika az időtől függő jelenségekkel foglalkozik. Az alábbiakban a lehető legegyszerűbb tárgyalásmódot, az egycsoport diffúzióelméletet választottuk, de ezen belül is csak a legfontosabb dolgokra fogunk tudni kitérni. Nem tartoznak a reaktorkinetika témakörébe az időben lassú változással járó folyamatok (amelyek periódusa óra vagy lényegesen nagyobb, például hónap nagyságrendű). Ilyenekkel a 8. fejezetben fogunk foglalkozni.

| Izotóp            | eta(%) |
|-------------------|--------|
| <sup>232</sup> Th | 2,03   |
| <sup>233</sup> U  | 0,27   |
| <sup>235</sup> U  | 0,65   |
| <sup>238</sup> U  | 1,48   |
| <sup>239</sup> Pu | 0,21   |
| <sup>240</sup> Pu | 0,27   |
| <sup>241</sup> Pu | 0,49   |

36.1. táblázat. A  $\beta$  későneutron-hányad különböző izotópokra

36.2. táblázat. A későneutron-csoportok adatai a fő hasadó izotópokra

|             |               |                  | $\beta_i \cdot 10^5$ |                   |
|-------------|---------------|------------------|----------------------|-------------------|
| Csoport (i) | $T_{1/2}$ (s) | <sup>233</sup> U | <sup>235</sup> U     | <sup>239</sup> Pu |
| 1*          | 55,7          | 23               | 21                   | 7                 |
| 2**         | 22,7          | 79               | 142                  | 63                |
| 3           | 6,2           | 67               | 128                  | 45                |
| 4           | 2,3           | 74               | 257                  | 69                |
| 5           | 0,615         | 14               | 75                   | 18                |
| 6           | 0,23          | 9                | 27                   | 9                 |

\*A csoportnak egyetlen hasadási termék felel meg:  ${}^{87}\text{Br} \rightarrow {}^{87}\text{Kr} \rightarrow {}^{86}\text{Kr}$  + neutron. \*\*A csoportnak egyetlen hasadási termék felel meg:  ${}^{137}\text{I} \rightarrow {}^{137}\text{Xe} \rightarrow {}^{136}\text{Xe}$  + neutron.

## A pontkinetikai egyenlet

Az eddig használt (35.1) egyenlet nem ad számot egy alapvető jelenségről, a *késő neutronok* létéről. Ezért olyan egyenletet fogunk most levezetni, amely figyelembe veszi, hogy a hasadásban keletkező neutronok egy része nem a hasadás pillanatában (tehát *prompt*), hanem csak *késve* jelenik meg. A késő neutronok hányadát  $\beta$ -val jelöljük. A legfontosabb izotópokra vonatkozó értékeit a 36.1. táblázatban összesítjük. A késő neutronokat bizonyos hasadási termékek bocsátják ki, amelyek közül több, mint 60 *későneutron-anyamag*ot sikerült azonosítani. Nincs azonban szükség arra, hogy mindegyiket külön-külön számba vegyük. A gyakorlatban elégséges az anyamagokat 6 csoportba osztani, és mindegyik csoporthoz egy  $\beta_i$  részhányadot és egy átlagos  $\lambda_i$  bomlási állandót rendelni. Értékeiket a 36.2. táblázatban összesítjük. (A táblázatban a  $\lambda_i$ bomlási állandók helyett a  $T_{1/2} = 0,69/\lambda$  felezési időket adjuk meg.)

Az alábbiakban levezetett egyenletek magukon viselik az egycsoport diffúzióelmélet elhanyagolásait. Ezért a 7.5. alfejezetben visszatérünk a témára, és az egyenleteket az általános esetben is levezetjük. Az egyenletek alakja akkor sem módosul, de egyes paramétereinek a definíciója megváltozik.

Az *i*-edik csoporthoz tartozó anyamagok számát az **r** pont körüli dV térfogatelemben és a *t* időpillanatban jelöljük  $C_i(\mathbf{r},t)$ dV-vel (*i* = 1, 2, ..., 6). A (*t*, *t*+d*t*) időintervallumban ezek  $\lambda_i C_i(\mathbf{r},t)$ dVd*t* számú késő neutront emittálnak. Mint a (22.1b) egyenlet kapcsán már említettük, ezek a neutronok a  $Q_0(\mathbf{r},t)$  forrástagban veendők figyelembe, amely tehát az egycsoport elméletben a következőképpen írható fel:

$$Q_0(\mathbf{r},t) = \nu \Sigma_f(1-\beta) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) + S(\mathbf{r},t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r},t), \qquad (36.1)$$

hiszen a hasadás pillanatában nem *v*, hanem csak  $v(1 - \beta)$  prompt neutron jelenik meg. Ezzel (35.1) helyett a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\Delta \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\Sigma}_{a}\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) + v\boldsymbol{\Sigma}_{f}(1-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) + S(\mathbf{r},t) + \sum_{i=1}^{6}\lambda_{i}C_{i}(\mathbf{r},t),$$
(36.2a)

amelyet még ki kell egészítenünk a későneutron-anyamagok koncentrációjára vonatkozó egyenletekkel:

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\mathbf{r},t) + \beta_i \nu \Sigma_f \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t), \qquad (i = 1, 2, ..., 6).$$
(36.2b)

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása érdekében fejtsük az ismeretlen és ismert függvényeket a  $\Phi_n(\mathbf{r})$  sajátfüggvények szerint haladó sorba:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) = \sum_{n} \varphi_{n}(t) \boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r}),$$

$$C_{i}(\mathbf{r},t) = \sum_{n} \frac{1}{v} C_{in}(t) \boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r}), \qquad (i = 1, 2, ..., 6),$$

$$S(\mathbf{r},t) = \sum_{n} \frac{1}{v} S_{n}(t) \boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r}).$$

E sorokat (36.2)-be helyettesítve és a  $\Phi_n(\mathbf{r})$  sajátfüggvények ortogonalitását kihasználva az egyes módusokra (n = 1, 2, ...) szeparáltan kapunk egyenletrendszert:<sup>59</sup>

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho_n - \beta}{\Lambda}\varphi_n(t) + S_n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{in}(t), \qquad (36.3a)$$

$$\frac{\mathrm{d}C_{in}(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i C_{in}(t) + \beta_i \frac{\varphi_n(t)}{\Lambda}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6)$$
(36.3b)

ahol

$$\rho_n = 1 - \frac{1}{k_n} \tag{36.4a}$$

és

$$k_n = \frac{\nu \Sigma_{\rm f}}{DB_n^2 + \Sigma_{\rm a}} \tag{36.4b}$$

rendre az *n*-edik módushoz tartozó reaktivitás és sokszorozási tényező [vö. (35.9) és (35.7)], továbbá

$$\Lambda = \frac{\ell_n}{k_n} = \frac{1}{\nu \Sigma_f \upsilon}$$
(36.4c)

és

$$\ell_n = \frac{1}{v \left( DB_n^2 + \Sigma_a \right)} \tag{36.4d}$$

rendre a *generációs idő* és az *n*-edik módushoz tartozó *promptneutron-élettartam*. Vegyük észre, hogy a generációs idő minden módusra ugyanannyi. (Az elnevezések magyarázatára még visszatérünk.)

### A reciprokóra-egyenlet

A (36.3) egyenletrendszert először tekintsük az alapmódusra (n = 1), és ne legyen a reaktorban külső neutronforrás ( $S_1(t) = 0$ ). Az erre vonatkozóan (36.4b) szerint kapott  $k_1$  tényező azonos a (35.6)-ban felírt  $k_{eff}$ -vel, továbbá a (36.4a)-ban szereplő  $\rho_1$ pedig nem más, mint a (35.7)-ben definiált reaktivitás. Erre való tekintettel az "1" indexet – az alapmódus esetében – elhagyjuk. Az egyenletrendszer megoldását keressük a

<sup>&</sup>lt;sup>59</sup> A levezetés részleteit az Olvasóra bízzuk.

$$\begin{split} \varphi(t) &= \varphi_0 \mathrm{e}^{\omega t} \,, \\ C_i(t) &= C_{i0} \mathrm{e}^{\omega t} \,, \end{split} \qquad (i = 1, \, 2, \, ..., \, 6), \end{split}$$

alakban, amit (36.3)-ba helyettesítve rövid számolás után azt kapjuk, hogy az egyenletnek csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $\omega$ kielégíti a

$$\frac{\rho}{\beta} = \frac{\Lambda}{\beta}\omega + \omega \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i/\beta}{\lambda_i + \omega}$$
(36.5)

egyenletet, az együtthatók között pedig fennáll a

$$C_{i0} = \frac{\beta_i \varphi_0 / \Lambda}{\lambda_i + \omega}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6)$$
(36.6)

összefüggés.



36.1. ábra. A reciprokóra-egyenlet megoldásai

A reaktorok üzemeltetői számára alapvető (36.5) összefüggést *reciprokóra-egyenlet*nek nevezzük. Ha ugyanis a reaktor adott állapotában sikerül kísérleti úton meghatározni  $\omega$  értékét, akkor (36.5) megadja a reaktivitást. Nézzük meg ezért közelebbről, milyen  $\omega$  időállandók fordulhatnak elő. Ha  $\rho$  adott, akkor (36.5)  $\omega$ -ra vonat-kozóan egy 7-edfokú algebrai egyenletté alakítható át, tehát (36.5)-öt  $\omega$ -nak 7 különböző értéke elégíti ki. A 36.1. ábrán  $\omega$  függvényében ábrázoltuk (36.5) jobboldalát, amelyet az ábrán  $f(\omega)$ -val jelöltünk.<sup>60</sup> Az ábráról leolvasható, hogy mind a 7 gyök valós. Közülük a legnagyobbat jelöljük  $\omega_0$ -val, a többit pedig  $\omega_j$ -vel (j = 1, 2, ..., 6). Értékük a 36.3. táblázatban található néhány jellegzetes reaktivitásra.

| $\rho/\beta($ \$)           | -1,0    | 0       | 0,1     | 0,2     | 1,0     | 2,0     |
|-----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\omega_0$ (1/s)            | -0,0119 | 0,0     | 0,0102  | 0,0271  | 10,84   | 325,4   |
| <i>ω</i> <sub>1</sub> (1/s) | -0,0249 | -0,0143 | -0,0138 | -0,0135 | -0,0128 | -0,0126 |
| $\omega_2$ (1/s)            | -0,0950 | -0,0682 | -0,0628 | -0,0574 | -0,0380 | -0,0341 |
| <i>ω</i> <sub>3</sub> (1/s) | -0,242  | -0,195  | -0,187  | -0,180  | -0,137  | -0,123  |
| <i>w</i> <sub>4</sub> (1/s) | -1,078  | -1,024  | -1,013  | -1,000  | -0,694  | -0,406  |
| <i>ω</i> <sub>5</sub> (1/s) | -2,950  | -2,897  | -2,886  | -2,873  | -2,301  | -1,281  |
| ω <sub>6</sub> (1/s)        | -650,2  | -325,4  | -293,0  | -260,5  | -12,27  | -3,152  |

36.3. táblázat. Az aj időállandók néhány jellegzetes reaktivitásra

Az elmondottak alapján felírhatjuk (36.3) általános megoldását:

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^{6} \varphi_j \mathrm{e}^{\omega_j t} , \qquad (36.7a)$$

$$C_i(t) = \sum_{j=0}^{6} C_{ij} e^{\omega_j t}$$
,  $(i = 1, 2, ..., 6)$ , (36.7b)

ahol a  $C_{ij}$  együtthatókat a megfelelő  $\varphi_j$  együtthatókból (36.6) alapján kell kiszámítani. Az utóbbiakat a kezdeti feltételek határozzák meg. Nem szükséges azonban ezekre különösebb gondot fordítanunk. A 36.1. ábráról és a 36.3. táblázatból ugyanis látható, hogy szuperkritikus állapotban ( $\rho > 0$ )  $\omega_0$  pozitív, a többi gyök negatív; szubkritikus állapotban ( $\rho < 0$ ) pedig mindegyik gyök negatív. Ebből következik, hogy szuperkritikus állapotban elegendően hosszú idő elteltével csak az  $\omega_0$ -nak megfelelő, exponenciálisan növekvő tag marad meg:

$$\varphi(t) \approx \varphi_0 e^{\omega_0 t}$$
 (elegendően nagy *t*-re). (36.7c)

A gyakorlatban valóban tapasztaljuk, hogy a reaktor ( $\varphi(t)$ -vel arányos) teljesítménye szuperkritikus állapotban – egy átmeneti időszak elteltével – exponenciálisan növekszik. A növekedés ütemét  $\omega_0$  helyett általában azzal az idővel szoktuk jellemezni, amely alatt a teljesítmény kétszeresére nő ( $T_{2x}$ ). Mint könnyen belátható,

$$\omega_0 = \frac{\ln 2}{T_{2x}} = \frac{0.69}{T_{2x}}.$$
(36.8)

<sup>&</sup>lt;sup>60</sup> Az ábra csak tájékoztató jellegű, léptéke torzított. A legfontosabb torzítás abban áll, hogy a legnegatívabb tengelymetszete  $\omega$ -nak  $-\beta/\Lambda$  néhányszorosával egyenlő értékénél található.  $\beta/\Lambda$  nagyságrendje viszont 100/s, aminél a  $\lambda_i$  bomlási állandók sokkal kisebbek (vö. 36.2. táblázat).

A  $T_{2x}$  kétszerezési idő kísérletileg jól mérhető. Ha vele  $\omega_0$ -at (36.8) alapján kifejezzük, a  $\rho$  reaktivitást (36.5)-ből kiszámíthatjuk. A "reciprokóra" elnevezés onnan ered, hogy a történelmileg első reaktorokban – biztonsági megfontolásokból – többnyire csak órákban mérhető kétszerezési időket engedtek meg.

(36.5) alkalmazásához számított mennyiségekre van szükség. Ilyen a  $\Lambda$  generációs idő, de tulajdonképpen ilyenek a  $\beta$ ,  $\beta_i$  későneutron-hányadok is. Ez utóbbiak esetében arról van szó, hogy a késő neutronok kisebb energiával keletkeznek, mint a prompt neutronok, és ezért rájuk vonatkozóan a kiszökési valószínűség [vö. (35.10b)] kisebb, tehát a láncreakció számára értékesebbek. Emiatt (36.5)-ben nem a magfizikából ismert, a 36.1. és 36.2. táblázatban megadott értékeket kell használni, hanem azoknál (általában) nagyobb, effektív értékeket. Az effektív későneutron-hányad számításáról a 7.5. alfejezetben lesz szó. A számított értékek bizonytalanságait csökkenthetjük, ha (36.5) mindkét oldalát  $\beta$ -val osztjuk, vagyis a reaktivitást az effektív későneutron-hányad egységeiben fejezzük ki. A  $\Lambda/\beta$  hányados pedig kísérletileg meghatározható.<sup>61</sup> Az effektív későneutron-hányadot, mint a reaktivitás egységét *dollár*nak (\$) nevezzük. A reaktivitást a kétszerezési idő függvényében megadó táblázatokat is dollárban szokás elkészíteni.

| $T_{2x}(s)$ | ho/eta |
|-------------|--------|
| 0,001       | 2,537  |
| 0,01        | 1,151  |
| 0,1         | 0,9796 |
| 1           | 0,7908 |
| 10          | 0,3991 |
| 100         | 0,0988 |
| 1000        | 0,0126 |

36.4. táblázat. A kétszerezési idő és a reaktivitás néhány jellegzetes összetartozó értéke

Nem ez az egyetlen oka annak, hogy a reaktivitást dollárban mérjük, hanem az is, hogy a  $\rho/\beta = +1$  dollár reaktivitás a reaktorok biztonságára vonatkozóan fontos határ. Számítsuk ki (36.5) alapján a generációs időnek egy tipikus értékénél (10 µs) a reaktivitás és a kétszerezési idő néhány összetartozó értékét. Az eredményt a 36.4 táblázat tartalmazza. Látható ezekből a számokból, hogy 1 dollárnál lényegesen kisebb reaktivitásokra a kétszerezési idő 10 s és 100 s közé esik. 1 dollár környékén viszont gyorsan csökken, és 0,01 s nagyságrendűvé válik. Abban a reaktorban, amelyik ilyen rövid idő alatt kétszerezi meg a teljesítményét, gyakorlatilag lehetetlen külső beavatkozó szervekkel (pl. szabályozórudakkal) a növekedést megállítani, hiszen a beavatkozó szervek működéséhez legalább tizedmásodpercekre van szükség. Ha tehát egy reaktorban dollárnál nagyobb reaktivitású állapot alakul ki, akkor az szabályozhatatlanná válik, úgy mondjuk: megszalad. Atombomba-robbantáskor mesterségesen idéznek elő megszaladást, de reaktorban ez balesetnek számít. A teljesítmény természetesen megszaladáskor sem növekszik minden határon túl, mert ott előbb-utóbb negatív visszacsatolások lépnek fel (pl. a reaktor melegedése), amelyek a reaktivitást 0 alá viszik, vagyis a reaktort szubkritikussá teszik. (Ezzel részletesebben a 6.5. alfejezetben

<sup>&</sup>lt;sup>61</sup> Különben is alig ad járulékot (36.5)-ben.

foglalkozunk.) A reaktorok üzemét általában úgy korlátozzák, hogy benne 20 s-nál rövidebb kétszerezési idők ne léphessenek fel, ami a reciprokóra-egyenlet szerint azt jelenti, hogy a reaktivitás 0,2 dollárnál ne legyen nagyobb. Mindebből egyébként az is következik, hogy a késő neutronok nélkül nem lenne elképzelhető a reaktorok működése: a kritikus állapot közelében viselkedne a reaktor úgy, ahogy a késő neutronokkal 1 dollár környékén.

Az eddigiekben a (36.3) egyenletrendszert az n = 1 alapmódusra vonatkozóan vizsgáltuk. Mivel a  $B_n^2$  sajátértékek növekvő sorozatot alkotnak, (36.4b)-ből látható, hogy ha  $k_1 \approx 1$ , akkor n > 1-re  $k_n < 1$ , tehát (36.4a) szerint  $\rho_n < 0$ . Ez azt jelenti, hogy a (36.5) reciprokóra-egyenlet mindegyik gyöke negatív az n > 1 módusokra, tehát járulékuk a fluxus időfüggésében nagyon hamar elhanyagolhatóvá válik. Ez az oka annak, hogy megfontolásainkban végig az n = 1-nek megfelelő alapmódusra támaszkodhattunk.

#### A neutron-élettartam fizikai jelentése

Nem érdektelen a neutron-élettartam és a (36.3) egyenlet fizikai jelentését közelebbről megvizsgálni. Mindenekelőtt nézzük az "élettartam" elnevezés magyarázatát: kiszámítjuk annak az időnek a várható értékét, amennyi egy neutron keletkezése és eltűnése (azaz kiszökése vagy abszorbeálódása) között eltelik. Erre úgy kaphatunk választ, hogy (36.2a)-ból elhagyjuk a neutrontermelési tagokat, vagyis azokat, amelyeket (36.1)-ben írtunk fel. Ekkor az *n*-edik módusra az

$$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}\varphi_n(t)}{\mathrm{d}t} = -DB_n^2\varphi_n(t) - \Sigma_{\mathrm{a}}\varphi_n(t)$$

egyenletet kapjuk. A (36.4d)-ben bevezetett jelöléssel ennek megoldása:

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n0} \mathrm{e}^{-t/\ell_n}$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy egy kiszemelt neutron nem tűnik el a (0, t) időintervallumban:

$$e^{-t/\ell_n}$$

illetve hogy az ezt követő d*t* idő alatt eltűnik:

$$1-e^{-dt/\ell_n}$$

Így tehát

$$\mathrm{e}^{-t/\ell_n} \left( 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{d}t/\ell_n} \right) \approx \mathrm{e}^{-t/\ell_n} \frac{\mathrm{d}t}{\ell_n}$$

valószínűséggel fog a (t, t+dt) időintervallumban eltűnni. Ebből a keresett várható érték:

$$\mathbf{M}(t) = \int_{0}^{\infty} t \, \mathrm{e}^{-t/\ell_n} \, \frac{\mathrm{d}t}{\ell_n} = \ell_n \, .$$

Ebben az értelemben nevezzük  $\ell_n$ -et *promptneutron-élettartam*nak. A  $\Lambda$  generációs időnek már nem sikerül ilyen szemléletes jelentést adni. Némi elvi engedmény árán  $\Lambda$  a következő módon értelmezhető. 1 s alatt egy neutron megtesz v utat. Az ezalatt bekövetkező hasadások száma  $\Sigma_f v$ . Mivel egy hasadásban v neutron keletkezik, az 1 s alatt keletkező hasadási neutronok átlagos száma  $v\Sigma_f v$ . Tehát  $\Lambda = 1/(v\Sigma_f v)$  két egymást követően keletkező neutron megjelenése között eltelt idő. Egy kritikus reaktorban pontosan ennyi idő alatt tűnik el abszorpció vagy kiszökés révén egy neutron. Emiatt ekkor  $\ell_1 = \Lambda$ . Ha  $\Lambda$  rövidebb, mint a generáció  $\ell_1$  élettartama, a neutronok száma nő ( $k_{eff} > 1$ ), ha viszont hosszabb, akkor a neutronok száma csökken ( $k_{eff} < 1$ ).<sup>62</sup>

Ennek az értelmezésnek az alapján nem nehéz közvetlenül is levezetni a (36.3) egyenletrendszert, ha a sokszorozási tényezőt úgy értelmezzük, mint *az egymásra következő neutrongenerációkhoz tartozó neutronok számának az arányát*. (Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a módusokra vonatkozó *n* indexet elhagyjuk, és  $\ell$ -lel jelöljük az n = 1 módushoz tartozó  $\ell_1$  neutron-élettartamot.) Legyen ennek megfelelően  $\varphi(t)$  a *t* időpillanatban a reaktorban lévő neutronok száma. Ebből  $\ell$  időelteltével a promptneutron-sokszorozás eredményeképpen  $k_{\text{eff}}(1 - \beta)\varphi(t)$  számú neutron keletkezik, a külső forrás  $S(t) \ell$ , az *i*-edik fajta későneutron-anyamagok pedig  $\lambda_i C_i(t) \ell$  számú neutront termelnek. Tehát:

$$\varphi(t+\ell) = k_{\text{eff}}(1-\beta)\varphi(t) + S(t)\ell + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i C_i(t)\ell.$$

Ebből egyszerűen következik (36.3a), ha  $\ell$ -et végtelenül kicsinek tekintjük, és  $\varphi(t+\ell)$ et sorba fejtjük, vagyis

$$\varphi(t+\ell) = \varphi(t) + \ell \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} + \dots$$

(36.3b) levezetése még egyszerűbb, ha meggondoljuk, hogy a  $\Lambda$  generációs időnek (36.4c) alatti értelmezése szerint a hasadások által az időegység alatt termelt neutronok száma  $\varphi(t)/\Lambda$ , aminek  $\beta_i$  hányada jelenik meg az *i*-edik fajta anyamagok formájában.<sup>63</sup>

 $<sup>^{62}</sup>$  Ezek a megfontolások nagyon leegyszerűsítik a viszonyokat. Például nem veszik figyelembe, hogy egy hasadásban egyetlen pillanat alatt keletkezik  $\nu$  (> 1) neutron, továbbá, hogy a hasadási neutronok sebessége más, mint a termikus neutronoké. Másik elhanyagolás, hogy a neutronok megjelenése nem Poisson-eloszlású. Márpedig az események gyakoriságának reciproka csak Poisson-eloszlás esetében adja meg a két esemény között eltelt idő várható értékét. Mindezek ellenére a fentiek talán közelebb hozzák az Olvasóhoz  $\Lambda$  fizikai jelentését.

<sup>&</sup>lt;sup>63</sup> Javasoljuk, hogy az Olvasó az elmondottakat kövesse részletes számításokkal.

Ezekben a megfontolásokban nem voltunk tekintettel a neutronok térbeli eloszlására, vagyis a reaktort úgy tekintettük, mintha egyetlen pontba lenne összesűrítve. Ezért nevezzük (36.3)-at *pontkinetikai egyenlet*nek. Az eredeti levezetésből azonban következik, hogy ez az elnevezés tulajdonképpen igazságtalan, hiszen az egyenlet nem pontszerűnek tekintett reaktorra, hanem a  $\Phi_n(\mathbf{r})$  térbeli eloszlásokat leíró módusokra érvényes. Iménti meggondolásaink viszont megmutatják a pontkinetikai egyenlet fizikai tartalmát, ami könnyebben kifejthető, ha a reaktort pontnak tekintjük.

Befejezésül még egy megjegyzést teszünk a késő neutronok szerepével kapcsolatban. Gyakran hallani a következő okfejtést: "A késő neutronok megnövelik a neutronok átlagos élettartamát, és ezzel lassítják a láncreakciót." Egy példával megvilágítjuk, hogy ez a dolog lényegének *alapos félreértése*. Ha a *36.2. táblázat*ban megadott felezési időket a  $\beta_i$ -kkel súlyozva átlagoljuk, akkor <sup>235</sup>U-ra 8,97 s jön ki, ami átlagos periódusidőre 12,9 s-ot ad. Egy vízzel moderált reaktorban  $\ell \approx 5 \cdot 10^{-5}$  s. Ezt a késő neutronok periódusával átlagolva

$$\overline{\ell} = (1 - 0.0065) \cdot 5 \cdot 10^{-5} + 0.0065 \cdot 12.9 = 0.084$$
 s

adódik. Ha a késő neutronokat nem vesszük figyelembe, de a prompt neutronok élettartamát ennyinek vesszük, akkor (36.3a) szerint a reaktor periódusa  $\ell/\rho$ . Ha, például, a reaktivitás  $\rho/\beta = 0.2$  \$, akkor a periódusra  $0.084/(0.2\cdot0.0065) = 65$  s adódik. A fentiekből viszont tudjuk, hogy ebben az esetben a kétszerezési idő 20 s, vagyis a periódus 30 s. Az ellentmondás nyilvánvaló. A hiba ott van, hogy a kifogásolt okfejtés nem veszi figyelembe a (35.1) és a (36.2) egyenletek közötti *szerkezeti* különbséget. A késő neutronok figyelembevétele *megváltoztatja az időfüggő egyenlet szerkezetét*. Ez a szerkezeti változás olyan alapvető, hogy nem helyettesíthető semmiféle átlagos promptneutron-élettartammal.<sup>64</sup> Mindez azt is mutatja, hogy a heurisztikus, leegyszerűsítő magyarázatokkal ajánlatos csínján bánni, mert akár nagyságrendi tévedést is okozhatnak.

## 3.7. A reaktivitás mérése

A 2.2. alfejezetben definiáltuk a  $k_{eff}$  sztatikus sajátértéket, és már ott megjegyeztük, hogy ennek, illetve a belőle származtatott  $\rho$  reaktivitásnak a mérése elvileg lehetetlen, hiszen – a  $k_{eff}$  = 1-nek megfelelő kritikus állapotot leszámítva – nem létező reaktorállapotnak felel meg. A 3.6. alfejezetben levezetett pontkinetikai egyenletrendszer alapján azonban számos módszer kínálkozik a reaktivitás mérésére. Ezek a módszerek természetesen olyan mértékben közelítők, amilyen mértékben közelítő maga a pontkinetikai egyenletrendszer. Vannak esetek, amelyekben így is kielégítően pontos eredményt lehet kapni, de számos eset van, amelyekben az ezen alapuló módszer meglehetősen pontatlan. A fejezet végén összefoglaljuk a pontatlanság fő okait, a térfüggő effektusokat.

<sup>&</sup>lt;sup>64</sup> Ezt a hibát még az egyébként kitűnő [6] kézikönyv is elköveti.

#### A reaktivitás mérése szuperkritikus állapotokban

Szuperkritikus reaktorállapotokban a *kétszerezési idő módszere* kifogástalan eredményeket szolgáltat. A mérés lényegét a 3.6. alfejezetben már megbeszéltük, ezért itt csak a mérés menetét foglaljuk össze:

- 1. Szuperkritikus állapotban külső neutronforrás nélkül hagyjuk a reaktor teljesítményét növekedni, és közben regisztráljuk, hogyan növekszik a *t* idő függvényében a reaktorba helyezett neutrondetektor által időegység alatt mért beütések száma. Így megmérjük a (36.7a) képlet által meghatározott  $\varphi(t)$  függvényt.
- 2. A felvett függvényből elhagyjuk a kezdeti szakaszt, és csak azt tartjuk meg, amelyen érvényes a (36.7c) alatti közelítés.<sup>65</sup> Az utóbbira egy exponenciális függvényt illesztve meghatározzuk  $\omega_0$ -at, illetve  $T_{2x}$ -et [vö. (36.8)].
- 3. A (36.5) reciprokóra-egyenletből dollár egységekben kapjuk a  $\rho$  reaktivitást. Megjegyezzük, hogy e képlet alapján  $\rho/\beta$  értékeit  $T_{2x}$  függvényében minden reaktorra vonatkozóan előre ki szoktuk számolni, és táblázatokban összefoglalni.
- 4. Ha a dollárban kapott reaktivitásból ki akarjuk számítani  $k_{\text{eff}}$ -et, szükség van  $\beta_{\text{eff}}$  értékére (lásd a 7.5. alfejezetben).

A kétszerezési idő módszerét enyhén szuperkritikus állapotok reaktivitásának mérésére használjuk. Mivel biztonsági okokból 15–20 s-nál kisebb kétszerezési időket nem szokás megengedni, ezt a módszert legfeljebb 0,2–0,3 \$ reaktivitásokig tudjuk alkalmazni. Ilyen reaktorállapotokban a reciprokóra-egyenlet nagy pontossággal érvényes. Ebből következik, hogy a módszert az egyik legpontosabb reaktivitásmérési módszernek tekinthetjük – legalábbis ami a dollárban mért reaktivitásokat illeti. Ha ebből  $k_{eff}$ et kívánjuk kiszámítani<sup>66</sup>, akkor ennek pontossága függ  $\beta_{eff}$  számításának a pontosságától.

### 1/N módszer

Szubkritikus állapotban mindig használható az "1/N módszer", amely ugyan lehet nagyon pontatlan is, de egyszerűségénél fogva kedvelt és gyakran alkalmazott módszer. Elvi alapját legkönnyebben a (36.3) pontkinetikai egyenletből vezethetjük le.

Láttuk, hogy szubkritikus reaktorban mindegyik  $\omega_j$  időállandó negatív, tehát külső forrás nélkül nem lehetséges önfenntartó láncreakció. Nézzük meg ezért, hogyan viselkedik egy szubkritikus reaktor külső forrás jelenlétében. Legyen a forrás időben állandó. Tehát (36.3a)-ba  $S_n(t) \equiv S$ -et írunk. A (36.3) szerinti homogén differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását (36.7) adja meg. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy a

<sup>&</sup>lt;sup>65</sup> Az elhagyandó szakasz kijelölése nem egyszerű dolog, korrekt megoldása matematikai statisztikai elemzést igényel.

<sup>&</sup>lt;sup>66</sup> A reaktorfizikusok ezt úgy mondják, hogy "a reaktivitást abszolút egységekre számítjuk át". Tekintve, hogy mind  $\rho$ , mind  $\beta_{\text{eff}}$ , mind maga a  $\rho/\beta_{\text{eff}}$  hányados dimenzió nélküli szám, ez a kifejezés első hallásra furcsának tűnhet. Mivel azonban  $\beta_{\text{eff}}$  a dollárnak mint reaktivitásegységnek az értéke, az idézett kifejezés nem kifogásolható.

$$\varphi_{\rm inh}(t) = -\frac{AS}{\rho}, \qquad C_i^{\rm inh}(t) = -\frac{\beta_i S}{\lambda_i \rho}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6)$$

állandók adják az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer partikuláris megoldását. Így az általános megoldás egy állandó tag és időben exponenciálisan csökkenő tagok összege:

$$\varphi(t) = -\frac{AS}{\rho} + \sum_{j=0}^{6} \varphi_j e^{\omega_j t}$$

A  $\varphi_j$  együtthatók a kezdeti feltételektől függnek. Értékük témánk szempontjából nem érdekes, hiszen elegendően hosszú idő elteltével az exponenciális tagok mind eltűnnek, tehát időben állandó  $\varphi_{asz}$  neutronfluxus alakul ki:

$$\varphi_{\rm asz.} = -\frac{\Lambda S}{\rho},\tag{37.1}$$

ami  $\rho < 0$  esetében pozitív. Ez az egyszerű összefüggés mutatja, hogy a reaktor annál jobban sokszorozza a forrás által termelt neutronokat, minél közelebb van a reaktivitás 0-hoz.

Ha egy szubkritikus reaktorban elhelyezünk egy neutronforrást és egy neutrondetektort, majd fokozatosan növeljük a reaktorban a hasadóanyag mennyiségét, akkor azt tapasztaljuk, hogy a neutrondetektor egyre több neutront jelez. Ha a detektorban időegység alatt megszámlált neutronok számát *N*-nel jelöljük, ez arányos  $\varphi(t)$ -vel. (37.1) szerint így a  $-\rho$  reaktivitás 1/*N*-nel arányos. Ez az észrevétel a *kritikussági kísérlet* alapja: ha a 37.1. ábra mintájára ábrázoljuk 1/*N* értékét a reaktorban lévő hasadóanyag *M* tömegének a függvényében, a görbe az *M* tengelyt éppen a kritikus tömegnél fogja átmetszeni. Ha tehát a szubkritikus állapotokból 1/*N*  $\rightarrow$  0-ra extrapolálunk, akkor megtudhatjuk, mennyi hasadóanyag hiányzik még a kritikus tömegből. (Az extrapoláció eredményeit a 37.1. ábrán az A, B és C betűkkel jelöltük.) Ezen a módon a megszaladás<sup>67</sup> veszélye nélkül, biztonságosan tudjuk a reaktort kritikussá tenni.

<sup>&</sup>lt;sup>67</sup> Lásd 6.5. alfejezet.



37.1. ábra. Extrapoláció a kritikus tömeg meghatározására

Tekintve, hogy a reaktivitást mindig az N beütésszám reciprokára vezetjük vissza, ezt a mérési módszert "1/N módszer"-nek nevezzük. Ami a mérés közben a reaktorban történik, gyakran nevezzük *szubkritikus neutronsokszorozás*nak. Ennek megvilágítására alkalmazzuk erre a mérésre a 3.6. alfejezet végén követett heurisztikus gondolatmenetet. Ha a neutronforrás 1 s alatt S neutront juttat a reaktorba, akkor az  $\ell$  idő alatt bejutó neutronok száma  $S\ell$ . Újabb  $\ell$  idő elteltével ezek számát a reaktor  $k_{\text{eff}}$ -szeresére csökkenti, de a forrás termel újabb  $S\ell$  számú neutront, tehát  $2\ell$  idő elteltével összesen már

$$S\ell + S\ell k_{eff}$$

számú neutron van a reaktorban. Újabb  $\ell$  idő elteltével ezek számát a reaktor ismét  $k_{\text{eff}}$ -szeresére csökkenti, továbbá a forrás termel újabb  $S\ell$  számú neutront, és így tovább. Elegendően hosszú idő elteltével tehát a reaktorban

$$S\ell + S\ell k_{\rm eff} + S\ell k_{\rm eff}^2 + \dots = \frac{S\ell}{1 - k_{\rm eff}} = -\frac{S\Lambda}{\rho}$$
(37.2)

számú neutron lesz. (Kihasználtuk, hogy (36.4c) szerint  $\Lambda = \ell/k_{eff}$ .) Azt látjuk tehát, hogy a reaktor a forrás által termelt neutronok *S* számát a reaktivitással fordított arányban sokszorozza.<sup>68</sup>

Befejezésül rámutatunk a módszer alkalmazásának a korlátaira. A 3.6. alfejezetben követett levezetésből következik, hogy az itt szereplő *S* forráserősség valójában nem az, aminek eddig tekintettük: *S* a forrás tényleges  $S(\mathbf{r})$  térbeli eloszlásának az alapmódusra vonatkozó sorfejtési együtthatója. Nézzük meg ennek következményeit – például – a kritikussági kísérletre vonatkozóan, amelyben általában pontszerű neutronforrást használunk. Ahogy a reaktor méretét növeljük, változik az alapmódus térfüg-

<sup>&</sup>lt;sup>68</sup> Ezért szoktuk a szubkritikus reaktorokat *sokszorozó rendszerek*nek is nevezni.

gése, tehát változik maga *S* is. Továbbra is fennáll persze, hogy 1/*N* arányos a reaktivitással, de az arányossági tényező (*SA*) minden reaktorállapotban más. Mivel a kritikussági kísérletben csak azt használjuk ki, hogy 1/*N*  $\rightarrow$  0, amikor  $\rho \rightarrow$  0, azt gondolná az ember, hogy az arányossági tényező változása nem zavarja ezt a kísérletet. A gyakorlatban azonban mégis okozhat problémát. Amíg ugyanis az extrapolációs görbe alulról *konvex*, amint a *37.1. ábrá*n látható, az extrapoláció mindig a kritikus tömeg alábecslésére vezet, tehát a biztonság irányában téved. Ha azonban a forrás és a detektor egymáshoz viszonyított helyzetét szerencsétlenül választjuk meg, előfordulhat, hogy az extrapolációs görbe alulról *konkáv*. Ilyenkor – mint könnyen beláthatjuk – az extrapoláció a kritikus tömeg felülbecslésére vezet, ami már veszélyes és kerülendő. A reaktorok üzemviteli szabályzata általában tiltja a kritikussági kísérletnek ilyen feltételek között való végrehajtását. Addig kell próbálgatni a detektor helyét, amíg a görbe nem válik alulról konvexszé. A tapasztalat azt mutatja, hogy a detektort és a forrást a legjobb úgy elhelyezni, hogy közöttük legyen az aktív zóna.<sup>69</sup>

Tanulságos az 1/N módszer alkalmazhatóságát egy másik gyakori alkalmazás, a rúdkalibrálás esetében is megvizsgálni. E mérés célja a reaktivitásnak a szabályozórúd axiális helyzetének (z) a függvényében való meghatározása. Mivel a rúd két szélső helyzete között a reaktivitás általában dollár nagyságrendű, ezt a mérést nem lehet szuperkritikus állapotban elvégezni, hanem csak szubkritikus állapotban. Az 1/N módszer csak a *reaktivitással arányos* eredményt ad, tehát szükség van az arányossági tényezőnek más módszerrel való meghatározására. Tegyük fel, hogy az 1/N módszer-rel megmértük a

$$\rho(z) = -\frac{A}{N(z)}$$

függvényt, ahol N(z) a rúd z magasságánál mért beütésszám, és A a keresett arányossági tényező. Itt már felmerül a kérdés, A mennyiben tekinthető z-től függetlennek. Tegyük fel, hogy jó közelítéssel független. Értékét a következőképpen lehet meghatározni. Elmozdítunk egy *másik* szabályozórudat úgy, hogy a *vizsgált* rúdnak legyen olyan helyzete, amelynél a reaktor szuperkritikus. Kiválasztunk két ilyen rúdhelyzetet:  $z_1$  és  $z_2$ , és ezeknél a kétszerezési idő módszerével megmérjük a reaktivitást:  $\rho_1$ , illetve  $\rho_2$ . Ha azt is feltesszük, hogy az A tényezőt a másik rúd elmozdulása sem változtatja meg<sup>70</sup>, akkor írhatjuk:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{A}{N(z_2)} - \frac{A}{N(z_1)},$$

amiből A meghatározható. Ez a példa is mutatja, hogy az 1/N módszer alkalmazásához sok olyan feltevést kell tennünk, amelyek érvényességét csak korlátozottan, illetve csak további feltevésekkel tudjuk ellenőrizni.

<sup>&</sup>lt;sup>69</sup> Henger alakú reaktor esetében például jó eredményre szokott vezetni, ha a detektort és a forrást a vízszintes metszet egyik átmérőjének két ellentétes végén helyezzük el.

<sup>&</sup>lt;sup>70</sup> Ezt szubkritikus állapotokban végzett gondos mérésekkel – közelítőleg – ellenőrizni lehet.

A fentiekben tárgyalt két példa alapján az 1/N módszert csak tájékoztató jellegű mérésekhez tudjuk ajánlani. Ha a szubkritikus reaktivitást nagyobb igénnyel (például számításokkal való összehasonlítás céljából) kívánjuk megmérni, akkor vagy a pulzált neutronforrás módszerét, vagy valamilyen zajmódszert (lásd 3.8. alfejezet) célszerű alkalmaznunk.

#### Pulzált neutronforrás módszere szubkritikus reaktorban

A pulzált neutronforrás olyan eszköz, amely beállítható T időközönként egy rövid ideig (1–2  $\mu$ s) tartó neutroncsomagot juttat a reaktorba (37.2. *ábra*). Ha egy *időanalizátor* segítségével megmérjük a neutrondetektor által az egyes neutroncsomagokat követően mért beütésszámot, akkor a 37.2. *ábrá*n sematikusan ábrázolt  $\varphi(t)$  görbét kapjuk. Az időanalizátor minden neutroncsomag belövésekor újraindul, és a következőig számlálja a detektált neutronokat. Így az analizátor mindegyik csatornájában kapott beütésszám a mérés teljes tartama alatt belőtt összes neutroncsomagokat követően regisztrált beütésszámok összege. Nézzük meg, hogyan tudjuk ezt a mérési eredményt értelmezni és a reaktivitással összekapcsolni.



37.2. ábra. Mérés pulzált neutronforrással szubkritikus reaktorban

Egyetlen neutroncsomagot követően a (t, t+dt) időintervallumban (vagyis az időanalizátor egyik csatornájában) regisztrált neutronok számát (36.7a) szerint a

$$\sum_{j=0}^{6} \varphi_j \mathrm{e}^{\omega_j t} \mathrm{d}t$$

összeg adja meg, ahol az  $\omega_j$  időállandók a (36.5) reciprokóra-egyenlet gyökei. Az analizátor kiszemelt csatornájában ehhez hozzáadódnak a korábbi neutroncsomagok járulékai, amelyeket a neutronforrás a *T* ciklusidő egész számú többszöröseivel korábban lőtt be a reaktorba:

$$\varphi(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{0} \sum_{j=0}^{6} \varphi_{j} e^{\omega_{j}(t+nT)} dt = \sum_{j=0}^{6} \frac{\varphi_{j}}{1-e^{\omega_{j}T}} e^{\omega_{j}t} dt.$$
(37.3)

Látható, hogy az időanalizátorban kapott eredmény ugyanazoknak az exponenciális függvényeknek a lineáris kombinációja, amelyekkel más reaktorkinetikai mérések esetében is találkoztunk. Megmutatjuk, hogy *T* alkalmas megválasztásával ebből meg lehet határozni a reaktivitást.

A 36.1. *ábrá*ról leolvasható, hogy  $\rho < 0$  esetén a legnagyobb abszolút értékű időállandó  $\omega_{b}$ , amelyről belátható, hogy minden *i*-re<sup>71</sup>:

$$-\omega_6 >> \lambda_i,$$
 (*i* = 1, 2, ..., 6).

Ezt (36.5)-ben figyelembe véve jó közelítéssel írhatjuk:

$$\omega_6 \approx -\frac{\beta}{\Lambda} \left( 1 - \frac{\rho}{\beta} \right). \tag{37.4}$$

Ebből következik, hogy kritikus állapotban

$$\omega_6^{\text{krit.}} = -\frac{\beta}{\Lambda},\tag{37.5}$$

amivel a reaktivitást a

$$-\frac{\rho}{\beta} = \frac{\omega_6 - \omega_6^{\text{krit.}}}{\omega_6^{\text{krit.}}}$$
(37.6)

képlet adja meg. Ha sikerülne  $\omega_6$ -ot a vizsgált szubkritikus állapotban és a kritikus állapotban megmérnünk, meg tudnánk határozni a reaktivitást.

T-t úgy választjuk meg, hogy teljesüljenek az

$$|\omega_6 T| >> 1$$
, de  $|\omega_j T| << 1$ ,  $(j = 0, 1, ..., 5)$  (37.7)

egyenlőtlenségek. Ekkor minden neutroncsomag után (37.3)-ban a j = 6 tag a következő impulzus érkezéséig gyakorlatilag eltűnik, viszont a j < 6 tagok ezalatt alig változnak. Így (37.3)-at a következő módon közelíthetjük:

$$\varphi(t)dt \approx \varphi_6 e^{\omega_6 t} dt + \sum_{j=0}^5 \frac{\varphi_j}{-\omega_j T} e^{\omega_j t} dt \approx \varphi_6 e^{\omega_6 t} dt + b dt .$$
(37.8)

Az időanalizátor által mért görbére tehát egy exponenciálisan csökkenő tag és egy "háttér" (*bdt*) összegét lehet illeszteni. Ennek alapján  $\omega_{b}$  értéke meghatározható. Ha ezt a mérést a reaktor különböző állapotaiban (például egy szabályozórúd különböző helyzeteiben) elvégezzük,  $\omega_{b}$  értékeit a kritikus rúdhelyzetre extrapolálva meghatározhatjuk  $\beta/\Lambda$  értékét [vö. (37.5)], amiből (37.6) alapján megkapjuk a reaktivitást. Ezt a mérési módszert *Simmons és King módszeré*nek nevezzük.

<sup>&</sup>lt;sup>71</sup> A *36.1. ábrá*n ez nem nyilvánvaló, mert az ábra torzít. Világosabban látszik viszont a *36.3. táblázat*ból.

A pulzált neutronforrással végzett mérésnek van egy olyan kiértékelési módja is, amely nem igényli  $\omega_6$  értékének a kritikus állapotra való extrapolációját. Ez nagy könnyebbség, mert így a reaktivitást *egyetlen* mérésből is megkaphatjuk. A fentiek szerint az időanalizátor által mért görbében világosan elkülöníthető egy állandó tag (*b*) és egy gyorsan csökkenő tag. Mivel az előbbit azokhoz az  $\omega_j$  sajátértékekhez rendeltük, amelyek a 36.1. ábrán a  $\lambda_i$  későneutron-időállandók nagyságrendjébe esnek, ezt a tagot *késő járulék*nak szoktuk nevezni – szemben a *prompt járulék*nak nevezett másik taggal. Ha kiszámítjuk a két tag alatti

$$A_{\rm p} = \int_{0}^{T} \varphi_6 \mathrm{e}^{\omega_6 t} \mathrm{d}t = \varphi_6 \frac{\mathrm{e}^{\omega_6 T} - 1}{\omega_6} \approx -\frac{\varphi_6}{\omega_6} \qquad \text{és} \qquad A_{\rm d} = bT$$
(37.9)

területeket,<sup>72</sup> akkor a reaktivitást a két terület aránya adja:

$$-\frac{\rho}{\beta} = \frac{A_{\rm p}}{A_{\rm d}}.\tag{37.10}$$

A reaktivitásnak ezt a meghatározási módját *Sjöstrand-módszer*nek nevezzük. Az alapjául szolgáló (37.10) összefüggést két úton is levezetjük. Az első, a bonyolultabb levezetés a pontkinetikai egyenletrendszeren alapul, a második pedig heurisztikus megfontolásokon. A kettő együtt teszi lehetővé a módszer lényegének a megértését.

Ha a (37.3) alatti összeget a [0, T] intervallumban integráljuk, akkor a j = 6 tag adja a prompt területet, a többi tag pedig a késő területet. Az előbbit (37.9)-ben már felírtuk, az utóbbi pedig a következő:

$$A_{\rm d} = \sum_{j=0}^{5} \int_{0}^{T} \frac{\varphi_{j}}{1 - e^{\omega_{j}T}} e^{\omega_{j}t} dt = -\sum_{j=0}^{5} \frac{\varphi_{j}}{\omega_{j}} = bT, \qquad (37.11)$$

ahol figyelembe vettük (37.8)-at. (37.10) belátásához észrevesszük, hogy – a mért görbe alatti terület szempontjából – az ismétlődő neutroncsomagok helyettesíthetők egyetlen neutroncsomaggal, amelyet nem a (0, *T*), hanem a (0,  $+\infty$ ) intervallumban figyelünk meg. Vegyük ugyanis (37.3) valamelyik tagjának a (0, *T*) intervallumra vonatkozó integrálját:

$$\int_{0}^{T} \frac{\varphi_{j}}{1 - e^{\omega_{j}T}} e^{\omega_{j}t} dt = -\frac{\varphi_{j}}{\omega_{j}} = \int_{0}^{\infty} \varphi_{j} e^{\omega_{j}t} dt, \qquad (j = 0, 1, ..., 6).$$

T

Ennek értelmében tehát a mérést úgy is tekinthetjük, mint amelyben egyetlen neutroncsomagot lövünk a reaktorba, de annak hatását végtelen ideig mérjük. Ebben az esetben jogos feltételezni, hogy a neutroncsomag belövése előtt a reaktorban nincsenek későneutron-anyamagok, vagyis

<sup>&</sup>lt;sup>72</sup> A "d" index az angol "delayed" (= késő) szóra utal. Ez a jelölés már a magyar nyelvű irodalomban is meghonosodott.

$$C_i(t)\Big|_{t=0} = 0,$$
 (*i* = 1, 2, ..., 6). (37.12)

A (36.6) és (36.7) képletek alapján írhatjuk:

$$C_i(t) = \sum_{j=0}^6 \frac{\beta_i \varphi_j / \Lambda}{\lambda_i + \omega_j} e^{\omega_j t}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6),$$

amivel a (37.12) kezdőfeltétel a következőt jelenti:

$$0 = \sum_{j=0}^{6} \frac{\beta_i \varphi_j / \Lambda}{\lambda_i + \omega_j}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6)$$

Ha figyelembe vesszük, hogy  $-\omega_6 >> \lambda_i$ , ezt az alábbi módon lehet átrendezni:

$$-\frac{\beta_i \,\varphi_6/\Lambda}{\omega_6} = \sum_{j=0}^5 \frac{\beta_i \,\varphi_j/\Lambda}{\lambda_i + \omega_j}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6).$$

Ha ezt *i*-re összegezzük, és figyelembe vesszük (37.9)-et és (37.11)-et, továbbá a mindegyik  $\omega_i$ -re érvényes (36.5) egyenletet, az eredmény:

$$A_{\rm p}\frac{\beta}{\Lambda} = \sum_{j=0}^{5} \frac{\varphi_j}{\Lambda} \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\lambda_i + \omega_j} = \sum_{j=0}^{5} \varphi_j \left(\frac{\rho}{\Lambda \omega_j} - 1\right) \approx \frac{\rho}{\Lambda} \sum_{j=0}^{5} \frac{\varphi_j}{\omega_j} = -\frac{\rho}{\Lambda} A_{\rm d},$$

amiből következik (37.10). Az utóbbi képletekben kihasználtuk, hogy  $\Lambda$  nagyságrendje 10<sup>-5</sup> s, viszont az  $\omega_j$  mennyiségek  $j \le 5$ -re a későneutron-anyamagok időállandóinak a nagyságrendjébe esnek (vö. 36.2. táblázat), és emiatt  $\Lambda \omega_j \ll 1$ . Ezért tehettük meg a zárójelben a  $\rho/\Lambda \omega_j \gg 1$  elhanyagolást.<sup>73</sup>

A második, heurisztikus gondolatmenet lényegesen egyszerűbben vezet el (37.10)-hez. A fentiekben prompt és késő területnek nevezett mennyiségek ( $A_p$ , illetve  $A_d$ ) az  $\omega_j$  sajátértékek nagyságrendje szerint szétválasztott tagok összegei, de – nevükkel ellentétben – szigorúan véve nem rendelhetők hozzá a prompt, illetve késő neutronokhoz. Nos, az alábbi heurisztikus gondolatmenetben ezeket a neveket mégis szó szerint vesszük. Ha a pulzált neutronforrás egy csomagban *S* számú neutront juttat a reaktorba, akkor (37.2) szellemében ebből

$$S + Sk_{\text{eff}} + Sk_{\text{eff}}^2 + \ldots = \frac{S}{1 - k_{\text{eff}}}$$

 $<sup>^{73}</sup>$  Ez nyomottvizes reaktorokra érvényes. Ennél nagyobb  $\Lambda$  értékek is előfordulnak, de azok nagyságrendje sem haladja meg a  $10^{-3}$  s-ot.

számú neutron marad meg a reaktorban. Mivel ez a prompt és késő neutronokat együttesen jelenti, ez a mennyiség ( $A_p + A_d$ )-vel arányos. Ha csak a prompt neutronok által okozott neutronsokszorozást vesszük figyelembe, akkor ehelyett

$$\frac{S}{1-(1-\beta)k_{\rm eff}}$$

adódik, ami A<sub>p</sub>-vel arányos. Vegyük a kettő hányadosát:

$$\frac{A_{\rm p} + A_{\rm d}}{A_{\rm p}} = \frac{1 - (1 - \beta)k_{\rm eff}}{1 - k_{\rm eff}}$$

amiből egyszerűen következik (37.10). Ezt a gondolatmenetet azért mutattuk meg, hogy érzékeltessük: a kis abszolút értékű  $\omega_j$  időállandókhoz tartozó tagok egy bizonyos értelemben valóban hozzárendelhetők a késő neutronokhoz.

A pulzált neutronforrás módszere a szubkritikus reaktivitások mérésének legjobb módszere. A pontkinetikai egyenletrendszer keretében csak annyiban közelítő, amennyiben  $\omega_6$  abszolút értéke sokkal nagyobb, mint a  $\lambda_i$  időállandók, ami gyakorlatilag minden reaktortípusra érvényes. A módszer alkalmazásának viszont korlátot szab a pontkinetikai egyenletrendszer érvényessége. Néhány dollárt meghaladó abszolút értékű reaktivitások esetében már olyan tér- és energiafüggő effektusok lépnek fel, amelyek a módszert problematikussá teszik. (Lásd a fejezet végén.)

### Inverz kinetika

A reaktivitásmérésnek egyéb módszerei is vannak: rúdejtéses módszer, a forrás kirántásának módszere stb., amelyek mind a pontkinetikai egyenlet speciális körülmények között való közelítő megoldásain alapulnak. Például, egy szabályozórúd felső és alsó véghelyzete közötti reaktivitáskülönbséget (a rúd értékességét) a következő egyszerű módon lehet megmérni: kihúzott rúddal kritikus állapotból kiindulva hirtelen a reaktorba ejtjük a rudat, amit követően a fluxus értéke gyorsan egy kisebb, közelítőleg állandó értékre áll be. Az utóbbi állapotban és a kiindulási állapotban mért beütésszámok hányadosa megadja a keresett reaktivitást. Aki ilyen mérést csinált, tudja, milyen nehéz eldönteni, a rúdejtés után mi az az "állandó" beütésszám, amellyel osztania kell. Ennek az az oka, hogy a késő neutronok miatt a fluxus csökkenése csak lelassul, de állandó értékről nem beszélhetünk. Ezeken a nehézségeken segít az inverz kinetika, amely akkor vált alkalmazhatóvá, amikor a reaktorokhoz számítógépet lehetett csatlakoztatni. Természetesen ennek sem jobb a pontossága, mint magáé a pontkinetikai egyenleté. Egyszerűsége folytán nagyon népszerű a gyakorlat emberei körében. Aki ismeri a módszer korlátait, annak kezében valóban nagyon hasznos eszköz.

Az *inverz kinetika* módszerének lényege a következő: egy neutrondetektorral a *t* idő függvényében mérjük  $\varphi(t)$ -t, és keressük azt a  $\rho$  reaktivitást, amely mellett a mért függvény éppen a (36.3) alatti pontkinetikai egyenlet megoldása. A 3.6. alfejezetben az egyenlet megoldását adott  $\rho$  reaktivitás mellett kerestük, aminek most éppen a fordítottja történik. Az algoritmus a következő. A későneutron-anyamagok koncentrációját kifejezhetjük  $\varphi(t)$ -vel, ha a (36.3b) egyenletet *t* szerint integráljuk:

$$C_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^t \varphi(t') \,\mathrm{e}^{-\lambda_i(t-t')} \mathrm{d}t', \qquad (37.13)$$

amint ezt közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Mivel a módszert általában a kritikus állapothoz közel szoktuk alkalmazni, az *S* külső forrást elhagytuk. (A módszer kiterjeszthető forrásos, szubkritikus állapotokra is, de ennek részleteibe nem megyünk bele.) Ezzel az időben esetleg változó  $\rho(t)$  reaktivitást a következő képlettel számítjuk ki:

$$\frac{\rho(t)}{\beta} = 1 + \frac{\frac{\Lambda}{\beta} \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} - \sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i}{\beta} \lambda_i \int_{-\infty}^{t} \varphi(t') \,\mathrm{e}^{-\lambda_i(t-t')} \mathrm{d}t'}{\varphi(t)}.$$
(37.14)

Ezt a képletet úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbben, hogy a (36.3a) egyenletben szereplő  $C_i(t)$  függvényt (37.13)-ból behelyettesítettük, majd az így kapott egyenletet  $\rho$ -ra megoldjuk. Látjuk, hogy ez a módszer a reaktivitást dollár egységekben adja meg. Alkalmazásához ismerni kell a  $\Lambda/\beta$  és a  $\beta_i/\beta$  hányadosokat. Az előbbi mérését a pulzált neutronforrás módszerével végezhetjük el, a  $\beta_i/\beta$  hányadosok pedig lényegében magfizikai adatoknak tekinthetők, de – ha szükséges – a 7.5. alfejezet szerint ki is számíthatjuk őket. A (37.14) számlálójában szereplő –∞ integrálási határt a mérésben úgy vehetjük a leghelyesebben figyelembe, hogy a mérés megkezdése előtt a reaktor kritikus állapotában elegendően hosszú ideig (általában néhány percig) folyamatosan mérjük a  $\varphi(t)$  függvényt, és csak ezután visszük be a reaktorba a mérendő  $\rho(t)$  reaktivitást. Az így szervezett mérés kezdetét megelőző idő járuléka már elhanyagolható. Erről úgy győződhetünk meg, hogy a tényleges mérés megkezdése előtt a módszer tartósan  $\rho = 0$ -t ad.

### Térfüggő effektusok

A fentiekben ismertetett reaktivitásmérési módszereket az alábbi *térfüggő effektusok* zavarják:

- 1. Az inverz kinetikai módszerben az az ok, amely változtatja a mérendő reaktivitást, általában befolyásolja a fluxus térbeli eloszlását. Gondoljunk például egy szabályozórúd elmozdulására, amely a reaktor egészére kiterjedően megváltoztatja a térbeli eloszlás *alakját*. A (37.14)-ben szereplő  $\varphi(t)$  függvény tehát nem csak a reaktivitás *globális* hatását, hanem az alakfüggvény *lokális* megváltozását is tükrözi.
- Amikor szubkritikus állapotban megfigyeljük az ωkinetikus sajátértékeket, az ω/ν időabszorpciós hatáskeresztmetszet megjelenése miatt megváltozik a neutronspektrum. (Általában lágyul.) Emiatt vΣ<sub>f</sub>v csökken, vagyis a Λ generációs idő nő [vö. (36.4c)]. Ez elsősorban Simmons és King módszerének érvényességét korlátozza [vö. (36.5) és (37.6)].

3. A pulzált neutronforrás módszerében az időabszorpciós hatáskeresztmetszet lényegesen különbözik a prompt és késő területekre vonatkozóan. Emiatt  $A_p$  és  $A_d$  térfüggése jelentősen eltér. Ez a *kinetikus torzulás* jelensége, amelyet csak részletes számításokkal lehet korrekcióba venni. Az effektus a Sjöstrand módszer legfőbb korlátja, amely mély szubkritikusságok ( $\rho/\beta < -5$ \$) esetében okoz problémát.

# 3.8. Ingadozási jelenségek

A transzportegyenlet által leírt folyamatok valójában sztochasztikus folyamatok, így maga a transzportegyenlet csak ezek statisztikai átlagát képes megadni. Tulajdonképpen a reaktorban lejátszódó jelenségek legtöbbje valószínűségi törvényeket követ:

- a hasadásokban keletkező neutronok  $\nu$  száma, energiája és sebességük iránya;
- a külső neutronforrás által a reaktorba juttatott neutronok száma, energiája és sebességük iránya;
- egy adott sebességgel, adott irányban repülő neutron által ütközés nélkül megtett út hossza;
- egy ütközésben történő magreakció fajtája (szóródás, abszorpció stb.);
- a szóródott neutron energiája és sebességének iránya.

A felsorolást lehetne tovább folytatni. A könyv többi fejezetében e mennyiségeket meghatározó valószínűségi törvényekről részletesen van szó, ami alól egyetlen kivétel a hasadásokban keletkező neutronok  $\nu$  száma. Ezt pótoljuk a 38.1. ábrán, amelyen az <sup>235</sup>U hasadására mutatjuk be annak  $p_{\nu}$  valószínűségét, hogy egy hasadásban  $\nu$  neutron keletkezzen. Ha erre az eloszlásra  $\nu$ -t átlagoljuk, akkor

$$\overline{\nu} = \sum_{\nu=0}^{5} \nu p_{\nu} = 2,433$$

adódik. A 38.1. ábrán mutatott eloszlás jól közelíthető Bernoulli-eloszlással:

$$p_{\nu} \approx {\binom{m}{\nu}} \left(\frac{\overline{\nu}}{m}\right)^{\nu} \left(1 - \frac{\overline{\nu}}{m}\right)^{m-\nu},$$

ahol *m* az eloszlás maximuma. (A 38.1. *ábra* esetében m = 5.)

Ebben az alfejezetben  $\nu$  jelentése más, mint a könyv többi részében. Ott a fenti átlagértéket jelöltük  $\nu$ -vel, itt viszont valószínűségi változó, amelynek az átlagát felülhúzással kellett jelölnünk. Ez a jelölési következetlenség erre az egyetlen alfejezetre korlátozódik. Arra vezethető vissza, hogy a zajok vizsgálata a reaktorfizikának mindig egy kicsit különálló fejezete volt, így ott a többi fejezettől eltérő jelölések alakulhattak ki.



*38.1. ábra.* Az <sup>235</sup>U hasadásában keletkező neutronok *v* számának valószínűségi eloszlásfüggvénye

A felsorolt mennyiségek sztochasztikus jellege miatt a neutronfluxus és a neutronsűrűség, valamint minden belőlük származtatott mennyiség értéke a transzportegyenlet által meghatározott átlag körül ingadozik. Ezeket az ingadozásokat – az elektronikus zajjal való analógia alapján – *reaktorzaj*nak nevezzük. Egy reaktorban vannak technológiai eredetű zajok is: véletlenszerűen ingadozhat számos paraméter (szabályozórudak helyzete, a hűtőközegben levő buborékok száma, hőmérséklet stb.), ami szintén okozhatja a neutronfluxus ingadozását. A kétféle zaj megkülönböztetésére szoktuk a *neutronzaj* vagy *nukleáris zaj*, illetve a *technológiai zaj* kifejezéseket használni. Mindkét fajta zaj kísérleti vizsgálata számos információt szolgáltat a reaktorra, illetve a zaj forrására vonatkozóan. E könyv keretei között mindkét jelenségkör tekintetében csak a leglényegesebb ismeretek előadására van lehetőség. A neutronzaj területéről ismertetjük a *Rossi-α* és *Feynman*-kísérleteket, a másik területről pedig a reaktor *átviteli függvény*ét.

#### Rossi-*akísérlet*

A *Rossi-\alpha kísérlet* sokban emlékeztet a pulzált neutronforrással végzett kísérletekre (lásd a 3.7. alfejezetben). Az utóbbiakkal kapcsolatban megbeszéltük, hogy a pulzált forrás által egy szubkritikus reaktorba juttatott neutroncsomagot követően a fluxus a

$$\varphi(t) = \varphi_6 \mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{38.1}$$

képlet szerint csökken, ha a késő neutronokat elhanyagoljuk. (38.1)-ben  $\alpha = -\alpha_6$ , vagyis a (36.5) egyenlet gyökének a negatívja.<sup>74</sup>

 $<sup>^{74}</sup>$  A neutronzaj irodalmában a promptneutron-időállandó bevett jelölése  $-\alpha$ . A jelen fejezetben ehhez tartjuk magunkat.



38.2. ábra. A Rossi-α kísérlet vázlata

A kísérlet vázlata a 38.2. *ábrá*n látható. Ha a szubkritikus reaktorban egy időben állandó neutronforrás található, akkor a forrás által termelt neutronok némelyike elindít egy-egy hasadási láncot. Mivel a neutronforrás időben állandó, bármely kiszemelt pillanatban az egymással párhuzamosan fejlődő hasadási láncok számának a várható értéke állandó. Ha a reaktorba helyezünk egy neutrondetektort, az általa időegység alatt detektált neutronok számának várható értéke is állandó lesz. Tegyük fel, hogy az egyik detektált neutron elindít egy időanalizátort, majd ezt követően az időanalizátor megszámlálja az egyes csatornákban detektált neutronok számát. Az analizálási ciklus<sup>75</sup> végén az analizátor vár, amíg a következő detektált neutron újra el nem indítja. A kísérlet értelmezéséhez szükségünk lesz még a *detektor \varepsilon hatásfokára*, amelyet a neutronzajok elméletében másképp definiálunk, mint a nukleáris méréstechnikában szokás:

$$\varepsilon = \frac{N}{F},\tag{38.2}$$

ahol N a *detektált neutronok*, F pedig az egész reaktorban történő *hasadások* száma. Mindkét mennyiség az időegységre vonatkozik. A nukleáris méréstechnikában a detektor hatásfoka az időegység alatt detektált neutronok száma osztva a detektor helyén fennálló *neutronfluxus*sal. A (38.2) szerinti  $\varepsilon$  ezzel is arányos, de egyéb tényezők is befolyásolják: függ a detektor helyén fennálló neutronfluxusnak és az egész reaktorban történő hasadások számának az arányától.

Legyen a tekintett analizálási ciklus kezdete a  $t_1$  időpont, és keressük annak a valószínűségét, hogy a  $(t_2, t_2+dt_2)$  intervallumban  $(t_2 > t_1)$  a detektor egy további neutront jelez. Két eset lehetséges: (1) az utóbb detektált neutron ugyanahhoz a hasadási lánchoz tartozik, mint az analizálási ciklust elindító neutron, vagy (2) egy attól független hasadási lánchoz tartozik. Az előbbi esetben *korrelált*, az utóbbi esetben pedig *korrelálatlan neutronok*ról beszélünk.

 $<sup>^{75}</sup>$  Analizálási ciklusnak azt az időtartamot nevezzük, amely alatt – az indítást követően – az időanalizátor a detektált neutronokat számlálja. Ha például az analizátor csatornaszélessége 10 μs és a csatornák száma 1024, akkor az analizálási ciklus az indítás pillanatát követő 1024·10 μs = 10,24 ms.

Nézzük először, milyen valószínűséggel detektálunk egy korrelált neutronpárt.<sup>76</sup> Meghatározásának megvan a sztochasztikus folyamatokon alapuló szigorú elmélete [21]. Az alábbiakban ugyanezt egy heurisztikus gondolatmenettel fogjuk levezetni, amelyben a következő egyszerűsítést vezetjük be. A kezdeti időpontban legyen a reaktorban *n* számú neutron. A (38.1) képlet alapján ekkor *t* idő múlva  $ne^{-\alpha t}$  számú neutron lesz a reaktorban. Az egyszerűsítés abban áll, hogy az itt szereplő exponenciális tényezőt valószínűségként értelmezzük: annak a valószínűsége, hogy egy neutronnak *t* idő elteltével még van utóda a reaktorban.

Legyen  $t_0$  az az időpont, amikor az a hasadási lánc indult, amelyhez a korrelált neutronpár tartozik. Annak valószínűsége, hogy a ( $t_0$ ,  $t_0$ +d $t_0$ ) intervallumban egy hasadás történik, ÉS ebben a hasadásban  $\nu$  számú neutron keletkezik:

$$P_0 \mathrm{d}t_0 = p_V F \mathrm{d}t_0. \tag{38.3}$$

Keressük meg ezután annak a valószínűségét, hogy a  $(t_1, t_1+dt_1)$  intervallumban e  $\nu$  számú neutron *utódai* közül valamelyik jelet vált ki a detektorban. A mondottak szerint e<sup> $-\alpha(t_1-t_0)$ </sup> annak a valószínűsége, hogy ezek egyikének a  $t_1$  időpontban még van utóda. Ez  $\Sigma_{\rm f} v dt_1$  valószínűséggel vált ki hasadást, amit *e*-nal szorozva kapjuk a detektálás valószínűségét. Mivel  $\nu$  neutronnal indult a lánc, a keresett valószínűség:

$$P_{1}dt_{1} = v e^{-\alpha(t_{1}-t_{0})} \varepsilon \Sigma_{f} v dt_{1} = v e^{-\alpha(t_{1}-t_{0})} \frac{\varepsilon(1-\beta)dt_{1}}{\overline{v}_{p}\Lambda}, \qquad (38.4)$$

ahol  $\Lambda$  a (36.4c) képlettel definiált generációs idő. Mivel (38.4)-ben csak a prompt neutronokról van szó, a képletben a prompt neutronokra utaló "p" indexet alkalmaztuk. Hasonló megfontolással kapjuk annak a valószínűségét is, hogy a detektor a  $(t_2, t_2+dt_2)$  intervallumban is jelez egy neutront ugyanebből a láncból:

$$P_2 dt_2 = (\nu - 1) e^{-\alpha(t_2 - t_0)} \varepsilon \Sigma_f \nu dt_2 = (\nu - 1) e^{-\alpha(t_2 - t_0)} \frac{\varepsilon (1 - \beta) dt_2}{\overline{\nu}_p \Lambda}.$$
 (38.5)

Itt *v*-ből levontuk azt a neutront, amelynek az utódját a  $dt_1$  intervallumban jelezte a detektor.

 $P_1$  és  $P_2$  feltételes valószínűségek a  $P_0$ , illetve a  $P_0$  ÉS  $P_1$  feltételekkel, tehát a neutronpár detektálásának a valószínűségét a

$$\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\sum_{V}\int_{-\infty}^{t_1}P_0P_1P_2\mathrm{d}t_0$$

képlet adja meg. A  $\nu$ -re való összegzés a  $\nu(\nu-1)$  szorzatra vonatkozik:

<sup>&</sup>lt;sup>76</sup> Annak a valószínűsége elhanyagolható, hogy egy korrelált neutronhármast, -négyest, ... detektálunk.

$$\sum_{\nu} \nu (\nu - 1) p_{\nu} = \overline{\nu_p^2} - \overline{\nu}_p.$$

Az egyértelműség kedvéért itt jeleznünk kellett, hogy az átlagok a prompt neutronokra vonatkoznak. A  $t_0$ -ra vonatkozó integrálást egyszerűen elvégezhetjük, és így a végeredmény:

$$dt_1 dt_2 \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{t_1} P_0 P_1 P_2 dt_0 = F \frac{\varepsilon^2 (1-\beta)^2}{2\alpha A^2} \frac{v_p^2 - \overline{v}_p}{\overline{v}_p^2} e^{-\alpha (t_2 - t_1)} dt_1 dt_2.$$

A korrelálatlan neutronpárok detektálásának a valószínűsége egyszerűen

$$(\varepsilon F dt_1) \cdot (\varepsilon F dt_2) = \varepsilon^2 F^2 dt_1 dt_2$$

Két utóbbi eredményünket összeadva kapjuk annak a valószínűségét, hogy a detektor egy neutronpárt jelezzen a  $(t_1, t_1+dt_1)$  és  $(t_2, t_2+dt_2)$  intervallumokban:

$$P(t_1, t_2) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \varepsilon F \left[ \varepsilon F + \frac{\varepsilon (1 - \beta)^2}{2\alpha \Lambda^2} \frac{\overline{v_p^2} - \overline{v}_p}{\overline{v}_p^2} \mathrm{e}^{-\alpha(t_2 - t_1)} \right] \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2.$$
(38.6)

A  $v_p$  átlagát tartalmazó tényezőt a 38.1. ábrán mutatott eloszlásra kiszámolva

$$\frac{\overline{\mathbf{v}_p^2} - \overline{\mathbf{v}}_p}{\overline{\mathbf{v}_p^2}} = 0,795 \tag{38.7}$$

adódik. Ezt *Diven-tényező*nek nevezzük, amely az (~1–2%) mérési bizonytalanságon belül más hasadó izotópokra is ugyanennyi.

A (38.6) képlet alapján közvetlenül értelmezni tudjuk a Rossi- $\alpha$  kísérletet. Mindegyik analizálási ciklus a mindenkori  $t_1$  időpillanatban kezdődik. Az időanalizátor számára ez a kezdeti időpont. Ha az analizátor *i*-edik csatornája a  $t_i$  időpontban kezdődik, és a csatornaszélesség  $\Delta t$ , akkor  $P(0,t_i)\Delta t$  adja meg annak a valószínűségét, hogy ebben a csatornában érkezik egy detektált neutron. Az *i*-edik csatornában mért  $N_i$ beütésszám Bernoulli-eloszlást követ, továbbá a különböző csatornákhoz tartozó beütésszámok statisztikailag függetlenek, hiszen elhanyagolható annak a valószínűsége egy analizálási ciklusban egynél több csatornában kapjunk beütést. Ennek alapján könnyen elvégezhetjük a mérés kiértékelését. Például az *i*-edik csatornában mért beütésszám várható értéke

$$\mathbf{M}(N_i) = NP(0, t_i)\Delta t = a + b\mathrm{e}^{-\alpha t_i}, \qquad (38.8)$$

ahol *a* és *b* a (38.6) képlet alapján meghatározható paraméterek. Függvényillesztéssel tehát az  $\alpha$  időállandó a Rossi- $\alpha$  kísérletből meghatározható. Az így kapott érték

ugyanúgy felhasználható a reaktivitás mérésére, mint a pulzált neutronforrás segítségével kapott  $\alpha_b$  mennyiség, hiszen (37.4) alapján

$$\alpha \approx \frac{\beta}{\Lambda} \left( 1 - \frac{\rho}{\beta} \right).$$

A Rossi- $\alpha$  kísérlet elvégzése nagy körültekintést igényel. (38.6)-ból látszik, hogy csak akkor lehet eredményes a mérés, ha a korrelált neutronpárok járuléka  $\varepsilon F$ hez képest jelentős. Mivel az előbbi független F-től, a kísérletet célszerű minél kisebb neutronfluxus mellett végezni. A leggyakrabban nincs is szükség külső neutronforrásra, mert elegendők az urán spontán hasadása által termelt neutronok. Ha a reaktorban számottevő  $\gamma$ -sugárzás van, akkor feltétlenül gondoskodni kell ennek kiszűréséről. Ennek legjobb módja a jelalak-diszkrimináció, ugyanis a másik megoldás, a detektor árnyékolása csökkentheti  $\varepsilon$ -t.

### A Feynman-kísérlet

A Rossi- $\alpha$  kísérletet leíró (38.6) egyenlet mutatja, hogy egy adott idő alatt detektált neutronok száma nem követi a Poisson-eloszlást. Ha ugyanis a detektált neutronok egymásutánja Poisson-folyamat lenne, akkor a  $P(t_1,t_2)$  valószínűség  $t_1$ -től és  $t_2$ től független lenne. Ezen az észrevételen alapul a *Feynman-kísérlet*. A Poissoneloszlás jellemzője, hogy egy tetszőleges  $\Delta t$  idő alatt detektált neutronok  $N(\Delta t)$  számának a szórásnégyzete egyenlő a várható értékével. Mivel reaktor esetében az eloszlás más, várható, hogy a szórásnégyzet és a várható érték hányadosa 1-től eltér. Megmutatjuk, hogy ez valóban így is van.

Annak a valószínűsége, hogy a  $(t_1, t_1+dt_1)$  és  $(t_2, t_2+dt_2)$  intervallumokban egy neutronpárt detektálunk, a (38.6) képlet szerinti  $P(t_1,t_2)dt_1dt_2$ . Mivel végtelenül kicsi mennyiségről van szó, a párok száma csak 0 vagy 1 lehet. Emiatt  $P(t_1,t_2)dt_1dt_2$  egyben megadja a párok számának a várható értékét is. Legyenek a  $(t_1, t_1+dt_1)$  és  $(t_2, t_2+dt_2)$ intervallumok a  $[0, \Delta t]$  intervallum részei. Ha a  $[0, \Delta t]$  intervallumban N számú neutront detektálunk, közülük N(N-1)/2 számú párt lehet képezni. E szám várható értékét megkapjuk, ha az összes lehetséges  $(t_1, t_1+dt_1)$  és  $(t_2, t_2+dt_2)$  intervallumokra összegezzük  $P(t_1,t_2)dt_1dt_2$ -t:

$$\mathbf{M}\left(\frac{N(N-1)}{2}\right) = \frac{\mathbf{M}(N^2) - \mathbf{M}(N)}{2} = \int_{0}^{\Delta t} dt_2 \int_{0}^{t_2} P(t_1, t_2) dt_1.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy  $M(N) = \varepsilon F \Delta t$ , továbbá az integrált (38.6) alapján kiszámítjuk, a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{M}(N^{2})-\mathrm{M}(N)^{2}}{\mathrm{M}(N)}=1+\frac{\varepsilon(1-\beta)^{2}}{\alpha^{2}\Lambda^{2}}\frac{\overline{v_{p}^{2}}-\overline{v}_{p}}{\overline{v}_{p}^{2}}\left(1-\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\Delta t}}{\alpha\Delta t}\right).$$

A számláló nem más, mint N szórásnégyzete. A jobb oldalon álló kifejezést kissé átalakítjuk. (37.4)-ből következik, hogy

$$\alpha^2 \Lambda^2 = \omega_6^2 \Lambda^2 = \beta^2 \left( 1 - \frac{\rho}{\beta} \right)^2$$

Végeredményünk tehát a következő:

$$\frac{\mathrm{D}^{2}(N(\Delta t))}{\mathrm{M}(N(\Delta t))} = 1 + \frac{\varepsilon}{\beta^{2}} \frac{(1-\beta)^{2}}{(1-\rho/\beta)^{2}} \frac{\overline{v_{\mathrm{p}}^{2}} - \overline{v}_{\mathrm{p}}}{\overline{v_{\mathrm{p}}^{2}}} \left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\Delta t}}{\alpha\Delta t}\right).$$
(38.9)

Ha ezt a mérést  $\Delta t$  különböző értékei mellett elvégezzük, szintén megkaphatjuk  $\alpha$  értékét. A levezetésből következik, hogy ez ugyanaz az időállandó, amelyet a Rossi- $\alpha$  kísérletből is megkaphatunk.

Ha ismerjük a  $\rho/\beta$  reaktivitást, akkor a Feynman-kísérletből megkaphatjuk az  $\varepsilon/\beta^2$  hányadost is. Ez azt jelenti, hogy  $\beta$  ismeretében ebből  $\varepsilon$ -t becsülni tudjuk. Még érdekesebb ennek a fordítottja: ha független mérésekből ismerjük  $\varepsilon$ -t, akkor becsülhetjük  $\beta$ -t, és így ellenőrizhetjük a 7.5. alfejezetben leírt számítások helyességét.

A Feynman-kísérlet elvégzésekor két dologra kell különösen ügyelni: egyrészt ne legyen számottevő  $\gamma$ -sugárzás, másrészt minél nagyobb legyen  $\varepsilon$ , hiszen (38.9) szerint vele arányos a vizsgált effektus.

### A neutronzaj frekvenciaspektruma

A korszerű méréstechnikában a leggyakrabban használt neutrondetektorok nem impulzusdetektorok, hanem *ionizációs* vagy *hasadási kamrák*, amelyek az időegység alatt detektált neutronok számával arányos áramjelet adnak ki. Gyakran az is előfordul, hogy az impulzusdetektorok jelét integrálják, aminek eredményeképpen szintén áramjelet kapnak. Amikor ezek jelét megfigyeljük, azt tapasztaljuk, hogy felbonthatók egy állandó (vagy lassan változó) jel és egy ingadozó jel (vagyis egy zaj) összegére. Az utóbbiban egészen nagy frekvenciájú összetevők is vannak. A zajanalízis célja az ingadozó komponens tulajdonságainak elemzése. Egyelőre feltételezzük, hogy a reaktor paraméterei (elsősorban a reaktivitás) nem ingadozó mennyiségek.

A mondottak szerint tehát a kamra jelét

$$I(t) = I_0 + \delta I(t) \tag{38.10}$$

alakban írjuk fel, ahol  $\delta I(t)$  a zaj. A zajanalízisben általában meghatározzuk a zaj

$$R_{II}(\tau) = R_{II}(-\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta I(t) \delta I(t+\tau) dt$$
(38.11)

autokovarianca-függvényét, amelynek Fourier-transzformáltja a frekvenciaspektrum:<sup>77</sup>

$$\mathcal{F}\left\{R_{II}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{II}(\tau) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\tau} \mathrm{d}\,\tau\,.$$
(38.12)

Periodikus függvények esetében (38.11)-ben nem kell a *T* szerinti határértéket venni, mert ilyenkor *T* a periódus. Egyszerűen beláthatjuk, hogy a frekvenciaspektrum kifejezhető magának a jelnek a Fourier-transzformáltjával is. Mivel a  $\delta I(t)$  függvény abszolút értékének az integrálja a  $(-\infty, +\infty)$  intervallumra vonatkozóan divergens, nem létezik a Fourier-transzformáltja sem. Létezik viszont, ha a [-T, T] intervallumra korlátozzuk: legyen  $\delta I_T(t) = \delta I(t)$ , amikor  $-T \le t \le T$ , és  $\delta I_T(t) = 0$  egyébként. Ekkor írhatjuk:

$$\mathcal{F}\left\{R_{II}(\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta I_{T}(t) \delta I_{T}(t+\tau) dt e^{-j\omega\tau} d\tau = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta I_{T}(t) e^{j\omega\tau} dt \int_{-\infty}^{\infty} \delta I_{T}(t') e^{-j\omega\tau'} dt'.$$

Az utolsó integrálban a  $t' = t + \tau$  helyettesítést alkalmaztuk.<sup>78</sup> Mindkét Fourier-transzformált létezik, és egymás komplex konjugáltjai, vagyis:

$$\mathcal{F}\left\{R_{II}(\tau)\right\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left|\mathcal{F}\left\{\delta I_{T}(t)\right\}\right|^{2}.$$
(38.12a)

A neutronzaj elméleti leírására általában a *Langevin-módszer*t használjuk, ami azt jelenti, hogy a láncreakció sztochasztikus jellegéből adódó ingadozásokat a (36.3) pontkinetikai egyenlettel írjuk le, de az egyenletben neutronforrásként szerepeltetünk egy  $\delta S(t)$  fehérzajt.<sup>79</sup>  $\delta S(t)$  frekvenciaspektruma arányos a reaktor teljesítményével, vagyis a Rossi- $\alpha$  kísérletnél bevezetett *F*-fel. Ennek az az oka, hogy *a neutronzaj vizsgálatakor a vizsgált effektus minden esetben arányos F-fel*. Ez látszik a (38.6) képletből, ahol a korrelált neutronpárok detektálásának a valószínűsége *E*F-fel arányos, de ezt mutatja (38.9) is, amely szerint a beütésszámok szórásnégyzete a várható értékkel arányos. Mivel a kamra árama a fluxussal arányos, elég a (36.3) egyenleteket kielégítő  $\varphi(t)$  függvény  $\delta \varphi(t)$  ingadozásait vizsgálni:

 $<sup>^{77}</sup>$  A késő neutronok *i* indexével való összetévesztés elkerülése érdekében a komplex egységet j-vel jelöljük – a villamosságtanban megszokott gyakorlatnak megfelelően. Ez a jelölés a 3.8. alfejezetre korlátozódik.

<sup>&</sup>lt;sup>78</sup> Ezeknek a formális átalakításoknak a helyessége nem triviális. Bizonyításukhoz azonban a sztochasztikus folyamatok elméletéből olyan részletes ismereteket kellene idéznünk, hogy ettől eltekintettünk. Megjegyezzük még, hogy a divergencia megkerülésére nem az egyetlen eszköz a transzformálandó jelnek a fentiek szerinti levágása. Vannak például szerzők, akik a [-T, T] intervallumhoz tartozó jelet periodikusan kiterjesztik, ami miatt a Fourier-transzformált diszkrét vonalakból fog állni, és ez a  $T \rightarrow \infty$ határátmenetkor átmegy egy folytonos spektrumba.

<sup>&</sup>lt;sup>79</sup> A fehérzaj olyan – a valóságban meg nem valósítható – ingadozó jel (általánosított sztochasztikus folyamat), amelynek az autokovariancia függvénye  $\delta(t)$ -vel arányos, frekvenciaspektruma pedig  $\omega$ tól független.

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi(t). \tag{38.13a}$$

Ennek hatására a későneutron-anyamagok koncentrációi is ingadoznak:

$$C_{i}(t) = C_{i0} + \delta C_{i}(t) = \frac{\beta_{i}\varphi_{0}}{A\lambda_{i}} + \delta C_{i}(t), \qquad (i = 1, 2, ..., 6)$$
(38.13b)

amint  $C_{i0}$  (36.3b)-ből kiszámítható. Ha a reaktor kritikus ( $\rho = 0$ ), az időben állandó  $\varphi_0$  fluxus kielégíti a forrásmentes pontkinetikai egyenleteket. Végeredményben azt kapjuk, hogy az ingadozó rész eleget tesz a következő sztochasztikus differenciál-egyenletrendszernek:

$$\frac{\mathrm{d}\delta\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\beta}{\Lambda}\delta\varphi(t) + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i\delta C_i(t) + \delta S(t), \qquad (38.14a)$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta C_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i \delta C_i(t) + \frac{\beta_i}{\Lambda} \delta \varphi(t), \qquad (i = 1, 2, ..., 6). \qquad (38.14b)$$

A reaktornak a fehérzajra adott válaszát legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, hogy a (36.3a) egyenletet valamilyen *@*frekvenciájú jellel gerjesztjük:

$$\delta S(t) = \sqrt{\varepsilon F} e^{j\omega t} . \tag{38.15}$$

Egyszerű számítással kapjuk, hogy (38.15) mellett a (38.14) egyenletrendszer megoldása:

$$\delta\varphi(t) = \frac{\sqrt{\varepsilon F} e^{j\omega t}}{j\omega \Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{j\omega \lambda_i}{\lambda_i + j\omega}}.$$
(38.16)

Az itt megjelenő

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\Lambda + \sum_{i=1}^{6} \frac{j\omega\lambda_i}{\lambda_i + j\omega}}$$
(38.17)

függvényt a reaktor *átviteli függvény*ének nevezzük. Az elnevezésnek az az értelme, hogy az  $\omega$  frekvenciájú gerjesztő jelet a reaktor ezzel az amplitúdóval viszi át a neutronfluxussal arányos mérhető jelbe. Mivel a fehérzajban minden frekvencia azonos amplitúdóval van jelen, ez rögtön arányos is lesz a reaktor által a fehérzajra adott válasz Fourier-transzformáltjával. Ebből és (38.12a)-ból következik, hogy egy magára hagyott kritikus reaktor frekvenciaspektruma:  $\varepsilon F |H(j\omega)|^2$ .

### Technológiai eredetű zajok

Amikor a reaktor bizonyos technológiai jellemzői sztochasztikusan változnak, ez zajt eredményez a neutronfluxusban. Hogy ne csak absztrakt fogalmakkal dolgozzunk, legyen a zaj forrása egy szabályozórúd rezgése. Nyilvánvaló, hogy a rezgő rúd környezetében sztochasztikusan változnak a hatáskeresztmetszetek, és ez ott a fluxus *lokális* ingadozását eredményezi. A lokális ingadozás elméleti értelmezéséhez a 7.4. alfejezetben tárgyalt perturbációelmélet módszereire van szükség. Ettől a jelen fejezetben el kell tekintenünk. Van azonban egy *globális* hatás is, amely a reaktivitás ingadozásain keresztül érvényesül: a rúd rezgése miatt sztochasztikusan változik a reaktivitás, és ennek hatását a (36.3) pontkinetikai egyenletrendszer segítségével is tárgyalhatjuk. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az ingadozások kicsik, vagyis az egyenletben minden olyan tagot elhanyagolhatunk, amelyben két perturbáció szorzata fordul elő. Ezt a közelítést a pontkinetikai egyenlet *linearizálás*ának nevezzük.

Az általános esetre visszatérve feltesszük, hogy a reaktor kritikus, amelyben a fluxus  $\varphi_0$ , a későneutron-anyamagok  $C_{i0}$  koncentrációját a (38.13b) képletből olvashatjuk ki. A reaktivitás a  $\delta \rho(t)$  sztochasztikus folyamat szerint ingadozik a  $\rho = 0$  érték körül. Ennek hatására a fluxus (38.13a) szerint változik. Ha ezt a (36.3a) egyenletbe helyettesítjük, akkor a

$$\frac{\mathrm{d}\delta\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\rho(t) - \beta}{\Lambda} (\varphi_0 + \delta\varphi(t)) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i (C_{i0} + \delta C_i(t)),$$
  
$$\frac{\mathrm{d}\delta C_i(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i (C_{i0} + \delta C_i(t)) + \frac{\beta_i}{\Lambda} (\varphi_0 + \delta\varphi(t)), \qquad (i = 1, 2, ..., 6)$$

egyenletek adódnak. Ha elhagyjuk a  $\delta \rho(t) \delta \phi(t)$ -vel arányos tagot, továbbá figyelembe vesszük az állandó értékek között fennálló összefüggést, akkor a (38.14) egyenlet-rendszert kapjuk, amelyben most

$$\delta S(t) = \frac{\delta \rho(t)}{\Lambda} \varphi_0. \tag{38.18}$$

A fentiek mintájára mindegyik függvényt korlátozzuk a [-T, T] intervallumra, és ezt jelöljük a *T* indexszel. Az így kapott függvényeknek létezik a Fourier-transzformáltja. Ha ilyen értelemben transzformáljuk a (38.14) egyenleteket, a következőt kapjuk:

$$-j\omega \mathcal{F}\left\{\delta\varphi_{T}(t)\right\} = -\frac{\beta}{\Lambda} \mathcal{F}\left\{\delta\varphi_{T}(t)\right\} + \sum_{i=1}^{6} \lambda_{i} \mathcal{F}\left\{\delta C_{iT}(t)\right\} + \frac{\mathcal{F}\left\{\delta\rho_{T}(t)\right\}}{\Lambda} \varphi_{0},$$
  
$$-j\omega \mathcal{F}\left\{\delta C_{iT}(t)\right\} = -\lambda_{i} \mathcal{F}\left\{\delta C_{iT}(t)\right\} + \frac{\beta_{i}}{\Lambda} \mathcal{F}\left\{\delta\varphi_{T}(t)\right\}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6).$$

Ha ebből kiküszöböljük a késő neutronokra vonatkozó mennyiségeket, a

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\big\{\delta\boldsymbol{\varphi}_{T}(t)\big\} = H(-j\omega)\boldsymbol{\mathcal{P}}\big\{\delta\boldsymbol{\rho}_{T}(t)\big\}\boldsymbol{\varphi}_{0}$$

összefüggés adódik, ahol a *H* függvényt (38.17)-ben már felírtuk. A (38.12a) képlet alapján kapjuk a reaktor válaszának a frekvenciaspektrumát:

$$\mathcal{F}\left\{R_{\varphi\varphi}(\tau)\right\} = H(-j\omega)H(j\omega)\mathcal{F}\left\{R_{\rho\rho}(\tau)\right\}\varphi_{0}^{2}.$$
(38.19)

Azt kaptuk tehát, hogy a fluxus frekvenciaspektrumát a reaktivitás frekvenciaspektrumával az átviteli függvény abszolút értékének a négyzete kapcsolja össze. Kiadódott továbbá, hogy az eredmény a fluxus négyzetével arányos. Mivel a fluxus arányos a reaktorban időegység alatt történő hasadások számával (vagyis a korábban használt *F* mennyiséggel), a következő fontos különbséget találtuk a *neutronzajhoz képest: a neutronzaj frekvenciaspektruma F-fel, a technológiai eredetű zajoké pedig F<sup>2</sup>-tel arányos.* Ebből – többek között – az következik, hogy teljesítményreaktorokban (például atomerőművekben) a technológiai eredetű zajok dominálnak, a neutronzaj ezekben már nem figyelhető meg. Kis teljesítményen a viszony fordított.

A (38.18)-ban szereplő átviteli függvényt módosítja, ha a reaktorban visszacsatolások vannak a reaktivitás és a fluxus között. Erre példaként megmutatjuk a 6.5. alfejezetben tárgyalt hőfoktényező által okozott visszacsatolást. Az ott írtak szellemében (38.18) helyett a

$$\delta S(t) = \frac{\delta \rho(t)}{\Lambda} \varphi_0 - \frac{Ab \varphi_0}{\Lambda} \int_{-\infty}^t \delta \varphi(t') e^{-a(t-t')} dt'$$
(38.20)

képlet használandó, ahol  $\delta \rho(t)$  a reaktivitásnak technológiai okokból *közvetlenül* megjelenő ingadozása. A többi mennyiség értelme megtalálható a 6.5. alfejezetben. Ennek a forrástagnak a Fourier-transzformáltja egyrészt  $\delta \rho(t)$  transzformáltja, másrészt a konvolúciós integrálé. Az utóbbi az integrálban szereplő függvények transzformáltjának a szorzata. Mivel

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{-at}\right\} = \frac{1}{a+\mathrm{j}\omega},\,$$

fenti egyenletünk így módosul:

$$-j\omega \mathcal{F} \{\delta \varphi_T(t)\} = -\frac{\beta}{\Lambda} \mathcal{F} \{\delta \varphi_T(t)\} + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \mathcal{F} \{\delta C_{iT}(t)\} + \frac{\mathcal{F} \{\delta \rho_T(t)\}}{\Lambda} \varphi_0 - \frac{Ab \varphi_0}{\Lambda} \frac{\mathcal{F} \{\delta \varphi_T(t)\}}{a+j\omega}.$$

A késő neutronokra vonatkozó mennyiségek kiküszöbölése után végeredményben azt kapjuk, hogy az átviteli függvény módosul:

$$\mathcal{F}\left\{\delta\varphi_{T}(t)\right\} = \frac{H(-j\omega)}{1 - H(-j\omega)\frac{Ab\varphi_{0}}{a + j\omega}} \mathcal{F}\left\{\delta\rho_{T}(t)\right\}\varphi_{0}.$$
(38.21)

Ha (38.20) helyett  $\delta \varphi(t)$ -nek valamilyen más alakú függvénnyel való konvolúciója szerepelt volna, akkor (38.21) megfelelőjében ennek a Fourier-transzformáltja állna. Általában tehát fennáll, hogy a konvolúciós típusú visszacsatolások az átviteli függvényt a következő módon változtatják meg:

$$H_{\text{mod.}}(j\omega) = \frac{H(-j\omega)}{1 - H(-j\omega)Y(j\omega)},$$

ahol Y(jω) a konvolúcióban szereplő függvény Fourier-transzformáltja.
# 4. A neutronspektrum

#### 4.1. A hasadási neutronok spektruma

A hasadásban keletkező prompt neutronok kísérletileg mért spektrumára jó közelítéssel

$$f_{\rm p}(E) = C_1 \exp\left(-\frac{E}{C_2}\right) \operatorname{sh}\left(\sqrt{C_3 E}\right)$$
(41.1)

alakú függvények illeszthetők (*Watt-spektrum*), ahol  $C_1$ ,  $C_2$  és  $C_3$  alkalmasan megválasztott állandók. <sup>235</sup>U hasadása esetében a legvalószínűbb energia, tehát a (41.1) spektrum maximuma 0,7 MeV-nél adódik, a hasadásban keletkező neutronok átlagos energiája pedig 2 MeV. A konstansok értéke ekkor:

$$C_1 = 0,453$$
  $C_2 = 0,965$   $C_3 = 2,29;$ 

ha az energiát MeV-ben mérjük. A késő neutronok spektruma ennél lényegesen lágyabb (lásd alább).

Ha az *i*-edik későneutron-csoport spektrumát  $f_i(E)$ -vel jelöljük, akkor a hasadás révén keletkező neutronok átlagos spektruma

$$f_{\rm s}(E) = (1 - \beta) f_{\rm p}(E) + \sum_{i=1}^{6} \beta_i f_i(E), \qquad (41.2)$$

amelyet *sztatikus hasadási spektrum*nak nevezünk.<sup>80</sup> Az elnevezés magyarázata, hogy időtől független neutronterek tárgyalásakor (32.5b)-ben ezt kell f(E) helyébe írni. Időben gyorsan változó neutronterek esetében (tehát a reaktorkinetikában) azonban tekintettel kell lenni az  $f_p(E)$  és az  $f_i(E)$  spektrumok különbözőségére. A leggyakrabban ezt elegendő úgy figyelembe venni, hogy  $\beta_i$  későneutron-hányadok helyett effektív értékeket használunk (lásd 7.5. alfejezet). A késő neutronok spektruma függ a hasadó izotóptól. A 41.1. ábra illusztrációképpen az <sup>235</sup>U termikus hasadásaira vonatkozóan mu-

<sup>&</sup>lt;sup>80</sup> A (41.2) képlet abban az esetben érvényes, amikor a vizsgált közegben egyetlen hasadó izotóp van. A több hasadó izotóp esetében érvényes képletet a 7.5. alfejezetben tárgyaljuk.

tatja be az  $f_i(E)$  spektrumokat (i = 1, 2, ..., 6). Az ábrákon összehasonlításul bemutatjuk a prompt neutronok  $f_p(E)$  spektrumát is. Az egyes ábrákon bemutatott két görbe alatti terület 100. Az egyes csoportoknak az ezekkel a spektrumokkal számolt átlagos energiája a 41.1. táblázatban látható.

Az egyéb neutronforrások spektruma ettől lényegesen eltérhet. Például a Pu-Be forrás által kibocsátott neutronok átlagos energiája körülbelül 5 MeV. A gyorsítós neutrongenerátorokban a (d, t) reakció útján termelt neutronok energiája 14 MeV. A legtöbb atommag szórási hatáskeresztmetszete a néhány MeV energiájú neutronokra vonatkozóan jelentősen függ az energiától, ezért a különböző neutronfizikai megfontolásokban fontos figyelembe venni a neutronforrás spektrumát. Tekintve, hogy ebben a könyvben elsősorban reaktorokkal foglalkozunk, a továbbiakban mindig a (41.1) és (41.2) hasadási spektrumból fogunk kiindulni.







| Csoport | Energia (keV) |  |
|---------|---------------|--|
| 1       | 235           |  |
| 2       | 470           |  |
| 3       | 419           |  |
| 4       | 453           |  |
| 5       | 426           |  |
| 6       | 437           |  |

41.1. táblázat. A későneutron-csoportok átlagos energiája

## 4.2. Lassulás rugalmas szóródások útján

A hasadásokban keletkező neutronok a reaktorban található atommagokkal ütközve szóródhatnak, vagy valamilyen más magreakciót válthatnak ki. Ezek mérlegét fejezi ki – aszimptotikus közelítésben – a (32.5) lassulási egyenlet. Az, hogy milyen  $\psi(E)$  neutronspektrum alakul ki, elsősorban az alábbi dolgoktól függ:

- a  $\sigma_a(E)$  abszorpciós hatáskeresztmetszetek nagysága és energiafüggése,
- a rugalmatlan szórási hatáskeresztmetszetek,
- a  $\sigma_s$  rugalmas szórási hatáskeresztmetszet nagysága,
- a jelenlévő atommagok A tömegszáma.

A rugalmatlan szórást leíró  $\Sigma_{in}(E' \rightarrow E)$  magfüggvény alakja nagyon bonyolult, általában numerikus alakban tudjuk megadni, így a rugalmatlan szóródás figyelembevétele csak numerikus számítások útján lehetséges. Erre való tekintettel ebben az alfejezetben figyelmen kívül hagyjuk. Mindössze annyit jegyzünk meg, hogy a rugalmatlan szóródás 10–100 keV nagyságrendű energiák alatt már elhanyagolható.<sup>81</sup> A termikus reaktorokban a legfontosabb effektusok éppen ilyen kis energiákon jelentkeznek. A reaktor *tervezője* azonban nem engedheti meg magának ezt a "luxust". Nagy energiákon romlik a rugalmas szórás hatékonysága (lásd alább), itt tehát a neutronok elsősorban a rugalmatlan szóródások révén lassulnak. Ez különösen gyors reaktorokban fontos effektus.

100 keV alatti energiákra a rugalmas szórás a tömegközépponti rendszerben izotrop, továbbá  $\sigma_s$  független a neutron energiájától. Az alábbiakban kiszámítjuk, milyen  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  rugalmas szórási magfüggvény felel meg ennek az esetnek. Ütközzön egy  $E_1$  energiájú ( $v_1$  sebességű) neutron egy A tömegszámú atommaggal. Tekintve, hogy az atommagok hőmozgásának az energiája (szobahőmérsékleten) 0,025 eV, a neutronlassulás tartományában az atommagot (egyelőre) nyugvónak tekintjük. A szóródás után a neutron energiája legyen  $E_2$  (sebessége  $v_2$ ), továbbá a szóródás előtti és utáni sebességei zárjanak be egymással  $\vartheta$  szöget ( $42.1a. \, ábra$ ). Ha ezeket a laboratóriumi koordinátarendszerben mért mennyiségeket a tömegközépponti rendszerbe akarjuk áttranszformálni, akkor a következőképpen okoskodhatunk ( $42.1b. \, ábra$ ). A tömegközéppont sebességének a nagysága  $v_t = v_1/(A+1)$ , iránya pedig megegyezik a neutron sebességének az irányával. Ebben a rendszerben a szóró mag sebessége az ütközés előtt a neutronéval ellentétes irányú és nagysága éppen  $v_t$ . A szóródás után a neutron és a mag sebessége legyen rendre  $v_n$  és  $v_m$ , a neutron eltérülésének a szöge pedig  $\Theta$ .



42.1a. ábra. Szórás a laboratóriumi koordináta-rendszerben

<sup>&</sup>lt;sup>81</sup> Akkor történik rugalmatlan szóródás, amikor a szóródó neutron az atommagot valamelyik energianívójára gerjeszti. Ha a neutron energiája kisebb, mint a legalacsonyabb energianívó (plusz a mag visszalökésére fordított energia), rugalmatlan szórás nem lehetséges.



42.1b. ábra. Szórás a tömegközépponti koordináta-rendszerben

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a neutron és a szóró mag összimpulzusa a tömegközépponti rendszerben az ütközés előtt nulla, tehát csak úgy maradhat nulla az ütközés után is, ha továbbra is egymással ellentétes irányban repülnek, és sebességük nagysága úgy aránylik egymáshoz, mint az ütközés előtt, tehát mint A:1. Ezek után nem nehéz belátni, hogy az energiamegmaradás csak úgy teljesülhet, ha a tömegközépponti rendszerben sem a neutron, sem a mag sebességének a szóródás során nem változik meg a nagysága, tehát

$$v_{\rm n} = v_1 - v_{\rm t} = \frac{Av_1}{A+1},$$
 (42.1a)

$$v_{\rm m} = v_{\rm t} = \frac{v_1}{A+1}.$$
 (42.1b)

Végeredményben tehát azt kaptuk, hogy a tömegközépponti rendszerben a szóródás a neutron sebességének csak az irányát változtatja meg, de nagyságát változatlanul hagyja.

Számítsuk ki ezek után a neutron ütközés utáni, a laboratóriumi rendszerben mért  $\mathbf{v}_2$  sebességét, amely a  $\mathbf{v}_n$  és a  $\mathbf{v}_t$  sebességek vektori összege, tehát a 42.1b. ábra alapján:

$$v_{2}^{2} = |\mathbf{v}_{n} + \mathbf{v}_{t}|^{2} = v_{n}^{2} + v_{t}^{2} + 2v_{n}v_{t}\cos\Theta = \frac{v_{1}^{2}(A^{2} + 2A\cos\Theta + 1)}{(A+1)^{2}}.$$

Ha bevezetjük az

$$\alpha = \frac{\left(A-1\right)^2}{\left(A+1\right)^2}$$

paramétert, akkor a neutron ütközés előtti és utáni energiájának az aránya a  $\Theta$  szóródási szöggel kifejezve az

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{1}{2} \left[ (1+\alpha) + (1-\alpha) \cos \Theta \right]$$
(42.2)

alakban írható. Látható, hogy a szóródásban a neutron energiája csökken. A különbség a mag visszalökésére fordítódik. A legnagyobb energiacsökkenés  $\Theta = 180^{\circ}$ -ra adódik ("telitalálat"): ekkor  $E_2 = \alpha E_1$ ,  $\Theta = 0^{\circ}$ -ra viszont  $E_2 = E_1$ , általában pedig

$$E_1 \ge E_2 \ge \alpha E_1. \tag{42.3}$$

Vezessük be a  $\mu_c = \cos \Theta$  jelölést, és legyen  $\mu_c$  sűrűségfüggvénye  $\chi(\mu_c)$ . Mint mondtuk, 100 keV alatti neutronenergiáknál a szórást izotropnak tekinthetjük a tömegközépponti rendszerben, tehát annak a valószínűsége, hogy  $\mu_c$  a ( $\mu_c$ ,  $\mu_c$ +d $\mu_c$ ) intervallumba essen, a

$$\chi(\mu_{\rm c})d\mu_{\rm c} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} = \frac{2\pi\mathrm{d}\mu_{\rm c}}{4\pi} = \frac{\mathrm{d}\mu_{\rm c}}{2}$$
(42.4)

alakban írható. A későbbiek kedvéért megtartjuk az általánosságot, vagyis nem használjuk ki rögtön ezt a képletet. (42.2)-ből látjuk, hogy adott d $\mu_c$ -hez meghatározott d $E_2$  tartozik, tehát annak a valószínűségét, hogy a neutron energiája ütközés után az ( $E_2, E_2$ +d $E_2$ ) intervallumba fog esni, a

$$g(E_1, E_2) dE_2 = \chi(\mu_c) d\mu_c$$

képlet fogja megadni. (42.2)-ből kapjuk:

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{c}} = \frac{2\mathrm{d}E_2}{E_1(1-\alpha)},$$

tehát

$$g(E_1, E_2) = \begin{cases} \frac{2\chi(\mu_c)}{E_1(1-\alpha)} & \alpha E_1 \le E_2 \le E_1, \\ 0 & E_2 < \alpha E_1 \text{ vagy } E_2 > E_1, \end{cases}$$
(42.5)

ahol (42.2) alapján

$$\mu_{\rm c} = \frac{2E_2/E_1 - (1+\alpha)}{1-\alpha}$$

Izotrop szögeloszlás esetében  $\chi(\mu_c) \equiv 1/2$ , tehát ekkor az  $E_2$  energia egyenletes valószínűséggel vesz fel minden, a (42.3) intervallumba eső értéket. A további alfejezetekben ezt tételezzük fel. Néhány mennyiségre vonatkozóan a jelen alfejezet végén megadjuk, milyen következményei vannak a tömegközépponti rendszerben anizotrop szórásnak.

Amikor a szórás izotrop,  $\mu_c = \cos \Theta$  átlaga a tömegközépponti rendszerben nulla. Más a helyzet a laboratóriumi rendszerben. A 42.1. *ábrák*ról leolvasható, hogy

$$\cos\vartheta = \frac{A\cos\Theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\Theta + 1}}$$

aminek az átlaga (42.4) alapján könnyen kiszámítható:

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{A\cos\Theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\cos\Theta + 1}} d(\cos\Theta) = \frac{2}{3A}.$$

A laboratóriumi rendszerben tehát a szórás anizotrop, aminek a mértéke annál nagyobb, minél kisebb a szóró mag *A* tömegszáma.

(42.2)-ből látható, hogy a neutronenergiának a szóródás során lehetséges megváltozása annál kisebb, minél kisebb a szóródás előtti  $E_1$  energia. Ezzel szemben az energia logaritmusának a változása független  $E_1$ -től: ln E megváltozása (ln  $E_1/E_2$ ) 0 és ln(1/ $\alpha$ ) közé esik.  $E_1$ -től ugyanígy független az *átlagos logaritmikus energiacsökkenés* is:

$$\xi = \int_{0}^{E_{1}} \ln\left(\frac{E_{1}}{E_{2}}\right) g(E_{1}, E_{2}) dE_{2}, \qquad (42.6a)$$

amit (42.5) alapján kiszámítva azt kapjuk, hogy izotrop szögeloszlás esetében

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \alpha \approx \frac{2}{A + 2/3}.$$
(42.6b)

Minél nagyobb  $\xi$ , annál gyorsabban lassul a neutron, hiszen annál kevesebb ütközés szükséges ahhoz, hogy a neutronok 2 MeV hasadási energiáról a 0,025 eV körüli termikus energiára lassuljanak le:

$$\frac{\ln(2 \text{ MeV}/0.0253 \text{ eV})}{\xi} = \frac{18.2}{\xi}$$

A neutronokat hatékonyan lassító anyagokat *moderátor*oknak nevezzük. (42.6)-ból következik, hogy atommagjaiknak kis tömegszámúnak kell lenniük. Ezen túlmenően azonban még két dolgot szoktunk egy jó moderátortól megkövetelni: nagy szórási és kis termikus abszorpciós hatáskeresztmetszetet. A gyakorlatban négy moderátor van: könnyűvíz (H<sub>2</sub>O), nehézvíz (D<sub>2</sub>O), berillium (<sup>9</sup>Be) és grafit (<sup>12</sup>C). A rájuk vonatkozó legfontosabb mennyiségeket a 42.1. táblázatban foglaljuk össze. (Összehasonlításul megadjuk egy nehéz mag, az <sup>238</sup>U megfelelő adatait is.) A  $\xi \Sigma_s$  szorzatot *lassítási képesség*nek nevezzük: megadja a neutron által megtett 1 cm útra eső átlagos logaritmikus energiacsökkenést. A táblázatból látható, hogy ez könnyűvízre a legnagyobb. Mégsem a könnyűvíz a legjobb moderátor, mert a lelassult (termikus) neutronokra túlságosan nagy az abszorpciós hatáskeresztmetszete. Ha a legfontosabb jellemzőket egyesítő  $\xi \Sigma_s / \Sigma_a$  moderálási arányt tekintjük, akkor a táblázat szerint a nehézvíz adódik a kimagaslóan legjobb moderátornak.

| 1 | 52 |  |
|---|----|--|
|   |    |  |

| Moderátor        | Α   | α     | ξ      | $18,2/\xi$ | $\xi \Sigma_{\rm s} ({\rm cm}^{-1})$ | $\xi\Sigma_{ m s}/\Sigma_{ m a}$ |
|------------------|-----|-------|--------|------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| H <sub>2</sub> O | 1   | 0     | 1,0    | 18         | 1,3                                  | 61                               |
| $D_2O$           | 2   | 0,111 | 0,725  | 25         | 0,08                                 | 2538                             |
| <sup>9</sup> Be  | 9   | 0,640 | 0,209  | 87         | 0,15                                 | 125                              |
| $^{12}C$         | 12  | 0,716 | 0,158  | 115        | 0,061                                | 190                              |
| <sup>238</sup> U | 238 | 0,983 | 0,0084 | 2172       | 0,04                                 | 0,16                             |

42.1. táblázat. A legfontosabb moderátorok összehasonlító adatai

A lassuláselméletben az *E* energiánál természetesebb változó a *letargia*:

$$u = \ln\left(\frac{E_0}{E}\right),\tag{42.7}$$

ahol  $E_0$  valamilyen alkalmasan választott (egyébként tetszőleges) felső határ (általában 10 MeV). (42.5)-öt könnyen átírhatjuk a letargia változóra:

$$g(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{e^{u_1 - u_2}}{1 - \alpha} & 0 \le u_2 - u_1 \le \ln(1/\alpha), \\ 0 & u_2 - u_1 > \ln(1/\alpha). \end{cases}$$
(42.8)

A  $\psi(E)$  fluxus az *E* energia szerint sűrűség dimenziójú, tehát a fluxust a letargia függvényeként a következőképpen kell kifejezni:

$$\psi(u) = \psi(E) \left| \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}u} \right| = \psi(E)E . \tag{42.9}$$

A (42.5), illetve (42.8) alatt felírt magfüggvények felhasználásával a (32.5) lassulási egyenletet a tömegközépponti rendszerben izotrop szórás esetében a

$$-(D(E)B^{2} + \Sigma_{t}(E))\psi(E) + \int_{0}^{E/\alpha} \Sigma_{s}(E')\psi(E')\frac{dE'}{E'(1-\alpha)} + S(E) = 0$$
(42.10)

vagy

$$-(D(u)B^{2} + \Sigma_{t}(u))\psi(u) + \int_{u-\varepsilon}^{u} \Sigma_{s}(u')\psi(u')\frac{e^{u'-u}}{1-\alpha}du' + S(u) = 0$$
(42.11)

alakban írhatjuk fel, ahol

$$\varepsilon = \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Az S(E) és S(u) forrástagok általában a hasadásokban keletkező neutronokat jelentik, de jelenthetik a tekintett energiatartomány feletti energiákról lassuló neutronokat is.

Minden irányban végtelen közeg tárgyalásakor  $B^2$  helyébe nullát írunk. Az egyenlet megoldásakor először ilyen esetekkel fogunk foglalkozni.

#### A szórás anizotropiája

Amikor a szóródó neutron energiája elegendően nagy, a szórás a tömegközépponti rendszerben anizotrop. Ez alól kivétel a hidrogén, mert a protonon való szórás minden energián izotrop a tömegközépponti rendszerben. A többi szóró mag esetében azonban MeV nagyságrendű energiákon jelentős az anizotropia, ami azt jelenti, hogy ha a  $\chi(\mu_c)$  függvényt a Legendre-polinomok szerint sorba fejtjük, a neutron energiájától erősen függő sorfejtési együtthatókat kapunk. Legyen

$$\chi(\mu_{\rm c}) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \omega_{\ell}^{\rm c} P_{\ell}(\mu_{\rm c}), \qquad \qquad \omega_0^{\rm c} \equiv 1,$$

ahol a "c" felső index arra utal, hogy a sorfejtés a tömegközépponti rendszerben értelmezett szögeloszlásra vonatkozik. A sorfejtési együtthatókat a 42.2. és 42.3. ábrákon két jellegzetes izotópra mutatjuk be: a deutérium moderátor, a vas pedig szerkezeti anyag. Jóllehet a reaktorfizikában többnyire csak a 10 MeV alatti neutronokat szoktuk figyelembe venni, a görbék ennél nagyobb energiákra is megadják a sorfejtési együtthatókat. Biológiai védelmek számításakor ugyanis elsősorban az ilyen energiájú neutronok játsszák a főszerepet. Az ábrákból következik, hogy ebben az energiatartományban jelentős a szórás anizotropiája.



42.2. *ábra*. Az  $\omega_{\ell}^{c}$  sorfejtési együtthatók deutériumra (A = 2)



42.3. *ábra*. Az  $\omega_{\ell}^{c}$  sorfejtési együtthatók vasra (A = 55)

Az alábbiakban néhány eredményt idézünk a lineárisan anizotrop szórás esetére vonatkozóan:

$$\chi(\mu_{\rm c}) = \frac{1+3\overline{\mu}_{\rm c}\mu_{\rm c}}{2}, \qquad (42.12)$$

ahol  $\overline{\mu}_{c}(=\omega_{1}^{c}/3)$  a szórási szög koszinuszának az átlaga a tömegközépponti rendszerben. Itt nem részletezett számítások szerint ekkor

$$\xi = \int_{\alpha E}^{E} g(E' \to E) \ln \frac{E'}{E} dE' = \xi_0 - 3\overline{\mu}_c \left[ \frac{\alpha \ln \alpha}{\left(1 - \alpha\right)^2} + \frac{1 + \alpha}{2\left(1 - \alpha\right)} \right], \quad (42.13)$$

ahol

$$\xi_0 = 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \ln \alpha$$

az izotrop szóráshoz (42.6) szerint kiszámított logaritmikus energiacsökkenés. Mivel a fentiek szerint  $\overline{\mu}_c$  függ a neutron energiájától, az általános esetben  $\xi$  is függ tőle. Ha utolsó képletünket 1/A szerint sorba fejtjük, az egyszerűbb

$$\xi = \xi_0 - \overline{\mu}_c \left( \frac{2}{A} - \frac{2}{5A^3} - \frac{2}{35A^5} - \dots \right)$$
(42.13a)

képletet kapjuk.

Hasonlóan energiától függő mennyiséget kapunk a laboratóriumi rendszerben mért szórási szög koszinuszának az átlagára is:

$$\overline{\cos\vartheta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{A\mu_{\rm c} + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\mu_{\rm c} + 1}} \,\chi(\mu_{\rm c}) \mathrm{d}\mu_{\rm c} = \frac{2}{3A} + \overline{\mu}_{\rm c} \left(1 - \frac{3}{5A^2}\right). \tag{42.14}$$

A (42.13a) képlettel ellentétben ez a formula nem sorfejtés, hanem – a (42.12) alatti közelítés keretein belül – egzakt.

A 42.2. és 42.3. ábrákról leolvasható, hogy  $\overline{\mu}_c$  általában pozitív. (42.13)-ból az következik, hogy a szórási anizotropia rontja a neutronlassítás hatékonyságát, hiszen  $\xi < \xi_0$ . Amikor azonban ez az effektus érezteti a hatását, a szóródó neutronok energiája elég nagy ahhoz, hogy a rugalmatlan szórás is jelentős járulékot adjon a lassításhoz, ami viszont javítja a lassítás hatékonyságát. Nagy neutronenergiákon tehát két ellentétes hatású effektus működik: az energia növekedésével romlik a rugalmas szórás és javul a rugalmatlan szórás hatékonysága. Numerikus számításokban mind-kettőt figyelembe kell venni. Az alábbiakban – az egyszerűség kedvéért – mindkét effektust el fogjuk hanyagolni annak érdekében, hogy egyéb effektusok *lényegét* meg tudjuk magyarázni, tehát: el fogjuk hanyagolni mind a szórás anizotropiáját, mind a rugalmatlan szórást.

## 4.3. Lassulás homogén közegben

#### Lassulás abszorpció nélkül. Placzek-tranziensek

Abban az esetben, amikor nincs abszorpció (sem kifolyás), (42.11) így írható:

$$-\Sigma_{\rm s}(u)\psi(u) + \int_{u-\varepsilon}^{u} \Sigma_{\rm s}(u')\psi(u')\frac{{\rm e}^{u'-u}}{1-\alpha}{\rm d}u' + S(u) = 0.$$
(43.1)

Az itt szereplő általános S(u) forrástag helyett elégséges monoenergetikus forrást vizsgálni, hiszen az erre kapott megoldást Green-függvénynek tekintve az általános forráshoz tartozó megoldás könnyen felírható. Legyen tehát  $S(u) = \delta(u)$ , vagyis (42.7)ben  $E_0$  a forrás energiája. Ekkor (43.1) megoldása nyilvánvalóan szinguláris lesz u = 0-nál, továbbá vegyük észre, hogy ebben az abszorpciómentes esetben (43.1) a  $\Sigma_s(u)\psi(u)$  ütközési sűrűségre vonatkozó egyenletnek tekinthető. Az elmondottak szerint az utóbbit kereshetjük a

$$\Sigma_{s}(u)\psi(u) = \delta(u) + F_{s}(u) \tag{43.2a}$$

alakban, ahol  $F_s(u)$  az ütközési sűrűség nemszinguláris része. A lassulási magfüggvény (42.8) szerinti alakjából következik:

$$F_{\rm s}(u) = 0,$$
 ha  $u < 0.$  (43.2b)

Ezt (43.1)-be helyettesítve  $F_s(u)$ -ra az

$$F_{s}(u) = \int_{u-\varepsilon}^{u} F_{s}(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + S_{0}(u)$$
(43.3)

egyenletet kapjuk, ahol

$$S_0(u) = \begin{cases} \frac{e^{-u}}{1-\alpha} & 0 \le u \le \varepsilon\\ 0 & u > \varepsilon, \text{ illetve } u < 0. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy (43.3)-nak ez a forrástagja szakadásos u = 0-ban és  $u = \varepsilon$ -ban.

(43.3)-at u szerint differenciálva  $F_s(u)$ -ra egy differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{s}}(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ F_{\mathrm{s}}(u) - F_{\mathrm{s}}(u-\varepsilon) \right],\tag{43.4}$$

amely minden *u*-ra érvényes, kivéve természetesen azokat az *u*-kat, ahol  $S_0(u)$ -nak szakadása van. (43.3)-ból könnyen levezethetjük, hogy (43.4)-hez a

$$\lim_{u \to +0} F_{s}(u) = \lim_{u \to +0} S_{0}(u) = \frac{1}{1 - \alpha}$$
(43.5)

kezdeti feltétel tartozik.

(43.4) megoldását az u = 0,  $\varepsilon$ ,  $2\varepsilon$ ,  $3\varepsilon$ , ... értékek által határolt intervallumokban külön-külön kell kiszámítanunk. A (0,  $\varepsilon$ ) intervallumban (43.4) utolsó tagja eltűnik (43.2b) értelmében, tehát az egyenletnek a kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$F_{\rm s}(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right),$$
 ha  $0 < u < \varepsilon.$ 

Az ( $\varepsilon$ ,  $2\varepsilon$ ) intervallumban ez adja (43.4) utolsó tagját, amitől ebben az intervallumban az már inhomogén differenciálegyenletté válik. A hozzá tartozó kezdeti feltételt úgy kapjuk meg, hogy (43.3)-ban vesszük a

$$\lim_{u \to +\varepsilon} F_{s}(u) = \int_{0}^{\varepsilon} F_{s}(u') \frac{e^{u'-\varepsilon}}{1-\alpha} du' =$$
$$= \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_{0}^{\varepsilon} F_{s}(u') e^{u'} du' = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left[ \exp\left(\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right) - 1 \right]$$

határértéket. Ezek figyelembevételével – némi számolás után – kapjuk az ebben az intervallumban érvényes megoldást:

$$F_{\rm s}(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right) \left(1 + \frac{u-\varepsilon}{1-\alpha}\right)\right], \qquad (43.6)$$
ha  $\varepsilon < u < 2\varepsilon$ .

Ha ezt a függvényt ismét (43.4) utolsó tagjába írjuk, és vesszük az  $u \rightarrow 2\varepsilon$  határértéket, kapjuk a ( $2\varepsilon$ ,  $3\varepsilon$ ) intervallumban érvényes inhomogén differenciálegyenletet és a hozzá tartozó kezdeti feltételt, amelynek a megoldásából *mutatis mutandis* tovább felépíthető a ( $3\varepsilon$ ,  $4\varepsilon$ ), majd a ( $4\varepsilon$ ,  $5\varepsilon$ ) stb. intervallumokra vonatkozó megoldás. Ezt a számítást megkönnyíti, ha a megoldást a következő alakban keressük:

$$0 < u < \varepsilon. \qquad F_{s}(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right)$$
  

$$\varepsilon < u < 2\varepsilon. \qquad F_{s}(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right)(a_{11} + a_{12}(u-\varepsilon))$$
  

$$2\varepsilon < u < 3\varepsilon. \qquad F_{s}(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right)(a_{21} + a_{22}(u-2\varepsilon) + a_{23}(u-2\varepsilon)^{2})$$
  

$$3\varepsilon < u < 4\varepsilon. \qquad F_{s}(u) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}u\right) \times \left(a_{31} + a_{32}(u-3\varepsilon) + a_{33}(u-3\varepsilon)^{2} + a_{34}(u-3\varepsilon)^{3}\right)$$

és így tovább. Az itt szereplő együtthatók közül kettő kiolvasható a (43.6) egyenletből:

$$a_{11} = 1 - \exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)$$
 és  $a_{12} = -\frac{1}{1-\alpha}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)$ .

A többi együttható – mint elemi számolás után beláthatjuk – a következő rekurzióval állítható elő:

$$a_{21} = a_{11} + \varepsilon a_{12}; \qquad a_{22} = a_{12}a_{11}; \qquad a_{23} = a_{12}^2/2; a_{31} = a_{11} + \varepsilon(1 + a_{11}) + \varepsilon^2 a_{23}; a_{32} = a_{12}a_{21}; \qquad a_{33} = a_{12}^2 a_{11}/2; \qquad a_{34} = a_{12}^3/6.$$

A megadott képletek alapján *A* néhány értékére kiszámoltuk a megoldást, és a *43.1. ábrán* látható eredményeket kaptuk. Az ábrán az A > 1-re mutatott megoldásnak a következő főbb jellegzetességei vannak:

- szakadása van  $u = \mathcal{E}$ -nál,
- folytonos  $u = 2\varepsilon$ -nál, de első deriváltjának szakadása van,
- általában: az  $u = (n+1)\varepsilon$  értéknél a megoldás és első (n-1) deriváltja folytonos, de az *n*-edik deriváltnak szakadása van,
- *u* növekedésével gyorsan állandó értékbe megy át:  $u = 3\mathcal{E}$ -tól kezdve már gyakorlatilag állandónak tekinthető. Az ábrán mutatott esetekben a legnagyobb eltérés 0,2% a ( $3\mathcal{E}$ ,  $4\mathcal{E}$ ) intervallumban.



43.1. ábra. A Placzek-tranziensek

Hidrogénen való lassulás esetében A = 1,  $\alpha = 0$ , tehát (43.4) alapján

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{s}}(u)}{\mathrm{d}u} = 0$$

vagyis  $F_s(u)$  minden *u*-ra állandó. Az állandó értéke (43.5) alapján 1. Hidrogénen való lassuláskor tehát nem alakulnak ki tranziensek, hanem az ütközési sűrűség azonnal az aszimptotikus értékét veszi fel.

Az  $F_s(u)$  ütközési sűrűségeknek a 43.1. ábrán bemutatott és a fentiekkel jellemzett változásait *Placzek-tranziensek*nek nevezzük. Egyszerű fizikai jelentést adhatunk nekik: ahogy a neutron letargiája ( $\varepsilon$  egységeiben mérve) távolodik a forrás letargiájától, egyre többször szóródik, és fokozatosan "elfelejti", milyen letargián keletkezett. Ez onnan látszik, hogy az ütközési sűrűség a letargiától aszimptotikusan függetlenné válik. Nem kell a fenti bonyolult integrálási lépéssort végigkövetni és határértékét venni ahhoz, hogy az ütközési sűrűségnek ezt az állandó értékét meghatározzuk. Ehhez elég az alábbi mennyiséget kiszámítani, amely megadja, hogy lassulás közben – térfogategységben – időegység alatt hány neutron lép át egy adott *u* letargiaértéket:

$$q(u) = \int_{u-\varepsilon}^{u} F_{\rm s}(u') \mathrm{d}u' \int_{u}^{u'+\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{u'-u''}}{1-\alpha} \mathrm{d}u''.$$
(43.7)

E képlet magyarázatára még visszatérünk. Ha ide  $F_s(u) = c$  (= állandó)-t helyettesítünk, azt kapjuk, hogy

$$q(u) = c\xi$$

( $\xi$  értékét lásd a (42.6b) képletben), aminek éppen 1-gyel kell egyenlőnek lennie, hiszen – tekintve, hogy nincs abszorpció – minden, a forrás által termelt neutronnak bármely *u* letargiát előbb-utóbb át kell lépnie. Végeredményben tehát írhatjuk:

$$\lim_{u \to +\infty} F_{\rm s}(u) = \frac{1}{\xi}.$$
(43.8)

Mint fentebb említettük, hidrogénen való lassulás esetében a Placzek-tranziensek nem alakulnak ki, mert az első ütközés minden *u*-ra azonnal előállítja a (43.8) szerinti aszimptotikát.

A (43.7) képlet magyarázata a következő. Az *u* letargiát azok a neutronok léphetik át, amelyek egy  $u - \varepsilon \le u' \le u$  letargián szóródtak. Az *u'* körüli d*u'* intervallumban szóródó neutronok száma  $F_s(u')du'$ . Szóródás utáni letargiájuk legfeljebb  $u'+\varepsilon$  lehet. A képletben szereplő második integrál annak a valószínűségét adja meg, hogy a szóródás egy  $u \le u'' \le u'+\varepsilon$  letargiára vezet. Az *u'* szerinti integrál összegzi az összes szóba jövő szóródásnak a lassulási sűrűséghez való járulékát, amivel éppen a keresett q(u)-t állítjuk elő. Az így kapott (43.7) képlet azonban csak  $u \ge \varepsilon$ -ra érvényes.  $u < \varepsilon$ -ra ugyanis figyelembe kell venni a pontosan egyszer szóródott neutronok járulékát is. Arról van szó, hogy a (43.7)-ben szereplő  $F_s(u')du'$  kifejezés a legalább másodszor szóródó neutronok számát jelenti, hiszen u' > 0 letargiája csak olyan neutronnak lehet, amely legalább egyszer már ütközött (először az u = 0 letargián), hiszen a forrás 0 letargián termeli a neutronokat. Következésképpen (43.7) nem tartalmazza a pontosan egyszer ütközött neutronok járulékát, amelyek  $u < \varepsilon$ -ra még hozzájárulnak q(u)-hoz. E járulék értéke:

$$\int_{u}^{\varepsilon} \frac{e^{-u'}}{1-\alpha} du', \qquad u < \varepsilon.$$
(43.7a)

Fizikai tartalmát tekintve ez rokon a (43.3) egyenletben szereplő  $S_0(u)$  taggal. Mivel a lassulási sűrűséget leggyakrabban  $u \gg \varepsilon$  mellett használjuk, általában elegendő a (43.7) képlet. Ez alól egy fontos kivétel van: a hidrogénen való lassulás esete, mert ekkor  $\varepsilon$  értéke + $\infty$ , így hidrogénre a (43.7a) által megadott tagot mindig szerepeltetni kell (lásd alább).

(42.9) alapján írjuk át a (43.8) szerinti aszimptotikát az E energiaváltozóra:

$$\psi(E)=\frac{1}{\xi\Sigma_{\rm s}(E)E},$$

ami azt jelenti, hogy a forrás energiájától távol az energiaspektrum az energiával fordítva arányossá válik, hiszen a szórási hatáskeresztmetszet *E*-től jó közelítéssel független. Ezt "1/E spektrum" néven szoktuk emlegetni. (43.7) alatt bevezetett q(u) mennyiséget *lassulási sűrűség*nek nevezzük. A következőkben még többször fogunk vele találkozni, mert a lassuláselméletben központi szerepet játszik. A "sűrűség" kifejezés itt arra utal, hogy a térfogategységre vonatkozik, de *u*-ra vonatkozóan nem sűrűség dimenziójú – szemben például  $\psi(u)$ -val vagy  $F_s(u)$ -val.

## Lassulás hidrogénen, abszorbeáló közegben

Amikor nem hanyagolható el az abszorpció, a (42.11) lassulási egyenletnek csak közelítő megoldásai ismeretesek. Ez alól kivétel a hidrogénen való lassulás esete. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy végtelen közeget, vagyis legyen  $B^2 = 0.^{82}$  Hidrogén esetében a lassulási egyenlet a következő alakba megy át:

$$-\Sigma_{t}(u)\psi(u) + \int_{0}^{u} \Sigma_{s}(u')\psi(u')e^{u'-u}du' + S(u) = 0.$$
(43.9)

Feltételeztük, hogy a neutronforrás nem termel  $E_0$ -nál nagyobb energiájú neutronokat, vagyis S(u) = 0, amikor u < 0. Az előzőekhez hasonlóan tekintsünk monoenergetikus forrást, vagyis legyen  $S(u) = \delta(u)$ , és keressük a megoldást

$$\Sigma_{t}(u)\psi(u) = \delta(u) + F(u)$$
(43.10a)

alakban, ahol [vö. (43.2b)]

$$F(u) = 0,$$
 ha  $u < 0.$  (43.10b)

Ha ezt (42.11)-be helyettesítjük, azt kapjuk, hogy F(u) kielégíti az

$$F(u) = \int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{s}(u')}{\Sigma_{t}(u')} F(u') e^{u'-u} du' + \frac{\Sigma_{s}(0)}{\Sigma_{t}(0)} e^{-u}$$
(43.11)

egyenletet. Ezt u szerint deriválva az egyszerű

$$\frac{\mathrm{d}F(u)}{\mathrm{d}u} = -\frac{\Sigma_{\mathrm{a}}(u)}{\Sigma_{\mathrm{t}}(u)} F(u)$$

differenciálegyenletet kapjuk, amelyhez (43.11)-ből a

$$\lim_{u \to +0} F(u) = \frac{\Sigma_{s}(0)}{\Sigma_{t}(0)}$$

kezdeti feltételt rendelhetjük. Könnyen látható, hogy ennek a megoldása

<sup>&</sup>lt;sup>82</sup> Ha jobban tetszik, mondhatjuk azt is, hogy (42.11)-ben a  $D(u)B^2$  tagot beolvasztjuk  $\Sigma_a(u)$ -ba.

$$F(u) = \frac{\Sigma_{\rm s}(0)}{\Sigma_{\rm t}(0)} \exp\left(-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{\rm a}(u')}{\Sigma_{\rm t}(u')} \,\mathrm{d}u'\right). \tag{43.12}$$

(43.7)-ből kiindulva számítsuk ki ebben az esetben a q(u) lassulási sűrűséget. Mivel hidrogén esetében a neutron letargiája akár egyetlen ütközésben is tetszőleges pozitív értéket elérhet, (43.7)-et most minden *u*-ra ki kell egészítenünk a pontosan egyszer ütközött neutronok járulékát kifejező taggal [vö. (43.7a)]:

$$q(u) = \int_0^u \frac{\Sigma_{\mathrm{s}}(u')}{\Sigma_{\mathrm{t}}(u')} F(u') \,\mathrm{d}u' \int_u^\infty \mathrm{e}^{u'-u''} \mathrm{d}u'' + \frac{\Sigma_{\mathrm{s}}(0)}{\Sigma_{\mathrm{t}}(0)} \int_u^\infty \mathrm{e}^{-u'} \mathrm{d}u'.$$

Az utolsó tagban  $\Sigma_{s}(0)/\Sigma_{t}(0)$  annak a valószínűsége, hogy az első ütközés szóródás. Képletünket (43.11)-gyel összevetve látjuk, hogy

$$q(u) = F(u) = \xi F(u) = \xi \Sigma_{t}(u) \psi(u). \qquad (43.13a)$$

Mivel hidrogénre  $\xi = 1$ , itt minden további nélkül odaírhattuk. Ha ezt (42.9) alapján az energiaváltozóra írjuk át, akkor a

$$q(E) = \xi \Sigma_{t}(E) \psi(E) E \tag{43.13b}$$

eredményt kapjuk. A levezetésből következik, hogy a hidrogénen való lassulásra ez a képlet *egzakt*. Az alábbiakban látni fogjuk, hogy az általános esetben azonban csak közelítőleg érvényes. A rezonanciaabszorpció tárgyalására mégis hasznos közelítésnek fog bizonyulni.

Ha a lassulási sűrűség fenti képletét u szerint deriváljuk, egyszerűen kapjuk, hogy a q(u) függvény – hidrogénre – kielégíti a

$$q(u) + \frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} = \Sigma_{\mathrm{s}}(u)\psi(u) \tag{43.14}$$

egyenletet. Ezt (43.9)-cel és (43.13a)-val kombinálva adódik:

$$\frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} = -\Sigma_{\mathrm{a}}(u)\psi(u) = -\frac{\Sigma_{\mathrm{a}}(u)}{\xi\Sigma_{\mathrm{t}}(u)}q(u),$$

amiből egyszerűen következik:

$$q(u) = \exp\left\{-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{a}(u')}{\xi \Sigma_{t}(u')} du'\right\},$$
(43.15)

hiszen nyilván  $q(u) \rightarrow 1$ , amikor  $u \rightarrow 0$ . Ebből (43.13) alapján számítható a fluxus:

$$\psi(u) = \frac{1}{\xi \Sigma_{t}(u)} \exp\left\{-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{a}(u')}{\xi \Sigma_{t}(u')} du'\right\}$$
(43.16a)

és

$$\psi(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_{t}(E)E} \exp\left\{-\int_{E}^{\infty} \frac{\Sigma_{a}(E')}{\xi \Sigma_{t}(E')} \frac{dE'}{E'}\right\}.$$
(43.16b)

## Lassulás az általános esetben

Az általános esetben nem sikerül olyan egyszerű, zárt képleteket levezetni, mint a hidrogénen való lassulás esetében (vagy akár az abszorpciómentes esetben). Ezért bizonyos közelítésekre van szükségünk. A tárgyalandó egyenlet (42.11) alapján:

$$-\Sigma_{t}(u)\psi(u) + \int_{u-\varepsilon}^{u} \Sigma_{s}(u')\psi(u')\frac{e^{u'-u}}{1-\alpha}du' + S(u) = 0.$$

Ha a (43.7) alatt definiált lassulási sűrűséget *u* szerint deriváljuk, egyszerűen beláthatjuk, hogy

$$\int_{u-\varepsilon}^{u} \Sigma_{s}(u')\psi(u')\frac{e^{u'-u}}{1-\alpha}du' = \Sigma_{s}(u)\psi(u) - \frac{dq(u)}{du},$$
(43.17a)

amit a lassulási egyenletbe helyettesítve (S(u) = 0 mellett, vagyis a forrástól távoli letargiákra) adódik a hidrogénre már levezetett egyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} = -\Sigma_{\mathrm{a}}(u)\psi(u). \tag{43.17b}$$

Ha tehát sikerül a lassulási sűrűség és a fluxus között valamilyen könnyen kezelhető, esetleg közelítő, de elegendően pontos összefüggést találni, a lassulási probléma kezelhetővé válik. Az ötletet a hidrogénre pontos (43.14) egyenletből vesszük, és ezt az összefüggést

$$q(u) + a \frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} = b \Sigma_{\mathrm{s}}(u) \psi(u) \tag{43.18}$$

alakban keressük, ahol *a* és *b* alkalmasan megválasztott, *u*-tól esetleg függő együtthatók. Az alábbiakban különböző lassulási modelleket fogunk ismertetni, és értéküket mindegyikre vonatkozóan meg fogjuk határozni. Ha q(u) deriváltját (43.17b)-ből behelyettesítjük, akkor a következő egyszerű összefüggést kapjuk:

$$q(u) = \left(a\Sigma_{a}(u) + b\Sigma_{s}(u)\right)\psi(u), \qquad (43.19)$$

162

amit (43.13)-mal összevetve látjuk, hogy hidrogén esetében  $a = b = \xi = 1$ . Végül ezt (43.17b)-be helyettesítve adódik:

$$q(u) = \exp\left\{-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{a}(u')}{a\Sigma_{a}(u') + b\Sigma_{s}(u')} du'\right\},$$
(43.20a)

továbbá könnyen levezethetjük (43.16) megfelelőit is:

$$\psi(u) = \frac{1}{a\Sigma_{a}(u) + b\Sigma_{s}(u)} \exp\left\{-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{a}(u')}{a\Sigma_{a}(u') + b\Sigma_{s}(u')} du'\right\}$$
(43.20b)

és

$$\psi(E) = \frac{1}{E(a\Sigma_{a}(E) + b\Sigma_{s}(E))} \exp\left\{-\int_{E}^{\infty} \frac{\Sigma_{a}(E')}{a\Sigma_{a}(E') + b\Sigma_{s}(E')} \frac{dE'}{E'}\right\}.$$
 (43.20c)

E rész befejezéseként megjegyezzük, hogy ezek az összefüggések azzal az elhanyagolással érvényesek, hogy a forrás energiájához közeli energiákon az abszorpciós hatáskeresztmetszet zérus. Ezért lehetett az energia szerinti integrált a végtelenig kiterjeszteni, letargiában 0-tól integrálni. Amikor ez a feltételezés nem jogos, úgyis csak numerikus eljárásokat lehet alkalmazni, amelyekben erre nincs szükség (vö. 5.2. alfejezet).

(43.20) alapján egyszerűen megkaphatjuk annak a valószínűségét, hogy egy forrásneutron lassulás közben eléri az *u* letargiát, vagyis nem abszorbeálódik:

$$p(0 \to u) = 1 - \int_{0}^{u} \Sigma_{a}(u') \psi(u') du' = \exp\left\{-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{a}(u')}{a\Sigma_{a}(u') + b\Sigma_{s}(u')} du'\right\}.$$
 (43.21)

Tekintve, hogy az abszorpció többnyire a nehéz izotópok rezonanciáin következik be, ezt a mennyiséget *rezonanciakikerülési valószínűség*nek nevezzük. Vegyük észre, hogy ez nem más, mint a (43.20a) alatti lassulási sűrűség.

## Lassulási modellek

Mint fentebb mondtuk, a *lassulási modellek* arra szolgálnak, hogy a fluxus és a lassulási sűrűség között egyszerű kapcsolatot létesítsenek. Három modellt fogunk megvizsgálni: Fermi-modell, Greuling–Goertzel-modell és Wigner-modell. Mind-egyik alakját a (43.18) képlet adja meg. Először a Greuling–Goertzel-modellel foglal-kozunk.

## Greuling–Goertzel-modell

A lassulási sűrűséget megadó (43.7) képletet némileg általánosabb alakban írjuk fel:

$$q(u) = \int_{u-\varepsilon}^{u} \Sigma_{s}(u') \psi(u') du' \int_{u}^{u'+\varepsilon} g(u' \to u'') du'',$$

ahol  $g(u' \rightarrow u'')du''$  annak a valószínűsége, hogy egy u' letargián szóródó neutron letargiája az (u'', u''+du'') intervallumba fog esni [vö. (42.8)]. Ezzel levezetésünk akkor is érvényben marad, amikor a szórás a tömegközépponti rendszerben nem izotrop. Minden esetben érvényes<sup>83</sup> azonban, hogy  $g(u' \rightarrow u'') = g(u' - u'')$ . Alkalmazzunk az első integrálban sorfejtést:

$$q(u) = \int_{u-\varepsilon}^{u} du' \left[ \Sigma_{s}(u)\psi(u) + (u'-u)\frac{d}{du} \left( \Sigma_{s}(u)\psi(u) \right) + \dots \right]_{u}^{u'+\varepsilon} g(u'-u'')du'' =$$
$$= G_{10}(u)\Sigma_{s}(u)\psi(u) + G_{20}(u)\frac{d}{du} \left( \Sigma_{s}(u)\psi(u) \right) + \dots,$$

ahol

 $G_{10}(u) = \int_{u-\varepsilon}^{u} du' \int_{u}^{u'+\varepsilon} g(u'-u'') du''$ 

és

$$G_{20}(u) = \int_{u-\varepsilon}^{u} \mathrm{d}u'(u'-u) \int_{u}^{u'+\varepsilon} g(u'-u'') \mathrm{d}u'' \,.$$

Képezzük ezután a (43.18) bal oldalán álló összeget, de – az egyszerűség kedvéért – hagyjuk el az u argumentumot:

$$q + a \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u} = G_{10} \Sigma_{\mathrm{s}} \psi + G_{20} \frac{\mathrm{d}(\Sigma_{\mathrm{s}} \psi)}{\mathrm{d}u} +$$

<sup>&</sup>lt;sup>83</sup> (42.8)-ból ez közvetlenül látható a tömegközépponti rendszerben izotrop szórás esetére.

$$+a\left[\frac{\mathrm{d}G_{10}}{\mathrm{d}u}\Sigma_{\mathrm{s}}\psi+G_{10}\frac{\mathrm{d}(\Sigma_{\mathrm{s}}\psi)}{\mathrm{d}u}+\frac{\mathrm{d}G_{20}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}(\Sigma_{\mathrm{s}}\psi)}{\mathrm{d}u}+G_{20}\frac{\mathrm{d}^{2}(\Sigma_{\mathrm{s}}\psi)}{\mathrm{d}u^{2}}\right]+\ldots$$

A szögletes zárójelben levő két utolsó tagot elhanyagoljuk, ugyanis ezek nagyságrendjébe eső tagokat az eredeti sorfejtésben már elhanyagoltunk. Ezzel azt kapjuk, hogy

$$q + a\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u} = \left(G_{10} + a\frac{\mathrm{d}G_{10}}{\mathrm{d}u}\right)\Sigma_{\mathrm{s}}\psi + \left(G_{20} + aG_{10}\right)\frac{\mathrm{d}(\Sigma_{\mathrm{s}}\psi)}{\mathrm{d}u}.$$

*a*-t úgy választjuk meg, hogy  $\Sigma_s \psi$  deriváltjának az együtthatója eltűnjön, mert egyenletünk ezzel a (43.18) szerinti alakot veszi fel:

$$a(u) = -\frac{G_{20}(u)}{G_{10}(u)},\tag{43.22}$$

amit előző egyenletünkbe helyettesítve – némi számolás után – adódik a keresett öszszefüggés:

$$q(u) + a(u)\frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} = G_{10}(u)\Sigma_{\mathrm{s}}(u)\psi(u)\left(1 - \frac{\mathrm{d}a(u)}{\mathrm{d}u}\right). \tag{43.23}$$

Ezt az összefüggést nevezzük *Greuling–Goertzel-modell*nek. A levezetésből következik, hogy a letargiával (energiával) lassan változó hatáskeresztmetszetek mellett érvényes.

Befejezésül megadjuk a benne szereplő G függvények értékét. Definíciójuk alapján ellenőrizhetjük, hogy

$$G_{10}(u) = -\int_{u-\varepsilon}^{u} (u'-u)g(u'-u)du' = \xi(u)$$
(43.24a)

és

$$G_{20}(u) = -\int_{u-\varepsilon}^{u} \frac{(u'-u)^2}{2} g(u'-u) du'.$$
(43.24b)

Ha (43.23) jobb oldalán elhanyagoljuk *a* deriváltját, a (43.18) képlet jobb oldalán szereplő együttható értéke:  $b \approx \xi(u)$ .

## Fermi-modell

A *Fermi-modell* a Greuling–Goertzel-modell egyszerűsített változata. Nehéz magokra *a* kicsi, ezért (43.23)-ban elhanyagolhatjuk a vele arányos tagokat:

$$q(u) = \xi(u)\Sigma_{s}(u)\psi(u). \tag{43.25}$$

Gyakorlati számításokban az alumíniumnál nehezebb elemek (A > 27) esetében elfogadható közelítés.

## Wigner-modell

A Wigner-modell rezonancián való abszorpció számítására használható közelítés. Ezt egy Einsteintől származó gondolatmenettel mutatjuk meg [1]. Képzeljük úgy, hogy a forrás által termelt neutronok "fehérre vannak festve", továbbá, hogy az abszorbeálódó neutronok színe "feketére változik", de továbbra is a reaktorban maradnak. Ekkor  $p(0 \rightarrow u)$  annak a valószínűsége, hogy egy forrásneutron lassulás közben fehéren jut túl az *u* letargián. (43.8) szerint a fehér és fekete neutronok *együttes* ütközési sűrűsége  $1/\xi$ , vagyis fluxusuk

$$\psi_{\mathrm{T}}(u) = \frac{1}{\xi \Sigma_{\mathrm{t}}(u)}.$$

A "T" indexszel azt kívánjuk hangsúlyozni, hogy itt együttes fluxusról van szó. Mivel ennek a szempontjából az abszorpció is szórásnak minősül, azért írhattunk a (43.8)beli  $F_s(u)$  eredeti, (43.2a) szerinti definíciójában  $\Sigma_s$  helyett  $\Sigma_t$ -t.

Azoknak a neutronoknak a száma, amelyek ütközés révén egy d*u* intervallumba eső letargiára tesznek szert, megegyezik az azt elhagyó neutronok számával:

$$\Psi_{\mathrm{T}}(u)\Sigma_{\mathrm{t}}(u)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}u}{\xi}.$$

Közülük valamelyik  $\Sigma_{a}(u)/\Sigma_{t}(u)$  valószínűséggel válik feketévé (abszorbeálódik), tehát az adott intervallumban abszorbeálódó neutron száma

$$\frac{\mathrm{d} u}{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{a}}(u)}{\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{t}}(u)} \, .$$

Ha a tekintett rezonancia alatti részintervallumokra ezt összegezzük, megkapjuk az abszorpció valószínűségét. Ezt azt jelenti, hogy a rezonanciakikerülési valószínűségnek erre a rezonanciára vonatkozó része a következőképpen állítható elő:

$$p = 1 - \int \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\Sigma_{\mathbf{a}}(u)}{\Sigma_{\mathbf{t}}(u)} du \approx \exp\left\{-\int \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\Sigma_{\mathbf{a}}(u)}{\Sigma_{\mathbf{t}}(u)} du\right\}.$$

Ha feltételezzük, hogy az egyes rezonanciákban bekövetkező abszorpciók egymástól függetlenek, a keresett valószínűséget a kapott kikerülési valószínűségeknek a (0, u) intervallumba eső rezonanciákra vonatkozó szorzatával egyenlő:

$$p(0 \rightarrow u) = \exp\left\{-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{a}(u')}{\Sigma_{a}(u') + \Sigma_{s}(u')} \frac{\mathrm{d}u'}{\xi}\right\}.$$
(43.26)

Ha ezt (43.21)-gyel összevetjük, azt találjuk, hogy ez is egy (43.18) alakú modellnek felel meg, ha  $a = b = \xi$ . Ezt (43.17b)-vel kombinálva a

$$q(u) = \xi(u) \mathcal{L}_{t}(u) \psi(u) \tag{43.27}$$

összefüggést kapjuk. Ezt a képletet szoktuk Wigner-modell néven emlegetni.

#### Lassulás keverékben

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a lassulás egyetlen izotópon történik. A gyakorlatban természetesen *izotópok keverékével* van dolgunk. Az elmondottak könynyen általánosíthatók erre az esetre.

Amikor a lassulás több különböző izotópon történik, a teljes q(u) lassulási sűrűség parciális lassulási sűrűségek összege:

$$q(u) = \sum_{j} q_{j}(u), \qquad (43.28)$$

ahol a *j* összegzési index végigfut a reaktorban előforduló valamennyi izotópon, és mindegyik  $q_j(u)$  egy (43.7) alakú integrál segítségével számítandó ki:

$$q_{j}(u) = \int_{u-\varepsilon_{j}}^{u} \Sigma_{sj}(u')\psi(u')du' \int_{u}^{u'+\varepsilon_{j}} g_{j}(u'-u'')du''.$$
(43.29)

Természetesen mindegyik  $q_j(u)$ -ra vonatkozóan az  $A_j$  tömegszámtól függően eltérő közelítést alkalmazhatunk. Elképzelhető tehát, hogy a könnyű izotópokra a Greuling–Goertzel-modellt alkalmazzuk, a nehezekre pedig a Fermi-modellt. Numerikus számí-tásokban ténylegesen ez is történik.

Láttuk, hogy gyorsan változó és nagy abszorpciós hatáskeresztmetszetek esetében az adekvát modell a Wigner-modell. Ezért a lassuláselméletben a rezonanciák figyelembevételét külön kell választanunk az olyan energiatartományokban való lassulás tárgyalásától, amelyekben az abszorpciós hatáskeresztmetszet kicsi és lassan változik. Ezért a 4.4. alfejezetben külön tárgyaljuk a rezonanciaabszorpciót. A teljes numerikus eljárást pedig az 5.2. alfejezetben ismertetjük.

## 4.4. A rezonanciaintegrál

#### Rezonanciaabszorpció homogén közegben

Rezonanciaszerűen megnövekvő valószínűséggel váltanak ki magreakciót az olyan energiájú neutronok, amelyeknek az atommagban való elnyelődésekor éppen az összetett mag valamelyik energianívója gerjesztődik. (A neutron energiájának a gerjesztési energia és a mag visszalökésére fordított energia összegéhez kell közel lennie.) Ha ezt az energiát  $E_r$ -rel jelöljük, akkor ehhez közeli E energiákon a teljes, a befogási és a hasadási hatáskeresztmetszeteket a *Breit–Wigner*-formula szerint számíthatjuk ki:

$$\sigma_{t}(E) = \frac{\sigma_{0}}{1+x^{2}} + \left(\sigma_{0}\sigma_{pa}g_{j}\frac{\Gamma_{n}}{\Gamma}\right)^{1/2}\frac{2x}{1+x^{2}} + \sigma_{pa}, \qquad (44.1)$$

$$\sigma_{\rm c}(E) = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \frac{\Gamma_{\gamma}}{\Gamma}, \qquad (44.2)$$

$$\sigma_{\rm f}(E) = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \frac{\Gamma_{\rm f}}{\Gamma}$$
(44.3)

ahol

$$x = \frac{E - E_{\rm r}}{\Gamma/2},\tag{44.4}$$

továbbá  $\Gamma$ ,  $\Gamma_n$ ,  $\Gamma_\gamma$ ,  $\Gamma_f$ ,  $\Gamma_a = \Gamma_\gamma + \Gamma_f$  rendre a rezonancia teljes, rezonanciaszórási, befogási, hasadási és abszorpciós szélessége,  $\sigma_0$  a teljes rezonancia-hatáskeresztmetszet értéke az  $E = E_r$  rezonanciaenergiánál,  $\sigma_{pa}$  az abszorbens mag potenciálszórási hatáskeresztmetszete, végül  $g_j = (2J+1)/(2I+2)$  a statisztikus spin-tényező (ahol *I* az eredeti atommag, *J* pedig az összetett mag spinkvantumszáma).<sup>84</sup> Ezekben a képletekben *E* a neutronnak a maghoz képest való relatív mozgásához tartozó energia. A (44.1) képletben szereplő második tagot a kvantummechanika szerint úgy értelmezzük, mint a potenciál- és a rezonanciaszóráshoz tartozó hullámfüggvények interferenciájának a következményét. Ez a tag eredményezi azt, hogy a rezonancia-hatáskeresztmetszetek görbéje enyhén aszimmetrikus.

A reaktorok működése szempontjából elsősorban a nehéz páros-páros izotópok (<sup>238</sup>U, <sup>232</sup>Th, <sup>240</sup>Pu stb.) rezonanciáinak van jelentőségük, de pontos számításokban nem hagyhatók figyelmen kívül a páros-páratlan (például <sup>235</sup>U, <sup>239</sup>Pu) izotópok rezonanciái sem. Az egyes izotópok esetében több, mint száz egymástól jól elkülönülő rezonanciát azonosítottak (lásd például *21.4. ábra*), amelyek  $E_r$  energiája néhány eV-tól néhány keV-ig terjed. A gyakorlatban különösen fontos az <sup>238</sup>U 6,67 eV-nál és a <sup>240</sup>Pu 1 eV-nál lévő rezonanciája. Az egymástól elkülöníthető, ún. *felbontott rezonanciák* felett (tehát a keV tartományban) van még sok, egymástól nehezen elkülöníthető, ún. *fel nem bontott rezonancia*, amelyek leírására a numerikus számításokban statisztikus módszereket szoktunk alkalmazni: (kísérletileg vagy elméletileg) eloszlásfüggvényeket határozunk meg az  $E_r$  energiákra és  $\Gamma$  vonalszélességekre. Az alábbiakban csak a felbontott rezonanciákkal fogunk foglalkozni.

<sup>&</sup>lt;sup>84</sup> A (44.1) alatti Breit–Wigner-formula akkor érvényes, amikor a rezonanciában az atommag egyetlen energianívója játszik szerepet. A legtöbb esetben azonban több nívót is figyelembe kell venni, és emiatt a korszerű számításokban az ún. *többnívós formulák*at használják. Könyvünkben mégis megtartjuk egy egynívós képleteket, mert ezek könnyen kezelhetők, és alkalmasak a legfontosabb jelenségek *lényegének* ismertetésére.

Tekintsük először rezonanciaabszorbens-magok és moderátormagok *homogén keverékét*. Az abszorpció jelenlétében kialakuló spektrumot a (43.20) képletek segítségével számíthatjuk ki. A 4.3. alfejezetben láttuk, hogy a rezonanciák tárgyalására a Wigner-modell tekinthető a legjobbnak, vagyis a (43.20) képletekbe  $a = b = \xi$ -t helyettesítünk. Ekkor a (43.21) alatt definiált rezonanciakikerülési valószínűséget a

$$p(0 \to u) = \exp\left(-\int_{0}^{u} \frac{\Sigma_{a}(u')}{\xi \Sigma_{t}(u')} du'\right).$$
(44.5)

képlet adja meg. Nem mutatjuk meg részletesen, csak megjegyezzük, hogy ez akkor jelent jó közelítést, ha

- a szomszédos rezonanciák a moderátorhoz tartozó  $\varepsilon$  egységeiben mérve a letargiatengelyen egymástól távol vannak, továbbá ha
- az egyes rezonanciák keskenyek, tehát ha  $\Gamma << \alpha E_r$ .

E feltevések érvényességét feltételezve elegendő lesz az egyes rezonanciákat egymástól függetlenül vizsgálni.

Nyilvánvaló, hogy a sokszorozási tényező szempontjából döntő jelentősége van annak, hogy a 2 MeV átlagos hasadási energiáról termikus energiákra való lassulás közben hány neutron "vészeli át" abszorbeálódás nélkül azt az energiatartományt, ahol rezonanciák vannak. (44.5)-ből látható, hogy erre vonatkozóan elsősorban az exponenciális kifejezés kitevőjében lévő integrál a mérvadó. Ezért most ezt nézzük meg közelebbről. Az integrál alatti kifejezés nevezőjében lévő  $\Sigma_t(u)$  teljes hatáskeresztmetszet két részre bontható:

- az  $E_r$  rezonanciaenergiáktól különböző E energiákon érvényes, *u*-tól független  $\Sigma_p$  potenciálszórási hatáskeresztmetszet, továbbá
- a nullától csak a rezonancia energiák közelében különböző  $\Sigma_{\rm a}(u)$  abszorpciós hatáskeresztmetszet, vagyis

$$\Sigma_{t}(u) = \Sigma_{p} + \Sigma_{a}(u) = N\sigma_{pa} + \Sigma_{m} + \Sigma_{a}(u),$$

ahol – mint látjuk – a  $\Sigma_p$  potenciálszórási hatáskeresztmetszetet tovább bontottuk az abszorbens mag és a moderátor hatáskeresztmetszetére. (Az előbbi az utóbbihoz képest általában kicsi.) *N* az abszorbens magsűrűsége.

(43.8)-ból következik, hogy olyan energiákon, ahol nincsenek rezonanciák, a fluxust a potenciálszórási hatáskeresztmetszet határozza meg:

$$\psi^{\mathrm{fiktív}}(u) = \frac{1}{\xi \Sigma_{\mathrm{p}}}.$$

Egy rezonancia közelében a fluxus ennél kisebb, ezért ezt ott *fiktív fluxus*nak nevezzük: az *u* letargián azt adja meg, mekkora lenne a fluxus, ha *u* közelében nem lenne rezonancia. Mivel a fiktív fluxust könnyű kiszámítani, és *u*-val lassan változik (hiszen az abszorpciómentes esetre érvényes egyszerű elmélet alkalmazható rá), a rezonanciaabszorpció jellemzésére célszerű bevezetni az *effektív rezonanciaintegrált* (*I*), amely úgy van definiálva, hogy a fiktív fluxussal szorozva megadja a rezonanciakikerülési valószínűséget (44.5) szerint meghatározó integrál értékét. Az előző képletekből könnyen levezethető:

$$p(0 \rightarrow u) = \exp\left(-\frac{NI}{\xi \Sigma_{\rm p}}\right), \qquad \qquad NI = \int_{0}^{\infty} \frac{\Sigma_{\rm p} \Sigma_{\rm a}(u)}{\Sigma_{\rm t}(u)} \,\mathrm{d}u. \qquad (44.6)$$

Mint látható, a rezonanciaintegrált barn egységekben mérjük, hiszen definíciója szerint mikroszkopikus hatáskeresztmetszet.

(44.5) szerint a rezonanciakikerülési valószínűség nő, ha  $\Sigma_p$  nő, vagyis ha az abszorbens magokhoz képest szaporítjuk a moderátor magokat. Ez a magyarázata annak, hogy egyáltalán érdemes moderátort alkalmazni. Ebből a szempontból tehát a legjobb lenne az abszorbens magokat (a reaktorok esetében az uránt) a moderátorban minél jobban hígítani.<sup>85</sup> Az imént definiált rezonanciaintegrál viszont másképp viselkedik: annál nagyobb, minél nagyobb a hígítás. A  $\Sigma_p \rightarrow \infty$  határátmenetkor kapott értéket végtelen hígítású rezonanciaintegrálnak nevezzük:

$$I_{\infty} = \int_{0}^{\infty} \sigma_{a}(u) \mathrm{d}u.$$
(44.6a)

 $\sigma_{a}(u)$  értékét (44.2)-ből véve az integrált könnyen kiszámíthatjuk, és – egyetlen rezonanciára vonatkozóan – kapjuk:

$$I_{\infty} = \frac{\pi}{2}\sigma_0 \frac{\Gamma_{\rm a}}{E_{\rm r}}.$$

. .

A rezonanciaintegrál véges  $\Sigma_p$ -re is kiszámítható analitikusan. Vezessük be a

$$\sigma_{\rm p} = \frac{\Sigma_{\rm p}}{N}$$

jelölést, továbbá – az egyszerűség kedvéért – tegyük fel, hogy  $\sigma_{pa} \ll \sigma_p$ , ekkor a (44.6)-ban felírt integrált kiértékelve adódik:

$$I(\sigma_{\rm p}) = \frac{\sigma_{\rm p} \Gamma_{\rm a}}{2E_{\rm r}} \int \frac{\sigma_0 / (1 + x^2)}{\sigma_{\rm p} + \sigma_0 / (1 + x^2)} \, \mathrm{d}x = I_{\infty} \frac{\sigma_{\rm p}}{\sqrt{\sigma_{\rm p} (\sigma_0 + \sigma_{\rm p})}},\tag{44.7}$$

<sup>&</sup>lt;sup>85</sup> A gyakorlatban azonban más szempontok is vannak, amelyek a hígításnak határt szabnak: ha túlságosan sok a moderátor, akkor ugyan sok neutron kerüli el az abszorpciót, de ezek nagy részét nem a hasadóanyag, hanem a moderátor fogja abszorbeálni. Ezt a kérdést a 6.3. alfejezetben tárgyaljuk.

ami jól mutatja, hogy  $I(\sigma_p)$  szigorúan monoton növekvő függvény. Az utóbbi és az alábbi képletekben szereplő integrálok mindig a tekintett rezonancia környékére vonatkoznak, de az integrált  $-\infty$ -től  $+\infty$ -ig számoljuk, hiszen a rezonanciától távol az integrandus eltűnik.

## Rezonanciaabszorpció fűtőelemrácsokban<sup>86</sup>

A legtöbb reaktorban az urán nem homogénen van a moderátorral elkeverve, hanem fűtőelemrudak formájában merül a moderátorba. Nézzük meg most, milyen befolyással van ez a rezonanciaabszorpcióra. Tekintsünk tehát a 44.1. ábra szerint egy moderátorral körülvett rudat. Két részre osztjuk azokat a neutronokat, amelyek energiája a rúdban lévő abszorbens mag valamelyik rezonanciájának a közelébe esik: azokra, amelyek utolsó ütközése a rúdban és azokra, amelyeké a moderátorban volt. Vegyük a rezonanciát keskenynek, ami azt jelenti, hogy feltesszük: az előbbiek utolsó ütközése jóval a rezonanciaenergia felett volt, tehát ahol a rúd hatáskeresztmetszetei még kicsik. Emiatt ilyen energiákon a  $\Phi$  fluxus egyenletes mind térben, mind energiában (más szóval: sem a helytől, sem a letargiától nem függ). A rezonanciaenergián már más a helyzet: a rúdban a hatáskeresztmetszetek nagyok, és így a rúd belsejében kialakuló fluxus  $\Phi$ -nél sokkal kisebb. Ugyanakkor a moderátorban – a rúd közvetlen környezetét leszámítva – a fluxust a rezonanciához közeli energiákon is jó közelítéssel  $\Phi$ -vel egyenlőnek vehetjük. Ez a  $\Phi$  felel meg annak, amit a homogén esetben fiktív fluxusnak neveztünk, hiszen a rúd belsejében a rezonanciaenergián is ez adná meg a fluxust, ha nem lenne rezonancia.



44.1. ábra. Moderátorban levő magányos fűtőelemrúd

Tekintsük a neutronok fent meghatározott két csoportját külön-külön. A rezonancia feletti energiákon az ütközési sűrűség  $\Sigma'_p \Phi$ , ahol  $\Sigma'_p$  a rúd potenciálszórási hatáskeresztmetszete. (Korábban  $\Sigma_p$ -vel jelöltük a moderátorra és az abszorbensre együtt vonatkozó hatáskeresztmetszetet. Ettől való megkülönböztetésül használunk vesszőt:  $\Sigma'_p$  csak a rúdban lévő anyagokra vonatkozik, tehát pl. UO<sub>2</sub> esetében az uránra és a rúdban levő oxigénre.) Ez az ütközési sűrűség (43.1) szerint egyben azoknak a neutronoknak a számát is megadja, amelyek a szóban forgó energiára lassulnak le (hiszen most S(u) = 0). Ez utóbbiak száma független attól, hogy van-e rezonancia

<sup>&</sup>lt;sup>86</sup> Ezt a részt – nehézsége miatt – első olvasáskor célszerű kihagyni. A későbbi fejezetekben csak a végeredményre, tehát a (44.9)–(44.13) képletekre lesz szükség.

vagy nincs, mert ezek mind a rezonancia feletti energiákon ütköztek.<sup>87</sup> Legyen  $P_0(\Sigma_t)$  annak a valószínűsége, hogy a rúdban egyenletes térbeli eloszlással megjelenő neutron a rúdból ütközés nélkül kiszökik. ( $\Sigma_t$ -n keresztül ez függ *u*-tól.) Segítségével a rúdban abszorbeálódó neutronok számát a

$$\mathcal{L}_{p}^{\prime} \Phi V \int \left[1 - P_{0}(\mathcal{L}_{t})\right] \frac{\mathcal{L}_{a}(u)}{\mathcal{L}_{t}(u)} du$$

integrál adja meg, ahol az *u* szerint való integrálást a rezonancia közelébe eső letargiákra kell kiterjeszteni. *V* a rúd térfogata. Az integrandusban a  $\Sigma_a/\Sigma_t$  hányados adja meg annak a valószínűségét, hogy a rúdban történő ütközés abszorpcióra vezet.

Nézzük ezután azokat a neutronokat, amelyek energiája a rezonancia közelébe esik, és amelyek utolsó ütközése a moderátorban volt. Ezek térfogategységre és egységnyi letargiaintervallumra eső száma  $\Sigma_m \Phi$ , ahol  $\Sigma_m$  a moderátor szórási hatáskeresztmetszete. (Ez ugyanúgy (43.1)-ből következik, mint fentebb.) A közülük a rúdban abszorbeálódó neutronok számának meghatározása érdekében bevezetjük a következő Green-függvényt: legyen  $G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2)$  egy az  $\mathbf{r}_1$  helyen valamilyen energiával keletkező neutron utódai által az  $\mathbf{r}_2$  helyen ugyanazon az energián létrehozott fluxus. Ennek a felhasználásával a neutronok szóban forgó csoportja által a tekintett energián a rúdban kiváltott abszorpciók száma:

$$\int_{\text{f.e.}} \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \boldsymbol{\varSigma}_a \int_{\text{mod.}} \boldsymbol{\varSigma}_m \boldsymbol{\varPhi} G(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2) \, \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \, .$$

(Az "f.e." és "mod." rövidítések a fűtőelemrúdra, illetve a moderátorra utalnak.) A korábban már szerepelt  $P_0(\Sigma_t)$  valószínűség szintén kifejezhető ezzel a Green-függ-vénnyel:

$$P_0(\boldsymbol{\Sigma}_{t}) = \int_{\text{f.e.}} G(\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_1) \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{V} \int_{\text{mod.}} \boldsymbol{\Sigma}_{\text{m}} \mathrm{d}\mathbf{r}_1 ,$$

ugyanis egy rúdban egyenletes eloszlással keletkező egyetlen neutronnak (amire  $P_0$  vonatkozik) megfelelő forrássűrűség 1/V, továbbá a moderátorra vonatkozó integrál azokat a neutronokat veszi számba, amelyek nem a rúdban, hanem a moderátorban ütköznek.<sup>88</sup> Alkalmazzuk most az egycsoport transzportelmélet egy fontos tételét, az ún. *reciprocitási tétel*t, amelyet itt bizonyítás nélkül idézünk [3]:

$$G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1)$$

Ezzel az utoljára a moderátorban ütközött neutronok közül a rúdban abszorbeálódó neutronok száma így írható:

<sup>&</sup>lt;sup>87</sup> Nem mondjuk minden esetben külön, de ismét emlékeztetünk arra, hogy mindezek a kijelentéseink egységnyi letargiaintervallumra, idő- és térfogategységre vonatkoznak.

<sup>&</sup>lt;sup>88</sup> Ennek az összefüggésnek a megértéséhez még figyelembe kell vennünk, hogy a moderátorban ütköző neutronok a kiszemelt rezonanciában való abszorpció szempontjából már semmiképpen sem jönnek szóba, hiszen a szóródás miatt egy sokkal kisebb energiára lassulnak le.

$$\int_{\text{f.e.}} d\mathbf{r}_2 \Sigma_a \int_{\text{mod.}} \Sigma_m \varPhi G(\mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 = \int_{\text{f.e.}} d\mathbf{r}_2 \Sigma_a \int_{\text{mod.}} \Sigma_m \varPhi G(\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 = \varPhi V \Sigma_a P_0(\Sigma_t),$$

amit a letargia szerint integrálva és az előzővel kombinálva kapjuk a rúdban abszorbeálódó neutronok teljes számát:

$$NI\Phi V = \int \Sigma_{p}^{\prime} \Phi V \left[ 1 - P_{0}(\Sigma_{t}) \right] \frac{\Sigma_{a}(u)}{\Sigma_{t}(u)} du + \int \Phi V \Sigma_{a}(u) P_{0}(\Sigma_{t}) du.$$
(44.8)

Az itt definiált I mennyiség szintén rezonanciaintegrálnak tekinthető, mert egységnyi térfogatra és *egy* abszorbens magra vonatkozik, továbbá a  $\Phi$  fiktív fluxussal szorozva megadja a rezonanciaabszorpció reakciógyakoriságát.

A  $P_0(\Sigma_1)$  valószínűség általában bonyolultan függ  $\Sigma_1$ -től, továbbá a rúd alakjától és méreteitől. Wigner Jenő javasolt egy nagyon egyszerű, de meglepően pontos közelítő formulát:

$$P_0(\boldsymbol{\Sigma}_t) = \frac{1}{1 + \boldsymbol{\Sigma}_t \ell},$$

ahol

$$\ell = \frac{4V}{S} \tag{44.9}$$

az átlagos húrhossz a rúdban.<sup>89</sup> (S a rúd felülete.) Ezt (44.8)-ba írva egyszerű átalakítás után kapjuk, hogy

$$NI = \int \frac{\Sigma_{\rm p}' + 1/\ell}{\Sigma_{\rm t} + 1/\ell} \, \Sigma_{\rm a} \mathrm{d}u \,. \tag{44.10}$$

Az integrál alatti kifejezés nevezőjét írjuk ki részletesebben:

$$\Sigma_{t} + 1/\ell = \Sigma_{a} + \Sigma_{p}' + 1/\ell$$
 (44.11)

Itt ugyanaz az összeg jelent meg, amelyik a számlálóban is szerepel. Ha ezt (44.6)-tal összevetjük, akkor látjuk, hogy a ( $\Sigma'_p + 1/\ell$ ) összeg itt ugyanazt a szerepet játssza, mint (44.6)-ban a homogén közeg  $\Sigma_p$  potenciálszórási hatáskeresztmetszete. Ezt az

<sup>&</sup>lt;sup>89</sup> A (44.9) képletnek számos levezetése ismert. A legegyszerűbb a következő. Tekintsünk egy végtelen közeget, amelyben térben egyenletes  $\Phi$  fluxus alakul ki. Jelöljük ki a V térrészt. A 2.1. alfejezetben megmutattuk, hogy  $\Phi V$  megadja a V térrészben levő neutronok által időegység alatt megtett utak összegét. Ugyanezt másképp is kifejezhetjük. A (21.10) képletek alapján a V térrész felületének egységnyi darabján 1 s alatt befelé haladó neutronok száma:  $\Phi/4$ . Ezek mindegyike (átlagosan)  $\ell$  hosszúságú utat tesz meg a V térrészben. Tehát  $S\ell \Phi/4$  a felületen 1 s alatt belépő neutronok által összesen megtett úthossz. Ezt az előbbivel egyenlővé téve kapjuk (44.9)-et.

eredményt a következő fontos *ekvivalenciatétel* formájában is megfogalmazhatjuk: egy rúdra vonatkozó rezonanciaintegrál kiszámítása visszavezethető a homogén esetre, ha a rúd potenciálszórási hatáskeresztmetszetéhez  $1/\ell$  -et hozzáadunk.

Végeredményben tehát a moderátornak a rúdtól való különválasztása megnöveli a rezonanciaintegrált, mivel az (44.7) szerint  $\sigma_{\rm p}$ -nek monoton növekvő függvénye. Ennél bonyolultabb kérdés, hogy a heterogén elrendezés növeli-e vagy csökkentie a rezonanciakikerülési valószínűséget. Hasonlítsuk össze ebből a szempontból azonos mennyiségű urán és moderátor homogén és heterogén elrendezését. A  $\Phi$  fiktív fluxus mindkettőre ugyanaz, hiszen a rezonanciától távol eső energiákon a hatáskeresztmetszetek kicsik, más szóval a szabad úthosszak sokkal nagyobbak, mint a fűtőelemrúd átmérője, így ilven energiákon a fluxus nem "érzi" a reaktor olyan finom részleteit, mint a fűtőelemrács. Ez azt jelenti, hogy a rezonanciakikerülési valószínűség annál nagyobb, minél kisebb a rezonanciaintegrál. Végeredményben tehát arra a következtetésre jutottunk, hogy a heterogén elrendezés akkor kedvezőbb, ha  $\Sigma_m$  nagyobb, mint  $1/\ell$ . Tekintve, hogy a fűtőelemrudak méretét elsősorban nem reaktorfizikai, hanem hőtechnikai szempontok határozzák meg, egyáltalán nem biztos, hogy ez a gyakorlatban is így van. Példaként vegyük a paksi atomerőmű esetét. Ott a rudak átmérője (kerekítve) 1,5 cm, amelyre vonatkozóan (44.9) szerint  $1/\ell = 0,67$  cm<sup>-1</sup>. A moderátor könnyűvíz, amelyre  $\Sigma_m = 1,3 \text{ cm}^{-1}$ , vagyis itt a heterogén elrendezés egy kicsit kedvezőbb, mint a homogén keverék lenne.

Eddigi képleteink egy-egy rezonanciára vonatkoztak. A teljes rezonanciaintegrált úgy kapjuk meg, hogy az egyes rezonanciákra külön vett integrálokat összegezzük. Ha az egyes (felbontott) rezonanciák adatait ( $E_r$ ,  $\Gamma$ ,  $\Gamma_\gamma$  stb.) magfizikai katalógusokból kiolvassuk, ezen a módon bármilyen konkrét esetben ki tudjuk számítani a teljes rezonanciaintegrált. Gyakran valóban így járunk el. Vannak azonban közvetlen mérési eredmények is. *Hellstrand* svéd fizikus (1957-ben) különböző anyagú és átmérőjű rudakra végzett méréseket, és azt találta, hogy a rezonanciaintegrál a rúd anyagán kívül valóban csak  $\ell$ -től, vagyis (44.9) szerint az *S/V* hányadostól függ. Mivel a rúdban lévő urán *M* tömege *V*-vel arányos, az ekvivalenciatétel értelmében Hellstrand elméletileg megalapozottan fejezte ki mérési eredményeit *S/M* függvényeként:

fém uránra:  $I = 2,81 + 24,7\sqrt{S/M}$ , ha 0,07 < S/M < 0,53; (44.12)

UO<sub>2</sub>-re: 
$$I = 4,151 + 26,6\sqrt{S/M}$$
, ha  $0,08 < S/M < 0,7$ . (44.13)

Itt *I*-t barn, *S*/*M*-et pedig  $cm^2/g$  egységekben kell behelyettesíteni.

# A Doppler-effektus

Az eddigi levezetésekben szereplő képletek csak akkor érvényesek, ha az abszorbens magok nyugalomban vannak. A valóságban azonban hőmozgást végeznek, és ennek bizonyos rezonanciák esetében számottevő hatása van a rezonanciaintegrálra. Ezt a reaktorok biztonsága szempontjából döntő jelentőségű hatást *Dopplereffektus*nak nevezzük, amely amiatt lép fel, hogy a (44.1) formulák által megadott hatáskeresztmetszet helyett a (21.6) képlet által definiált effektív hatáskeresztmetszetet kell használnunk:

$$v\sigma_{\rm eff}(v) = \int |\mathbf{v} - \mathbf{V}| \,\sigma(|\mathbf{v} - \mathbf{V}|) P_3(\mathbf{V}) \mathrm{d}\mathbf{V} \,. \tag{44.14}$$

ahol **v** és **V** a neutron, illetve a mag sebességvektora a laboratóriumi rendszerben,  $P_3$  az abszorbens magok sebességeloszlása, amelyről feltesszük, hogy Maxwell-eloszlás:

$$P_{3}(\mathbf{V})d\mathbf{V} = \left(\frac{mA}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mAV^{2}}{2kT}\right) dV_{x}dV_{y}dV_{z}.$$
(44.15)

*m* a neutron, *mA* pedig az abszorbens mag tömege, *k* a Boltzmann-állandó, *T* az abszorbens anyagának a hőmérséklete,  $V = |\mathbf{V}|$ . A mag és a neutron relatív mozgásának megfelelő neutronenergia:

$$E' = \frac{m|\mathbf{v} - \mathbf{V}|^2}{2} \approx \frac{mv^2}{2} - mvV_z = E - V_z\sqrt{2mE} .$$
(44.16)

Itt a koordinátarendszer *z* tengelyét a neutron mozgásának az irányában vettük fel. (44.16) szerint  $|\mathbf{v} - \mathbf{V}|$  csak  $V_z$  függvénye, tehát (44.14)-ben a  $V_x$  és a  $V_y$  komponensek szerinti integrálást minden további nélkül elvégezhetjük, aminek eredményeképpen a (44.14)-ben felírt integrál már csak  $V_z$  eloszlásfüggvényétől fog függni:

$$P_1(V_z) = \left(\frac{mA}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mAV_z^2}{2kT}\right),$$

amit (44.14)-be írva – némi számolás után – kapjuk:

$$\sigma_{\rm a,eff}(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_{\rm a}}{\Gamma} \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\theta^2 (x-y)^2/4\right)}{1+y^2} \, \mathrm{d}y \,,$$

ahol x-et (44.4)-ben már definiáltuk, továbbá

$$\theta = \frac{\Gamma}{\Delta}$$

és

$$\Delta = \left(\frac{4kTE_{\rm r}}{A}\right)^{1/2}$$

a rezonancia *Doppler-szélessége*. Ezt (44.2)-vel összevetve látjuk, hogy a Dopplereffektus miatt a Breit–Wigner-féle  $1/(1+x^2)$  szerinti vonalalak helyett az

$$\eta(\theta, x) = \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\theta^2 (x - y)^2 / 4\right)}{1 + y^2} \, \mathrm{d}y \tag{44.17}$$

ún. *Doppler-kiszélesedett vonalalak*ot kell használni. Ezt a helyettesítést (44.7)-ben elvégezve kapjuk a *T* hőmérséklethez tartozó rezonanciaintegrált:

$$I(\sigma_{\rm p},T) = \frac{\sigma_{\rm p}\Gamma_{\rm a}}{2E_{\rm r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 \eta(\theta,x)}{\sigma_{\rm p} + \sigma_0 \eta(\theta,x)} \,\mathrm{d}x \,. \tag{44.18}$$

Végső soron tehát az  $\eta(\theta,x)$  vonalalak sajátosságai döntik el, milyen hatással van a Doppler-effektus a neutronmérlegre. Nézzük ezek közül a legfontosabbakat:

1.  $T \rightarrow 0$  esetén  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow \infty$ , amit (44.17)-ben figyelembe véve kapjuk:

$$\lim_{T \to 0} \eta(\theta, x) = \lim_{\theta \to \infty} \eta(\theta, x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Ez azt is jelenti, hogy ha a rezonancia magfizikai szélessége (vagyis I) a Dopplerszélességhez képest nagy, akkor a Doppler-effektus alig befolyásolja a rezonanciaintegrált.

2. A kiszélesedett vonalalak alatti terület ugyanakkora, mint az eredeti terület:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\theta, x) \, \mathrm{d}x = \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2},$$

ami azt jelenti, hogy a (44.6a) alatt definiált végtelen hígítású rezonanciaintegrál független *T*-től. Tehát a Doppler-effektus csak véges  $\sigma_p$  esetén lehet jelentős.

3. A rezonanciaintegrálhoz tartozó hatáskeresztmetszet  $\sigma_0$ -nál kisebb, mert:

$$\eta(\theta,0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta \exp\left(\frac{\theta^2}{4}\right) \operatorname{erfc}(\theta) < 1,$$

ahol

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt$$
 (44.19)

A görbe alatti terület csak úgy maradhat változatlan, ha a vonal kiszélesedik (44.2. *ábra*).

176



44.2. ábra. Doppler-effektus az <sup>238</sup>U legnagyobb rezonanciájára

4. Könnyen ellenőrizhetjük a következő azonosságot:

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = -\frac{\Gamma}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial T} = -\frac{\theta}{2T} \,.$$

Ezt figyelembe véve (44.18)-nak T szerinti deriváltja:

$$\frac{\partial I(\sigma_{\rm p},T)}{\partial T} = -\frac{\sigma_{\rm p}\Gamma_{\rm a}}{2E_{\rm r}} \frac{\theta}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 \sigma_{\rm p}}{\left[\sigma_{\rm p} + \sigma_0 \eta(\theta,x)\right]^2} \frac{\partial \eta(\theta,x)}{\partial \theta} dx \,. \tag{44.20}$$

Közvetlen deriválással belátható, hogy

$$\frac{\partial \eta(\theta, x)}{\partial \theta} = -\frac{2}{\theta^3} \frac{\partial^2 \eta(\theta, x)}{\partial x^2},$$

amit (44.20)-ba írva és parciálisan integrálva kapjuk:

$$\frac{\partial I(\sigma_{\rm p},T)}{\partial T} = \frac{\sigma_{\rm p} \Gamma_{\rm a}}{2E_{\rm r}} \frac{2\sigma_{\rm 0}}{T\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\rm 0} \sigma_{\rm p}}{\left[\sigma_{\rm p} + \sigma_{\rm 0} \eta(\theta,x)\right]^2} \left[\frac{\partial \eta(\theta,x)}{\partial x}\right]^2 dx.$$

Mivel itt az integrandus pozitív, ezzel beláttuk, hogy a rezonanciaintegrál a hőmérséklettel monoton nő.

Legutóbbi következtetésünknek döntő jelentősége van a reaktorok biztonsága szempontjából: megszaladáskor (vö. 6.5. alfejezet) az urán hőmérsékletének az emelkedése gyakorlatilag azonnal elkezdi csökkenteni a reaktivitást. Ha ugyanis az urán el van különítve a moderátortól, kezdetben a moderátor nem melegszik, így a moderátor hatáskeresztmetszetei sem változnak, tehát a fiktív fluxus is ugyanaz marad. A rezonanciaintegrál növekedése ezért kezdetben biztosan csökkenti a rezonanciakikerülési valószínűséget. Ez pedig előbb-utóbb szubkritikus állapotba viszi a reaktort, ami megállítja a teljesítmény növekedését. Jól méretezett reaktorban ez még az előtt következik be, mielőtt túlságosan sok hasadási energia szabadulna fel. Ha ebből a szempontból összevetjük a heterogén és a homogén reaktorokat, az utóbbiak biztonságosabbnak látszanak. Ugyanis a homogén reaktorokban nemcsak a Doppler-effektus hat *azonnal*, hanem a 6.4. alfejezetben definiált valamennyi reaktivitástényező is *prompt* visszacsatolást eredményez.

# 4.5. Termalizáció

A lassulás befejező szakasza a *termalizáció*, a reaktorfizika egyik legbonyolultabb és analitikusan legnehezebben tárgyalható jelenségcsoportja. A lassulástól minőségileg különbözik a következőkben:

- a neutronok energiája összemérhetővé válik egyrészt a moderátort alkotó atomok hőmozgásának, másrészt a moderátort alkotó molekulák kémiai kötésének energiájával, ennélfogva nem áll fenn az – a lassuláselméletben alaposan kihasznált – körülmény, hogy szóródáskor a neutron energiája csak csökkenhet;
- a termikus és a termikushoz közeli energiákon a hatáskeresztmetszetek olyan nagyok, hogy a szabad úthosszak kisebbek, mint a fűtőelemrudak átmérője; emiatt nem alkalmazhatjuk a homogén közegekben általában elfogadható egyszerűsítéseket.

Végeredményben tehát az előzőekben megengedett egyszerűsítések egyike sem lehetséges, sőt – a nagy abszorpciós hatáskeresztmetszetek miatt – még a diffúzióelmélet sem alkalmazható mindig. Ennek megfelelően a transzportegyenlet integrális alakjából szoktunk kiindulni, ami azt is jelenti, hogy csak numerikus módszerekkel kaphatunk használható eredményeket. Így az alábbiakban meg kell elégednünk azoknak az alapegyenleteknek a felírásával, amelyeken a termalizációt kezelő számítógépi programok alapulnak.

# Termalizációs magfüggvények

(42.5) és (42.8) helyett úgy kaphatunk a legegyszerűbben a termalizációt is leíró  $\sigma_s(E' \rightarrow E)$  magfüggvényt, hogy elhanyagoljuk a kémiai kötések hatását, vagyis a neutront szóró atommagokat szabadon mozgó gázatomok magjának tekintjük. Ezt szoktuk *Wigner–Wilkins-modell*nek nevezni. Levezetéseinkben kombinálnunk kell a lassulási magfüggvényre és a Doppler-effektusra alkalmazott levezetéseket (4.2., illetve 4.4. alfejezetek).

Ütközzön egy v' sebességű neutron egy V sebességgel mozgó A tömegszámú atommaggal. E két sebességvektor által bezárt szög koszinuszát jelöljük  $\mu$ -vel. A neutron és a mag relatív sebessége

$$\mathbf{v}_{\mathrm{r}} = \mathbf{v}' - \mathbf{V}\,,\tag{45.1a}$$

amelynek a nagysága:

$$v_{\rm r} = \sqrt{v'^2 + V^2 - 2v'V\mu} \,. \tag{45.1b}$$

A V sebesség eloszlásfüggvényét a (44.15) alatt felírt  $P_3(V)$  függvény adja meg.<sup>90</sup>  $\mu$  eloszlásáról feltehetjük, hogy a (–1, 1) intervallumban egyenletes. A szóró mag  $\sigma_s$  szórási hatáskeresztmetszetéről pedig azt tesszük fel, hogy a  $v_r$  relatív sebességtől független. Így ha azokat a magokat tekintjük, amelyek sebességének nagysága a (V, V+dV), iránya pedig a ( $\mu, \mu+d\mu$ ) intervallumba esik, az általuk időegység alatt, térfogategységben kiváltott szórások száma az

$$Nv' d\sigma = v_r \sigma_s N P_3(V) 4\pi V^2 dV d\mu/2$$
(45.2)

alakban írható fel [vö. (21.6) képlet], ahol *N* a szóró magok sűrűsége. A d $\sigma$  differenciális hatáskeresztmetszetet még integrálni fogjuk *V* és  $\mu$  szerint, miután meghatároztuk annak a valószínűségét, hogy a neutron szóródás utáni sebessége a laboratóriumi rendszerben a (*v*, *v*+d*v*) intervallumba esik.

Ha olyan koordinátarendszert választanánk, amelyben a szóró mag nyugalomban van, akkor minden további nélkül alkalmazhatnánk a 4.2. alfejezet (42.5) képletét. Ezt azonban még át kellene transzformálnunk a laboratóriumi rendszerbe, ami csak elég körülményesen adna használható eredményeket. Ehelyett rövidebb a következő út. A neutron és a szóró mag tömegközéppontjának a sebessége

$$\mathbf{v}_{c} = \frac{\mathbf{v}' + A\mathbf{V}}{A+1},\tag{45.3a}$$

amelynek nagyságát a

$$v_{\rm c}^2 = \frac{{v'}^2 + A^2 V^2 + 2Av' V\mu}{\left(A+1\right)^2}$$
(45.3b)

összefüggés adja meg. (45.1a) felhasználásával a neutron ütközés előtti sebessége a tömegközépponti rendszerben:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{n}} = \frac{A}{A+1} \, \mathbf{v}_{\mathrm{r}} \, .$$

A neutron szóródás utáni, a tömegközépponti rendszerben mért sebességét jelöljük  $v_n^*$ -gal. A 4.2. alfejezetben követett gondolatmenettel most is könnyen beláthatjuk, hogy ebben a rendszerben a szóródás csak a neutron sebességének az irányát változtatja meg, de nagysága változatlan marad. Az eltérés szögét ismét  $\theta$ -val jelöljük (vö. 42.1b. ábra), vagyis legyen

<sup>&</sup>lt;sup>90</sup> (44.15)-ben a  $dV_x dV_y dV_z = 4\pi V^2 dV$  helyettesítést kell alkalmaznunk a jelen alfejezet képleteihez.

$$\mathbf{v}_{n}\mathbf{v}_{n}^{*}=\mathbf{v}_{n}^{2}\cos\theta.$$

Ha  $v_n^*$ -ot áttranszformáljuk a laboratóriumi rendszerbe, akkor a

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{n}^{*} + \mathbf{v}_{c} \tag{45.4a}$$

sebességet kapjuk, amelynek nagyságát a

$$v^{2} = v_{n}^{2} + v_{c}^{2} + 2v_{n}v_{c}\cos\theta_{1}$$
(45.4b)

összefüggés adja meg. Itt  $\theta_1$  a  $\mathbf{v}_n^*$  és  $\mathbf{v}_c$  vektorok által bezárt szög. (45.4b)-ből leolvasható, hogy a szóródás utáni v sebesség a laboratóriumi rendszerben a következő határok közé esik:

$$v_{\min} \le v \le v_{\max}$$
,

ahol

és

$$v_{\rm max}^2 = \left(v_{\rm n} + v_{\rm c}\right)^2$$

 $v_{\min}^2 = \left(v_{\rm n} - v_{\rm c}\right)^2$ 

A szórási szöget cos  $\theta$  esetében a  $\mathbf{v}_n$  vektorhoz, cos  $\theta_l$ -ében pedig a  $\mathbf{v}_c$  vektorhoz képest mérjük. Mivel mindkét vektor rögzített *a szóródási reakció szempontjából*, a két szög között mindössze annyi a különbség, hogy a tömegközépponti rendszer *z*tengelyét  $\mathbf{v}_n$ -nel, illetve  $\mathbf{v}_c$ -vel párhuzamosan vesszük fel. A szórás a tömegközépponti rendszerben izotrop, tehát mind cos  $\Theta$ , mind cos  $\Theta_l$  egyenletes eloszlású a (–1, 1) intervallumban. Differenciáljuk (45.4b) mindkét oldalát:

$$v dv = v_n v_c d(\cos \theta_1) = \frac{v_{max}^2 - v_{min}^2}{4} d(\cos \theta_1).$$

Így annak a valószínűségét, hogy a szóródás utáni sebességnek a laboratóriumi rendszerben kifejezett értéke a (v, v+dv) intervallumban lesz, a

$$g(v' \to v | V, \mu) dv = \begin{cases} \frac{2v dv}{v_{\text{max}}^2 - v_{\text{min}}^2}, & \text{ha } v_{\text{min}} \le v \le v_{\text{max}}, \\ 0 & v > v_{\text{max}} & \text{vagy} & v_{\text{min}} > v \end{cases}$$
(45.5)

képlet adja meg. Ennek a feltételes valószínűségnek a feltétele, hogy a mag sebessége *V* és az ütközés előtti sebességvekotorok által bezárt szög koszinusza  $\mu$  [lásd a (45.1) egyenletekben]. (45.5) felhasználásával és (45.2) figyelembevételével a keresett szórási magfüggvényt a következő integrál adja meg:
$$\sigma_{\rm s}(v' \to v) = \frac{\sigma_{\rm s}}{2v'} \int_{0}^{\infty} 4\pi V^2 \mathrm{d}V \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu v_{\rm r} g(v' \to v | V, \mu) P_3(V) \,. \tag{45.6}$$

Ez az integrál analitikusan kiszámítható. A számítást az 1. függelékben végezzük el. Eredménye:

$$\sigma_{\rm s}(E' \to E) = \frac{\sigma_{\rm s}}{2E'} \eta^2 \left[ \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E}{kT}} - \rho \sqrt{\frac{E'}{kT}}\right) \pm \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E}{kT}} + \rho \sqrt{\frac{E'}{kT}}\right) \right] + \frac{\sigma_{\rm s}}{2E'} \eta^2 \exp\left(-\frac{E - E'}{kT}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E'}{kT}} - \rho \sqrt{\frac{E}{kT}}\right) \mp \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E'}{kT}} + \rho \sqrt{\frac{E}{kT}}\right) \right], \quad (45.7)$$

ahol

$$\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}}$$
 és  $\rho = \frac{A-1}{2\sqrt{A}}$ ,

továbbá az erf(*x*) függvényt (44.19)-ben definiáltuk. A felső előjel  $E \le E'$ -re, az alsó pedig  $E \ge E'$ -re érvényes. A 45.1. *ábrák*on a (45.7) alatti magfüggvényt három izotóp-ra rajzoltuk fel. A szóró mag tömegszámának a növekedésével tehát  $\sigma_s(E' \rightarrow E)$  egyre inkább az  $E' \approx E$  tartományra koncentrálódik.





45.1. ábra. Szórási magfüggvény hidrogénatomokból (a), deutériumatomokból (b) és szénatomokból (c) álló gázra

Ha a (45.7) magfüggvényt *E* szerint integráljuk, akkor kapjuk a szórási hatáskeresztmetszetet (lásd az 1. függelékben):

$$\sigma_{\rm s}(E') = \frac{\sigma_{\rm s}}{\beta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\beta^2\right) + \sigma_{\rm s}\left(1 + \frac{1}{2\beta^2}\right) \operatorname{erf}(\beta),$$

ahol

$$\beta^2 = \frac{AE'}{kT}.$$

Jóllehet a szórási hatáskeresztmetszetet eredetileg a  $v_r$  relatív sebességtől függetlennek tételeztük fel, végeredményben az E' energiától függő szórási hatáskeresztmetszetet kaptunk. (Ennek mért értékei láthatók a 21.3. *ábrán.*) A jelenségnek egyszerű oka van.  $\sigma_s(E')$ -t úgy is megkaphattuk volna, mint (45.2) V és  $\mu$  szerint vett integrálját, ami gyakorlatilag a  $v_r$  relatív sebesség átlagolását jelentette volna.  $v_r$  átlaga pedig erősen függ E'-től: E' kis értékeire E'-vel csökken, majd nagy E'-re az állandó  $\sigma_s$ -hez tart (amikor  $v_r$  is átmegy v'-be).

A kémiai kötések hatását csak kvantummechanikai módszerekkel lehet figyelembe venni, aminek a tárgyalására ebben a könyvben nincs lehetőség. Gyakorlati számításokban az egyes moderátorokra különböző modelleket szoktunk használni. Könnyűvízre például használjuk a *Nelkin-modell*t, amely a vízmolekulát egy 4 különböző frekvenciával rezegni képes oszcillátorral közelíti, vagy a *Koppel–Youngmodell*t, amely már a vízmolekula rotációs módusait is figyelembe veszi. Mindezek és a hasonló modellek a termalizációt leíró számítógépi programok szubrutinjai, amelyek ma már szép számmal állnak rendelkezésre. Befejezésül megjegyezzük, hogy a szórási magfüggvényeknek megfelelő integráloperátoroknak vannak differenciáloperátoros közelítései is (például a *Cadilhac-modell*, de a Wigner–Wilkins-modellnek is létezik a differenciális alakja). Ezeknek a közelítéseknek az a jelentőségük, hogy segítségükkel a (32.5) integrálegyenletet könnyebben kezelhető differenciálegyenletté alakíthatjuk át (vö. 3. függelék).

#### Termikus spektrum homogén közegben

A neutronokat szóró magok sebességeloszlását a (44.15) alatt felírt *Maxwell-spektrum* adja meg. Heurisztikusan azt várhatjuk, hogy a neutronok spektruma sem különbözik ettől lényegesen, hiszen ha a moderátor atommagjaival elég sokat ütközhetnek, felveszik azok sebességeloszlását. Alább látni fogjuk, hogy ez valóban így is van, ha nincs abszorpció. A neutronokra vonatkozó Maxwell-eloszlást úgy kaphatjuk meg, hogy (44.15)-ben A = 1-et helyettesítünk:<sup>91</sup>

$$P_T(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2.$$
(45.8)

Ebben a sebességeloszlásban a *legvalószínűbb sebesség*:

$$v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \,, \tag{45.9}$$

amelynek megfelelő energia:

$$E_T = \frac{mv_T^2}{2} = kT \; .$$

A szobahőmérséklethez (T = 293,16 K) (45.9) szerint tartozó legvalószínűbb sebesség értéke  $v_0 = 2200$  m/s. A Maxwell-eloszlás *átlagos sebessége*  $v_T$ -nél egy kicsit nagyobb:

$$\overline{v} = \int_{0}^{\infty} v P_T(v) \mathrm{d}v = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_T = 1,128 v_T.$$

A (45.8) alatti eloszlásból úgy kapjuk a *fluxus spektrumá*t, hogy  $P_T(v)$ -t *v*-vel beszo-rozzuk. Ha az így adódó eloszlást energiaváltozóra írjuk át, akkor az

$$M_T(E) = \frac{E}{E_T^2} \exp\left(-\frac{E}{E_T}\right)$$
(45.10)

spektrumot kapjuk. Az eloszlást úgy normáltuk, hogy a  $(0, +\infty)$  intervallumra vett integrálja 1 legyen.

Minden szórási magfüggvény, így a (45.7) alatt felírt magfüggvény is kielégíti az alábbi nevezetes azonosságot:

$$M_T(E')\sigma_{\rm s}(E'\to E) = M_T(E)\sigma_{\rm s}(E\to E'). \tag{45.11}$$

<sup>&</sup>lt;sup>91</sup> (44.15)-ben  $dV_x dV_y dV_z = 4\pi V^2 dV$  helyettesítendő.

Ezt az összefüggést *részletes egyensúlyi feltétel*nek nevezzük. A Wigner–Wilkinsmodellre a fenti levezetésből kiadódott, de általában is következik a statisztikus fizika legáltalánosabb elveiből. Fontos következménye, hogy

$$\int_{0} M_{T}(E') \Sigma_{s}(E' \to E) dE' - \Sigma_{s}(E) M_{T}(E) =$$

$$= \int_{0}^{\infty} M_{T}(E) \Sigma_{s}(E \to E') dE' - \Sigma_{s}(E) M_{T}(E) =$$

$$= \Sigma_{s}(E) M_{T}(E) - \Sigma_{s}(E) M_{T}(E) = 0,$$

ami (32.5) alapján azt jelenti, hogy abszorpciómentes (végtelen) közegben a transzportegyenlet megoldása valóban éppen  $M_T(E)$ , ahogy fent heurisztikus alapon állítottuk.

Amikor abszorpció is van, a (32.5) egyenletből indulunk ki, de a teljes energiatartományt két részre osztjuk fel: a  $(0, E_m)$  *termikus* és az  $(E_m, +\infty)$  *epitermikus* tartomány. Az  $E_m$  határenergiát úgy kell megválasztani, hogy az epitermikus tartományban már érvényes legyen a lassuláselmélet. Szokásos értéke:  $E_m = 0,625$  eV. Abban az esetben, amikor a reaktorban van plutónium is, általában  $E_m = 1,85$  eV-ot választunk, mert így a plutóniumizotópok termikus energiák közelében levő nagy rezonanciáinak a termikus spektrumra gyakorolt hatását pontosabban tudjuk figyelembe venni, mint a lassuláselméletben. Ezzel a (32.5b)-ben levő integrál így írható:

$$\int_{0}^{\infty} \psi(E') \Sigma_{s}(E' \to E) dE' = \int_{0}^{E_{m}} \psi(E') \Sigma_{s}(E' \to E) dE' + \int_{E_{m}}^{\infty} \psi(E') \Sigma_{s}(E' \to E) dE'.$$

A második integrálban a  $\psi(E')$  energiaspektrumot ismerjük, hiszen a lassuláselméletből tudjuk, hogy 1/E'-vel arányos, továbbá a szórási magfüggvényt (42.5)-ből vehetjük. Ezzel ez a tag így írható:

$$S(E) = \int_{E_{\rm m}}^{\infty} \psi(E') \Sigma_{\rm s}(E' \to E) \, \mathrm{d}E' = q(E_{\rm m}) \left[ \frac{1}{E_{\rm m}} - \frac{\alpha}{E} \right]. \tag{45.12}$$

Itt nullát kell venni olyan *E*-re, amelyre S(E) negatívvá válna.  $q(E_m)$  a (43.7)-ben bevezetett lassulási sűrűség. Ezzel az (aszimptotikus) termalizációs egyenlet így írható:

$$-\Sigma_{\rm t}(E)\psi(E) + \int_{0}^{E_{\rm m}} \psi(E')\Sigma_{\rm s}(E' \to E)\,\mathrm{d}E' + S(E) = 0\,. \tag{45.13}$$

Úgy képzelhetjük, hogy a  $D(E)B^2$  kifolyási tagot beolvasztottuk az abszorpciós hatáskeresztmetszetbe. Ennek az egyenletnek a megoldása csak numerikus módszerekkel lehetséges. A tapasztalat azt mutatja, hogy – hacsak az abszorpció nem szokatlanul nagy mértékű – a (45.13) egyenlet megoldásai nagyon közel vannak a Maxwell-spektrumhoz. A legmeglepőbb azonban az, hogy az egyenlet megoldására a szórási magfüggvény konkrét alakjának sokkal kisebb befolyása van, mint az abszorpciós hatáskeresztmetszetnek. Ennek az oka a (45.11) alatt felírt részletes egyensúlyi feltétel, amely nagyon erős megszorítás, mert nem engedi, hogy a megoldás a Maxwell-spektrumtól lényegesen eltérjen.

Az abszorpció jelenléte általában keményíti a spektrumot: nem enged meg elegendően sok ütközést ahhoz, hogy a termalizálódó neutronok a moderátor atomjaival egyensúlyba kerüljenek, és így a kT átlagenergia kialakulása előtt már abszorbeálódnak. Erre való tekintettel szoktunk – közelítőleg – *neutron-hőmérséklet*ről beszélni, ami azt jelenti, hogy a neutronspektrumot egy (45.10) szerinti Maxwell-spektrumnak vesszük, de benne a moderátor *T* hőmérsékleténél valamivel nagyobb  $T_n$  hőmérséklet szerepel. (Pontosabb definíciójára még visszatérünk.) Amíg nem álltak rendelkezésre nagy teljesítményű számítógépek, a neutron-hőmérséklet fogalma nagyon hasznos volt, mert segítségével a termikus neutronspektrumot egyetlen, kísérletileg is meghatározható paraméterrel lehetett jellemezni. Ezzel szemben ma már nincs rá szükség, hiszen a (45.13) egyenlet numerikus megoldásának nincs akadálya.

#### Termalizáció szabályos fűtőelemrácsokban

Mint a jelen alfejezet bevezetőjében mondtuk, a termikus energiatartományban – a rezonanciák tartományához hasonlóan – tekintettel kell lenni arra, hogy a reaktorban az urán nem homogénen, hanem fűtőelemrudak formájában van a moderátorral elkeverve. A fűtőelemrudak általában *szabályos rács*ot alkotnak, amelyet – a kristályrácsokkal való analógia alapján – úgy képzelhetjük el, mint egy *elemi cella* szabályos ismétlődését. Hatszögű fűtőelemrácsnak például a 45.2. ábrán bemutatott cellát feleltethetjük meg. Az ilyen rácsok jellemzésére a  $\Phi(\mathbf{r}, E)$  fluxust két tényező szorzatára szokás bontani:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r})\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, E),$$

ahol az első tényezőt *makrofluxus*nak, a másodikat pedig *mikrofluxus*nak nevezzük. A makrofluxus lényegében megfelel annak, amit az egycsoport diffúzióelmélet ír le (3. fejezet). A mikrofluxus követi a fűtőelemrács periodicitását: úgy viselkedik, mintha a rács végtelen lenne. A reaktor végességét természetesen nem hanyagoljuk el: erre szolgál az abszorpciós hatáskeresztmetszetbe beolvasztott  $D(E)B^2$  tag.



45.2. ábra. Elemi cella (bal oldali rajz) és Wigner–Seitz-cella (jobb oldali rajz)

Az alábbiakban a mikrofluxusra vonatkozóan fogunk egyenletet levezetni. A rács szimmetriájából következik, hogy  $\psi(\mathbf{r}, E)$ -t elegendő az elemi cellára vonatkozóan meghatározni. Ebben az esetben  $\psi(\mathbf{r}, E)$  az elemi cella határán tartozik kielégíteni az ún. *szimmetria-határfeltétel*t. Amikor ugyanis egy neutronpálya a cella határát átlépi, és a szomszédos cellában folytatódik, akkor – mint egyszerűen belátható – a pályának a szomszédos cellához viszonyított helyzete ugyanolyan, mint a pálya tükörképének az eredeti cellához viszonyított helyzete. Emiatt elég egyetlen cellát tekinteni, és a neutronpályákat a cella határán a normálisra vonatkozóan tükrözni (45.2. ábra, bal oldali rajz). Ezt jelenti a szimmetria-határfeltétel.

A gyakorlatban általában megengedhető a *Wigner–Seitz-cella* közelítés: a valóságos cellát egy vele azonos területű körrel közelítjük. Ezzel elérjük, hogy  $\psi(\mathbf{r}, E)$ csak a hengeres *r* koordinátától függjön. Egy ilyen cellában azonban a szimmetria-határfeltétel súlyos hibákhoz vezetne. Ha ugyanis egy pálya induláskor elkerüli a fűtőelemet, akkor a hengerfelületre vonatkozó tükörképei is el fogják kerülni. Az eredeti, hatszöges (vagy négyszöges) cellában ilyen helyzet nem állhat elő. Ezért olyan határfeltételt kell keresni, amely nem okoz ilyen problémát. Nos, a Wigner–Seitz-cellában a szimmetrikus határfeltételnek az ún. *fehér határfeltétel* felel meg. Itt ugyanis a cella valóságos határfelületei elmosódnak, és a valóságot akkor közelítjük a legjobban, ha azt mondjuk, hogy minden, a cellát elhagyó neutronnak egy véletlenszerű irányban visszatérő neutron felel meg (45.2. *ábra*, jobb oldali rajz).

A határfelületeket és a cellán belül való neutrontranszportot a *transzport mag-függvénnyel* jellemezzük. Képzeljük el, hogy a Wigner–Seitz-cellában az r' és r'+dr' sugarak által határolt hengergyűrűben időegység alatt Q(r',E)dr' számú neutron keletkezik. Az ezek hatására az r és r+dr sugarak által határolt hengergyűrűben megjelenő neutronok térben átlagolt fluxusát írjuk a

$$Q(r', E)G(E, r' \rightarrow r) \,\mathrm{d}r\mathrm{d}r'$$

alakban. Az itt megjelenő – Green-függvény jellegű – kifejezést *transzport magfügg-vény*nek nevezzük. Kiszámítása nem egyszerű: a (22.5) integrálegyenletben szereplő

$$\exp\left[-\overline{\mathcal{L}_{t}(E)(s'\to s)}\right]$$

magfüggvényt kell az említett hengergyűrűkre átlagolni – figyelembe véve a fehér határfeltételt is. A Q(r',E) forrástagot a termalizációs tartományban két tag összegeként kell felírnunk: egyrészt az epitermikus neutronok lassulásának megfelelő, (45.12)-ben felírt S(E), másrészt a termikus energiatartományon belül való energiacserét leíró integrál:

$$Q(r,E) = S(r,E) + \int_{0}^{E_{\rm m}} \psi(r,E') \Sigma_{\rm s}(r,E' \to E) \,\mathrm{d}E'. \tag{45.14a}$$

Ebben a kifejezésben feltüntettük, hogy a szórási magfüggvény függ a helytől, hiszen nyilvánvalóan egészen más a moderátorban, mint a fűtőelemrúdban. Ezen túlmenően

az S(r,E) lassulási forrás is függ a helytől. Az utóbbira vonatkozóan a következő feltevésekkel szokás élni. Az  $E_m$  energiát úgy célszerű megválasztani, hogy a  $\psi(r,E_m)$ mikrofluxus *r*-től gyakorlatilag független legyen (vagyis az  $E_m$  energián a szabad úthosszak lényegesen nagyobbak legyenek, mint a cella méretei). Ebben az esetben a (45.12)-ben szereplő  $q(E_m)$  lassulási sűrűséget Fermi-közelítésben írhatjuk fel [vö. (43.25)], vagyis

$$S(r, E) = \xi \Sigma_{\rm s}(r, E) \left[ \frac{1}{E_{\rm m}} - \frac{\alpha}{E} \right].$$
(45.14b)

Ezeket figyelembe véve – a (22.5) integrális transzportegyenlet szellemében – a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\psi(r, E) = \int_{0}^{R_{c}} G(E, r' \to r) Q(r', E) \, \mathrm{d}r', \qquad (45.14c)$$

ahol *R*<sub>c</sub> a Wigner–Seitz-cella sugara.

A (45.14) alatt felírt egyenlet Peierls-típusú, amelyet iterációval lehet megoldani. Az ezt megvalósító legelterjedtebb számítógépi program a THERMOS, amely tartalmazza nemcsak az egyenlet megoldását, hanem a transzport magfüggvény és a szórási magfüggvény számítását is. A tapasztalat szerint e három számítási feladat körülbelül ugyanannyi gépidőt igényel.

A (45.14) egyenlet megoldását elsősorban az 5. fejezetben tárgyalt többcsoport elmélet által igényelt termikus csoportállandók számítására használjuk. Ezen túlmenően egyéb mennyiségeket is származtathatunk belőle, amelyek közül hármat említünk:

• Az *előnytelenségi tényező* a termikus fluxus átlagának a hányadosa a moderátorban és a fűtőelemben:

$$\delta = \frac{\int_{mod.}^{E_{m}} dE \int \psi(r, E) r dr / V_{m}}{\int_{0}^{E_{m}} dE \int_{f.e.} \psi(r, E) r dr / V_{f}}.$$

• A termikus hasznosítási tényező:

$$f = \frac{\int_{e_{m}}^{E_{m}} dE \int \Sigma_{a}(r, E) \psi(r, E) r dr}{\int_{e_{m}}^{E_{m}} dE \int_{eella} \Sigma_{a}(r, E) \psi(r, E) r dr},$$
(45.15)

amely azt fejezi ki, hogy az abszorbeálódó neutronoknak mekkora hányada abszorbeálódik az uránban.

 További integrális jellemző a már említett T<sub>n</sub> neutron-hőmérséklet. A Maxwelleloszlás esetében az eloszlás átlagos energiája kT. A neutron-hőmérséklet legtermészetesebb definíciója tehát a tekintett régióban (fűtőelem, moderátor, elemi cella stb.) kialakuló átlagos termikus neutronspektrumra vonatkoztatott átlagos energia. A THERMOS program végeredményén található "neutron-hőmérséklet" ezen a definíción alapul. Nem ez az egyetlen és talán nem is ez a legcélszerűbb definíció. Abban az esetben ugyanis, amikor a neutronabszorpciós hatáskeresztmetszet nem túlságosan nagy, az 1 eV alatti energiákhoz tartozó neutronspektrum jól közelíthető egy Maxwell-eloszlás és egy 1/E spektrum összegével. Ha ez igaz, akkor T<sub>n</sub>-et célszerű a Maxwell-eloszláshoz tartozó "hőmérsékletként" definiálni. A tapasztalat szerint ez mindig magasabb, mint a közeg T hőmérséklete. A különbség első közelítésben arányos a Σ<sub>a</sub>/ξΣ<sub>s</sub> hányadossal.<sup>92</sup> Tekintve, hogy a neutron-hőmérsékletet sem a számításokban, sem a kísérletekben nem használjuk már, további részletekbe nem megyünk bele.

Ezeket a mennyiségeket régebben beépítették a reaktorok elméletébe mint kísérletileg meghatározandó mennyiségeket. Amióta azonban rendelkezésre állnak a THERMOShoz hasonló termalizációs programok, ezeknek és a hozzájuk hasonló mennyiségeknek a jelentősége csökkent, de legalábbis átalakult: ma elsősorban arra használjuk őket, hogy számítógépi programjainkat, de főleg a bennük felhasznált magfizikai adatokat kísérletileg ellenőrizzük. Ekkor azonban nem  $\delta$ , f vagy  $T_n$  mért és számított értékeit hasonlítjuk össze, hanem a közvetlenül mért reakciógyakoriságokat.<sup>93</sup>

## 4.6. A lassuló neutronok térbeli eloszlása

Jóllehet szigorúan nem tartozik az aszimptotikus lassuláselméletbe, mégis ide kívánkozik a *Fermi-féle korelmélet* ismertetése, mert felfogása inkább az aszimptotikus elmélettel rokonítható, mint az 5. fejezetben tárgyalandó többcsoport diffúzióelmélettel. A korelmélet a lassuló neutronok homogén közegben kialakuló térbeli eloszlásának a leírására szolgál. Heterogén rendszerekben ugyanez csak a többcsoport diffúzióelmélettel lehetséges. A fejezet végén kitérünk a térbeli eloszlás fontos jellemzőinek, a *momentumok*nak a meghatározására. Látni fogjuk, hogy ezek az aszimp-

<sup>&</sup>lt;sup>92</sup> Vegyük észre, hogy ez éppen a 42.1. táblázatban szereplő moderálási arány reciproka.

 $<sup>^{93}</sup>$  Egyébként  $\delta$ t nem is lehet megmérni, mert nem mérhető reakciógyakoriságok, hanem fluxusátlagok hányadosa. A fluxust pedig nem lehet mérni.

totikus elmélet általánosítása révén kiszámíthatók. Az alábbiakban homogén közegek vizsgálatára szorítkozunk.

#### A Fermi-féle koregyenlet

A (43.27) Wigner-közelítés szerint a  $q(\mathbf{r}, u)$  lassulási sűrűség és a  $\Phi(\mathbf{r}, u)$  fluxus között a

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, u) = \frac{q(\mathbf{r}, u)}{\xi \boldsymbol{\Sigma}_{t}(u)} \tag{46.1}$$

összefüggés áll fenn. Tekintsünk egy dV térfogatelemet az **r** pont környezetében. Az időegység alatt az *u* letargiát  $q(\mathbf{r}, u)$ dV számú, dV -ben lévő neutron lépi át. Ugyanezt a mennyiséget  $q(\mathbf{r}, u+du)$ dV adja meg az u+du letargiára vonatkozóan. A kettő különbsége egyenlő az időegység alatt itt abszorbeálódott és innen kiszökött neutronok számával:

$$[q(\mathbf{r}, u) - q(\mathbf{r}, u + du)] dV = \Sigma_{a}(u) \Phi(\mathbf{r}, u) du dV - D(u) \Delta \Phi(\mathbf{r}, u) du dV,$$

amiből a d $u \rightarrow 0$  határátmenettel és (46.1) figyelembevételével kapjuk a

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}, u)}{\partial u} = \frac{D(u)}{\xi \Sigma_{t}(u)} \Delta q(\mathbf{r}, u) - \frac{\Sigma_{a}(u)}{\xi \Sigma_{t}(u)} q(\mathbf{r}, u)$$

egyenletet. Az itt szereplő második tagot könnyen leválaszthatjuk a (44.5)-ben definiált  $p(0 \rightarrow u)$  rezonanciakikerülési valószínűség segítségével: egyszerűen beláthatjuk, hogy a

$$q(\mathbf{r}, u) = q'(\mathbf{r}, u)p(0 \to u) \tag{46.2}$$

összefüggéssel definiált  $q'(\mathbf{r}, u)$  függvény kielégíti a

$$\frac{\partial q'(\mathbf{r}, u)}{\partial u} = \frac{D(u)}{\xi \Sigma_{t}(u)} \Delta q'(\mathbf{r}, u)$$
(46.3)

egyenletet. Vezessük be a következő, Fermi-kornak nevezett mennyiséget:

$$\tau(u) = \int_{0}^{u} \frac{D(u')}{\xi \Sigma_{t}(u')} du'.$$
(46.4)

Mivel  $\tau(u)$  *u*-nak szigorúan monoton növekvő függvénye, a lassulási sűrűséget tekinthetjük *u* helyett  $\tau$  függvényének is. Így (46.3) az alábbi egyszerű alakra hozható:

$$\frac{\partial q'(\mathbf{r},\tau)}{\partial \tau} = \Delta q'(\mathbf{r},\tau) \quad . \tag{46.5}$$

Ez a *Fermi-féle koregyenlet*, amely nemabszorbeáló közegben magára a lassulási sűrűségre, abszorbeáló közegben pedig a rezonanciakikerülési valószínűség (46.2) szerint való leválasztása után kapott mennyiségre érvényes. Formáját tekintve a hővezetés differenciálegyenletére emlékeztet.

## A koregyenlet megoldásai

A Fermi-féle koregyenlet megoldásait elegendő nemabszorbeáló közegben keresni, hiszen ezekből az általános esethez tartozó megoldást (46.2) alapján már megkaphatjuk. (46.5)-öt általában úgy tudjuk megoldani, hogy az egyenletet az **r** helyyváltozó szerint Fourier-transzformáljuk. A hosszadalmas levezetéseket mellőzve csak a végeredményeket közöljük néhány, a gyakorlatban fontos esetben:

• egységnyi intenzitású *pontforrás* az origóban és az u = 0 letargián:

$$q'_{\text{pont}}(r,\tau) = \frac{e^{-r^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{3/2}},$$
(46.6)

• egységnyi intenzitású *síkforrás* az x = 0 síkban és az u = 0 letargián:

$$q'_{\rm sik}(x,\tau) = \frac{e^{-x^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{1/2}}.$$
(46.7)

Ezekből a képletekből látható, hogy a  $\tau$ Fermi-kor a lassuló neutronok eloszlásának térbeli kiterjedtségét jellemzi: ahogy nő a letargia, úgy nő  $\tau$  és vele a (46.6) és (46.7) eloszlások szélessége. Ha (33.6) és (33.10) mintájára képezzük annak a helynek a négyzetes átlagát, ahol a neutronok egy adott  $\tau$ kort elérnek, akkor eredményül

 $\mathbf{M}(r^2) = 6\tau \tag{46.8}$ 

adódik a (46.6) eloszlásra. Ez azt jelenti, hogy  $\tau$ -nak az  $L^2$  diffúziós területtel analóg fizikai jelentése van, ami lehetőséget ad  $\tau$  mérésére is: ha megmérjük valamilyen kiszemelt energián a lassuló neutronok térbeli eloszlását, akkor ennek második momentuma (46.8) szerint megadja  $\tau$ -t. Erre a célra a legalkalmasabb neutrondetektor az <sup>115</sup>In izotóp, mert 1,44 eV-nál éles rezonanciája van. Így <sup>115</sup>In-öt tartalmazó fóliákat különböző helyeken felaktiválva megkaphatjuk az 1,44 eV-hoz tartozó Fermi-kort. Általában a termikus energiához tartozó Fermi-korra van szükség. Ezt az indiummal mért értékből egy (46.4) alapján számolható kicsi korrekcióval kaphatjuk meg. A 46.1. táblázatban összefoglaltuk a négy ismert moderátorra vonatkozó adatokat, amelyek azt mutatják, hogy (a nehézvizet leszámítva)  $\tau >> L^2$ , vagyis a neutronok lassulás közben

190

lényegesen nagyobb területen terjednek szét, mint a termikus energián való diffúzió közben.

| Moderátor       | $D(\mathrm{cm})$ | $\Sigma_{\rm a}~({\rm cm}^{-1})$ | $L(\mathrm{cm})$ | $\tau$ (cm <sup>2</sup> ) |
|-----------------|------------------|----------------------------------|------------------|---------------------------|
| $H_2O$          | 0,142            | 0,0193                           | 2,72             | 33                        |
| $D_2O$          | 0,80             | 0,000038                         | 148              | 120                       |
| <sup>9</sup> Be | 0,70             | 0,0014                           | 23,6             | 98                        |
| $^{12}C$        | 0,90             | 0,0004                           | 50,2             | 350                       |

46.1. táblázat. A moderátorok termikus adatai

A migrációs terület

Alkalmazzuk a (46.5) koregyenletben ugyanazt a szeparációt, amelyet az egyycsoport diffúzióegyenletben alkalmaztunk:

$$q'(\mathbf{r},\tau) = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) q'(\tau), \qquad (46.9)$$

ahol – mint a 3. fejezetben láttuk – az **r**-től függő tényező kielégíti a (32.5) Helmholtz-egyenletet. (Ezért is jelöltük ugyanúgy, mint ott.) Ezt (46.5)-be helyettesítve rögtön látjuk, hogy

$$q'(\tau) = e^{-B^2 \tau}.$$
 (46.10)

Ezt a nagyon fontos eredményt fizikailag a következőképpen értelmezzük. A termalizálódó neutronok forrását a lassulási sűrűség adja meg, amely megegyezne a hasadások révén időegység alatt a térfogategységben keletkező neutronok számával, ha nem lenne sem abszorpció, sem kifolyás. Az előbbi hatását veszi figyelembe (46.2) szerint a  $p(0 \rightarrow u)$  rezonanciakikerülési valószínűség, az utóbbiét pedig (46.9) szerint a (46.10)-ben felírt tényező. Ennek fizikai jelentése tehát a (35.10b)-ben definiált bennmaradási valószínűséggel analóg. A kettő között annyi a különbség, hogy (46.10) az epitermikus, (35.10b) pedig a termikus energiatartományra vonatkozik. Ennek figyelembevételével a sokszorozási tényezőt (35.10a) helyett a következő képlet adja meg:

$$k_{\rm eff} = \frac{k_{\infty} {\rm e}^{-B^2 \tau}}{1 + L^2 B^2} \approx \frac{k_{\infty}}{1 + M^2 B^2},$$

ahol

$$M^2 = L^2 + \tau$$

a *migrációs terület*. Fizikai jelentését a fentiek alapján a következőképpen adhatjuk meg:  $6M^2$  annak a távolságnak a négyzetes átlaga, ahová a neutronok a keletkezésük helyétől (lassulás és termikus diffúzió után) abszorbeálódásukig eljutnak. A 3. fejezetben felírt képletek tehát pontosabb eredményt adnak, ha bennük  $L^2$  helyébe mindenütt  $M^2$ -et írunk.

Az itt ismertetett korelmélet már átvezet a többcsoport diffúzióelméletbe, hiszen benne külön tekintettük a termikus és epitermikus neutronokat. Az 5. fejezet szerint ez megfelel a kétcsoport elméletnek. Igazában azonban a Fermi-féle korelméletnek meglehetősen korlátozott az alkalmazási területe, mert csak homogén közegekben vezet jól áttekinthető eredményekre. Mai felfogásunk szerint ennek az elméletnek a fő jelentősége szemléletességében van: elsősorban akkor vesszük igénybe, amikor bonyolult jelenségeket valamilyen szemléletes és egyszerű módon akarunk megérteni.

# A térbeli eloszlás momentumai<sup>94</sup>

A fentiekben láttuk, hogy a  $\tau$  Fermi-kor a térbeli eloszlás második momentumával arányos [vö. (46.8)]. Ha ezt a síkforráshoz tartozó (46.7) eloszlásra vonatkoztatjuk,  $6\tau$  helyett  $2\tau$  adódik. Az alábbiakban ezt általánosítjuk: megmutatjuk, hogyan lehet meghatározni a térbeli eloszlás tetszőleges momentumait. Számításuk azért fontos, mert jól mérhetők: egy síkforrástól különböző távolságban fel kell aktiválni fóliákat, és a mért aktivitás-eloszlásból a momentumok kiszámíthatók.

A térbeli eloszlás momentumait a következőképpen definiáljuk:

$$M_{n\ell}(E) = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \Phi_{\ell}(x, E) dx, \qquad (n = 0, 1, 2, ...), \ (\ell = 0, 1, 2, ...), \qquad (46.11)$$

ahol  $\Phi_{\ell}(x,E)$  a síkgeometriához tartozó  $\Phi(x,E,\mu)$  szögfüggő fluxus sorfejtési együtthatója [vö. (24.4a)]:

$$\boldsymbol{\Phi}(x, E, \mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \boldsymbol{\Phi}_{\ell}(x, E) P_{\ell}(\mu),$$

amelyek kielégítik a (24.5a) egyenletrendszert. Ha a (24.5a) egyenletrendszer minden tagját  $x^n$ -nel beszorozzuk, majd x-re integrálunk, egyenletrendszert kapunk a most bevezetett momentumokra. Az x szerinti deriváltakat tartalmazó tagokban parciálisan integrálunk:

$$\frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{\partial \Phi_{\ell}(x, E)}{\partial x} dx = \frac{1}{n!} \Big[ x^n \Phi_{\ell}(x, E) \Big]_{x=-\infty}^{\infty} - \frac{1}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n-1} \Phi_{\ell}(x, E) dx = -M_{n-1,\ell}(E).$$

A kiintegrált rész eltűnik, mert a fluxus  $|x| \to \infty$  esetén exponenciálisan tart 0-hoz. Egyébként enélkül nem léteznének az  $M_{n_{\ell}}(E)$  momentumok sem. Mérésükhöz síkforrást használunk, tehát  $S_0(x,E) = \delta(x)S(E)$ , aminek a momentuma

<sup>&</sup>lt;sup>94</sup> Ezt a szakaszt első olvasáskor célszerű kihagyni.

$$\frac{1}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} x^n S_0(x, E) \mathrm{d}x = \frac{1}{n!} S(E) \int_{-\infty}^{\infty} x^n \delta(x) \mathrm{d}x = S(E) \delta_{n0}.$$

Végül a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{k}{2k+1}M_{n-1,k-1}(E) + \frac{k+1}{2k+1}M_{n-1,k}(E) + \Sigma_{t}(E)M_{n,k}(E) =$$
  
=  $S(E)\delta_{n0}\delta_{k0} + \int_{0}^{\infty} \Sigma_{k}(E' \to E)M_{n,k}(E')dE'.$  (46.12)

Ezt az egyenletrendszert n, k = 0, 1, 2, ...-re ugyanazzal az aszimptotikus lassulási programmal (illetve annak alkalmas módosításával) oldhatjuk meg, amelyet a reaktor számítására is használunk.<sup>95</sup> Az eredményeket a mért momentumokkal összevetve a felhasznált magfizikai adatok és lassulási modellek tiszta kísérleti ellenőrzését végezhetjük el. A "tiszta" jelző elsősorban azt jelenti, hogy a momentumokat általában nem-sokszorozó rendszerekben mérik, tehát olyan problémák, mint a rezonanciák figyelembevétele nem zavarják az elemzést.

Megjegyezzük, hogy a Fermi-kor a második momentummal van kapcsolatban:

$$\tau = \frac{M_{20}}{M_{00}} \,.$$

Az előző részben talált

$$P_{\rm NL} = {\rm e}^{-B^2\tau} \approx 1 - B^2\tau$$

mennyiség annak a valószínűsége, hogy a neutron lassulás közben nem szökik ki a rendszerből. A most bevezetett momentumok segítségével ez a mennyiség magasabb rendben is folytatható:

$$P_{\rm NL} = 1 - \frac{M_{20}}{M_{00}} B^2 + \frac{M_{40}}{M_{00}} B^4 - \frac{M_{60}}{M_{00}} B^6 + \dots$$
(46.13)

Amikor a mért momentumokat a számítások eredményeivel hasonlítjuk össze, e mennyiség számított és mért értékeinek az összehasonlítása felvilágosítást ad arról, hogy a lassulási modellben esetleg meglévő hibáknak mekkora hatásuk lesz  $k_{\text{eff}}$ -re.

<sup>&</sup>lt;sup>95</sup> Az n < 0 és a k < 0 indexű momentumokat értelemszerűen nullának kell venni.

# 5. Többcsoport módszerek

## 5.1. A többcsoport módszer (a diffúzióelméletben)

Az egycsoport elméletben kapott eredmények a reaktorfizika számára alapvetők, de – közelítő jellegüknél fogva – csak arra elégségesek, hogy a jelenségek lényegét bemutassák. Akkor azonban, amikor a gyakorlatban is használható eredményeket akarunk kapni, lényegesen pontosabb módszerekre van szükségünk. Ilyenkor szoktuk a *többcsoport módszerek*et alkalmazni, amelyek lényege a következő.

A teljes energiatartományt felosztjuk N számú intervallumra:

$$(0 =) E_N < E_{N-1} < E_{N-2} < \dots < E_2 < E_1 < E_0 (= 10 \text{ MeV}),$$
(51.1)

amit letargiában is kifejezhetünk:

$$(\infty =) u_N > u_{N-1} > u_{N-2} > \dots > u_2 > u_1 > u_0 (= 0).$$
(51.2)

Azokat a neutronokat, amelyek energiája ezek közül a *k*-adik intervallumba esik, tehát amelyekre

$$E_k \le E \le E_{k-1}$$
 vagy  $u_k \ge u \ge u_{k-1}$ ,

a *k*-adik (*energia*)*csoport*nak nevezzük. A csoporthoz tartozó fluxust (az ún. *csoport*-*fluxus*t) a

$$\boldsymbol{\Phi}_{k}(\mathbf{r}) = \int_{E_{k}}^{E_{k-1}} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E) dE = \int_{u_{k-1}}^{u_{k}} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, u) du$$
(51.3)

integrálok segítségével definiáljuk (k = 1, 2, ..., N). Az utolsó (tehát az *N*-edik) csoport általában a termikus csoport abban az értelemben, ahogy ezt a 4.6. alfejezetben definiáltuk, tehát leggyakrabban  $E_{N-1} = E_m = 0,625$  eV vagy 1,85 eV.

Ezután tekintünk valamilyen magreakciót, amelynek a hatáskeresztmetszete legyen  $\Sigma(u)$ . Az erre vonatkozó teljes reakciógyakoriságot felbontjuk az energiacsoportok szerint részekre:

$$\int_{0}^{\infty} \mathcal{\Sigma}(u) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, u) \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{N} \int_{u_{k-1}}^{u_{k}} \mathcal{\Sigma}(u) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, u) \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{N} \mathcal{\Sigma}_{k} \boldsymbol{\Phi}_{k}(\mathbf{r}),$$

ahol

$$\Sigma_{k} = \frac{\sum_{k=1}^{u_{k}} \Sigma(u) \Phi(\mathbf{r}, u) \mathrm{d}u}{\Phi_{k}(\mathbf{r})}$$
(51.4)

a *k*-adik csoporthoz tartozó *csoportállandó*. Ezen a módon definiálhatunk abszorpciós, hasadási, szórási és egyéb csoportállandókat is (pl. diffúzióállandó, 1/*v*). A szórási magfüggvény megfelelője a többcsoport módszerben a *szórási mátrix*:

$$\int_{u_{k-1}}^{u_k} du \int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(u' \to u) \Phi(\mathbf{r}, u') du' = \sum_{k'=1}^{N} \Sigma_{k' \to k}^{s} \Phi_{k'}(\mathbf{r}), \qquad (51.5)$$

ahol

$$\Sigma_{k' \to k}^{s} = \frac{\prod_{k=1}^{u_{k}} u \int_{u_{k'-1}}^{u_{k'}} \Sigma_{s}(u' \to u) \Phi(\mathbf{r}, u') du'}{\Phi_{k'}(\mathbf{r})}.$$
(51.6)

Analóg módon definiáljuk a rugalmatlan szórási mátrixot is.<sup>96</sup>

A 2. fejezetben levezetett (31.8) diffúzióegyenlet többcsoport megfelelőjét formálisan könnyen levezethetjük, ha (31.8)-at a k = 1, 2, ..., N csoportokra külön-külön integráljuk:

$$\frac{1}{v_k} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ D_k(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{r}, t) \right] - \boldsymbol{\Sigma}_k^{\mathsf{t}} \boldsymbol{\Phi}_k(\mathbf{r}, t) + Q_{0k}(\mathbf{r}, t), \qquad (51.7a)$$

ahol (31.3a) alapján

$$Q_{0k}(\mathbf{r},t) = \sum_{k'=1}^{N} \Sigma_{k'\to k}^{s} \boldsymbol{\Phi}_{k'}(\mathbf{r},t) + f_{k} \sum_{k'=1}^{N} \nu \Sigma_{k'}^{f} \boldsymbol{\Phi}_{k'}(\mathbf{r},t) + \sum_{k'=1}^{N} \Sigma_{k'\to k}^{in} \boldsymbol{\Phi}_{k'}(\mathbf{r},t) + S_{k}(\mathbf{r},t).$$
(51.7b)

<sup>&</sup>lt;sup>96</sup> A továbbiakban mindent a letargiaváltozóval fogunk kifejezni. A kapott képleteket (51.3) mintájára nem nehéz az energiaváltozóra átírni.

Itt értelemszerűen

$$f_k = \int_{u_{k-1}}^{u_k} f(u) \mathrm{d} u \, .$$

Az  $S_k(\mathbf{r},t)$  külső forrástag definíciója analóg.

Ezen a módon a (31.8) integro-differenciálegyenletet egy *N* ismeretlenes differenciálegyenlet-rendszerré alakítottuk át, amelynek a megoldására kidolgozott numerikus módszerek állnak rendelkezésre. Nem állítjuk, hogy az eredeti (31.8) egyenlet megoldására nincsenek megfelelő numerikus módszerek, de olyan esetekben, amikor a vizsgálandó reaktor nagy számú különböző anyagi minőségű tartományból áll, célravezetőbb az (51.7) *többcsoport diffúzióegyenlet*ből kiindulni.

A fentiek azonban csak formálisan jelentenek előrelépést, hiszen a vázolt módszer alkalmazását több nehézség is gátolja:

- (1) Fenti definíciójuk szerint a csoportállandókat csak akkor tudjuk kiszámítani, ha ismerjük a  $\Phi(\mathbf{r}, u)$  energiaspektrumot, tehát *circulus viciosus*ba kerültünk.
- (2) Mivel a spektrum általában függ az **r** helykoordinátától, a csoportállandók szigorúan véve még akkor is függnek **r**-től, amikor a vizsgált közeg egyébként homogén. Ez a megállapítás különösen a különböző anyagi összetételű homogén tartományokat elválasztó határfelületek közelében lehet érvényes, hiszen az energiaspektrum alakja ilyen helyeken függ a legerősebben a helytől. Nem nehéz belátni, hogy a csoportállandók térfüggése annál gyengébb lesz, minél szűkebbek az energiacsoportok, hiszen – a rezonanciák tartományától eltekintve – a fluxus az energiának lassan változó függvénye. Ebből következik, hogy célszerű a csoportok Nszámát minél nagyobbra választani, hiszen ekkor a csoportállandókat egy homogén tartományon belül egyre jobb közelítéssel **r**-től függetlennek tekinthetjük.
- (3) Az (51.7) egyenletrendszer megoldásakor általában a véges differenciák módszerét alkalmazzuk, vagyis a Laplace-operátorban szereplő differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal közelítjük [vö. (53.4)]. Ezen a módon végül egy lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk, amelyben az ismeretlenek száma az energiacsoportok és a térbeli osztópontok számának a szorzata. Nyilvánvaló, hogy minél részletesebben kívánjuk a vizsgált rendszert leírni, annál több térbeli osztópontot kell alkalmaznunk. A gyakorlatban nem ritka, hogy a térbeli osztópontok száma több ezer. Annak érdekében, hogy ne kapjunk kezelhetetlenül sokismeretlenes algebrai egyenletrendszert, ilyenkor arra törekszünk, hogy az energiacsoportok száma lehetőleg kicsi legyen.

Nyilvánvaló e két utóbbi törekvés közötti ellentmondás, amelynek a feloldására a csoportállandók számítását általában (legalább) két lépésben végezzük, és ezzel tudjuk megkerülni az (1) alatti problémát is:

• Először sok energiacsoportot választunk, és a reaktor geometriai viszonyait csak elnagyoltan vesszük figyelembe. Az esetek többségében ez azt jelenti, hogy minden anyagilag homogén tartományra külön-külön alkalmazzuk az aszimptotikus lassu-

láselméletet. Ennek eredményei alapján minden homogén anyagi minőségű<sup>97</sup> tartományra csoportállandókat számítunk ki, amelyeket tartományonként állandónak tekintünk.

• Második lépésben kevés (2, esetleg 4 vagy 6) csoportot választunk, amelyekre a csoportállandókat az előbbi lépésben kapott spektrum felhasználásával számítjuk ki. Ebben a lépésben már nagy számú térbeli osztópontot választhatunk.

## 5.2. Sokcsoport lassuláselmélet

Sokcsoport elméletről akkor beszélünk, amikor az energiacsoportok

 $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ 

szélessége 0,3–0,5 (vagy kisebb). Ebben az esetben *N* legalább 40, de vannak 100-nál több csoporttal dolgozó lassulási programok is. A csoportok határainak a kiválasztása csak azoknál a csoportoknál kényes kérdés, amelyekbe a reaktort alkotó izotópoknak (elsősorban természetesen az <sup>238</sup>U-nak) erős rezonanciái esnek. Itt általában úgy szokás a csoportok határát megválasztani, hogy egy csoportba legfeljebb egy erős rezonancia essen. A többi csoport esetében a határok letargiában többnyire egyenletesek.

A sokcsoport állandók meghatározásánál három esetet kell egymástól megkülönböztetni:

(1) Az energiával lassan változó, ún. *sima* hatáskeresztmetszetek esetében az (51.4)ben szereplő átlagoló spektrumot a letargiától függetlennek vesszük, ami megfelel a 4.3. alfejezetben talált 1/E spektrumnak. Ekkor tehát

$$\Sigma_k = \frac{\int\limits_{u_{k-1}}^{u_k} \Sigma(u) \mathrm{d}u}{\Delta u_k},$$

vagyis a csoportállandók a csoportra vonatkozóan súlyozás nélkül vett átlagok.

(2) Mint fentebb már utaltunk rá, az *N*-edik csoport általában a termikus tartomány (vö. 4.5. alfejezet). Ebben a csoportban ki kell számítani a (45.14) termalizációs egyenlet megoldását, mert a termikus energiaspektrum nem tekinthető 1/E-nek, és az átlagolásban ezt kell súlyfüggvénynek tekinteni:

$$\Sigma_{N} = \frac{\int_{u_{N-1}}^{u_{N}} du \int \Sigma(\mathbf{r}, u) \Phi(\mathbf{r}, u) d\mathbf{r}}{\int_{u_{N-1}}^{u_{N}} du \int \Phi(\mathbf{r}, u) d\mathbf{r}}.$$
(52.1)

<sup>&</sup>lt;sup>97</sup> A "homogén" kifejezés itt arra utal, hogy a tartományon belül a hatáskeresztmetszetek a térben nem változnak. Ha a tartományt egy, azonos elemi cellákból álló fűtőelemrács tölti ki, akkor itt a cellára homogenizált csoportállandókról van szó [vö. (52.1) képlet].

A termikus csoportban nemcsak a letargiára, hanem az elemi cellán belül a térbeli eloszlásra vonatkozóan is átlagolni kell a hatáskeresztmetszeteket, ugyanis a fluxusnak az elemi cellán belül való térfüggése sem hanyagolható el. (52.1)-ben a letargiára vonatkozó integrálás felső határa voltaképpen végtelen, hiszen  $u_N = \infty$ .

(3) Azokban a csoportokban, amelyekben rezonanciák is vannak, elvileg járható a termikus csoport kezelésével analóg út: a rezonancia közelében kiszámítjuk a mind térben, mind letargiában gyorsan változó  $\Phi(\mathbf{r}, u)$  fluxust, és segítségével az (52.1) képlettel analóg módon állítjuk elő a megfelelő csoportállandókat:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k} = \frac{\int_{u_{k-1}}^{u_{k}} \mathrm{d}u \int_{\text{cella}} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{r}, u) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, u) \mathrm{d}\mathbf{r}}{\int_{u_{k-1}}^{u_{k}} \mathrm{d}u \int_{\text{cella}} \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, u) \mathrm{d}\mathbf{r}}$$

ahol k a tekintett csoport indexe. Vannak lassulási programok, amelyek ezt az utat követik. Hátrányuk, hogy minden fűtőelemrácsra vonatkozóan külön igénylik a  $\Phi(\mathbf{r}, u)$  fluxusnak a rezonanciatartományban való kiszámítását. Tekintve, hogy az u letargiával nagyon gyorsan változó függvényről van szó, itt rendkívül finom lépéseket ( $\Delta u = 0,001$ ) kell használni, tehát a letargia több ezer értéke mellett kell a cellán belüli eloszlást kiszámítani. Ez időigényes és költséges számítást jelent. Ezért a lassulási programok többsége egyszerűsítő feltevésekkel él, és a számítást az egyes csoportokba eső rezonanciákhoz tartozó rezonanciaintegrálokra vezeti vissza (lásd alább).

A sokcsoport módszert általában aszimptotikusan szoktuk alkalmazni, tehát a (32.5) egyenlet megoldására használjuk. Ezért az alábbiakat a (32.5) egyenletekből kiindulva vezetjük le.<sup>98</sup>

A (43.7)-ben bevezetett q(u) lassulási sűrűség felhasználásával és (43.17a) figyelembevételével a lassulási egyenletet az alábbi alakra hozhatjuk:

$$\begin{bmatrix} D(u)B^2 + \Sigma_a(u) + \Sigma_{in}(u) \end{bmatrix} \psi(u) + \frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} =$$
  
=  $f(u) \int_0^\infty v \Sigma_f(u') \psi(u') \mathrm{d}u' + Q^{\mathrm{in}}(u),$  (52.2)

ahol

$$Q^{\rm in}(u) = \int_0^\infty \Sigma_{\rm in}(u' \to u) \psi(u') du'$$

<sup>&</sup>lt;sup>98</sup> A térfüggő esetre az alábbiak úgy vihetők át, hogy a (32.5) egyenlet letargiára átírt alakjában szereplő  $D(u)B^2 \Phi(u)$  tag helyébe  $D(u)\Delta \Phi(\mathbf{r},u)$ -t írunk, és az egyenlet többi tagját u mellett  $\mathbf{r}$  függvényének is tekintjük.

a rugalmatlan szóródások járuléka [vö. (31.3a)]. Itt  $B^2$  a geometriai görbületi paraméter. Ha  $B^2$  értéke nem egyezik meg az anyagi görbületi paraméterrel, akkor (52.2)-nek nincs nemtriviális megoldása. Az egyenletet csak úgy tehetjük megoldhatóvá, ha a hasadást leíró tagban bevezetjük a sokszorozási tényezőt, vagyis f(u) helyébe  $f(u)/k_{eff}$ -et írunk. Mivel lineáris egyenletről van szó, a  $\psi(u)$  megoldás normálása tetszőleges, tehát választhatjuk a

$$\int_{0}^{\infty} \nu \Sigma_{\rm f}(u') \psi(u') \mathrm{d}u' = k_{\rm eff}$$
(52.3)

normálást, amivel (52.2) átmegy a

$$\left[D(u)B^{2} + \Sigma_{a}(u) + \Sigma_{in}(u)\right]\psi(u) + \frac{\mathrm{d}q(u)}{\mathrm{d}u} = f(u) + Q^{in}(u)$$

alakba.99

Integráljuk ezt az egyenletet a k-adik csoportra (k = 1, 2, ..., N), és vegyük figyelembe a sokcsoport állandók fenti definícióját:

$$\left(D_k B^2 + \Sigma_k^{\rm a} + \Sigma_k^{\rm in}\right) \psi_k + q_k - q_{k-1} = f_k + Q_k^{\rm in}, \qquad (52.4a)$$

ahol

$$Q_k^{\text{in}} = \sum_{k'=1}^k \Sigma_{k' \to k}^{\text{in}} \psi_{k'}$$
(52.4b)

és

$$q_k = q(u_k).$$

Vegyük észre, hogy

.

$$Q_1^{\text{in}} = \Sigma_{1 \to 1}^{\text{in}} \psi_1$$
 és  $q_0 = 0$ , (52.5)

hiszen az első csoportba u < 0 letargiáról rugalmas szóródás útján nem kerülhetnek neutronok. (52.3) helyett most értelemszerűen írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{N} \nu \Sigma_k^{\mathrm{f}} \psi_k = k_{\mathrm{eff}} \,. \tag{52.6}$$

Ezzel a "fogással" (amely egyébként csak az aszimptotikus elméletben lehetséges) a lassulási egyenletet inhomogénné tettük, ami matematikai szempontból nagy könnyebbség: tetszőleges  $B^2$  mellett megoldható. Ha a  $B^2$  különböző értékei mellett kapott  $\psi_k$  megoldásokat (52.6)-ba helyettesítjük, akkor a sokszorozási tényezőt  $B^2$  (te-

<sup>&</sup>lt;sup>99</sup> Reméljük, nem okoz félreértést, hogy  $k_{eff}$ -ben ugyanazt a "k" betűt használjuk, mint amellyel a csoportok indexét jelöljük.

hát végső soron a geometriai méretek) függvényében meg tudjuk határozni. (52.4) alkalmazásának azonban van egy másik módja is: megkereshetjük azt a  $B^2$ -értéket, amelyre vonatkozóan  $k_{\text{eff}} = 1$ . Ez éppen  $B_{\text{m}}^2$ -tel, tehát az anyagi görbületi paraméterrel lesz egyenlő.

Az (52.4) egyenlethez még hozzátartozik egy másik egyenlet is, amely a csoportfluxus függvényében megadja a lassulási sűrűséget. Ehhez mindenekelőtt (43.28)ból kell kiindulnunk, amely szerint a teljes lassulási sűrűséget a reaktorban található izotópok szerint részekre kell bontani:

$$q_k = \sum_j q_{jk} \, .$$

Itt a *j* index végigfut az összes izotópokon. Hasonló felbontást alkalmazunk a szórási hatáskeresztmetszetre is:

$$\varSigma_k^{\mathrm{s}} = \sum_j \varSigma_{jk}^{\mathrm{s}} \, .$$

A nehéz elemekre (általában A > 27) a Fermi-közelítést alkalmazzuk, vagyis

$$q_{jk} = \xi_j \Sigma^{\rm s}_{jk} \psi_k \,.$$

A könnyebb elemekre a Greuling–Goertzel-közelítést [vö. (43.23)] alkalmazzuk:

$$q_j(u) + a_j \frac{\mathrm{d}q_j(u)}{\mathrm{d}u} = \xi_j \Sigma_j^{\mathrm{s}}(u) \psi(u) \left(1 - \frac{\mathrm{d}a_j(u)}{\mathrm{d}u}\right) = \xi_j \Sigma_j^{\mathrm{s}*}(u) \psi(u).$$

Ha ezt a k-adik csoportra integráljuk, akkor a

$$\frac{\Delta u_k}{2} (q_{jk} + q_{j,k-1}) + \Gamma_{jk} (q_{jk} - q_{j,k-1}) = \xi_j \Sigma_{jk}^{s^*} \psi_k$$
(52.7)

egyenletet kapjuk, ahol

$$\Gamma_{jk} = \frac{\int_{u_{k-1}}^{u_k} a(u) \mathrm{d}u}{\Delta u_k}.$$

Az így kapott egyenletrendszer megoldása nem okoz különösebb nehézséget. A k = 1-re vonatkozó egyenletben (52.5) szerint  $q_{j0}$  eltűnik, továbbá (52.7)-ből  $q_{j1}$  kifejezhető  $\psi_1$ -gyel:

$$q_{j1} = \frac{\xi_j \Sigma_{j1}^{\mathrm{s}^*} \psi_1}{\Delta u_1 / 2 + \Gamma_{j1}},$$

amit (52.4a)-ba helyettesítve egyenletet kapunk  $\psi_1$ -re:

$$\left(D_1B^2 + \Sigma_1^{\mathrm{a}} + \Sigma_1^{\mathrm{in}} - \Sigma_{1 \to 1}^{\mathrm{in}}\right)\psi_1 + \psi_1 \sum_j \frac{\xi_j \Sigma_{j1}^{\mathrm{s}^*}}{\Delta u_1/2 + \Gamma_{j1}} = f_1.$$

Ezt  $\psi_1$ -re megoldva (52.7) alapján kiszámítjuk  $q_1$  értékét, illetve (52.4b) szerint kifejezzük  $Q_2^{\text{in}}$ -t, majd ezeket behelyettesítjük (52.4a)-ba. Analóg módon haladunk tovább: (52.7)-ből  $\psi_2$ -vel kifejezzük  $q_2$ -t, amivel a k = 2-re felírt (52.4a) egyenlet  $\psi_2$ -re megoldhatóvá válik. Ez az algoritmus folytatható k = N-ig.

Befejezésül külön kell még szólni a rezonanciákról. Hacsak nem alkalmazzuk a rezonanciákra a csoportállandók fent, (3)-nál említett költséges közvetlen számítási módszerét, azokban a csoportokban, ahol a jelenlévő izotópoknak rezonanciáik vannak, nem állnak rendelkezésre csoportállandók, legfeljebb csak rezonanciaintegrálok. Jelöljük rendre  $I_k^a$  -val és  $I_k^f$ -fel a *k*-adik csoportba eső rezonanciákhoz tartozó abszorpciós, illetve hasadási rezonanciaintegrálok összegét. Az ilyen csoportokra vonatkozó (52.4a) szerinti egyenletekben  $\Sigma_k^a$  és  $\Sigma_k^f$  jelölje csak a sima (nemrezonancia) hatáskeresztmetszetek járulékát. Ha az (52.4a) egyenletet megoldjuk, a megoldásul kapott  $\psi_{0k}$  azt adja meg, mennyi lenne a fluxus, ha a *k*-adik csoportban nem lennének rezonanciák, tehát ez nem más, mint a 4.4. alfejezetben bevezetett fiktív fluxus (erre utal a "0" index). A rezonanciaintegrál definíciója szerint a *k*-adik csoporthoz tartozó rezonanciaabszorpciók száma  $\psi_{0k}I_k^a$ -val egyenlő. A valóságos  $\psi_k$  csoportfluxus meghatározására így (52.4a) helyett a

$$\left(D_k B^2 + \Sigma_k^{a} + \Sigma_k^{in}\right) \psi_k + q_k - q_{k-1} = f_k + Q_k^{in} - \psi_{0k} I_k^{a}$$
(52.8)

egyenlet szolgál.  $k_{eff}$  számítására ebben az esetben (52.6) helyett a

$$\sum_{k=1}^{N} \left( \nu \Sigma_{k}^{\mathrm{f}} \psi_{k} + \psi_{0k} I_{k}^{\mathrm{f}} \right) = k_{\mathrm{eff}}$$
(52.9)

kifejezés használandó, amelyben a fiktív fluxust csak azokban a csoportokban kell figyelembe venni, ahol ténylegesen vannak rezonanciák (a többi csoportban tehát ez a tag értelemszerűen 0-val egyenlő). A rezonanciacsoportokban tehát kétszer használjuk az (52.4a) egyenletet: először, amikor a fiktív fluxust kiszámítjuk, másodszor pedig az (52.8) szerinti alakjában, amikor a  $\psi_k$  csoportfluxust számítjuk ki. Mindvégig azonban  $\Sigma_k^a$  csak a sima hatáskeresztmetszetek járulékát tartalmazza (51.4) szerint.

Ahhoz, hogy egy adott reaktorra a sokcsoport egyenleteket megoldhassuk, meg kell határoznunk a sokcsoport állandókat. Ez a gyakorlatban nagyon nagy számú mag-

fizikai állandó ismeretét követeli meg, hiszen a reaktort alkotó minden izotópra ismerni kell a

$$\sigma_k^{\mathrm{a}}, \sigma_k^{\mathrm{in}}, (\xi \sigma_k^{\mathrm{s}*}), \Gamma_k, (v \sigma_k^{\mathrm{f}}), \dots$$

állandókat (k = 1, 2, ..., N-re). Ez izotóponként több száz adatot jelent. A gyakorlatban előforduló izotópok száma is nagy (legalább 30), amelyek mindegyikére ismerni kell ezeket az állandókat. Így belátjuk, hogy egy sokcsoport lassulási program használatához egy több tízezer magfizikai adatot tartalmazó csoportállandó-könyvtárra van szükség, amelynek a magfizikusok által közvetlenül mért hatáskeresztmetszetekből való előállítására külön programok szolgálnak. Tekintve, hogy a csoportállandó-könyvtár előállítása nagyon munkaigényes, egy adott program esetében az (51.1) és (51.2) csoportbeosztás egyszer és mindenkorra rögzített, de a könyvtár újraszámolására is csak nagyon ritkán kerül sor.

Magyarországon hosszú ideig a GRACE sokcsoport lassulási program használtuk, amelyben a csoportok száma 40. Az általa alkalmazott számítási módszer nagy vonalakban megfelel a fentiekben vázolt sémának. A GRACE-hez tartozó csoportállandó-könyvtár számítása az NJOY programmal [16] történt.

#### 5.3. Kevéscsoport diffúzióelmélet

#### A kevéscsoport diffúzióegyenlet

A reaktor geometriai részleteit általában a *kevéscsoport diffúzióelmélet* segítségével vesszük figyelembe. Mint az 5.1. alfejezet végén mondtuk, az ehhez szükséges csoportállandókat a reaktor egyes homogén tartományaira kiszámított aszimptotikus spektrumok segítségével állítjuk elő az (51.4) és (51.6) képletekből kiindulva. A kevéscsoport közelítés egyes csoportjai a sokcsoport közelítés csoportjainak az összevonásával adódnak. 4 csoport esetében ezt az 53.1. ábrán illusztráljuk.



53.1. ábra. Példa a 4-csoport közelítés csoportbeosztására

Erre való tekintettel a sokcsoport közelítés csoportjait *mikro*-, a kevéscsoport közelítés csoportjait pedig *makrocsoport*oknak fogjuk nevezni. A *g*-edik makrocsoportot általánosságban a következőképpen definiáljuk: azokból a mikrocsoportokból áll, amelyek *k* indexére teljesül, hogy

$$k_{g-1} \le k \le k_g$$
 (g = 1, 2,..., G).<sup>100</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>100</sup> Tekintve, hogy a legtöbb világnyelvben a "csoport" szó megfelelője "g" betűvel kezdődik (például group, angolul), az irodalomban a g index terjedt el. Célszerű ezt a magyarban is átvennünk.

(51.4) analógiájára ekkor a g-edik csoport csoportállandói:

$$\boldsymbol{\varSigma}_{g} = \frac{\sum_{k=k_{g-1}}^{k_{g}} \boldsymbol{\varSigma}_{k} \boldsymbol{\psi}_{k}}{\sum_{k=k_{g-1}}^{k_{g}} \boldsymbol{\psi}_{k}},$$

ahol $\psi_k$ az (52.4) egyenlet megoldása. Az energiacserét (51.6) analógiájára a

$$\boldsymbol{\Sigma}_{g' \to g} = \frac{\sum_{k'=k_{g'-1}}^{k_{g'}} \sum_{k=k_{g-1}}^{k_g} \left( \boldsymbol{\Sigma}_{k' \to k}^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{\Sigma}_{k' \to k}^{\mathrm{in}} \right) \boldsymbol{\psi}_{k'}}{\sum_{k'=k_{g'-1}}^{k_{g'}} \boldsymbol{\psi}_{k'}}$$

mátrixelemek segítségével írjuk le. Vegyük észre, hogy itt egyetlen mátrixba vonjuk össze a rugalmas és rugalmatlan szórást.

A mondottak figyelembevételével a kevéscsoport diffúzióegyenlet (51.7) mintájára így írható:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left[ D_g(\mathbf{r}) \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}, t) \right] - \left[ \boldsymbol{\Sigma}_g^{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\Sigma}_g^{\mathrm{R}}(\mathbf{r}) \right] \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}, t) + Q_{0g}(\mathbf{r}, t), \qquad (53.1a)$$

ahol

$$Q_{0g}(\mathbf{r},t) = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g' \to g} \Phi_{g'}(\mathbf{r},t) + f_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^{f} \Phi_{g'}(\mathbf{r},t) + S_g(\mathbf{r},t), \qquad (53.1b)$$

$$(g = 1, 2, ..., G).$$

Az energiacserét leíró összegben csak azok a tagok szerepelnek, amelyek a tekintett *g*edik csoportból *kivezetnek*. Emiatt jelent meg a szórási hatáskeresztmetszet korábbi helyén a  $\Sigma_g^{\text{R}}$  a *removal hatáskeresztmetszet*<sup>101</sup>:

$$\Sigma_g^{\rm R} = \Sigma_g^{\rm s} + \Sigma_g^{\rm in} - \Sigma_{g \to g} = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g \to g'}.$$
(53.1c)

A sztatikus sajátérték-egyenletet az (53.1) egyenletek alapján egyszerűen felírhatjuk:

div
$$\left[D_g(\mathbf{r})$$
grad $\boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r})\right] - \left[\boldsymbol{\Sigma}_g^{a}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\Sigma}_g^{R}(\mathbf{r})\right]\boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}) +$ 

<sup>&</sup>lt;sup>101</sup> A "removal" angol kifejezés értelme: eltávolítás. Az itt szereplő fogalomra, tehát a *g*-edik csoportból való "kiszórásra" – sajnos – nem alakult ki elfogadott magyar kifejezés.

$$+\sum_{g'\neq g} \Sigma_{g'\rightarrow g} \boldsymbol{\Phi}_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{f_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^{\text{f}} \boldsymbol{\Phi}_{g'}(\mathbf{r}) = 0.$$
(53.2)

A kevéscsoport diffúzióelméletben alkalmazott közelítésnek a következő fizikai jelentést lehet adni. Az egyszerűbb kifejezés kedvéért tegyük fel, hogy N = 40mikrocsoportból indulunk ki úgy, hogy a makrocsoportok határai a  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 15$ ,  $k_3 = 39$  és  $k_4 = 40$  mikrocsoportok. Tulajdonképpen a  $\phi_k(\mathbf{r},t)$  sokcsoport fluxust kellene kiszámítanunk k = 1, 2,..., 40 (= N)-re. Praktikus okokból ezt nem tudjuk megtenni, és emiatt közelítőleg járunk el. A kevéscsoport elméletben a  $\Phi_g(\mathbf{r},t)$  fluxusokat határozzuk meg (g = 1, 2, 3, 4), amelyek a sokcsoport fluxusokkal a következő kapcsolatban állnak:

$$\begin{bmatrix} \phi_{1}(\mathbf{r},t) \\ \cdot \\ \phi_{4}(\mathbf{r},t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{1}(\mathbf{r},t) \cdot \begin{bmatrix} \psi_{1} \\ \cdot \\ \psi_{4} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \phi_{5}(\mathbf{r},t) \\ \cdot \\ \phi_{15}(\mathbf{r},t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{2}(\mathbf{r},t) \cdot \begin{bmatrix} \psi_{5} \\ \cdot \\ \psi_{45} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \phi_{16}(\mathbf{r},t) \\ \cdot \\ \phi_{39}(\mathbf{r},t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{3}(\mathbf{r},t) \cdot \begin{bmatrix} \psi_{16} \\ \cdot \\ \psi_{39} \end{bmatrix}$$
$$\phi_{40}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\Phi}_{4}(\mathbf{r},t) \cdot \psi_{40}$$

Itt  $\psi_k$  az aszimptotikus reaktorelmélet szerint arra a régióra kapott sokcsoport fluxus, amelyhez az **r** pont tartozik.  $\phi_k(\mathbf{r},t)$  az a fluxus, amelyet akkor kapnánk, ha a sokcsoport elméletet a valódi reaktorra alkalmaznánk. Más szóval: feltesszük, hogy egy makrocsoporton belül a spektrum alakja a reaktor minden pontjában megegyezik az aszimptotikus spektrummal, de megengedjük, hogy a különböző makrocsoportokhoz tartozó mikrocsoportfluxusok aránya az aszimptotikus spektrumhoz képest az **r** helyváltozó függvényében megváltozzon.

#### A véges differenciák módszere (X–Y geometria)

A kevéscsoport diffúzióegyenletet általában a *véges differenciák módszerével* oldjuk meg. Lényegét az ún. X–Y geometria példáján mutatjuk be: a fluxust

$$\boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\Phi}_{g}(x, y, z, t) = \boldsymbol{\Phi}_{g}(x, y, t)\cos(B_{z}z)$$

alakban közelítjük. Ez azt jelenti, hogy a neutronkifolyást jelentő tag a következőképpen írható:

$$\operatorname{div}(D_{g}\operatorname{grad}\boldsymbol{\varPhi}_{g}(\mathbf{r},t)) = \\ = \left\{\operatorname{div}[D_{g}(x, y)\operatorname{grad}\boldsymbol{\varPhi}_{g}(x, y)] - D_{g}B_{z}^{2}\boldsymbol{\varPhi}_{g}(x, y, t)\right\}\cos(B_{z}z),$$

ahol  $B_z^2$  az axiális görbületi paraméter. A div és grad operátorok a jobb oldalon már csak az (x, y) változókra hatnak. Ebben az esetben tehát (53.2) a következő alakba megy át:

$$div \Big[ D_g(x, y) grad \Phi_g(x, y) \Big] - \Big[ \Sigma_g^a(x, y) + D_g(x, y) B_z^2 + \Sigma_g^R(x, y) \Big] \Phi_g(x, y) + \\ + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g' \to g} \Phi_{g'}(x, y) + \frac{f_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^f \Phi_{g'}(x, y) = 0.$$
(53.3)

Tekintsünk egy reaktort, amely az aktív zónából és az azt körülvevő reflektorból áll. Az 53.2. *ábrá*n ennek a reaktornak a keresztmetszete látható. Az ábrát lefedjük a koordinátatengelyekkel párhuzamos rácsvonalakból álló sűrű hálóval, amelyek elhelyezése tetszőleges – azt leszámítva, hogy a különböző anyagi minőségű tartományokat elválasztó határvonalaknak rácsvonalaknak kell lenniük. Az 53.2. *ábrá*n üres körrel megjelölt pont környezetét az 53.3. *ábra* kinagyítva mutatja.



53.2. ábra. Reflektált reaktor számítására szolgáló rácsvonalak (X-Y geometria)



53.3. ábra. Az 53.2. ábrán kijelölt osztópont kinagyított környezete (X–Y geometria)

A tekintett ponthoz tartozó fluxusokat lássuk el a "0" indexszel. Négy szomszédja van: fent (F), lent (L), jobbra (J) és balra (B). A rácsintervallumok távolságát és a megfelelő fluxusokat ennek megfelelően indexeljük. A "0" pont környezetét a rácsvonalak az ábrán (1) – (4) indexekkel jelölt kvadránsokra osztják fel, amelyekhez egymástól eltérő csoportállandók tartozhatnak. A képletekben a kvadránsokat indexszel különböztetjük meg egymástól.

Az osztópontok között behúzzuk a felező merőlegeseket: az 53.3. ábrán ezek a szaggatott vonalak. Az (53.3) egyenletet integráljuk a szaggatott vonalak által határolt területre. Az egyenlet első tagjának az integrálját a Gauss-tétel felhasználásával felületi integrállá alakítjuk, majd benne a differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal, magát az integrált pedig téglányösszegekkel közelítjük:

$$\oint D_g(x, y) \operatorname{grad} \Phi_g(x, y) \operatorname{df} \cong \frac{\Phi_g^{\mathrm{F}} - \Phi_{0g}}{\Delta y_{\mathrm{F}}} \cdot \frac{D_{1g} \Delta x_{\mathrm{B}} + D_{2g} \Delta x_{\mathrm{J}}}{2} + \frac{\Phi_g^{\mathrm{J}} - \Phi_{0g}}{\Delta x_{\mathrm{J}}} \cdot \frac{D_{2g} \Delta y_{\mathrm{F}} + D_{3g} \Delta y_{\mathrm{L}}}{2} + \frac{\Phi_g^{\mathrm{L}} - \Phi_{0g}}{\Delta y_{\mathrm{L}}} \cdot \frac{D_{3g} \Delta x_{\mathrm{J}} + D_{4g} \Delta x_{\mathrm{B}}}{2} + \frac{\Phi_g^{\mathrm{B}} - \Phi_{0g}}{\Delta x_{\mathrm{B}}} \cdot \frac{D_{4g} \Delta y_{\mathrm{L}} + D_{1g} \Delta y_{\mathrm{F}}}{2}.$$
(53.4a)

Az (53.3)-ban szereplő többi tag integrálját egyszerű téglányösszeggel közelítjük a következő minta szerint:

$$\int \int \Sigma_{g}(x, y) \boldsymbol{\Phi}_{g}(x, y) dx dy \cong$$
$$\cong \frac{\boldsymbol{\Phi}_{0g}}{4} \Big( \Sigma_{1g} \Delta x_{B} \Delta y_{F} + \Sigma_{2g} \Delta x_{J} \Delta y_{F} + \Sigma_{3g} \Delta x_{J} \Delta y_{L} + \Sigma_{4g} \Delta x_{B} \Delta y_{L} \Big).$$
(53.4b)

Ha ezt – a határpontokat kivéve – minden rácspontban és csoportban elvégezzük, akkor az (53.3) differenciálegyenlet-rendszert közelítőleg egy lineáris algebrai egyenletrendszerrel helyettesítjük. A határpontokban nem kell integrálni, hiszen ott a határfeltételek megadják a fluxus értékét: tudjuk, hogy nulla.

Az ismeretlenek száma általában nagy. Példaként vegyünk 4 csoportot, az x tengely mentén 30, az y tengely mentén 40 osztópontot. Ekkor az ismeretlenek száma:  $4 \cdot 30 \cdot 40 = 4800$ . Egy ennyi ismeretlenes algebrai sajátérték-egyenlet kezeléséhez – numerikus okokból – sem a determináns kiszámításán, sem a közvetlen mátrixinverzión alapuló eljárások nem használhatók. Emiatt többnyire iterációs eljárásokat szoktunk alkalmazni, amelyekkel az 5.4. alfejezetben foglalkozunk.

## A véges differenciák módszere (R–Z geometria)

Az R–Z geometria az egyik legfontosabb geometria: egyrészt a reaktorok általában jó közelítéssel ábrázolhatók hengerként, másrészt ez a geometria valóságos háromdimenziós leírást tesz lehetővé – szemben az X–Y geometriával, amelynél a *z* irányú kifolyást csak egy axiális görbületi paraméter segítségével tudjuk figyelembe venni. Tekintsük az 53.4. és 53.5. *ábrák*at, amelyeken egy henger alakú reaktorra vonatkozóan mutatjuk meg a rácsvonalak szerinti beosztást. Figyeljük meg, hogy a henger forgástengelye az első és második osztóvonal felező egyenesében van. Erre a körülményre a határfeltételek tárgyalásakor még visszatérünk.



53.4. ábra. Rácsvonalak R-Z geometriában



53.5. ábra. Az 53.4. ábrán kijelölt osztópont kinagyított környezete (R–Z geometria)

A véges differenciák kiszámítása ugyanazzal a módszerrel történik, mint az X– Y geometria esetében, de mind a Laplace-operátor, mind az integrálok kezelése a hengeres geometriához illeszkedik. Kiindulási egyenletünk az (53.2) egyenlet, amelyben az **r** vektor helyére a hengeres (r, z) koordinátákat írjuk. Tulajdonképpen a Laplaceoperátort is át illene írni hengerkoordinátákra, de – mint látni fogjuk – erre nincs szükség. Amikor a kiszemelt osztópont környezetére integráljuk az (53.2) egyenletet, figyelembe kell vennünk, hogy az r szerinti "osztóvonalak" valójában hengerfelületek.

(53.2)-t integráljuk az 53.4. *ábrá*n bejelölt pontnak az 53.5. *ábrá*n kinagyított környezetére. A kifolyási tag integrálját a Gauss-tétel szerint felületi integrállá alakítjuk át, és ugyanazokat a közelítéseket alkalmazzuk, mint korábban:

$$\begin{split} \oint D_g(r,z) \operatorname{grad} \boldsymbol{\varPhi}_g(r,z) \, \mathrm{d}\mathbf{f} &\cong \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{F}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta z_{\mathrm{F}}} \cdot \pi \Big( D_{1g} r_{\mathrm{I}/4}^{\mathrm{B}} \Delta r_{\mathrm{B}} + D_{2g} r_{\mathrm{I}/4}^{\mathrm{J}} \Delta r_{\mathrm{J}} \Big) + \\ &+ \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{J}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta r_{\mathrm{J}}} \cdot \pi r_{\mathrm{I}/2}^{\mathrm{J}} \Big( D_{2g} \Delta z_{\mathrm{F}} + D_{3g} \Delta z_{\mathrm{L}} \Big) + \\ &+ \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{L}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta z_{\mathrm{L}}} \cdot \pi \Big( D_{3g} r_{\mathrm{I}/4}^{\mathrm{J}} \Delta r_{\mathrm{J}} + D_{4g} r_{\mathrm{I}/4}^{\mathrm{B}} \Delta r_{\mathrm{B}} \Big) + \\ &+ \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{B}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta r_{\mathrm{B}}} \cdot \pi r_{\mathrm{I}/2}^{\mathrm{B}} \Big( D_{4g} \Delta z_{\mathrm{L}} + D_{1g} \Delta z_{\mathrm{F}} \Big) \,. \end{split}$$
(53.5a)

Az itt szereplő radiális koordinátákat a következőképpen jelöltük:

 $r_{1/4}^{B}$ : az 53.5. *ábrá*n kiszemelt ponttól  $\Delta r_{B}/4$ -gyel balra levő radiális koordináta;  $r_{1/4}^{J}$ : az 53.5. *ábrá*n kiszemelt ponttól  $\Delta r_{J}/4$ -gyel jobbra levő radiális koordináta;  $r_{1/2}^{B}$ : az 53.5. *ábrá*n kiszemelt ponttól  $\Delta r_{B}/2$ -vel balra levő radiális koordináta;  $r_{1/2}^{J}$ : az 53.5. *ábrá*n kiszemelt ponttól  $\Delta r_{J}/2$ -vel jobbra levő radiális koordináta.

Az (53.2)-ben levő többi tag integrálját a következő módon közelítjük:

$$\int \int \Sigma_{g}(r,z) \Phi_{g}(r,z) 2\pi r dr dz \cong \frac{\Phi_{0g}}{2} \pi \times \\ \times \left( \Sigma_{1g} r_{1/4}^{B} \Delta r_{B} \Delta z_{F} + \Sigma_{2g} r_{1/4}^{J} \Delta r_{J} \Delta z_{F} + \Sigma_{3g} r_{1/4}^{J} \Delta r_{J} \Delta z_{L} + \Sigma_{4g} r_{1/4}^{B} \Delta r_{B} \Delta z_{L} \right).$$
(53.5b)

Az eddig felírt egyenletek az r > 0 radiális koordinátájú osztópontokra vonatkoznak. Az r = 0 környezetében felírandó egyenletekkel a *Határfeltételek* című részben foglalkozunk.

A végesdifferencia-egyenletek alakja tehát ugyanolyan, mint az X–Y geometria esetében, legfeljebb az együtthatók értéke más. Hasonló módon lehetne egyéb geometriákat is kezelni: az R– $\Theta$  és hatszöges kétdimenziós (2D), továbbá a háromdimenziós (3D) X–Y–Z, R– $\Theta$ –Z stb. geometriákban. A kapott egyenletek megoldásával a következő fejezetekben foglalkozunk.

#### Határfeltételek

A 3.1. alfejezetben megbeszéltük, hogy a diffúzióegyenlethez tartozó határfeltétel szerint a fluxus eltűnik a vizsgált rendszer extrapolált határfelületén. Van egy további feltétel is: mind a fluxusnak, mind az áramnak folytonosnak kell lennie különböző anyagi minőségű tartományok határán. Ezt a végesdifferencia-egyenletek felírásakor már figyelembe vettük, így elegendő az előbbivel foglalkoznunk.

A vizsgált rendszer szélső osztóvonalait mindig az extrapolált határfelületen kell felvenni. A rajta levő osztópontokban a fluxus ismert, hiszen 0-val egyenlő. Emiatt ezekre az osztópontokra nem írunk fel végesdifferencia-egyenletet: az (53.4) vagy (53.5) alakú egyenleteket csak a határvonalakkal szomszédos osztóvonalakon levő pontokban kezdjük felírni, és így futunk végig az összes *belső* osztópontokon.

Gyakran fordul elő, hogy a vizsgált rendszer bizonyos szimmetriákat mutat. Például lehetséges, hogy a rendszernek tükrözési szimmetriája van az *x* és *y* tengellyel párhuzamos tengelyekre (vagy csak az egyikre) vonatkozóan. Ebben az esetben elegendő a véges differenciákat a rendszernek arra a részére felírni, amelynek alkalmas tükrözésével az egész rendszer előállítható. A szimmetria tényét ún. *szimmetria-határfeltétel*lel vesszük figyelembe. A szimmetriatengelyen ugyanis fennáll, hogy a fluxus gradiensének a tengelyre merőleges összetevője eltűnik. Az ilyen típusú határfeltételnek a véges differenciák keretében való kezelését az *53.4. ábrá*n mutatott helyzet alapján mutatjuk be. Az R–Z geometriában ugyanis a henger forgástengelyében mindig fennáll:

$$\frac{\partial \Phi_g(r,z)}{\partial r}\bigg|_{r=0} = 0.$$
(53.6)

Ennek a feltételnek a figyelembevétele legegyszerűbben úgy történhet, ahogy az 53.4. *ábrán* mutatjuk: a *z* tengellyel párhuzamos (balról) első és második osztóvonalat a forgástengelyhez képest szimmetrikusan vesszük fel, és megköveteljük, hogy

$$\boldsymbol{\Phi}_{g}(-\Delta r/2,z) = \boldsymbol{\Phi}_{g}(\Delta r/2,z)$$

teljesüljön, ahol  $\Delta r$  az első és második osztóvonal közötti távolság. Ezt a feltételt az 53.4. *ábrá*n balról a második osztópontra (53.5a) szerint felírt egyenletekben úgy vesszük figyelembe, hogy bennük

$$\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{B}} = \boldsymbol{\Phi}_{0g}. \tag{53.7}$$

Könnyen belátható, hogy pontosan ez adódik az (53.5a) alatti felületi integrálban, ha kiszámításakor alkalmazzuk az (53.6) egyenletet.

#### Szabályozórudak kezelése

A szabályozórudak figyelembevételével kapcsolatban az a probléma merül fel, hogy a rudak belsejében nagyon nagy az abszorpciós hatáskeresztmetszet, és így ott nem érvényes a diffúzióegyenlet. Ezt a problémát általában úgy szoktuk megkerülni, hogy a diffúzióegyenlet érvényességét csak a rúdon kívül tételezzük fel, és a rúd felületén megadjuk a fluxus logaritmikus deriváltját, amelyet valamilyen, a rúd belsejére végzett transzportelméleti számítással határozunk meg [vö. (31.13)]. Ezen a módon a diffúzióegyenletet a rúdon kívül anélkül is meg tudjuk oldani, továbbá a sokszorozási tényezőt anélkül is ki tudjuk számítani, hogy a fluxust a rúd belsejében meghatároznánk. Nézzük meg, hogyan írhatók fel ilyen esetben a végesdifferencia-egyenletek.

Tekintsük az 53.6. *ábrá*t, amely csak annyiban különbözik az 53.2. *ábrá*tól, hogy van benne egy szabályozórúd. Ez a szürkére színezett terület. A véges differenciák módszeréből következik, hogy a rúd határfelületének is osztóvonalnak kell lennie. A rúd felületén valamelyik g csoportban (vagy csoportokban) megköveteljük, hogy teljesüljön a

$$D_g(\mathbf{r}_{\rm s})\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}_{\rm s},t)}{\partial \mathbf{N}} = \gamma \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}_{\rm s},t)$$
(53.8)

határfeltétel [vö. (31.13)], ahol  $\mathbf{r}_s$  a felület kiszemelt pontja, **N** pedig a felület kifelé mutató normálisa ebben a pontban. A  $\gamma$ tényezőt külön számítással kell meghatározni. Erre általában Monte Carlo vagy transzportelméleti módszereket szoktunk igénybe venni (lásd a 2.4. alfejezetben és a 4. függelékben).  $\gamma$ annál nagyobb, minél erősebben abszorbeáló anyagból áll a rúd, és minél vastagabb. Szélső esetben a rúd minden berepülő neutront elnyel (vagy ahogy mondani szoktuk: "a rúd fekete"). Ilyenkor a rúd határfelületén a vákuum-határfeltétel érvényes, hiszen a vákuum olyan közeg, amely minden neutront elnyel (vagyis albédója zérus). (31.13) figyelembevételével tehát:

$$\gamma \le \frac{1}{2}.\tag{53.9}$$

A fentiek szerint ez a felső határ a fekete rudak határesetében valósul meg<sup>102</sup>. Elhanyagolható abszorpciójú rudakban  $\gamma \approx 0$ .  $\gamma$ -nak azonban nem ez az alsó határa. Abban az esetben ugyanis, amikor a rúd belsejében moderátor van, a rúdban olyan eloszlás alakulhat ki, amelynek negatív  $\gamma$ felel meg. Ilyen helyzet áll elő például akkor, amikor a rudat a reaktorból kihúzzák, és helyére moderátor kerül.<sup>103</sup> A véges differenciák módszere megengedi, hogy az (53.8) határfeltételt csak egyes csoportokban írjuk elő, a többiben pedig a rúd belsejében is alkalmazzuk a diffúzióegyenletet. Mivel az abszorpciós hatáskeresztmetszet általában a termikus csoportban a legnagyobb, (53.8)-at többnyire ebben a csoportban követeljük meg (g = G).



53.6. ábra. Szabályozórudat (szürkére színezett rész) tartalmazó reaktor (X-Y geometria)

Ha más csoportokban alkalmazzuk a logaritmikus határfeltételt, ennek formális akadálya nincs, de ésszerű korlátok azért vannak. Tegyük fel, hogy egy  $g_0 < G$  csoportban előírjuk (53.8)-at. Mivel a rúd belsejében nem számítjuk ki a  $g_0$  csoporthoz tartozó fluxust, nem tudjuk a lassulási forrást a  $g > g_0$  csoportokban kiszámítani, tehát az ilyen g csoportokra már nem alkalmazhatjuk a rúd belsejében a diffúzióegyenletet. Emiatt minden  $g_0 \le g \le G$  csoportban célszerű a logaritmikus határfeltételt alkalmazni. Ekkor viszont felmerül a következő kérdés: lehet-e ezekre a csoportokra alkalmas  $\gamma$ t megadni, mikor a rúdon belüli lassulás függ a rúdon kívüli lassulástól? Némi közelítéssel bizonyára lehet, de nyilvánvaló, hogy az (53.8) szerinti határfeltételt legjobb úgy alkalmazni, hogy csak a termikus csoportra korlátozzuk.

Feltétlenül van-e lassulás a rúdon belül? Az 53.6. és 53.7. *ábrák*ról leolvasható, hogy igen! Egy szabályozórúd ugyanis lehet hengeres (gyakran ez a helyzet), tehát az X–Y geometriába csak úgy illeszthető bele, hogy hozzáveszünk némi moderátort is, amelynek a külső alakja az 53.7. *ábrán* látható B–0–L–BL téglalap.

<sup>&</sup>lt;sup>102</sup> Ha a (31.11b) szerinti pontosabb képletet használjuk,  $\gamma$  felső korlátjára 1/(3·0,71) = 0,469 adódik.

<sup>&</sup>lt;sup>103</sup> Ez analóg a 6. fejezetben tárgyalt reflektorpúp jelenségével: a rúd belsejében a termikus fluxus a rúdon kívül fennálló fluxusnál nagyobb lehet. Ennek oka a 4. függelékben írtak szerint a rúd belsejében történő neutronlassulás.



53.7. ábra. Az 53.6. ábrán bejelölt osztópont környezete (X–Y geometria)

Az 53.6. *ábrá*n bejelölt osztópont környezetét az 53.7. *ábrá*n kinagyítva mutatjuk be. A mondottak szerint a diffúzióegyenletet csak az (1) - (3) kvadránsokra integráljuk. A kifolyási tag közelítése:

$$\oint D_g(x, y) \operatorname{grad} \boldsymbol{\varPhi}_g(x, y) \operatorname{d} \mathbf{f} \cong \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{F}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta y_{\mathrm{F}}} \cdot \frac{D_{1g} \Delta x_{\mathrm{B}} + D_{2g} \Delta x_{\mathrm{J}}}{2} + \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{J}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta x_{\mathrm{J}}} \cdot \frac{D_{2g} \Delta y_{\mathrm{F}} + D_{3g} \Delta y_{\mathrm{L}}}{2} + \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{J}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta y_{\mathrm{L}}} \cdot \frac{D_{3g} \Delta x_{\mathrm{J}}}{2} + \frac{\boldsymbol{\varPhi}_g^{\mathrm{B}} - \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{\Delta x_{\mathrm{B}}} \cdot \frac{D_{1g} \Delta y_{\mathrm{F}}}{2} - \frac{\gamma \boldsymbol{\varPhi}_{0g}}{2} \cdot \frac{\Delta y_{\mathrm{L}} + \Delta x_{\mathrm{B}}}{2}.$$
(53.10a)

Az utolsó tag negatív előjele onnan ered, hogy az itteni felületi integrálban a felület normálisa a rúd felületén a rúd belseje felé mutat, viszont (53.8)-ban az  $\mathbf{N}$  vektor kifelé mutat. Az (53.4b) térfogati integrál pedig a következőképpen módosul:

$$\iint \Sigma_{g}(x, y) \Phi_{g}(x, y) dx dy \cong$$
  
$$\cong \frac{\Phi_{0g}}{4} \Big( \Sigma_{1g} \Delta x_{B} \Delta y_{F} + \Sigma_{2g} \Delta x_{J} \Delta y_{F} + \Sigma_{3g} \Delta x_{J} \Delta y_{L} \Big).$$
(53.10b)

Az eddig felírt egyenletek elégségesek a diffúzióegyenlet megoldásához. A sokszorozási tényező számításához azonban a teljes neutronmérleget figyelembe kell venni, tehát ki kell számítani a szabályozórúdban abszorbeálódott neutronok teljes számát. A számítást arra az esetre végezzük el, amikor az (53.8) logaritmikus határfeltételt a termikus csoportra vonatkozóan írjuk elő. Ekkor az időtől független transzportegyenlet a rúd belsejében így írható fel:

$$-\vec{\Omega} \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) - \boldsymbol{\Sigma}_{g}^{a}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) + \boldsymbol{Q}_{g}(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) = 0,$$

ahol  $Q_g$  a lassulás révén fellépő neutronforrás. Mivel a termikus csoportról van szó, a szórás hatását figyelmen kívül hagyhattuk.<sup>104</sup> Ha ezt a szabályozórúd térfogatára (az integráljel alatt "sz.r.") integráljuk, a következőt kapjuk:

$$\int_{4\pi} d\vec{\Omega} \int_{\text{sz.r.}} \left[ \Sigma_g^{a}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) - Q_g(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) \right] d\mathbf{r} = -\int_{4\pi} d\vec{\Omega} \int_{\text{sz.r.}} \vec{\Omega} \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) d\mathbf{r} =$$
$$= -\int_{\text{sz.r.}} \operatorname{div} \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\oint_{\text{sz.r.}} \mathbf{J}_g(\mathbf{r}_s) d\mathbf{f} .$$

A rúd felületén felírt (53.8) határfeltételhez hozzátartozik, hogy a rúd felületén már érvényesnek tekintjük a diffúziós közelítést, vagyis

$$-\mathbf{J}_{g}(\mathbf{r}_{s}) = D_{g}(\mathbf{r}_{s}) \operatorname{grad} \boldsymbol{\varPhi}_{g}(\mathbf{r}_{s}),$$

amit az előző egyenletbe helyettesítve kapjuk a keresett végeredményt:

$$\int_{4\pi} d\vec{\Omega} \int_{\text{sz.r.}} \left[ \Sigma_g^{\text{a}}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) - Q_g(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) \right] d\mathbf{r} = \oint_{\text{sz.r.}} D_g(\mathbf{r}_{\text{s}}) \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}_{\text{s}}) d\mathbf{f} =$$
$$= \oint_{\text{sz.r.}} D_g(\mathbf{r}_{\text{s}}) \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}_{\text{s}})}{\partial \mathbf{N}} df = \oint_{\text{sz.r.}} \gamma \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}_{\text{s}}) df .$$

Ezt a képletet az 53.6. és 53.7. ábrákon látható helyzetre alkalmazzuk:

$$\oint_{\text{sz.r.}} \gamma \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}_s) df \cong \gamma \frac{\Delta x_{\text{B}} + \Delta y_{\text{L}}}{2} \left( \boldsymbol{\Phi}_{0g} + \boldsymbol{\Phi}_g^{\text{B}} + \boldsymbol{\Phi}_g^{\text{L}} + \boldsymbol{\Phi}_g^{\text{BL}} \right).$$
(53.11)

Vegyük észre, hogy az (53.10a) képlet utolsó tagjának a negatívja éppen az itteni öszszegnek a  $\Phi_{0g}$ -hez tartozó tagja:

$$\gamma \frac{\Delta x_{\rm B} + \Delta y_{\rm L}}{2} \Phi_{0g}.$$

Az (53.11)-ben szereplő integrálban nem "0" pont körüli a kvadránsokra, hanem az 53.7. *ábrá*n látható "0", "B", "L" és "BL" pontok által határolt téglalapra integrálunk. Amikor az utóbbi három pontra írjuk fel az (53.10a) képletet, az utolsó tag negatívja rendre:

$$\gamma \frac{\Delta x_{\rm B} + \Delta y_{\rm L}}{2} \Phi_g^{\rm B}, \quad \gamma \frac{\Delta x_{\rm B} + \Delta y_{\rm L}}{2} \Phi_g^{\rm L} \quad \text{és} \quad \gamma \frac{\Delta x_{\rm B} + \Delta y_{\rm L}}{2} \Phi_g^{\rm BL}$$

lesz. (53.11) szerint e négy tag összege megadja a rúdban abszorbeálódó neutronok számát a *g*-edik csoportra vonatkozóan. Ez a gondolatmenet általánosítható arra az

<sup>&</sup>lt;sup>104</sup> Ha a *g*-edik csoport nem a termikus csoport, az alábbiakat könnyen lehet általánosítani.

esetre is, amikor a rúd felületén nem négy, hanem akárhány osztópont van. Beláttuk tehát a következőt: amikor az (53.10a) szerinti mennyiségeket összeadjuk a szabályozórúd felületének minden pontjára, a  $\gamma$ val arányos tagok összege éppen az abszorbeálódó neutronok számának a negatívját adja meg. Ha kiszámítanánk a fluxust a rúd belsejében lévő osztópontokra, és vennénk a (53.10b) szerint az abszorpcióra kapott mennyiségeket, ugyanezt kapnánk, és szintén negatív előjellel szerepeltetnénk a végesdifferencia-egyenletekben. Erre az észrevételre szükségünk lesz a következő alfejezetben (a külső iteráció tárgyalásakor).

## 5.4. A végesdifferencia-egyenletek megoldása iterációval

## Az egyenletrendszer felírása

Az előző alfejezetben két geometriára is kiszámítottuk a véges differenciákat. Mind az (53.4a), mind az (53.5a) egyenlet az alábbi általános alakban írható fel:

$$\oint D_g \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}) \mathrm{d} \mathbf{f} \cong a \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{B}} + b \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{J}} + c \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{F}} + d \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{L}} - (a+b+c+d) \boldsymbol{\Phi}_{0g}.$$
(54.1)

A szabályozórudakra vonatkozó (53.10a) egyenletre ez annyiban igaz, hogy a "0" osztópontnak azok a szomszédjai hiányoznak, amelyek a szabályozórúd belsejébe esnek.  $\Phi_{0g}$  együtthatója ekkor két részből tevődik össze: egyrészt a megmaradó szomszédok együtthatóinak az összege, másrészt a  $\gamma$ -val arányos tagok. (53.10a) szerint e két rész együtt:

$$-(a+b+c+d)-\gamma \frac{\Delta x_{\rm B}+\Delta y_{\rm L}}{2}$$

Azt kaptuk tehát, hogy (54.1) szerint  $\Phi_{0g}$  együtthatója a szomszédok együtthatóinak az összege, amikor a "0" pont nem határos szabályozórúddal. Ha viszont a "0" pont egy szabályozórúd felületén van,  $\Phi_{0g}$  együtthatója határozottan nagyobb, mint a többi együttható összege. Általában igaz tehát az a megállapítás, hogy  $\Phi_{0g}$  együtthatója nagyobb vagy egyenlő, mint a szomszédok együtthatóinak az összege.<sup>105</sup>

Az (53.4b), illetve (53.5b) képletek szerint az (54.1)-ben felírtakhoz még járulnak  $\Phi_{0g}$ -vel arányos tagok, amelyek a következő három típusba sorolhatók: (1) az abszorpciós és a removal hatáskeresztmetszet, (2) a neutronlassulási tag és (3) a hasadások járuléka. Az első típusba tartozó tagok előjele negatív, és ezeket összevonjuk az (54.1)-ben levő együtthatókkal:

$$\oint D_g \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}) d\mathbf{f} - \int \left[ \boldsymbol{\Sigma}_g^{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\Sigma}_g^{\mathrm{R}}(\mathbf{r}) \right] \boldsymbol{\Phi}_g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \cong$$
$$\cong a \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{B}} + b \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{J}} + c \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{F}} + d \boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{L}} - e \boldsymbol{\Phi}_{0g}, \qquad (54.2a)$$

<sup>&</sup>lt;sup>105</sup> 1-nél nagyobb albédójú rudak esetében  $\gamma < 0$ , vagyis ez a megállapítás nem igaz. Látni fogjuk, hogy ez konvergenciaproblémákhoz vezethet, ezért kerülendő. Az ilyen rudak belsejében többnyire alkalmazható a diffúzióegyenlet, tehát szükség sincs a logaritmikus határfeltételre.

ahol

$$e \cong a+b+c+d + \frac{\int \left[ \Sigma_g^{a}(\mathbf{r}) + \Sigma_g^{R}(\mathbf{r}) \right] \Phi_g(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\Phi_{0g}} > a+b+c+d.$$
(54.2b)

Az e > a+b+c+d reláció döntő szerepet játszik a végesdifferencia-egyenletek megoldásában (lásd alább). A hasadási forrás járulékát a következőképpen jelöljük:

$$S_{0g} = f_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_{g'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$
(54.3)

Végül bevezetjük a lassulási forrást:

$$L_{0g} = \sum_{g' \neq g} \int \mathcal{L}_{g' \to g}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_{g'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$
(54.4)

Mindkét összegben az integrált az (53.4b), illetve (53.5b) képletek szerint kell kiszámítani.

Végeredményben tehát az (53.2) kevéscsoport diffúzióegyenletnek az 53.2., 53.4. és 53.6. *ábrák*on kiszemelt "0" osztópontjára vonatkozó végesdifferencia-egyenlet a következő alakú:

$$a_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{B}} + b_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{J}} + c_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{F}} + d_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{L}} - e_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{0g} + L_{0g} + \frac{S_{0g}}{k_{\mathrm{eff}}} = 0.$$
(54.5)

Az *a*, *b*, *c*, *d* és *e* együtthatókat is elláttuk indexekkel annak érdekében, hogy világosabban látsszon: értékük függ a csoport indexétől (vagyis *g*-től), továbbá a "0" osztóponttól. Ha ezt az egyenletet minden osztópontra felírjuk, annyi lineáris egyenletet kapunk, ahány ismeretlen van. Ez tehát  $k_{eff}$ -re vonatkozóan algebrai sajátértékegyenlet, amelyet – legalábbis elvileg – az ismert lineáris algebrai módszerek valamelyikével meg lehet oldani.

Az ismeretlenek nagy számára való tekintettel az iterációs eljárások a leginkább célravezetők. Az iterációt a gyakorlatban két szakaszra szokás bontani:

• Kezdetben ismertnek tételezzük fel az  $S_{0g}$  hasadási forrást. Ezt az (54.5) egyenletben adottnak véve, megoldjuk az

$$a_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{B}} + b_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{J}} + c_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{F}} + d_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{g}^{\mathrm{L}} - e_{0g}\boldsymbol{\Phi}_{0g} + L_{0g} + S_{0g} = 0$$
(54.6)

alakú egyenletekből álló egyenletrendszert. Az ehhez szükséges iterációt nevezzük *belső iteráció*nak.

• A belső iteráció végeredményével újraszámoljuk  $k_{\text{eff}}$ -et és a hasadási forrást, amelyet (54.6)-ba helyettesítve egy újabb belső iterációt hajtunk végre. Ennek alapján

tovább javítjuk a hasadási forrást, amíg el nem érjük a konvergenciát. A hasadási forrás újraszámítását *külső iteráció*nak nevezzük.

Tekintve, hogy a külső iteráció minden lépésében  $k_{\text{eff}}$ -et is újraszámoljuk, végeredményben a teljes sajátérték-problémát megoldjuk.

## Belső iteráció

A belső iteráció (54.6) alapján azt jelenti, hogy minden osztópontban újraszámoljuk a fluxust:

$$\boldsymbol{\Phi}_{0g} = \frac{a_{0g}\boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{B}} + b_{0g}\boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{J}} + c_{0g}\boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{F}} + d_{0g}\boldsymbol{\Phi}_g^{\mathrm{L}} + L_{0g} + S_{0g}}{e_{0g}}.$$
(54.7)

Ennek matematikai elemzéséhez vezessük be a következő jelöléseket:

- $\vec{\Phi}_g$ : a *g*-edik csoporthoz tartozó fluxusok vektora. A fluxusokat a belső osztópontok szerint rendezzük sorba: a bal felső saroktól kezdve felülről lefelé haladunk, majd a függőleges rácsvonalakat balról jobbra vesszük sorba.
- $S_g$ : a *g*-edik csoporthoz tartozó hasadási forrásokból képzett  $S_{0g}/e_{0g}$  mennyiségek vektora. Az osztópontok sorrendje ugyanaz, mint a fluxusok esetében.
- $L_g$ : a *g*-edik csoporthoz tartozó lassulási forrásokból képzett  $L_{0g}/e_{0g}$  mennyiségek vektora. Az osztópontok sorrendje ugyanaz, mint a fluxusok esetében. A fluxusok vektoraival a következő kapcsolatban van:

$$\mathbf{L}_{g} = \sum_{g' \neq g} \mathbf{B}_{g' \to g} \vec{\Phi}_{g'}$$
(54.8)

ahol a  $\mathbf{B}_{g' \to g}$  mátrix elemeit az (54.4) és az (53.4b), illetve (53.5b) képletek alapján számíthatjuk ki. A kevéscsoport elméletben általában energiában csak "lefelé" való szórás lehetséges, ami azt jelenti, hogy a **B** mátrixok eltűnnek, amikor  $g' \ge g$ .

 $\mathbf{A}_{g}$ : az (54.7)-ben szereplő  $a_{0g}/e_{0g}$ , ...,  $d_{0g}/e_{0g}$  együtthatókból képzett mátrix. Szerkezetének részleteire még visszatérünk.

Ezekkel a jelölésekkel az (54.7) iterációs képlet vektori alakja a következő:

$$\vec{\Phi}_{g} = \mathbf{A}_{g}\vec{\Phi}_{g} + \sum_{g' \neq g} \mathbf{B}_{g' \to g}\vec{\Phi}_{g'} + \mathbf{S}_{g}, \qquad (g = 1, 2, ..., G).$$
(54.9)

A számítási séma könnyebb megértése érdekében ezt a vektoregyenletetekből álló rendszert célszerű az egyes csoportokra külön-külön felírni. Mivel csak "lefelé" való szórás van, a g = 1 csoportra vonatkozóan (54.9) így fest:

$$\vec{\Phi}_1 = \mathbf{A}_1 \vec{\Phi}_1 + \mathbf{S}_1 \,.$$
Itt  $S_1$  adott, tehát az egyenlet – az 1. csoportra alkalmazott belső iterációval – megoldható. Tegyük fel, hogy ez megtörtént. Ezután tekintjük a g = 2 csoportra vonatkozó egyenletet:

$$\vec{\Phi}_2 = \mathbf{A}_2 \vec{\Phi}_2 + \mathbf{B}_{1 \to 2} \vec{\Phi}_1 + \mathbf{S}_2$$

Mivel az 1. csoportra már kiszámítottuk a fluxust, ez az egyenlet – a 2. csoportra alkalmazott újabb belső iterációval – megoldható, hiszen a jobb oldal utolsó két tagja ismert. Ezt folytathatjuk a 3. csoportra, amelyre a következő egyenlet vonatkozik:

$$\vec{\Phi}_3 = \mathbf{A}_3 \vec{\Phi}_3 + \mathbf{B}_{1 \to 3} \vec{\Phi}_1 + \mathbf{B}_{2 \to 3} \vec{\Phi}_2 + \mathbf{S}_3.$$

Ezt ismét megoldhatjuk  $\vec{\Phi}_3$ -ra, és így tovább a g = G csoportig.

Ezen a módon a belső iteráció konvergenciája az egyes  $A_g$  mátrixok tulajdonságaitól függ. A konvergencia elemzése emiatt szétcsatolható az egyes csoportokra. A jelölések egyszerűsítése érdekében a "g" indexet elhagyjuk, tehát a vizsgálandó vektoregyenlet:

$$\vec{\Phi} = \mathbf{A}\vec{\Phi} + \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{A}\vec{\Phi} + \mathbf{s}, \tag{54.10}$$

ahol az s vektor adott. Tételezzük fel, hogy már  $\ell$  belső iterációs lépést tettünk. Ekkor az ( $\ell$ +1)-edik iteráltat a

$$\bar{\Phi}_{\ell+1} = \mathbf{A}\bar{\Phi}_{\ell} + \mathbf{s} \tag{54.11}$$

képlet adja meg. (54.10)-et kivonjuk (54.11)-ből:

$$\vec{\Delta}_{\ell+1} = \vec{\Phi}_{\ell+1} - \vec{\Phi} = \mathbf{A} \left( \vec{\Phi}_{\ell} - \vec{\Phi} \right) = \mathbf{A} \vec{\Delta}_{\ell} = \mathbf{A}^2 \vec{\Delta}_{\ell-1} = \dots = \mathbf{A}^\ell \vec{\Delta}_1.$$

Nyilvánvaló, hogy ez a hibavektor akkor tart 0-hoz (vagyis az iteráció akkor konvergál), ha az **A** mátrixnak minden sajátértéke 1-nél kisebb. Az alábbiakban ezt látjuk be.

Írjuk fel az **A** mátrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátérték-egyenletet:

# $\mathbf{A}\vec{\Phi} = \lambda\vec{\Phi}$ .

Ha a sajátvektor legnagyobb abszolút értékű komponensének indexe *i*, akkor az erre vonatkozó egyenlet alapján írhatjuk:

$$\lambda = \sum_{j} A_{ij} \frac{\Phi_{j}}{\Phi_{i}},$$
 vagyis  $|\lambda| = \sum_{j} A_{ij} \left| \frac{\Phi_{j}}{\Phi_{i}} \right| \le \sum_{j} A_{ij}.$ 

Itt kihasználtuk, hogy **A** minden eleme nemnegatív. Az (54.2b) egyenlőtlenségből következik, hogy a jobb oldal határozottan kisebb 1-nél. Ezzel beláttuk, hogy

$$|\lambda| < 1$$
,

ami a mondottak szerint a belső iteráció konvergenciáját jelenti. Természetesen más kérdés, milyen gyors a konvergencia. Az iteráció gyorsítására számos módszert dolgoztak ki, de ezek részletezésébe nem mehetünk bele. A gyakorlatban nem nehéz biztosítani, hogy a konvergencia 10–15 lépésben bekövetkezzen. A helyzetet könnyíti a következő két körülmény:

- A külső iteráció kezdeti lépéseiben nem érdemes a belső iterációt különösen nagy pontosságig erőltetni.
- A külső iteráció utolsó lépéseiben viszont az előző külső iterációban kapott fluxus egyre javuló kezdőértéket jelent a belső iteráció számára.

Mindkét körülmény csökkenti a belső iterációk számát.

# Külső iteráció

A külső iteráció konvergenciája külön vizsgálandó kérdés. Az alábbi elemzésben feltételezzük, hogy a külső iteráció mindegyik lépésében olyan pontosságig folytatjuk a belső iterációt, hogy annak hibája elhanyagolható. A külső iteráció konvergenciáját a hasadási forrás konvergenciája jelenti. Ennek vizsgálatához tovább egyszerűsítjük a jelöléseket. Legyen **F** a  $\vec{\Phi}_g$  vektorokból álló hipervektor:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\Phi}_G \end{bmatrix}.$$

Hasonlóan képezzük az **S** vektort, amelynek a komponenseit ugyanabban a sorrendben alkotják az (54.6) egyenletben szereplő  $S_{0g}$  hasadási források, mint a  $\vec{\Phi}$  vektor komponenseit a  $\Phi_{0g}$  fluxusok. (54.3) alapján definiálhatunk egy **P** produkciós operátort (mátrixot), amely a fluxusvektorból előállítja a forrásvektort:

$$\mathbf{S} = \mathbf{PF}$$
.

Az (54.5) sajátérték-egyenlet ennek segítségével a következő vektoros alakba írható:

$$\frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{PF} - \mathbf{DF} = 0, \qquad (54.12)$$

ahol **D** az (54.5) egyenlet többi tagját előállító, ún. *destrukciós operátor*.

A konvergencia vizsgálatához bevezetünk egy egyszerű vektornormát, amely a vektor komponenseinek összegét jelenti:<sup>106</sup>

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_i x_i \; .$$

Az osztópontok azonosítására eddig használt "0" index helyett a továbbiakban a j indexet fogjuk használni, ahol j végigfut az összes belső osztópontokon. Segítségével a **DF** vektor normája:

$$\|\mathbf{DF}\| = -\sum_{g=1}^{G} \sum_{j} \left( a_{jg} \boldsymbol{\Phi}_{jg}^{\mathrm{B}} + b_{jg} \boldsymbol{\Phi}_{jg}^{\mathrm{J}} + c_{jg} \boldsymbol{\Phi}_{jg}^{\mathrm{F}} + d_{jg} \boldsymbol{\Phi}_{jg}^{\mathrm{L}} - e_{jg} \boldsymbol{\Phi}_{jg} + L_{jg} \right) \cong$$
$$\cong -\sum_{g=1}^{G} \oint_{\mathrm{reaktor}} D_{g} \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{f} + \sum_{g=1}^{G} \int_{\mathrm{reaktor}} \boldsymbol{\Sigma}_{g}^{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} \,.$$
(54.13)

Ennek belátásához az (53.4) vagy (53.5) képletekből kell kiindulni (az X–Y, illetve az R–Z geometria esetében), amelyekből következik, hogy

$$\begin{split} &\sum_{g=1}^{G} \left( -e_{jg} \boldsymbol{\varPhi}_{jg} + L_{jg} \right) \cong \\ &\cong \sum_{g=1}^{G} \left[ -\left( a_{jg} + b_{jg} + c_{jg} + d_{jg} \right) \boldsymbol{\varPhi}_{jg} - \int_{j} \left( \boldsymbol{\varSigma}_{g}^{a} + \boldsymbol{\varSigma}_{g}^{R} \right) \boldsymbol{\varPhi}_{g} d\mathbf{r} + \int_{j} \sum_{g' \neq g} \boldsymbol{\varSigma}_{g' \to g} \boldsymbol{\varPhi}_{g'} d\mathbf{r} \right] = \\ &= \sum_{g=1}^{G} \left[ -\left( a_{jg} + b_{jg} + c_{jg} + d_{jg} \right) \boldsymbol{\varPhi}_{jg} - \int_{j} \left( \boldsymbol{\varSigma}_{g}^{a} + \boldsymbol{\varSigma}_{g}^{R} \right) \boldsymbol{\varPhi}_{g} d\mathbf{r} \right] + \sum_{g'=1}^{G} \int_{j} \boldsymbol{\varSigma}_{g'}^{R} \boldsymbol{\varPhi}_{g'} d\mathbf{r} = \\ &= \sum_{g=1}^{G} \left[ -\left( a_{jg} + b_{jg} + c_{jg} + d_{jg} \right) \boldsymbol{\varPhi}_{jg} - \int_{j} \boldsymbol{\varSigma}_{g}^{a} \boldsymbol{\varPhi}_{g} d\mathbf{r} \right], \end{split}$$

ahol az integráljel alá írt "*j*" betű azt jelenti, hogy az integrál a *j*-edik osztópont környezetében lévő kvadránsokra terjed ki. Itt kihasználtuk, hogy

$$\sum_{g=1}^{G} \Sigma_{g' \to g} = \Sigma_{g'}^{\mathbf{R}},$$

<sup>&</sup>lt;sup>106</sup> Ez a vektornorma szokatlan. Nem is több, mint a komponensek összegének egyszerű jelölése. Egyetlen tulajdonságát fogjuk kihasználni: két vektor összegének a normája egyenlő a két vektor normájának az összegével. Levezetéseinkben nem fogjuk használni a normákra általában érvényes egyenlőtlenségeket, így egy esetleg negatív norma sem okoz majd problémát.

ami miatt az integrálokból csak az abszorpciót megadó tagok maradnak meg. Ezzel az (54.2) egyenletek alapján kapjuk:

$$\|\mathbf{DF}\| \cong \sum_{g=1}^{G} \sum_{j} \left\{ -\oint_{j} D_{g} \operatorname{grad} \boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{f} + \int_{j} \boldsymbol{\Sigma}_{g}^{\mathrm{a}}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r}) \mathrm{d}\mathbf{r} \right\}.$$

A térbeli integrálok összege (54.13) jobb oldalának második tagját adja. A felületi integrálok összegében a szomszédos osztópontok környezetének érintkező felületein egymást kölcsönösen kiejtik – kivéve a legkülső osztópontok környezetének a reaktor külső felülete felé eső felületeit. Az így fennmaradó integrálok összege a reaktor külső felületére vonatkozó felületi integrált adja ki, ahogy (54.13)-ban állítjuk. Szigorúan véve az integrál nem a tényleges külső felületre vonatkozik, hanem ahhoz képest fél rácsosztásnyival beljebb van, de ezt a körülményt figyelmen kívül hagyhatjuk.

Amikor szabályozórudak is vannak, a *j*-re való összegzésből ki kell hagyni a rudak belső pontjait. (53.10) és (53.11) alapján be lehet látni, hogy legutóbbi képletünk ebben az esetben is igaz. A norma tehát a reaktor *egészében* abszorbeálódó és a reaktor külső felületén kifolyó neutronok együttes száma, hiszen  $-D_g$  grad  $\Phi_g$  a  $\mathbf{J}_g$ áramvektor, amely a külső felületen kifelé irányul. Ezért a felületi integrál pozitív mennyiség. A **PF** vektor normájáról hasonlóan be lehet látni, hogy

$$\|\mathbf{PF}\| = \sum_{g=1}^{G} \sum_{j} S_{jg} \cong \sum_{g=1}^{G} \int_{\text{reaktor}} \nu \Sigma_{g}^{f}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Phi}_{g}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \qquad (54.14)$$

ami a reaktorban a hasadások által termelt neutronok teljes száma. (54.12)-ből következik, hogy a két norma hányadosa  $k_{\rm eff}$ .

Vizsgáljuk meg ezekkel a jelölésekkel a külső iteráció konvergenciáját. Az  $\ell$ edik lépésben a forrás az  $\ell$ -edik lépésben számolt fluxushoz tartozik. (54.6) szerint tehát az iteráció a következőt jelenti:

$$\mathbf{F}_{\ell+1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell} \,. \tag{54.15a}$$

*Feltéve* egyelőre, hogy az iteráció konvergens, nézzük meg, mihez tart ez  $\ell \rightarrow \infty$  esetén. Nyilvánvaló, hogy nagy  $\ell$ -re az  $\mathbf{F}_{\ell}$  iterált egyre javuló pontossággal lesz arányos az (54.12) egyenlet megoldásával:

$$\mathbf{F}_{\ell} \approx \alpha \mathbf{F}$$
,

ahol  $\alpha$  alkalmas arányossági tényező.<sup>107</sup> Ha ezt az iterációs képletbe helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

 $<sup>^{107}</sup>$  Homogén egyenletről lévén szó, az  ${\bf F}$  megoldás még megoldás marad, ha egy szabadon választott együtthatóval megszorozzuk.

$$\mathbf{F}_{\ell+1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell} \cong \alpha \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F} = \alpha k_{\mathrm{eff}} \mathbf{F} \cong k_{\mathrm{eff}} \mathbf{F}_{\ell},$$

vagyis az iteráltak – a konvergencia közelében – minden lépésben  $k_{eff}$ -vel szorzódnak. Ez azt jelenti, hogy szuperkritikus esetben az iteráció divergens, szubkritikus esetben pedig 0-hoz tartó fluxust eredményez. Ennek kivédésére a hasadási forrást minden lépésben normálni kell. Legegyszerűbb azt megkövetelni, hogy a norma 1 legyen:

$$\left\|\mathbf{PF}_{\ell}\right\| = 1. \tag{54.15b}$$

A gyakorlatban ez a következőt jelenti. Először (54.15a) szerint kiszámítjuk az

$$\mathbf{F}_{\ell+1}' = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell}$$

vektort, majd ezt normáljuk:

$$\mathbf{F}_{\ell+1} = \frac{\mathbf{F}_{\ell+1}'}{\left\|\mathbf{PF}_{\ell+1}'\right\|}.$$

A fentiekben beláttuk, hogy a konvergencia közelében  $\mathbf{F}'_{\ell+1} \cong k_{\text{eff}} \mathbf{F}_{\ell}$ . Ennek a normája (54.15b) szerint:

$$\|\mathbf{PF}'_{\ell+1}\| \cong k_{\mathrm{eff}} \|\mathbf{PF}_{\ell}\| = k_{\mathrm{eff}},$$

ami a külső iteráció minden lépésében felhasználható keff javítására.

A következőkben bebizonyítjuk, amit eddig csak feltételeztünk: az iteráció valóban konvergens. Az (54.12) sajátérték-probléma sajátértékei legyenek  $k_1, k_2, ..., a$ megfelelő sajátfüggvények pedig rendre  $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, ...,$  vagyis  $\mathbf{P}\vec{\phi}_n = k_n \mathbf{D}\vec{\phi}_n$ . Az n = 1indexhez tartozik a keresett megoldás, tehát  $k_1 = k_{\text{eff}}$ , és  $\vec{\phi}_1$  arányos a keresett **F**-fel. A  $k_n$  sajátértékek monoton csökkenő sorozatot alkotnak. A sajátfüggvényeket is (54.15b) szerint normáljuk:  $\|\mathbf{P}\vec{\phi}_n\| = 1$ . Az  $\ell$ -edik iteráltat ezek szerint haladó sorba fejtjük:<sup>108</sup>

$$\mathbf{F}_{\ell} = \sum_{n} w_{n\ell} \vec{\mathbf{\phi}}_{n}$$

Az (54.15b) normálási feltétel azt jelenti, hogy

$$\sum_{n} w_{n\ell} = 1$$

A sorfejtést az (54.15a) iterációs képletbe helyettesítjük:

$$\mathbf{F}_{\ell+1}' = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell} = \sum_{n} w_{n\ell} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \vec{\mathbf{\varphi}}_{n} = \sum_{n} w_{n\ell} k_{n} \vec{\mathbf{\varphi}}_{n} = \sum_{n} w_{n,\ell+1}' \vec{\mathbf{\varphi}}_{n} .$$

<sup>&</sup>lt;sup>108</sup> Mivel az operátorok mátrixok, és a sajátfüggvények vektorok, ezt mindig meg lehet tenni.

A sajátfüggvények ortogonalitása miatt tehát fennáll:

$$w_{n,\ell+1}' = w_{n\ell}k_n.$$

A vesszőt azért tettük ki, mert ezt még normálni kell ahhoz, hogy az  $(\ell+1)$ -edik iteráltat megkapjuk:

$$w_{n,\ell+1} = \frac{w'_{n,\ell+1}}{\sum_{n'} w'_{n',\ell+1}} = \frac{w_{n\ell}k_n}{\sum_{n'} w_{n'\ell}k_{n'}}.$$

Ha ezt a rekurziós képletet visszafelé követjük az első iterációs lépésig, – némi számolás után – a következő képletet kapjuk:<sup>109</sup>

$$w_{n,\ell+1} = \frac{w_{n1}k_n^{\ell}}{\sum_{n'} w_{n'1}k_{n'}^{\ell}} = \frac{w_{n1}(k_n/k_1)^{\ell}}{\sum_{n'} w_{n'1}(k_{n'}/k_1)^{\ell}}.$$
(54.16)

Belátjuk, hogy

$$\lim_{\ell\to\infty}w_{n,\ell+1}=\delta_{n1}.$$

Valóban, (54.16) jobb oldalán  $k_n/k_1 < 1$ , ha n > 1, így az n = 1 együtthatót kivéve mindegyik együttható 0-hoz tart. n = 1 esetén viszont a határérték 1. Ezzel megmutattuk, hogy az (54.15b) szerinti normálással a külső iteráció konvergens, és határértéke:

$$\lim_{\ell\to\infty}\mathbf{F}_\ell=\vec{\phi}_1$$

#### 5.5. A reaktor számítási sémája

Az eddigiek szerint jó néhány számítógépi programra van szükségünk, ha egy reaktorra vonatkozóan valamit ki akarunk számítani. Egy ilyen számítás sémáját az 55.1. ábrán mutatjuk be.

Az első feladatunk, hogy a magfizikusok által mért hatáskeresztmetszet- és egyéb adatokból kiindulva sokcsoport állandókat állítsunk elő. Erre általánosan elfogadott program az NJOY [16]. Közülük az epitermikus energiákhoz tartozó csoportállandókat a lassulási egyenlet, a termikus csoporthoz tartozókat pedig a termalizációs egyenlet megoldásához használjuk fel. Az előbbi feladat megoldására szolgál a "LASSULÁS"-sal jelölt lassulási program, az utóbbiéra pedig a "TERMALIZÁCIÓ"val jelölt program szolgál. A lassulási egyenlethez szükségünk van még rezonanciaintegrálokra is, amelyeket külön programokkal számítunk ki. (Ezeket jelöltük az 55.1.

<sup>&</sup>lt;sup>109</sup> Ha jobban tetszik, közvetlen behelyettesítéssel meg lehet győződni arról, hogy az (54.16) szerinti együtthatók kielégítik a rekurziós képletet.

*ábrá*n a "REZONANCIA" gyűjtőnévvel.) A számítási sémának ebből a lépéséből sokcsoport spektrumokat kapunk, amelyek segítségével tudjuk a sokcsoport állandókat kevéscsoport állandókká kondenzálni. Abban az esetben, amikor a vizsgált reaktorban szabályozórudak is vannak, szükség van a rudakat jellemző logaritmikus deriváltak értékére, amelynek számításához valamilyen, a transzportegyenlet megoldására alkalmas programot kell igénybe vennünk. Erre utal a "SZABÁLYOZÓRÚD" blokk.



55.1. ábra. A reaktor számítási sémája állandó összetétel esetében

A számítási séma utolsó lépése a kevéscsoport diffúzióegyenlet megoldása a véges differenciák módszerével. A gyakorlatban erre is meglehetősen sok program áll rendelkezésre. (Valamelyiküket jelöltük az 55.1. *ábrán* "DIFFÚZIÓ" gyűjtőnévvel.) A számítás eredményeképpen kapjuk a kevéscsoport fluxusokat a diffúziós programban alkalmazott rácsosztás minden pontjában, továbbá innen kapjuk meg a vizsgált reaktorhoz tartozó sokszorozási tényező értékét is. Ezeket az eredményeket aztán több célra is felhasználhatjuk, például:

- ha a reaktor különböző méreteinél kiszámítjuk k<sub>eff</sub> értékét, akkor ebből megkaphatjuk a kritikus méreteket;
- a fluxuseloszlások felhasználhatók a reaktor működésének optimalizálására, esetleg a reaktor működésének analízisére.

A számítási séma természetesen tovább folytatható és bonyolítható, ha figyelembe vesszük, hogy a reaktor működése következtében a hasadóanyag fogy és hasadási termékek halmozódnak fel. Ezekkel a kérdésekkel a 8. fejezetben foglalkozunk.

# 6. Termikus reaktorok

Az előző fejezetekben tárgyaltakat ebben a fejezetben a reaktorok egy fontos fajtájára, a termikus reaktorokra alkalmazzuk. Ezen belül is elsősorban a vízzel moderált és hűtött reaktorokkal foglalkozunk. Közéjük tartozik a paksi atomerőmű is, amelynek a típusát VVER–nek<sup>1</sup> nevezzük. Az ott felhasznált fűtőelemek legfontosabb adatai:

- Töltet: anyaga UO<sub>2</sub> kerámia; az urán dúsítása 1,6%, 2,4% és 3,6%; UO<sub>2</sub> külső átmérője: 7,6 mm.
- A fűtőelemrúd aktív részének a hossza 2,5 m.
- Burkolat: anyaga 1% nióbiumot tartalmazó cirkónium; külső átmérője 9,1 mm; falvastagsága 0,65 mm. A burkolat és az UO<sub>2</sub> között vékony légrés van.
- Fűtőelemrács: hatszöges; a rácsállandó 12,2 mm.
- Fűtőelemköteg: 127 rácspozíciót tartalmaz, amelyek közül a középsőt mérések céljaira szolgáló cső foglalja el. Kívülről cirkóniumfal veszi körül.
- A moderátor bórsavat (H<sub>3</sub>BO<sub>3</sub>) tartalmaz; koncentrációja 0 és 8 g/liter között változhat.
- Szabályozás: a fűtőelemkötegekkel azonos külső méretű, bóracélt tartalmazó kötegek segítségével történik. Amikor a szabályozókötegeket kihúzzák, helyüket fűtőelemköteg foglalja el.

Egy ilyen fűtőelemrács elemi celláját mutatja a 45.2. *ábra*. A köteg kereszt-, illetve hosszmetszete a 6.1. és 6.2. *ábrá*n látható.

A VVER-típusú reaktorokra jellemző a hatszöges rács és a cirkónium fűtőelem-burkolat. Reaktorfizikai szempontból két alapváltozata van: a VVER-440 és a VVER-1000. A fentiekben szereplő adatok az előbbihez tartoznak. A VVER-1000 ettől néhány tekintetben eltér:

- A dúsítás lehet 4,4% is.
- Rácsállandó: 12,7 mm.
- Fűtőelemköteg: 331 pozíciót tartalmaz; nincs kötegfal.
- Szabályozás: egyes kötegekben bizonyos rácspozíciókban abszorbensrudak mozognak.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> VVER orosz eredetű rövidítés: vízzel moderált, vízzel hűtött energetikai reaktor.

• A fűtőelemrúd aktív részének a hossza 3,5 m.

A felsoroltakon kívül még fontos eltérés, hogy a VVER–1000 típus teljesítménysűrűsége nagyobb: 110 kW/liter – szemben a VVER–440 típusra jellemző 80 kW/liter-rel.

A VVER-típustól különböző nyomottvizes reaktorokra nagy vonásaikban hasonló adatok jellemzők. Lényeges különbség, hogy mind a fűtőelemrács, mind a fűtőelemkötegek geometriája négyszöges. A fűtőelemek burkolata szintén cirkónium, de nem nióbiummal, hanem egyéb elemekkel van ötvözve. A szabályozás a fűtőelemkötegek között mozgatott, kereszt alakú szabályozókötegekkel történik.

A különböző reaktortípusok reaktorfizikai leírására különböző közelítések alkalmazhatók. A felsoroltak közül a legegyszerűbben tárgyalható a VVER–440 típus, mert itt a legtöbb probléma tárgyalására megengedhető a fűtőelemköteg elhomogenizálása. A VVER–1000 típus esetében azonban már lényegesen finomabb elméletre van szükség. Ennek két fő oka van: egyrészt az eltérő szabályozás miatt a fűtőelemköteg általában nem homogenizálható el, másrészt a nagyobb teljesítménysűrűség miatt sokkal jobb számítási pontosságra van szükség. Hasonló megállapításokat tehetünk a többi reaktortípusra vonatkozóan. Végül még egy szempontot kell megemlítenünk. A korszerű atomerőművekben egységnyi urántömegből több energiát vesznek ki, mint a korábbiakban. Emiatt bennük több hasadási termék és plutónium halmozódik fel (lásd a 8. fejezetben), ami a termikus spektrum tárgyalását megnehezíti.



6.1. ábra. A paksi atomerőmű fűtőelemkötegének keresztmetszete. A körök egy-egy fűtőelemrudat jelölnek. A középső kör helyén mérőberendezések vannak. A köteg külső fala cirkónium. A rudakat távtartók tartják a helyükön.



6.2. ábra. A paksi atomerőmű fűtőelemkötegének rajza. Látható a központi mérőcső körül elhelyezkedő 126 fűtőelemrúd. A köteg alsó része a reaktorban való rögzítésre szolgál. A hűtővíz alul lép be a kötegbe, és felfelé áramlik, mi-közben felmelegszik. Belépéskor a víz hőmérséklete 267 °C, felmelegedése kötegről kötegre körül változik, de átlaga 30 °C körüli érték.

A kevéscsoport modellek közül a legegyszerűbb a *kétcsoport elmélet*, amelyben  $\Phi_1(\mathbf{r})$  az *epitermikus*,  $\Phi_2(\mathbf{r})$  a *termikus* neutronok fluxusa. Egydimenziós rendszerekben ez még analitikusan kezelhető. Ugyanakkor a két csoport az egycsoport közelítéshez képest számos, minőségileg új elemet hoz be az elméletbe, és ezzel a kétcsoport elmélet már a gyakorlatban is hasznosítható eredményeket ad. Ezért az alábbiakban néhány példát látunk ennek az elméletnek az alkalmazására. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében végig szabályos fűtőelemrácsokkal fogunk foglalkozni.

# 6.1. Csupasz termikus reaktorok

Tekintsünk egy csupasz reaktort, amelyet két oldalról az x = a és x = -a síkok határolnak. Erre vonatkozóan kétcsoport közelítésben (53.2)-nek az alábbi egyenlet-rendszer felel meg:

$$D_{1} \frac{\mathrm{d}^{2} \boldsymbol{\Phi}_{1}(x)}{\mathrm{d}x^{2}} - \boldsymbol{\Sigma}_{1} \boldsymbol{\Phi}_{1}(x) + \frac{1}{k_{\mathrm{eff}}} \Big[ \nu \boldsymbol{\Sigma}_{1}^{\mathrm{f}} \boldsymbol{\Phi}_{1}(x) + \nu \boldsymbol{\Sigma}_{2}^{\mathrm{f}} \boldsymbol{\Phi}_{2}(x) \Big] = 0, \qquad (61.1a)$$

$$D_2 \frac{d^2 \Phi_2(x)}{dx^2} - \Sigma_2^a \Phi_1(x) + \Sigma_1^R \Phi_1(x) = 0, \qquad (61.1b)$$

ahol bevezettük a

$$\varSigma_1 = \varSigma_1^a + \varSigma_1^R$$

jelölést. Ennek az egyenletrendszernek a megoldását mindkét csoportban olyan függvények alakjában kereshetjük, amelyek mindegyike kielégíti a (32.4) Helmholtzegyenletet. Szimmetriaokokból tehát a megoldást a

$$\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\phi}_1 \cos B\boldsymbol{x} \tag{61.2a}$$

$$\Phi_2(x) = \phi_2 \cos Bx \tag{61.2b}$$

függvények alakjában kereshetjük. Ha ezeket (61.1)-be helyettesítjük, akkor a  $\phi_1$  és  $\phi_2$  együtthatókra vonatkozóan homogén algebrai egyenletrendszert kapunk. Ebből

$$\phi_2 = \frac{\Sigma_1^{\rm R}}{D_2 B^2 + \Sigma_2^{\rm a}} \phi_1 \tag{61.3}$$

szerint kapjuk az epitermikus és a termikus fluxus közötti arányt, továbbá az egyenletrendszernek csak akkor van nemtriviális megoldása, ha

$$k_{\rm eff} = \frac{\nu \Sigma_1^{\rm f} + \frac{\nu \Sigma_2^{\rm f} \Sigma_1^{\rm R}}{D_2 B^2 + \Sigma_2^{\rm a}}}{D_1 B^2 + \Sigma_1}.$$
(61.4)

A végtelen reaktor sokszorozási tényezője ebből  $B^2 = 0$  helyettesítéssel adódik:

$$k_{\infty} = \frac{\nu \Sigma_1^{\rm f} + \frac{\nu \Sigma_2^{\rm f} \Sigma_1^{\rm R}}{\Sigma_2^{\rm a}}}{\Sigma_1}.$$
(61.5)

A továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – az epitermikus hasadásoktól eltekintünk, vagyis feltesszük, hogy

$$\nu \Sigma_1^{\rm f} = 0 \,,$$

amivel

$$k_{\infty} = \frac{\nu \Sigma_2^{\rm f} \Sigma_1^{\rm R}}{\Sigma_1 \Sigma_2^{\rm a}}.$$
(61.6)

Ennek a képletnek az értelmezésére még visszatérünk.

A  $B_m^2$  anyagi görbületi paraméter  $B^2$ -nek az az értéke, amely mellett  $k_{eff} = 1$ . (61.4) szerint tehát  $B_m^2$  kielégíti a

$$\left(D_1B^2 + \Sigma_1\right)\left(D_2B^2 + \Sigma_2^a\right) = \nu\Sigma_2^{\rm f}\Sigma_1^{\rm R}$$

kritikussági egyenletet. Osszuk ezt  $\Sigma_1$ -gyel és  $\Sigma_2^a$ -val, majd vezessük be a

$$\tau = \frac{D_1}{\Sigma_1} \tag{61.7}$$

és

$$L^2 = \frac{D_2}{\Sigma_2^a} \tag{61.8}$$

jelöléseket. Az utóbbi megfelel az egycsoport elméletben szereplő diffúziós területnek [vö. (33.3)],  $\tau$  pedig nem más, mint a (46.4) alatt bevezetett Fermi-kor kétcsoport elméletbeli megfelelője. Ezzel a kritikussági egyenlet átmegy az

$$\left(1+\tau B^2\right)\left(1+L^2B^2\right)=k_{\infty}$$

228

alakba, amelynek egy pozitív és egy negatív gyöke van:

$$B_{1}^{2} = \frac{-(L^{2} + \tau) + \sqrt{(L^{2} + \tau)^{2} + 4L^{2}\tau(k_{\infty} - 1)}}{2L^{2}\tau} \approx \frac{k_{\infty} - 1}{L^{2} + \tau} = \frac{k_{\infty} - 1}{M^{2}}$$
(61.9)

és

$$B_2^2 = \frac{-(L^2 + \tau) - \sqrt{(L^2 + \tau)^2 + 4L^2 \tau (k_\infty - 1)}}{2L^2 \tau} \approx -(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau}) - B_1^2.$$
(61.10)

Közülük  $B_1^2$  adja meg az anyagi görbületi paramétert, mert az ehhez tartozó cos  $B_1x$  felel meg az egycsoport elméletben szereplő alapmódusnak.  $M^2$  a 4.7. alfejezetben bevezetett migrációs terület. A  $B_2^2$  sajátérték megjelenése már a kétcsoport elmélet következménye. Ha nem két-, hanem *N*-csoport elméletben határoztuk volna meg ugyanezt, akkor *N* sajátértéket kaptunk volna, amelyek közül az egyik pozitív (ti. az anyagi görbületi paraméter), a többi pedig –  $B_1^2$ -hez képest – nagy abszolút értékű negatív szám.

A (61.9) és (61.10) gyököket (61.2)-be helyettesítve, (61.3) figyelembevételével kapjuk az általános megoldást:

$$\Phi_1(x) = \cos B_1 x + \operatorname{Ach} B_2 x, \qquad (61.11a)$$

$$\Phi_2(x) = \frac{\Sigma_1^{\rm R}}{D_2 B_1^2 + \Sigma_2^{\rm a}} \cos B_1 x + A \frac{\Sigma_1^{\rm R}}{-D_2 B_2^2 + \Sigma_2^{\rm a}} \operatorname{ch} B_2 x, \qquad (61.11b)$$

ahol *A* a határfeltételek által meghatározott állandó. Valójában az egész megoldás egy tetszőleges állandó szorzó erejéig határozatlan. Ezt itt úgy választottuk meg, hogy az epitermikus fluxusban a cos  $B_1x$  tag együtthatója 1 legyen. A diffúziós határfeltételek szerint mind az epitermikus, mind a termikus fluxusnak el kell tűnnie a reaktor külső határfelületén, tehát

$$\boldsymbol{\Phi}_1(a) = \boldsymbol{\Phi}_2(a) = 0 \, .$$

Az (61.11) alatti függvényekre ez csak úgy teljesülhet egyszerre, hogy A = 0, és

$$a = \frac{\pi}{2B_{\rm m}},\tag{61.12}$$

mint az egycsoport elméletben. Ez az eredmény összhangban van a reaktorelmélet alaptételével: *a térbeli eloszlás alakja mindkét csoportban ugyanaz* (vagyis  $\cos B_1 x$ ).

(61.6)-ot átírhatjuk az (1.6) alatti négyfaktor-formulának megfelelő alakra. Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt az urán  $\Sigma_2^{aU}$  termikus abszorpciós hatáskeresztmetszetével, majd definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\eta = \frac{\nu \Sigma_2^{\rm f}}{\Sigma_2^{\rm aU}}$$

megadja, hogy egy, az uránban abszorbeálódó neutronra hány hasadási neutron esik;

$$f = \frac{\Sigma_2^{\mathrm{aU}}}{\Sigma_2^{\mathrm{a}}}$$

a termikus hasznosítási tényező [vö. (45.15)], és

$$p = \frac{\Sigma_1^{\rm R}}{\Sigma_1}$$

a rezonanciakikerülési valószínűség kétcsoport elméletbeli megfelelői. Abban az esetben, amikor epitermikus hasadás is van,  $k_{\infty}$  a (61.6)-ban szereplőnél nagyobb [vö. (61.5)], és ezt az  $\varepsilon$  gyorshasadási tényezővel vehetjük figyelembe:

$$\mathcal{E} = 1 + \frac{\Sigma_2^{a}}{\Sigma_1^{R}} \cdot \frac{\nu \Sigma_1^{f}}{\nu \Sigma_2^{f}} \,.$$

Eredetileg  $\varepsilon$  csak az <sup>238</sup>U hasadási küszöbe feletti energiájú neutronok által kiváltott hasadásokat jelentette, és az <sup>235</sup>U epitermikus hasadásait elhanyagolták. Itt az utóbbiak is megjelennek. Végeredményben megkaptuk a nevezetes "négyfaktor-formulát":

$$k_{\infty} = \eta f p \varepsilon$$
.

# 6.2. A reflektor

Az előző fejezetben homogén reaktort vizsgáltunk. A valóságban a reaktorok bonyolultabbak, mert a csoportállandók általában függnek a helytől. Ennek legegyszerűbb példáját mutatja be a 62.1. ábra: a reaktor hasadóanyagot tartalmazó része, az ún. *aktív zóna* ugyan homogén, de azt egy hasadóanyagot nem tartalmazó közeg, az ún. *reflektor* veszi körül. Az aktív zónából kiszökő neutronok egy részét a reflektor viszszaszórja, és ezáltal csökkenti a kiszökési valószínűséget. Az ilyen szerkezetű reaktorokra tehát azt várjuk, hogy kritikus tömegük kisebb lesz, mint az azonos összetételű *csupasz* reaktoré. Az alábbiakban megvizsgáljuk, valóban fennáll-e ez, és ha igen, milyen mértékű a csökkenés.



62.1. ábra. Reflektált reaktor sík geometriában

### Reflektált reaktor egycsoport elmélete

Az egyszerűség kedvéért a reaktor legyen az y- és z-irányban végtelen kiterjedésű. Az aktív zónát határolják az x = -a és x = a síkok. A reflektor legyen mindkét oldalon az x-irányban is végtelen. A sztatikus sajátérték-egyenletet az aktív zóna pontjaira a

$$D_{\rm z} \frac{{\rm d}^2 \Phi}{{\rm d}x^2} + \left(\frac{\nu \Sigma_{\rm f}}{k_{\rm eff}} - \Sigma_{\rm a}^{\rm z}\right) \Phi = 0, \qquad (62.1a)$$

a reflektor pontjaira pedig a

$$D_{\rm r}\frac{{\rm d}^2\Phi}{{\rm d}x^2} - \Sigma_{\rm a}^{\rm r}\Phi = 0$$
(62.1b)

alakban írhatjuk fel, ahol a "z" index az aktív zónára, az "r" index pedig a reflektorra utal. Vezessük be a

$$B^{2} = \frac{\nu \Sigma_{\rm f} / k_{\rm eff} - \Sigma_{\rm a}}{D_{\rm z}} = \frac{k_{\infty} / k_{\rm eff} - 1}{L_{\rm z}^{2}}$$
(62.2)

jelölést. Mivel a reaktor az x = 0 síkra szimmetrikus, (62.1a) megoldása ezzel a jelöléssel:

$$\Phi(x) = \cos Bx , \qquad -a \le x \le a .$$

A (62.1b) egyenlet  $x \rightarrow \pm \infty$  esetén eltűnő megoldása:

$$\Phi(x) = A e^{-|x|/L_r}, \qquad |x| \ge a,$$

ahol az A együtthatót úgy kell megválasztani, hogy a fluxus folytonos legyen az |x| = a pontokban, tehát teljesülnie kell a

$$\cos Ba = Ae^{-a/L_{\rm r}} \tag{62.3}$$

feltételnek. Ezekben a kifejezésekben  $L_r$  a reflektor diffúziós hossza [vö. (33.3)]. Tudjuk azonban, hogy az |x| = a pontokban nemcsak a fluxusnak, hanem az áramnak is folytonosnak kell lennie, vagyis teljesülnie kell a

$$D_{\rm z}B\sin Ba = D_{\rm r}\frac{A}{L_{\rm r}}e^{-a/L_{\rm r}}$$
(62.4)

feltételnek is.

Nyilvánvaló, hogy a (62.3) és (62.4) feltételek egyszerre csak az a és B változók speciális értékei mellett teljesülhetnek. A két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy a sztatikus sajátérték-egyenletnek csak akkor van nemtriviális megoldása, ha érvényes a

$$B \text{ tg } Ba = \frac{D_{\text{r}}}{L_{\text{r}}D_{\text{z}}}$$
(62.5)

összefüggés. A 62.1. *ábrán* bemutatott rendszerre vonatkozóan ez a kritikusság feltétele, amelyet kétféleképpen lehet alkalmazni:

- egyrészt megkereshetjük az aktív zóna kritikus méretét,
- másrészt adott méret mellett kiszámíthatjuk a  $k_{\rm eff}$  sokszorozási tényezőt.

Nézzük először a kritikus méretet. Ebben az esetben (62.2)-ben  $k_{eff} = 1$ -et helyettesítünk, és így  $B^2$  éppen az aktív zóna  $B_m^2$  anyagi görbületi paraméterével lesz egyenlő. Ezt (62.5)-be helyettesítve a kritikus méret egyszerűen kiszámítható:

$$a_{\rm kr}^{(1)} = \frac{1}{B_{\rm m}} \arctan \frac{D_{\rm r}}{B_{\rm m} L_{\rm r} D_{\rm z}}.$$
 (62.6)

Érdemes ezt azzal a kritikus mérettel összevetni, amelynél az adott összetételű aktív zóna csupaszon, vagyis reflektor nélkül kritikus [vö. (61.12)]:

$$a_{\rm kr}^{(2)} = \frac{\pi}{2B_{\rm m}}.$$

A kétféle kritikus méret különbsége:

$$d_{\rm refl} = a_{\rm kr}^{(2)} - a_{\rm kr}^{(1)}, \tag{62.7}$$

amely azt adja meg, hogy mennyivel csökkenti a reflektor a kritikus méretet. A különbség biztosan pozitív, hiszen (62.6)-ban az arctg értéke mindig kisebb  $\pi/2$ -nél. (62.6)-ból a csupasz rendszerre vonatkozó összefüggést úgy kapjuk vissza, hogy a reflektor abszorpciós hatáskeresztmetszetével tartunk végtelenhez, vagyis  $L_r \rightarrow 0$ . A (62.7)-ben definiált különbséget *reflektormegtakarítás*nak nevezzük.

Nézzünk egy számpéldát. Az egycsoport állandóknak a 62.1. táblázatban szereplő értékei tipikusnak tekinthetők. Ezeket az értékeket a fenti képletekbe helyettesítve az alábbiakat kapjuk:

$$k_{\infty} = 1,2;$$
  $B_{\rm m}^2 = 0,01 \text{ cm}^{-2};$   $B_{\rm m} = 0,1 \text{ cm}^{-1};$   
 $a_{\rm kr}^{(1)} = 6,59 \text{ cm};$   $a_{\rm kr}^{(2)} = 15,71 \text{ cm};$   $d_{\rm refl} = 9,12 \text{ cm}.$ 

Látjuk, hogy a reflektor révén a kritikus méret több, mint a felével csökkent. Ugyanakkor vegyük észre, hogy az aktív zóna belsejében a fluxus görbülete ugyanolyan, mintha a reaktor csupasz lenne. A reflektor csak a kritikus méretet, de nem a fluxusnak az aktív zóna belsejében kialakuló görbületét befolyásolja. Ez a fontos megállapítás általában is, nemcsak az egycsoport diffúzióelméletben igaz.

|            | D (cm) | $\Sigma_{\rm a}~({\rm cm}^{-1})$ | $\nu \Sigma_{\rm f}  ({\rm cm}^{-1})$ | $L(\mathrm{cm})$ |
|------------|--------|----------------------------------|---------------------------------------|------------------|
| aktív zóna | 2,0    | 0,1                              | 0,12                                  | 4,47             |
| reflektor  | 1,2    | 0,02                             | 0                                     | 7,75             |

62.1. táblázat. Egycsoport állandók (példa)

Az A együttható értékére (62.3) alapján A = 1,850-et kapunk. A fluxus teljes menetét a 62.2. *ábrá*n mutatjuk be. A szaggatott görbe a cos Bx görbe folytatása a reflektorban. Ahol ez nullává válik, ott lenne a csupasz reaktor kritikus. Ennek a határnak és a reaktor tényleges határának a távolsága a reflektormegtakarítás. Nem szabad azonban ezt a fogalmat a diffúziós határfeltételben szereplő extrapolációs távolsággal összetéveszteni [vö. (31.11)]. Az utóbbi esetében a transzportegyenlet megoldását extrapoláljuk a vákuum felé, a reflektormegtakarításnál viszont az aktív zónában a  $B_m$ nek megfelelő görbületű fluxusgörbét folytatjuk az aktív zóna határán túl, mintha a reaktor csupasz volna.



62.2. ábra. Fluxuseloszlás reflektált reaktorban

Mint fentebb említettük, a (62.5) kritikussági feltételt alkalmazhatjuk úgy is, hogy az aktív zóna méretét (*a*) adottnak vesszük, és keressük a sokszorozási tényező ehhez tartozó értékét. Ebben az esetben (62.5)-öt egy *B*-re vonatkozó egyenletnek te-

kintjük, amelynek a megoldását (62.2)-be helyettesítve kiszámíthatjuk  $k_{eff}$  értékét. *B*-re nézve (62.5) transzcendens egyenlet, így csak numerikus eljárásokat alkalmazhatunk. A *62.3. ábrá*n az aktív zóna méretének a függvényében ábrázoltuk  $k_{eff}$  értékeit. Ezen meg kell keresni azt a méretet, amelynél  $k_{eff} = 1$ .



62.3. ábra. A kritikus méret keresése reflektált reaktorban

Ha nem az itt tárgyalt nagyon egyszerű síkgeometriával, hanem bonyolultabb geometriákkal van dolgunk, hasonló módon okoskodhatunk, megfontolásaink elvi menete változatlanul végig követhető. Ajánlatos, hogy az Olvasó gömb- és végtelen hosszú hengeralakú reaktorra végezze el ezeket a számításokat mind általánosságban, mind a csoportállandók fenti numerikus értékei mellett.

#### Reflektált reaktor kétcsoport elmélete

A fenti gondolatmenetet megismételjük kétcsoport elméletben, hogy lássuk, milyen új minőségi elemeket hoz be a termikus és gyors csoport szétválasztása. Tekintsük ismét a 62.1. *ábrán* bemutatott rendszert. Tárgyalásához az előző alfejezetben írtakhoz hasonlóan az aktív zónára vonatkozó (61.1) egyenleteket ki kell egészíteni a reflektorra vonatkozó analóg egyenletekkel:

$$D_{1}^{r} \frac{d^{2} \boldsymbol{\Phi}_{1}(x)}{dx^{2}} - \boldsymbol{\Sigma}_{1}^{r} \boldsymbol{\Phi}_{1}(x) = 0, \qquad (62.12a)$$

$$D_2^{\rm r} \frac{{\rm d}^2 \Phi_2(x)}{{\rm d}x^2} - \Sigma_2^{\rm ar} \Phi_2(x) + \Sigma_1^{\rm Rr} \Phi_1(x) = 0.$$
 (62.12b)

Az "r" és "z" felső indexeket a reflektorra, illetve az aktív zónára vonatkozó csoportállandók megkülönböztetésére alkalmazzuk. (61.7) és (61.8) mintájára vezessük be a

$$\tau_{\rm r} = \frac{D_{\rm l}^{\rm r}}{\Sigma_{\rm l}^{\rm r}}$$

és

$$L_{\rm r}^2 = \frac{D_2^{\rm r}}{\Sigma_2^{\rm ar}}$$

jelöléseket. Segítségükkel a (62.12) egyenletrendszernek az  $x \rightarrow \infty$  mellett véges megoldásait az epitermikus csoportban a

$$\Phi_{1}^{r}(x) = C_{1} e^{-x/\sqrt{\tau_{r}}}$$
(62.13)

alakban írhatjuk fel, amiből (61.3) figyelembevételével a termikus fluxus általános alakja:

$$\Phi_{2}^{r}(x) = C_{2} e^{-x/L_{r}} + \frac{\Sigma_{1}^{Rr}}{-D_{2}^{r}/\tau_{r} + \Sigma_{2}^{ar}} C_{1} e^{-x/\sqrt{\tau_{r}}}.$$
(62.14)

Az itt szereplő  $C_1$  és  $C_2$  együtthatókat, valamint az aktív zónára kapott (61.11) megoldásban szereplő A együtthatót úgy kell megválasztani, hogy az x = a határfelületen mindkét fluxus és mindkét áram folytonos legyen:

(1) az epitermikus fluxus folytonossága:

$$\cos B_1 a + A \operatorname{ch} B_2 a = C_1 \mathrm{e}^{-a/\sqrt{\tau_{\mathrm{r}}}}, \qquad (62.15)$$

(2) a termikus fluxus folytonossága:

$$\frac{\Sigma_1^{\text{Rz}}}{D_2^{\text{z}}B_1^2 + \Sigma_2^{\text{az}}} \cos B_1 a + \frac{\Sigma_1^{\text{Rz}}}{-D_2^{\text{z}}B_2^2 + \Sigma_2^{\text{az}}} A \operatorname{ch} B_2 a =$$
  
=  $C_2 \mathrm{e}^{-a/L_{\text{r}}} + \frac{\Sigma_1^{\text{Rr}}}{-D_2^{\text{r}}/\tau_{\text{r}} + \Sigma_2^{\text{ar}}} C_1 \mathrm{e}^{-a/\sqrt{\tau_{\text{r}}}},$  (62.16)

(3) az epitermikus áram folytonossága:

$$-D_1^z B_1 \sin B_1 a + D_1^z B_2 A \sin B_2 a = -\frac{D_1^r}{\sqrt{\tau_r}} C_1 e^{-a/\sqrt{\tau_r}}, \qquad (62.17)$$

(4) a termikus áram folytonossága:

$$-\frac{\Sigma_{1}^{\text{Rz}}}{D_{2}^{\text{z}}B_{1}^{2} + \Sigma_{2}^{\text{az}}} D_{2}^{\text{z}}B_{1} \sin B_{1}a + \frac{\Sigma_{1}^{\text{Rz}}}{-D_{2}^{\text{z}}B_{2}^{2} + \Sigma_{2}^{\text{az}}} D_{2}^{\text{z}}B_{2}A \sin B_{2}a =$$
  
$$= -\frac{D_{2}^{\text{r}}C_{2}}{L_{\text{r}}} e^{-a/L_{\text{r}}} - \frac{\Sigma_{1}^{\text{Rr}}}{-D_{2}^{\text{r}}/\tau_{\text{r}} + \Sigma_{2}^{\text{ar}}} \frac{D_{2}^{\text{r}}C_{1}}{\sqrt{\tau_{\text{r}}}} e^{-a/\sqrt{\tau_{\text{r}}}} .$$
(62.18)

Ez négy feltétel három együtthatóra, vagyis ezek az egyenletek egyben a kritikussági feltételt is tartalmazzák (vö. előző alfejezet). Ez azt jelenti, hogy a (62.15) – (62.18) egyenletrendszernek csak *a* meghatározott értéke mellett van megoldása. Az egyenletek transzcendensek, tehát a kritikus méretet csak numerikus úton kaphatjuk meg. Ha a számítást elvégezzük, és a kapott együtthatókat a (61.11), (62.13) és (62.14) képletekbe helyettesítjük, akkor a *62.4. ábrán* látható fluxusokat kapjuk. Az epitermikus fluxus a reaktor közepétől kifelé haladva – koszinusz függvény szerint – monoton csökken, és ez a csökkenés – exponenciálisan – a reflektorban is folytatódik. Ezzel szemben a termikus fluxus csökkenése az aktív zóna szélén megszűnik, és a reflektorban egy maximum alakul ki. Ez a termikus reaktorokban jellegzetesen fellépő "*reflektorpúp*" jelensége, amely az egycsoport elméletben nem lép fel, tehát ez a kétcsoport elmélet következménye.



62.4. *ábra*. A "reflektorpúp" jelensége reflektált reaktorban (a = 11 cm). A jobb ábrázolhatóság kedvéért a termikus fluxust megszoroztuk 4-gyel.

A jelenség fizikai magyarázata a következő. Az aktív zónából kiszökő neutronok a reflektorban termalizálódnak, majd mint termikus neutronok diffundálnak tovább. Általában a diffúziós terület lényegesen kisebb, mint a Fermi-kor. Emiatt a termalizált neutronok diffúziójuk során sokkal kisebb távolságokra jutnak el, mint az epitermikus neutronok, és így az aktív zóna szélétől körülbelül  $\sqrt{\tau_r}$  távolságban feldúsulnak.

Ha a (62.15) – (62.18) egyenleteket közelebbről megnézzük, akkor megtaláljuk ennek matematikai okát is. A (62.13)-ban felírt fluxusnak pozitívnak kell lennie, tehát a  $C_1$  együttható pozitív, vagyis (62.17) jobb oldala negatív (annak megfelelően, hogy az epitermikus fluxus a reflektorban csökken). (62.16) bal oldalának második tagjában a nevező negatív, hiszen (61.10) és (61.8) szerint:

$$-D_2^z B_2^2 + \Sigma_2^{\text{az}} = -\frac{D_2^z}{\tau_z} - D_2^z B_1^2 < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy (61.11)-ben, illetve (62.15)-ben és (62.17)-ben a ch  $B_2a$ -t tartalmazó tag együtthatója az epitermikus és termikus fluxusnál különböző előjelű. Amelyik csoportban az együttható pozitív, abban a csoportban ez az aktív zóna határának a közelében gyorsan növekvő tagot jelent. Ha viszont az együttható negatív, akkor a fluxusban ez a tag is ugyanúgy csökkenő, mint a cos  $B_1x$  alapmódus. Nos, az aktív zóna határán az epitermikus fluxusok (62.15) és (62.17) szerint általában úgy illeszthetők össze, hogy A < 0. Arról van szó, hogy a reflektormegtakarítás miatt az aktív zóna határán a cos  $B_1x$  tag még nem csökken elég gyorsan, így a reflektorban csökkenő epitermikus fluxushoz csak úgy tudjuk illeszteni, ha (62.15) bal oldalán a második tag is csökkenő, vagyis A negatív. Eszerint tehát a ch $B_2x$  tag együtthatója a termikus csoportban pozitív, ami azt jelenti, hogy az aktív zóna határának a közelében a termikus fluxusnak a reflektorban is növekednie kell. Mivel azonban a fluxus az aktív zónától távol nullához tart, a reflektorban valahol egy maximumnak kell kialakulnia. Érdemes megjegyezni, hogy ezek az előjelviszonyok grafit reflektor esetében többnyire nem így alakulnak, ezért ott a reflektorpúp általában elmarad.

Befejezésül megemlítjük, hogy (61.11)-ben az Ach  $B_2x$  tag x-szel lényegesen gyorsabban változik, mint a cos  $B_1x$  függvény. Mivel az A együttható általában nagyon kicsi, ez a tag az aktív zóna közepén a cos  $B_1x$  mellett elhanyagolható, és csak az aktív zóna határának a közelében válik számottevővé. Ez a megállapítás mindkét csoportra érvényes. Korábban (vö. például 3.2. alfejezet) ezért neveztük a cos  $B_1x$  tagot *aszimptotikus fluxus*nak, hiszen a határfelületektől elegendően távol minden energián megadja a fluxus térbeli eloszlását. Ennek az általános megállapításnak itt most a kétcsoport elméletbeli megnyilvánulását láttuk. Az aszimptotikus fluxust a reflektorba extrapolálva kapjuk a reflektormegtakarítást, amely a két csoportra azonos.

## 6.3. Optimális fűtőelemrácsok

Adott fűtőelemtípusból különböző fűtőelemrácsokat lehet kialakítani aszerint, hogy milyen a rács geometriája (például hatszöges vagy négyszöges), és mekkora a rácsállandó. A rács neutronsokszorozó tulajdonságai első közelítésben a moderátor és az urán térfogatarányától függnek ( $V_m/V_U$ ). Van olyan arány, amelynél ezek a legkedvezőbbek, vagyis a kritikus tömeg a legkisebb.<sup>2</sup> Az ilyen rácsokat *optimális rács*oknak nevezzük. A rácsok vizsgálatában fel fogjuk használni a négyfaktor-formulát, de a vizsgált mennyiségeket a GRACE [17] és THERMOS [12] programok segítségével számítjuk ki. Bár a négyfaktor-formulát nem használjuk konkrét számításokban, egyes tényezőinek elemzése segít a tendenciák megértésében.

A négyfaktor-formula tényezői közül az  $\eta$  tényező gyengén függ a fűtőelemrácstól, viszont függ a fűtőelem típusától. Például 3,6% dúsítású VVER-típusú fűtőelemek esetében  $\eta \approx 1,85$ . A másik három tényezőnek a  $V_{\rm m}/V_{\rm U}$  aránytól való függése viszont jelentős. Homogén közegre vonatkozóan a 4.4. alfejezetben kiszámítottuk a rezonanciakikerülési valószínűséget [vö. (44.6)]:

$$p = \exp\left\{-\frac{N_{\rm U}^{28}I}{\xi\Sigma_{\rm m}}\right\},\,$$

ahol  $N_{\rm U}^{28}$  az <sup>238</sup>U magsűrűsége, *I* a rezonanciaintegrál,  $\Sigma_{\rm m}$  a potenciálszórási hatáskeresztmetszet. Fűtőelemrácsban ezt módosítani kell:

$$p = \exp\left\{-\frac{V_{\rm U}N_{\rm U}^{28}I}{V_{\rm m}N_{\rm m}(\xi\sigma)_{\rm m}}\right\},\tag{63.1}$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Mivel a kritikus tömeg függ a reaktor külső alakjától (vö. 3.5. alfejezet), a minimum a hasonló alakú reaktorokra (gömbökre, kockákra, hasonló hengerekre stb.) értendő.

ahol  $N_{\rm m}$  a moderátor magsűrűsége,  $\sigma$  a moderátor szórási határkeresztmetszete. Vegyük észre, hogy mindkét képlet szerint *p* az <sup>238</sup>U- és a moderátoratomok teljes számának az arányától függ. Mint a 4.4. alfejezetben láttuk, az *I* rezonanciaintegrál más homogén közegre, mint fűtőelemrácsra, de az utóbbiban elsősorban csak a fűtőelemrúd méretétől függ, így első közelítésben független a moderátor térfogatától.

Ha a (45.15) képletet alkalmazzuk, akkor egyszerű átalakításokkal kapjuk:

$$f = \frac{N_{\rm U}\sigma_{25}^{\rm a}V_{\rm U}\overline{\Phi}_{\rm U}}{N_{\rm U}\sigma_{25}^{\rm a}V_{\rm U}\overline{\Phi}_{\rm U} + N_{\rm m}\sigma_{\rm m}^{\rm a}V_{\rm m}\overline{\Phi}_{\rm m}},\tag{63.2}$$

ahol a felülhúzás a termikus neutronfluxusnak az indexben szereplő térfogatra vett átlagát jelenti, továbbá  $\sigma_{25}^{a}$  az <sup>235</sup>U abszorpciós hatáskeresztmetszetének átlaga a termikus csoportban;  $\sigma_{m}^{a}$  jelentése analóg a moderátorra. Mind az átlagfluxusok, mind az átlagos hatáskeresztmetszetek függnek a  $V_{m}/V_{U}$  aránytól, de ezt a függést elhanyagoljuk.

A (63.1) és (63.2) képletek szerint tehát p és f a következő módon függnek az  $r = V_{\rm m}/V_{\rm U}$  aránytól:

$$f = \frac{1}{1 + c_1 r}$$
 és  $p = e^{-c_2/r}$ .

Az  $\varepsilon$  gyorshasítási tényezőre hasonlóan egyszerű elméleti függvényt levezetni nehéz, bár az irodalomban adnak meg ilyen képleteket. (Lásd például [18].) A fentiekben idézett programokkal elvégzett számítások szerint  $\varepsilon$  a következő egyszerű (empirikus) képlettel írható le: <sup>3</sup>

$$\mathcal{E} = 1 + \frac{c_3}{r}.$$

Az alábbi számítások a 3,6% dúsítású VVER-típusú fűtőelemrudakból képzett rácsokra vonatkoznak. Az ilyen rácsokra vonatkozó kísérletekben 4 rácsállandót valósítottak meg [19]: 11,0 mm, 12,7 mm, 12,7 mm és 19,05 mm. Ha ehhez hozzávesszük a paksi atomerőműben használt 12,2 mm rácsállandót, az *r* tényező értéke 1 és 6 között változik. A *63.1. táblázat*ban a tiszta moderátorra végzett számítások eredményeit adjuk meg. A *63.2. táblázat*ban ugyanezt találjuk  $C_{\rm B} = 4$  g/liter koncentrációra<sup>4</sup>. Ha ezekre illesztjük empirikus képleteinket, akkor a paraméterekre a következő értékeket kapjuk:

$$c_1 = 0,0435, c_2 = 0,848$$
 és  $c_3 = 0,499;$   $C_B = 0;$   
 $c_1 = 0,0960, c_2 = 0,840$  és  $c_3 = 0,530;$   $C_B = 4$  g/liter.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Ez nem  $\varepsilon$  eredeti definíciója, ugyanis tartalmazza az <sup>235</sup>U-izotóp epitermikus hasadásait is.

 $<sup>^{4}</sup>$  C<sub>B</sub> megadja, hogy 1 liter vízben hány gramm bórsavat (H<sub>3</sub>BO<sub>3</sub>) oldottak fel.

Az f termikus hasznosítási tényezőre vonatkozóan meg kell jegyezni, hogy a (63.2)ben szereplő átlagos hatáskeresztmetszetek függnek r-től. Emiatt a képletet kissé korrigálni kell. Ezekkel a paraméterekkel a következő (korrigált) képletet használhatjuk:

$$k_{\infty} = \eta \left( 1 + \frac{c_3}{r} \right) \frac{\mathrm{e}^{-c_2/r}}{0,99 + c_1 r}.$$
 (63.3)

Interpolációs célokra ez a képlet bizonyára megfelel.

63.1. táblázat.  $k_{\infty}$  és a négyfaktor-formula tényezői 3,6% dúsítású, VVER-típusú fűtőelemrácsokra ( $C_{\rm B} = 0$ )

| Rácsállandó | $V_{ m m}\!/V_{ m U}$ | $k_{\infty}$ | f      | р      | ε      |
|-------------|-----------------------|--------------|--------|--------|--------|
| 11,0 mm     | 1,3099                | 1,24498      | 0,9545 | 0,5163 | 1,4114 |
| 12,2 mm     | 1,8414                | 1,37615      | 0,9329 | 0,6335 | 1,2572 |
| 12,7 mm     | 2,0791                | 1,39818      | 0,9233 | 0,6689 | 1,2216 |
| 15,0 mm     | 3,2955                | 1,43135      | 0,8754 | 0,7769 | 1,1342 |
| 19,05 mm    | 5,9279                | 1,36046      | 0,7833 | 0,8667 | 1,0794 |

63.2. táblázat.  $k_{\infty}$  és a négyfaktor-formula tényezői 3,6% dúsítású, VVER-típusú fűtőelemrácsokra ( $C_{\rm B} = 4$  g/liter)

| Rácsállandó | $V_{ m m}/V_{ m U}$ | $k_{\infty}$ | f      | р      | ε      |
|-------------|---------------------|--------------|--------|--------|--------|
| 11,0 mm     | 1,3099              | 1,24014      | 0,9087 | 0,5178 | 1,4274 |
| 12,2 mm     | 1,8414              | 1,29371      | 0,8641 | 0,6357 | 1,2728 |
| 12,7 mm     | 2,0791              | 1,29941      | 0,8451 | 0,6713 | 1,2372 |
| 15,0 mm     | 3,2955              | 1,25803      | 0,7567 | 0,7798 | 1,1500 |
| 19,05 mm    | 5,9279              | 1,08300      | 0,6121 | 0,8694 | 1,0979 |

A 63.1. ábrákon a közvetlenül számított és a (63.3) képlettel számolt mennyiségeket mutatjuk be ( $C_{\rm B} = 0$ , illetve  $C_{\rm B} = 4$  g/liter). Az ábrákról világosan látszik, hogy  $k_{\infty}$  maximumot vesz fel. Megkerestük az interpolációs képlet maximumát:

 $r_{\text{max}} = 3,3107; \quad k_{\infty} = 1,43263;$  rácsállandó: 15,03 mm;  $C_{\text{B}} = 0;$ 

$$r_{\text{max}} = 2,2950; \ k_{\infty} = 1,29775;$$
 rácsállandó: 13,14 mm;  $C_{\text{B}} = 4$  g/liter.

Ebből látszik, hogy a ZR-6-ban vizsgált 15,0 mm-es rács tiszta moderátor és 3,6% dúsítás esetében maximális  $k_{\infty}$ -nel rendelkezik. A maximumhoz tartozó rácsállandó a szűkebb rácsok irányában eltolódik, amikor a moderátorban bórsavat oldunk fel. Ezt mutatjuk be a 63.2. ábrán is, amelyen összehasonlítjuk a 63.1. ábrákon látható görbéket. Ezeknek az effektusoknak hatásuk van a vízzel moderált reaktorok biztonságára.



63.1. ábra.  $k_{\infty}$  (az ábrán: k) az  $r = V_{\rm m}/V_{\rm U}$  arány függvényében: a)  $C_{\rm B} = 0$  g/liter és b)  $C_{\rm B} = 4$  g/liter. Pontok: közvetlenül számított értékek; vonal: (63.3) képlet.



63.2. ábra.  $k_{\infty}$  (az ábrán: k) maximumának eltolódása a moderátorban oldott bórsav hatására

Ha – adott fűtőelemtípus és moderátor-összetétel mellett – változtatjuk a fűtőelemrács állandóját,  $k_{\infty}$  értéke egy bizonyos rácsállandónál maximumot vesz fel. Az ehhez tartozó rácsot nevezzük *optimális rács*nak. Ha a rácsállandó ennél kisebb, *alulmoderált*, ha nagyobb, *túlmoderált* rácsról beszélünk. A biztonság szempontjából fontos tulajdonságaikra a 6.4. alfejezetben térünk vissza. A 63.1. és 63.2. táblázatokban feltűnő, hogy az  $\varepsilon$  gyorshasítási tényező milyen nagy az alulmoderált rácsokban. Ennek az az oka, hogy ezekben a rácsokban nagyon kemény a spektrum.

Az alul- vagy túlmoderáltság mértékének a megadására legegyszerűbb a fenti  $r = V_{\rm m}/V_{\rm U}$  arányt használni. Vannak azonban egyéb mennyiségek is, amelyeket egyes szerzők előnyben részesítenek. Közülük a legközönségesebb a "H/U viszony": az ak-

tív zónában levő hidrogén- és <sup>235</sup>U-magok számának az aránya.<sup>5</sup> Értékét megkapjuk, ha a  $V_m/V_U$  arányt megszorozzuk a magsűrűségek arányával. A fenti rácsokra számított értékeit a 63.3. táblázatban adjuk meg. Ennek a mutatónak nagy előnye, hogy a fűtőelem dúsításának a hatását is magába foglalja. A tapasztalat szerint a különböző dúsítású rácsok esetében is a 63.1. ábrákhoz hasonló görbéket lehet készíteni, és ezeken a különböző dúsítású rácsok nem válnak el egymástól.

| Rácsállandó | $V_{ m m}/V_{ m U}$ | H/U | $q_{ m th}$       | $q_{ m th}$                       |
|-------------|---------------------|-----|-------------------|-----------------------------------|
|             |                     |     | $(C_{\rm B} = 0)$ | $(C_{\rm B} = 4 \text{ g/liter})$ |
| 11,0 mm     | 1,3099              | 106 | 0,4076            | 0,4223                            |
| 12,2 mm     | 1,8414              | 149 | 0,4696            | 0,4986                            |
| 12,7 mm     | 2,0791              | 168 | 0,4888            | 0,5244                            |
| 15,0 mm     | 3,2955              | 266 | 0,5571            | 0,6286                            |
| 19,05 mm    | 5,9279              | 479 | 0,6550            | 0,8071                            |

63.3. táblázat. Az alul-, illetve túlmoderáltságot jellemző mennyiségek 3,6% dúsítású, VVER-típusú fűtőelemrácsokra

Francia szerzők munkáiban gyakran találkozunk a következő mennyiséggel. Amikor különböző dúsítású, hőmérsékletű, bórsavtartalmú stb. rácsokra számolt mennyiségeket vetünk össze egymással, található egy paraméter, amely a rács moderáltságát egymagában jellemzi: ez a lassulási sűrűség értéke a termikus csoport felső határánál ( $q_{th}$ ). E mennyiségnek csak akkor van értelme, amikor az analízist többcsoport aszimptotikus számításra alapozzuk. Ebben az esetben  $q_{th}$  több effektust egyesít magába:

- Arányos a rezonanciakikerülési valószínűséggel.
- Arányos az epitermikus bennmaradási valószínűséggel.
- Az utóbbit mindig az anyagi görbületi paraméternél (tehát a kritikus állapotra vonatkozóan) számítjuk ki, így q<sub>th</sub> függ a fűtőelemrács globális tulajdonságaitól is.

A 63.3. ábrán látható, hogy  $q_{th}$  közel arányos  $V_m/V_U$ -val. Természetesen ez sem "csodaszer". A 63.4. ábrán ennek a mennyiségnek a függvényében ábrázoljuk  $k_{\infty}$ -t. Az ábrán világosan elkülönül egymástól a két bórkoncentrációhoz tartozó görbe. Különböző rácsok tulajdonságainak az elemzésekor mégis hasznos ennek a paraméternek a függvényében *is* felrajzolni a vizsgált mennyiségeket.



63.3. ábra. A termikus csoport határán megjelenő lassulási sűrűség  $(q_{th})$ 

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Magyarországon is ez terjedt el.



63.4. *ábra*.  $k_{\infty}$  (az ábrán: k) ábrázolása  $q_{\text{th}}$  függvényében

# 6.4. Reaktivitástényezők

A reaktor biztonsága szempontjából döntő fontosságú, hogyan változik meg a reaktivitás, amikor a reaktorban valami megváltozik. A legfontosabb a teljesítmény változása által előidézett reaktivitásváltozás. Mindezeket a hatásokat *reaktivitástényezők*kel jellemezzük. Ebben a fejezetben a hőmérsékletre, a teljesítményre, a buborékokra, a bórkoncentrációra és a hűtőközeg nyomására vonatkozó tényezőkkel foglalkozunk. Az *x* mennyiségre vonatkozó reaktivitástényezőt az

$$\alpha_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{64.1}$$

képlettel definiáljuk. Mielőtt az egyes tényezők tárgyalásába kezdenénk, megemlítjük, hogy a felsoroltak nem függetlenek egymástól. Az egyik legfontosabb, a teljesítménytényező például kifejezhető a többivel.

A reaktivitástényezők általában a legnehezebben számítható mennyiségek. Mindegyikük sok mennyiség megváltozásán keresztül érvényesül, amelyeknek számítással való meghatározása gyakran bonyolult feladat, továbbá számos anyagi jellemző részletes ismeretét igényli. Ezenkívül problémát jelent, hogy az x mennyiség infinitezimális megváltozásához tartozó reaktivitásváltozás szintén infinitezimális, amelynek numerikus meghatározása sok hibaforrást tartalmaz. Ezért gyakran kénytelenek vagyunk igénybe venni a perturbációelmélet képleteit (lásd 7.4. alfejezet). *Mindezekre* való tekintettel a reaktivitástényezőket feltétlenül meg kell mérni, hogy meghatározhassuk a számítások pontosságát.

A reaktivitástényezők tárgyalására legegyszerűbb a négyfaktor-formulából kiindulni és a következő mennyiséget elemezni:

$$\frac{\partial \ln k_{\rm eff}}{\partial x} = \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \ln \eta}{\partial x} + \frac{\partial \ln p}{\partial x} + \frac{\partial \ln f}{\partial x} + \frac{\partial \ln P_{\rm NL}^{\rm gyors}}{\partial x} + \frac{\partial \ln P_{\rm NL}^{\rm term.}}{\partial x}, \qquad (64.2)$$

ahol az utolsó két tag a gyors, illetve a termikus bennmaradási valószínűség deriváltját jelenti. Mi is ezt fogjuk tenni, de tudnunk kell, hogy ez legfeljebb kvalitatív következtetésekre ad lehetőséget. A reaktivitástényezők ugyanis erősen függnek a fluxus térbeli eloszlásától, aminek a hatása nincs benne a négyfaktor-formulában. Így például reflektált reaktorok reaktivitástényezőit csak nagy hibával adja meg ez a képlet.

#### A moderátor hőfoktényezője

A moderátor hőfoktényezője (64.1) értelmében a következő:

$$\alpha_{\rm m} = \frac{\partial \rho}{\partial T_{\rm m}},\tag{64.3}$$

ahol  $T_{\rm m}$  a moderátor hőmérséklete. Amikor a moderátor hőmérséklete megváltozik, két effektus révén változik meg a reaktivitás: megváltozik a moderátor sűrűsége és megváltozik a neutronok spektruma. E két effektussal külön-külön foglalkozunk. Tekintve, hogy a moderátor hőmérséklete a gyakorlatban nem változhat meg anélkül, hogy vele együtt az urán hőmérséklete is megváltozzon, az alábbiakban feltételezzük, hogy  $T_{\rm U} = T_{\rm m}$ . Az ilyen feltételekhez (64.3) szerint tartozó hőfoktényezőt *izotermikus hőfoktényező*nek nevezzük. Elvileg ugyan ki lehet számítani ettől eltérő hőfoktényezőt is, de csak az izotermikus tényező közvetlen kísérleti meghatározása lehetséges.

A víz sűrűsége a szobahőmérséklet környékén a hőmérséklettel alig változik, viszont a nyomottvizes atomerőművek üzemi viszonyai között (300 °C közelében) a változás már jelentős. Ennek illusztrálására mutatjuk be a 64.1. *ábrát*. Ha ezt a görbét numerikusan deriváljuk, a sűrűség relatív megváltozására  $-21\cdot10^{-5}$ /°C adódik 20 °C-nál, viszont 300 °C környékén közelítőleg  $-250\cdot10^{-5}$ /°C. Ez a nagyságrendi különbség eredményezi, hogy a moderátor sűrűségének a megváltozása domináns effektus az üzemi hőmérsékleten, viszont a többi effektussal azonos nagyságrendű alacsonyabb hőmérsékleteken.



64.1. ábra. A tiszta víz sűrűségének a hőmérséklettel való változása

Tekintsük a 63.1. *ábrá*t, amely  $k_{\infty}$ -t mutatja a moderátor és az urán térfogatarányának a függvényében. Végső soron ez ekvivalens a H/U viszony függvényében való ábrázolással. Amikor a moderátor sűrűsége változik, a reaktivitás megváltozása eszerint attól függ, alul- vagy túlmoderált-e a fűtőelemrács. Ha túlmoderált, a sűrűség csökkenésekor  $k_{\infty}$  nő, tehát a reaktivitás is nő. Ez azt jelenti, hogy a moderátor hőmérsékletének emelkedésekor a reaktivitás nőne, vagyis a hőfoktényezőnek a moderátor sűrűségéhez tartozó komponense pozitív lenne. Ha viszont a rács alulmoderált, az effektus fordított: a hőfoktényezőnek a moderátor sűrűségéhez tartozó komponense negatív. A 6.5. alfejezetben látni fogjuk, hogy egy reaktor csak negatív hőfoktényező mellett lehet biztonságos, így csak olyan fűtőelemrács valósítható meg, amely az üzemi hőmérsékleten alulmoderált.<sup>6</sup>

Nézzük ezután (64.2) egyes komponenseit külön-külön. Az alábbiakban végig ki fogjuk használni, hogy  $\partial N_{\rm m}/\partial T_{\rm m} < 0$ . Az  $\eta$  és  $\varepsilon$  tényezőknek a moderátoratomok  $N_{\rm m}$  sűrűségétől való függése gyenge. A termikus hasznosítási tényezőt (63.2) alapján deriválhatjuk:

$$\frac{\partial \ln f}{\partial T_{\rm m}} = -f \frac{\sigma_{\rm am} V_{\rm m} \overline{\Phi}_{\rm m}}{\sigma_{\rm a}^{25} V_{\rm U} N_{\rm U} \overline{\Phi}_{\rm U}} \frac{\partial N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}} = -f \left(\frac{1}{f} - 1\right) \frac{\partial \ln N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}} = -\left(1 - f\right) \frac{\partial \ln N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}} > 0$$

Az átlagfluxusok arányának a deriváltja kicsi (bár általában pozitív). A rezonanciakikerülési valószínűség közvetlenül függ a  $T_{\rm U}$  és  $T_{\rm m}$  hőmérsékletektől. Az előbbitől való függés elemzését későbbre halasztjuk, most csak az utóbbival foglalkozunk. (63.1) szerint:

$$\frac{\partial \ln p}{\partial T_{\rm m}} = \frac{V_{\rm U} N_{\rm U}^{28} I}{V_{\rm m} N_{\rm m}^2 (\xi \sigma)_{\rm m}} \frac{\partial N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}} = -\ln p \frac{\partial \ln N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}} < 0.$$

A gyors kiszökési valószínűség csak a  $\tau$  Fermi-koron keresztül függ  $T_{\rm m}$ -től. (46.10) szerint:

$$\frac{\partial \ln P_{\rm NL}^{\rm gyors}}{\partial T_{\rm m}} = -B^2 \frac{\partial \tau}{\partial T_{\rm m}} = 2B^2 \tau \frac{\partial \ln N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}} < 0.$$

Ezt az utóbbi lépést azért tehettük meg, mert (46.4)-ban D fordítva,  $\Sigma_t$  pedig egyenesen arányos  $N_m$ -mel, tehát (alkalmas C együtthatóval)

$$au = \frac{C}{N_{\rm m}^2},$$
 vagyis  $\frac{\partial \tau}{\partial N_{\rm m}} = -\frac{2C}{N_{\rm m}^3} = -\frac{2\tau}{N_{\rm m}}.$ 

Ha a termikus bennmaradási valószínűséget közelítőleg a

$$P_{\rm NL}^{\rm term.} = \frac{1}{1+B^2 L^2} \approx e^{-B^2 L^2}$$

alakban írjuk fel, akkor az előbbi analógiájára a

$$\frac{\partial \ln P_{\rm NL}^{\rm term.}}{\partial T_{\rm m}} = 2B^2 L^2 \frac{\partial \ln N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}} < 0$$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> A hőfoktényezőnek a sűrűséghez tartozó komponensét még ellensúlyozhatják egyéb effektusok. Az elfogadott biztonsági filozófia szerint azonban megköveteljük, hogy a hőfoktényező minden komponense külön-külön is negatív legyen.

eredményt kapjuk. Végeredményben tehát a hőfoktényező most vizsgált összetevőjét az

$$\alpha_{\rm m1} = \left[ -(1-f) - \ln p + 2B^2 M^2 \right] \frac{\partial \ln N_{\rm m}}{\partial T_{\rm m}}$$
(64.4)

képlet adja meg. Az erőművi reaktorok nagyok, tehát  $B^2$  kicsi, így  $B^2M^2 \approx 0.02$ . A másik két tagban jó közelítéssel felvehetjük, hogy f = 0.90 és p = 0.70. Láttuk, hogy a víz sűrűségének deriváltja üzemi hőmérsékleten  $-250 \cdot 10^{-5}$ /°C, amivel

$$\alpha_{m1} = [-0.10 + 0.36 + 0.02](-250 \cdot 10^{-5}) = -70 \cdot 10^{-5}/^{\circ} \text{C}$$

Ugyanez a szobahőmérséklet közelében közelítőleg  $-7 \cdot 10^{-5}$ /°C. A fentiek mutatják, hogy a legnagyobb járulékot a rezonanciakikerülési valószínűség deriváltja adja. Fontos körülmény továbbá, hogy a vízsűrűség megváltozásán keresztül megjelenő tagok előjele – a termikus hasznosítási tényezőt leszámítva – negatív. A fűtőelemrácsot tehát mindig lehet úgy méretezni, hogy az eredő *biztonsággal* negatív legyen.

Nézzük ezután a spektrális effektusokat. Közülük elsősorban a termikus spektrum változása érdemel említést. A *64.2.* és *64.3. ábrák*on bemutatjuk, hogyan változik a fűtőelemrúd középvonalában és a moderátornak a rúdtól legtávolabbi pontjában kialakuló spektrum a szobahőmérséklet (T = 293 K) és üzemi hőmérséklet (T = 553 K) között.<sup>7</sup> (A redukált sebesség egysége 2,2 km/s.) Látható, hogy a spektrum mind tiszta víz, mind bórsav esetében jelentősen keményedik az uránban és a moderátorban egyaránt.



a)

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Az ábrázolt mennyiségeket a THERMOS programmal [12] számoltuk.



64.2. *ábra*. Termikus spektrum az uránrúd közepén: a)  $C_{\rm B} = 0$  és b)  $C_{\rm B} = 4$  g/liter. (Rácsállandó: 12,7 mm; dúsítás: 3,6%;.)



64.3. *ábra*. Termikus spektrum a moderátor közepén: a)  $C_B = 0$  és b)  $C_B = 4$  g/liter. (Rácsállandó: 12,7 mm; dúsítás: 3,6%.)

Mind az urán, mind a moderátor abszorpciós hatáskeresztmetszetei a neutronenergiával csökkennek, tehát a termikus spektrum keményedése minden esetben a termikus csoportra vonatkozó csoportállandók csökkenéséhez vezet. Ha minden hatáskeresztmetszet 1/v lenne, (63.2) szerint ez nem befolyásolná a termikus hasznosítási tényező (f) értékét. Az utóbbi ugyanis csak a  $\sigma_{25}^a/\sigma_m^a$  hányadostól függ. Mivel az ilyen hatáskeresztmetszetek átlaga fordítva arányos az átlagos sebességgel, amelyet a két hőmérsékletre vonatkozóan v<sub>1</sub>-gyel, illetve v<sub>2</sub>-vel jelölünk, írhatjuk:

$$\frac{\sigma_{25}^{\rm a}(v_2)}{\sigma_{\rm m}^{\rm a}(v_2)} = \frac{\sigma_{25}^{\rm a}(v_1) \cdot v_1/v_2}{\sigma_{\rm m}^{\rm a}(v_1) \cdot v_1/v_2} = \frac{\sigma_{25}^{\rm a}(v_1)}{\sigma_{\rm m}^{\rm a}(v_1)}.$$

Így ez a hányados 1/v hatáskeresztmetszetek esetében nem változik. A tényleges hatáskeresztmetszetek esetében e hatáskeresztmetszetek aránya azonban megváltozik a spektrum keményedése miatt. A *63.4. táblázat*ban megadjuk a (63.2) képletben szereplő mennyiségeket két különböző hőmérsékleten. A számításokat úgy végeztük, hogy a hőmérsékleten kívül mindent változatlanul hagytunk, tehát a táblázatban látható mennyiségek tisztán a spektrumváltozás hatását mutatják.<sup>8</sup> A táblázatból látható, hogy a spektrumváltozásnak van hatása – mégpedig úgy, hogy *f* növekszik. Ennek a hőfoktényezőre gyakorolt hatása az alábbiak szerint becsülhető:

$$\frac{\partial \ln f}{\partial T_{\rm m}} \approx \frac{0.9245 - 0.9233}{0.9233 \cdot (553 - 293)} = 0.50 \cdot 10^{-5} / {\rm ^{\circ}C}, \qquad C_{\rm B} = 0;$$
  
$$\frac{\partial \ln f}{\partial T_{\rm m}} \approx \frac{0.8473 - 0.8450}{0.8450 \cdot (553 - 293)} = 1.05 \cdot 10^{-5} / {\rm ^{\circ}C}. \qquad C_{\rm B} = 4.0.$$

A spektrumváltozás hatásának a nagyságrendje tehát  $10^{-5/\circ}$ C, vagyis csak a szobahőmérséklet közelében mérhető össze a vízsűrűség megváltozásán keresztül érvényesülő effektusokéval. Emiatt a termikus spektrum keményedésének a hatását ugyan nem szabad elhanyagolni, de önmagában nem vonatkozik rá biztonsági kritérium.

| $C_{\rm B}$ (g/liter) | <i>T</i> (K) | $\sigma^{ m a}_{ m m}/\sigma^{ m a}_{ m 25}$ | $\overline{oldsymbol{\Phi}}_{\mathrm{m}}/\overline{oldsymbol{\Phi}}_{\mathrm{U}}$ | f      |
|-----------------------|--------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 0                     | 293          | $1,091 \cdot 10^{-3}$                        | 1,1610                                                                            | 0,9233 |
|                       | 553          | $1,083 \cdot 10^{-3}$                        | 1,1296                                                                            | 0,9245 |
| 4,0                   | 293          | $2,551 \cdot 10^{-3}$                        | 1,1585                                                                            | 0,8451 |
|                       | 553          | $2,532 \cdot 10^{-3}$                        | 1,1286                                                                            | 0,8474 |

63.3. táblázat. A termikus spektrum keményedésének a hatása

#### Doppler-együttható

Az urán hőmérsékletére vonatkozó hőfoktényezőt általában *Doppler-együttható*nak nevezzük, mert gyakorlatilag teljes egészében a 4.4. alfejezetben tárgyalt Doppler-effektus határozza meg. Amikor  $T_{\rm U}$  változik, megváltozik a fűtőelemrúd mérete, az UO<sub>2</sub> sűrűsége stb. Ezeknek a változásoknak a hatása azonban kicsi a rezonanciaintegrál növekedésének a hatásához képest. Eszerint tehát elég a (63.1)-ben felírt rezonanciakikerülési valószínűséget vizsgálni.

A fentiek mintájára kapjuk a megfelelő hőfoktényezőt:

$$\alpha_{\rm D} = \frac{\partial \ln p}{\partial T_{\rm U}} = -\frac{V_{\rm U} N_{\rm U}^{28}}{V_{\rm m} N_{\rm m} (\xi \sigma)_{\rm m}} \frac{\partial I}{\partial T_{\rm U}} = \ln p \frac{\partial \ln I}{\partial T_{\rm U}} < 0.$$
(64.5)

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> A hőmérséklet hatására megváltozó magsűrűségek is befolyásolják a spektrumot, de ez másodlagos effektus, amelyet elhanyagolunk.

A 4.4. alfejezetben láttuk, hogy *I* az urán hőmérsékletével monoton nő, tehát a jobb oldalon szereplő derivált pozitív. Mivel ln *p* negatív, *a Doppler-együttható mindig negatív*. A (44.12) és (44.13) képletek szerinti Hellstrand formulák megadják a rezonanciaintegrált a különböző méretű fűtőelemrudakra vonatkozóan. Hellstrand meghatározta ennek hőfokfüggését is. UO<sub>2</sub>-re:

$$I(T_{\rm U}) = I(T_0) \Big( 1 + \beta \Big( \sqrt{T_{\rm U}} - \sqrt{T_0} \Big) \Big)$$
(64.6)

ahol

$$\beta = \left(61 + 47 \frac{S}{M}\right) \cdot 10$$

-4

A VVER-típusú rudakra I = 18 barn, p = 0,67. Ennek deriváltja  $1,7 \cdot 10^{-3}$  barn/°C [vö. (64.6)], tehát (64.5) szerint

és

$$\alpha_{\rm D} = \frac{1.7 \cdot 10^{-3}}{18} \ln 0.67 = -3.8 \cdot 10^{-5} / {}^{\circ} \rm C.$$

 $T_0 = 300 \text{ K}$ 

A Doppler-együttható minden esetben negatív. Jóllehet értéke kicsi a moderátor hőfoktényezőjéhez képest,  $\alpha_D$  negatív voltának óriási biztonsági jelentősége van. Amint a reaktor teljesítménye nőni kezd, ezt késedelem nélkül követi az urán hőmérséklete. Így a Doppler-együttható azonnal csökkenteni kezdi a reaktivitást. A 6.5. alfejezetben ezzel a jelenséggel részletesen fogunk foglalkozni. Az azonnali hatásra való tekintettel a Doppler-együtthatót szokás *prompt hőfoktényező*nek is nevezni.



64.4. *ábra*. Mért hőfoktényező a hőmérséklet függvényében. Rácsállandó: 12,7 mm; dúsítás: 3,6%;  $C_{\rm B}$  = 4,0 g/liter.

Példaképpen a 64.4. *ábrá*n bemutatjuk egy VVER-típusú rácson végzett hőfoktényező-mérés eredményeit. A mérésben végig azonos volt az urán és a moderátor hőmérséklete, tehát ezek izotermikus hőfoktényezők. Látszik, hogy a hőfoktényező végig negatív, és a hőmérséklettel csökken. A mérés cent ()<sup>9</sup> egységekben szolgáltatta a reaktivitást. Ha ezt abszolút egységekbe akarjuk átszámolni, akkor az ábrázolt menynyiségeket 7,51·10<sup>-5</sup>-nel kell megszorozni. Eszerint tehát a hőfoktényező szobahőmér-

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> A reaktivitás egységére a 3.6. alfejezetben bevezettük a dollárt (\$), amelynek a századrésze a cent (`).

sékleten  $-7,5\cdot10^{-5}$ /°C körüli érték, ami 100 °C környékén már  $-23\cdot10^{-5}$ /°C-ra csökken. Ezek a kísérleti adatok alátámasztják a fent elméleti következtetéseket.

#### A bórsav hatása

A bórsav jelentősen befolyásolja a hőfoktényezőt. Ennek egyik aspektusát a fentiekben már elemeztük a termikus hasznosítási tényező révén. Láttuk, hogy *f* deriváltja pozitív:  $\partial f/\partial T_m > 0$ , és abszolút értéke annál nagyobb, minél nagyobb a bórkoncentráció. Vannak azonban további hatások is. Ahogy nő a bórsav koncentrációja, egyre nő a termikus csoport abszorpciós hatáskeresztmetszete, ami miatt a neutronspektrum az epitermikus neutronok javára tolódik el. Matematikailag ez azt jelenti, hogy megnő az  $\varepsilon$  tényező. Ezt látjuk a 63.1. és 63.2. táblázatok összehasonlításakor. Ez az oka annak, hogy a bórsav hatására  $k_{\infty}$  görbéje a kisebb  $V_m/V_U$  arányok felé tolódik el. Végeredményben a moderátor hőfoktényezője (a paksi atomerőműre vonatkozóan) a 64.5. ábrán látható módon függ a bórsav koncentrációjától: minél nagyobb  $C_{\rm B}$ , annál kisebb a hőfoktényező abszolút értéke.<sup>10</sup>

Annak, hogy a bórsav koncentrációja nem mehet 8 g/liter fölé – többek között – az is oka, hogy efölött  $\alpha_m$  már pozitív *lehet*. Ez a probléma a reaktor indítását közvetlenül követő időszakban merül fel, amikor  $C_B$  még nagy. Ahogy az üzem során az urán fogy,  $C_B$  folyamatosan csökken (vö. 8. fejezet), és emiatt a moderátor hőfoktényezője egyre negatívabbá válik.





# Üregegyüttható

Az *üregegyüttható* ( $\alpha_{ii}$ ) a moderátorban képződött buborékokra vonatkozó reaktivitástényező. (64.1) szerint ebben az esetben az *x* paraméter a buborékoknak a moderátor teljes térfogatához viszonyított aránya. Az üregegyüttható elsősorban a for-

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup> Ennek a jelenségnek a magyarázata nagyon nehézkes heurisztikusan, ugyanis több, nehezen átlátható effektus eredőjéről van szó. A megértést nehezíti, hogy a döntő effektusok az epitermikus spektrum alakjára vonatkoznak.

ralóvizes reaktorokban fontos mennyiség, mivel ott a moderátor jelentős részaránya a gőzbuborékok belsejében van. Nyomottvizes reaktorokban – elvileg – nincs forrás. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a fűtőelemek felületén nem keletkezhetnek gőzbuborékok, amelyek előbb-utóbb besodródnak a hűtőközeg belsejébe, és ott összeroppannak. Végeredményben tehát csökken a moderátor sűrűsége, ami csökkenti a rezonanciakikerülési valószínűséget, és növeli a termikus hasznosítási tényezőt. Amíg a fűtőelemrács alulmoderált, az előbbi effektus a domináns, vagyis az üregegyüttható negatív. Értéke közelítőleg  $-100 \cdot 10^{-5}/(\%$  üreg). Ha figyelembe vesszük, hogy a hűtőközeg térfogatának mintegy 0,5%-át foglalják el a buborékok, az üregeffektus teljes hatása egy nyomottvizes erőműben  $-50 \cdot 10^{-5}$ , ami üzemi hőmérsékleten megfelel annak a hatásnak, amelyet a moderátor hőmérsékletének 0,7 °C-kal való emelkedése okoz.

Az üregeffektus jelentős szerepet játszhat baleseti körülmények között, hiszen ekkor számolni kell a moderátor tömeges forrásával. Ilyenkor a fűtőelemrács alulvagy túlmoderáltsága nagy biztonsági jelentőséget kap: túlmoderált rácsban az üregeffektus – általában – pozitív. Ez az egyik fő oka annak, hogy erőművi reaktorokban csak alulmoderált fűtőelemrácsok engedélyezhetők. Ha a *63.2. ábrá*ra tekintünk, belátjuk, hogy ebben a tekintetben a bórsav hatását körültekintően kell figyelembe venni.

#### Nyomásegyüttható

A nyomottvizes atomerőművekben a hűtőközeg nyomása 12–15 MPa közötti érték lehet.<sup>11</sup> Mivel a folyadékok sűrűsége csak kis mértékben függ a nyomástól (hiszen "összenyomhatatlanok"), a *nyomásegyüttható* ( $\alpha_p$ ) kicsi. A nyomás hatására a moderátor sűrűsége nő, ami – alulmoderált rácsok esetében – pozitív effektus.  $\alpha_p$  értéke 14·10<sup>-5</sup>/MPa. Ha ezt összevetjük a moderátor hőfoktényezőjével, akkor azt látjuk, hogy a nyomás 1 MPa-lal való növelésének körülbelül akkora hatása van, mint amikor a moderátor hőmérsékletét 1 °C-kal csökkentjük (szobahőmérsékleten).

# Teljesítménytényező

A reaktorok biztonsága szempontjából legfontosabb mennyiség a *teljesítménytényező* ( $\alpha_{telj}$ ), amelyre vonatkozóan a (64.1) képlet szerinti x paraméter a reaktor teljesítménye. Amikor a teljesítmény változik, változik a moderátor és az üzemanyag (urán) hőmérséklete, vagyis a teljesítménytényező  $\alpha_m$  és  $\alpha_D$  kombinációja:

$$\alpha_{\text{telj}} = \alpha_{\text{m}} \frac{\Delta T_{\text{m}}}{\Delta(\text{telj})} + \alpha_{\text{D}} \frac{\Delta T_{\text{U}}}{\Delta(\text{telj})}.$$
(64.7)

Ha a moderátorban buborékok is vannak, akkor ezt ki kell még egészíteni egy további taggal, amely az üregegyütthatón keresztül veszi figyelembe a hűtőközegnek a teljesítménytől függő mértékű forrását. Ebből látszik, hogy a teljesítménytényező függ attól, hogy az adott körülmények között a moderátor és az üzemanyag hőmérséklete hogyan változik a teljesítménnyel. Néhány eset példaképpen:

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup> A paksi atomerőműben 12,6 MPa.

- *izotermikus* teljesítménytényező:  $T_{\rm m} = T_{\rm U}$ ; erre a fentiekben már láttunk példát;
- *adiabatikus* teljesítménytényező:  $T_{\rm U}$  nő, de  $T_{\rm m}$  nem változik; ilyen esetet vizsgálunk a 6.5. alfejezetben;
- kvázisztatikus teljesítménytényező: T<sub>U</sub> és T<sub>m</sub> úgy változik, hogy tartósan fennáll a moderátor és a fűtőelemrúd közötti hőcsere egyensúlya.

Biztonsági feltétel, hogy ne csak maga a hőfoktényező legyen negatív, hanem annak mindegyik összetevője külön-külön is. A körülményektől függően ugyanis egyik vagy másik válik dominánssá, tehát a biztonsághoz szükséges negatív visszacsatolás csak úgy biztosítható minden körülmények között, hogy mindegyik összetevő negatív.

#### Bórsavegyüttható

A moderátorban oldott bórsav jelentősen csökkenti a reaktivitást. A reaktor tervezője számára jelentős mennyiség a *bórsavegyüttható*, amelynek esetében a (64.1) képlet szerinti x paraméter a bórsav koncentrációja ( $C_B$ ). Értéke minden esetben negatív, hiszen a bórsav bevitele mindig csökkenti a reaktivitást. Részletes elemzésébe nem bocsátkozunk. Jellegzetes értéke –2 \$/(g/liter) és –3 \$/(g/liter) között van.

# 6.5. A reaktor megszaladása

A (36.5) reciprokóra egyenlet tárgyalásakor említettük, hogy 1 dollárnál nagyobb reaktivitások ( $\rho > \beta$ ) esetében olyan rövid a kétszerezési idő, hogy lehetetlenné válik a külső beavatkozás. Ilyen esetekben – jól tervezett reaktorokban – negatív viszszacsatolások lépnek működésbe, amelyek előbb-utóbb megállítják a reaktor teljesítményének növekedését. A 6.4. alfejezetben láttuk, hogy biztosan létezik legalább egy ilyen effektus: ez a Doppler-effektus, amely elsősorban a hasadóanyag melegedésén keresztül hat vissza a reaktivitásra. Nézzük meg most részletesen, mindez hogyan befolyásolja a reaktor időbeli magatartását. Az alábbiakban tárgyalt egyenlet *Fuchs– Hansen-modell* néven ismert.

A (36.3) szerinti pontkinetikai egyenletből elhagyjuk az "*n*" indexet, és  $\varphi(t)$ -t úgy normáljuk, hogy megadja a reaktor teljesítményét. Az uránrudak hőmérsékletét  $T_{\rm U}$ -val, a hűtőközeg hőmérsékletét  $T_{\rm m}$ -mel jelöljük, továbbá feltesszük, hogy a reaktivitás a hőmérséklettel lineárisan változik:

$$\rho = \rho_0 - A(T_{\rm U} - T_{\rm m}) = \rho_0 - A\Delta T, \qquad (65.1)$$

ahol A a reaktivitás hőfoktényezője:

$$A = -\frac{\partial \rho}{\partial T_{\rm II}}$$

A 6.4 alfejezetben láttuk, hogy más hőfoktényezőt kell rendelni az urán és a hűtőközeg hőmérsékletéhez, de ezt elhanyagoljuk. Általában mindkettő negatív [ellentétben azzal, ahogy (65.1)-ben felírtuk]. (65.1) mégis elfogadható az adott esetben, mert
megszaladáskor a teljesítmény olyan gyorsan változik, hogy  $T_m$  gyakorlatilag állandónak tekinthető. Ahhoz, hogy (36.3)-ban ezt figyelembe vehessük, szükségünk van egy további egyenletre, amely a  $\Delta T$  hőmérséklet-különbséget a  $\varphi(t)$  teljesítménnyel összekapcsolja. Ezt a

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T(t)}{\mathrm{d}t} = -a\Delta T(t) + b\varphi(t) \tag{65.2}$$

alakban írjuk fel (a, b > 0). Itt az a paraméter az urán és a hűtőközeg közötti *hőátadás*t írja le, b pedig a reaktor *hőkapacitás*ával van kapcsolatban:

$$\frac{1}{b} = c_p M , \qquad (65.3)$$

ahol $c_{\rm p}$ a fajhő, M pedig a reaktorban lévő urán teljes tömege.

Ezzel a reaktorkinetikai egyenlet – matematikai szempontból – zárttá vált, tehát megpróbálhatjuk megoldani. Keressük először stacionárius megoldásait ( $C_{i0}$ ,  $\varphi_0$ ). (36.6)-ból a stacionárius állapothoz tartozó  $\omega = 0$ -val adódik:

$$\lambda_i C_{i0} = \frac{\beta_i \varphi_0}{\Lambda}$$

továbbá (65.2)-ből az ehhez tartozó hőmérsékletet az

$$a\Delta T_0 = b\varphi_0 \tag{65.4a}$$

összefüggés határozza meg, amelyet (36.3)-ba helyettesítve kapjuk, hogy a pontkinetikai egyenletnek csak akkor van megoldása, ha

$$\rho_0 = \frac{Ab\varphi_0}{a} = A\Delta T_0.$$
(65.4b)

Fizikailag ez azt jelenti, hogy a *visszacsatolások* révén a reaktor "beállítja" azt a teljesítményt és hőmérsékletet, amely mellett éppen kritikus, és ebben az állapotában addig marad meg, amíg vagy a hőmérséklet, vagy a reaktivitás – külső okból – meg nem változik. A reaktor ezen a módon követni tudja a lassú és kicsi változásokat. A visszacsatolások miatt tehát a transzportegyenlet elveszíti linearitását: most már nem igaz, hogy tetszőleges teljesítményen lehet kritikus. Ha növelni akarjuk a teljesítményt, növelnünk kell a reaktivitást (pl. egy szabályozórúd kihúzásával): (65.4) szerint ezt követni fogja a reaktor hőmérséklete és teljesítménye.<sup>12</sup>

A fellépő reaktivitásváltozások azonban nem lehetnek akármilyen nagyok. Ha ugyanis a reaktivitás növekedése – tévedésből – meghaladja az 1 dollárt, akkor *a reaktor megszalad*: teljesítménye olyan gyorsan kezd változni, hogy – kedvezőtlen esetben

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup> Egy atomerőmű üzemtana tehát nemcsak a reaktor kinetikáját megszabó mennyiségeknek, hanem a hőtechnikai visszacsatolásoknak az ismeretét is magában foglalja.

– akár 1000-szeresére is megnőhet, mielőtt a megnövelt reaktivitáshoz tartozó nagyobb teljesítményre visszaállna. A megszaladás olyan gyorsan zajlik le, hogy nemcsak a késő neutronok szerepe, hanem még a moderátor (*a* paraméterrel jellemzett) hűtése sem tud érvényesülni. Az alábbiakban ennek a folyamatnak a részleteit fogjuk megvizsgálni.

Tételezzük fel, hogy a ( $-\infty$ , 0) időintervallumban a reaktor időben állandó  $\varphi_0$  teljesítményen működött, de a t = 0 időpontban egy  $\Delta \rho > \beta$  reaktivitásváltozás történik. Ekkor egy t > 0 időpontban (65.1) helyett most a

$$\rho(t) = \rho_1 - A\Delta T(t) = \rho_0 + \Delta \rho - A\Delta T(t)$$
(65.5)

összefüggés lesz érvényben. Integráljuk (65.2)-t a (0, *t*) intervallumban:

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 \mathrm{e}^{-at} + b \int_0^t \varphi(t') \mathrm{e}^{-a(t-t')} \mathrm{d}t'.$$

A 3.6. alfejezetben láttuk, hogy  $\Delta \rho > \beta$  esetén  $\varphi(t)$  változásának időállandója ms nagyságrendű. Az *a* együtthatóval jellemzett hőátadás ennél lényegesen lassúbb folyamatnak felel meg, ezért a legutóbbi egyenletben nem követünk el nagy hibát, ha *a* helyébe nullát írunk. Az így kapott kifejezést (65.5)-be helyettesítve kapjuk a reaktivitás időtől való függését:

$$\rho(t) = \rho_1 - A\Delta T(t) = \rho_1 - A\Delta T_0 e^{-at} - Ab \int_0^t \varphi(t') e^{-a(t-t')} dt' \approx \Delta \rho - Ab \int_0^t \varphi(t') dt',$$

ahol figyelembe vettük, hogy (65.4) és (65.5) szerint

$$\Delta \rho = \rho_1 - \rho_0 = \rho_1 - A \Delta T_0.$$

Mivel – mint fent mondtuk – most elhanyagoljuk a késő neutronokat, (36.3) alapján írhatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \varphi(t) = \frac{\Delta \rho - \beta}{\Lambda} \varphi(t) - \frac{Ab\varphi(t)}{\Lambda} \int_{0}^{t} \varphi(t') \,\mathrm{d}t' \,. \tag{65.6}$$

Vezessük be a

$$\varphi_0 x(t) = \int_0^t \varphi(t') \mathrm{d}t'$$
(65.7)

és

$$\varphi_0 y(t) = \varphi(t) = \varphi_0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
(65.8)

jelöléseket. Ezzel (65.6) másodrendű (nemlineáris) differenciálegyenletté írható át:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \left[\frac{\Delta \rho - \beta}{\Lambda} - \frac{Ab\varphi_0}{\Lambda} x(t)\right] \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$
(65.9)

Mivel (65.7) szerint x(t) *t*-nek szigorúan monoton növekvő függvénye, y(t) tekinthető *t* helyett *x* függvényének is. (65.8)-ból egyszerűen következik:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,y\,,$$

amit (65.9)-be helyettesítve az egyszerű

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \gamma_1 (\gamma_2 - x) \tag{65.10}$$

egyenletre jutunk. Itt a következő jelöléseket vezettük be:

$$\gamma_1 = \frac{Ab\varphi_0}{A} > 0, \qquad (65.11a)$$

$$\gamma_2 = \frac{\Delta \rho - \beta}{Ab\varphi_0} > 0.$$
(65.11b)

Szintén (65.7)-ből és (65.8)-ból látható, hogy a (65.10)-hez tartozó kezdeti feltétel:

$$x(0) = 0,$$
  $y(0) = 1.$ 

(65.10)-et ennek figyelembevételével *x* szerint integráljuk:

$$y(x) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + \gamma_1 \left(\gamma_2 - \frac{x}{2}\right) x ,$$

amit t szerint tovább integrálva kapjuk:

$$t = \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{1 + \gamma_1 \gamma_2 x' - \gamma_1 {x'}^2/2} = \frac{2}{\gamma_1} \int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}x'}{(x_1 - x')(x' - x_2)},$$
(65.12)

ahol

$$x_1 = \gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 2/\gamma_1} > 0 \tag{65.13a}$$

és

$$x_2 = \gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 + 2/\gamma_1} < 0.$$
 (65.13b)

(65.12)-ben az integrandus az  $x_2 < x' < x_1$  tartományban pozitív. Ebből azonban értelemszerűen csak a  $0 < x' < x_1$  tartomány jön szóba. Mivel  $x' \rightarrow x_1$ -re az integrandus és maga az integrál is végtelenné válik, fennáll:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_1. \tag{65.14}$$

Mindezek figyelembevételével az integrál kiértékelhető, és végeredményben kapjuk:

$$x(t) = x_1 \frac{e^{\varkappa} - 1}{e^{\varkappa} + G},$$

ahol

$$G = -\frac{x_1}{x_2} > 0$$

és

$$\gamma = \gamma_1 \sqrt{\gamma_2^2 + 2/\gamma_1} \; .$$

Ezt deriválva adódik a keresett végeredmény:

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = x_1 \frac{(G+1)\gamma e^{\gamma t}}{(e^{\gamma t} + G)^2}.$$
 (65.15)

Ahhoz, hogy a kapott eredményeket értelmezni tudjuk, képleteinkbe helyettesítsük be a paksi atomerőműre jellemző számértékeket:

 $c_{\rm p} = 0.3 \text{ Ws/(g} \cdot ^{\circ}\text{C}),$  M = 42 tonna,  $A = 3.4 \cdot 10^{-5} / ^{\circ}\text{C},$   $\varphi_0 = 1370 \text{ MW},$   $\Lambda = 40 \text{ } \mu\text{s},$  $b = 0.079 \text{ } ^{\circ}\text{C/MWs},$ 

amivel (65.3)-ból, (65.11)-ből és (65.13)-ból kapjuk, hogy

$$Ab \varphi_0 = 0,0037/\text{s},$$
  

$$\gamma_1 = 92,5/\text{s}^2,$$
  

$$\gamma_2 = \frac{\Delta \rho - \beta}{0,0037} = \frac{\Delta \rho / \beta - 1}{0,0037/\beta} = \frac{\Delta \rho / \beta - 1}{0,53} \text{ s}, \qquad \beta = 0,007.$$

A 65.1. *ábra* a  $\Delta \rho / \beta = 4$  \$ többletreaktivitásra vonatkozóan mutatja a teljesítmény megszaladását jellemző y(t) függvényt. Ekkor



65.1. ábra. A reaktor teljesítményének időfüggése megszaladáskor

Az ábrán mutatott [és (65.15) alatt általánosságban felírt] y(t) függvény a

$$t = t_{\max} = \frac{\ln G}{\gamma} = 0,0166 \text{ s}$$

időpontban maximumot vesz fel, amelynek az értéke

$$y_{\text{max}} = x_1 \gamma \frac{G+1}{4G} = 1491.$$

(65.8)-ból és (65.14)-ből látszik, hogy a megszaladás teljes időtartama alatt annyi teljesítmény szabadul fel, mint normális üzemben 11,4 s (=  $x_1$ ) alatt, tehát nem nagyon sok. Ami a megszaladásos üzemzavarban súlyos következményekkel járhat, az az, hogy a teljesítmény rövid idő alatt a névleges teljesítmény sokszorosára (példánkban 16,6 ms alatt 1491-szeresére) fut fel, és ez már okozhatja a fűtőelemek sérülését.

Az üzemzavar lefolyása és méretei erősen függnek a bevitt  $\Delta \rho$  reaktivitástól. Ennek illusztrálására a 65.1. táblázatban különböző többletreaktivitásokra megadjuk az y(t) függvénynek ebből a szempontból legfontosabb jellemzőit. Összefoglalásul megállapíthatjuk a következőket:

- A Doppler-együttható negatív volta nem csak ellensúlyozza a lassú reaktivitásváltozások hatását, hanem reaktivitásugrások esetében is megállítja a teljesítmény gyors növekedését. Emiatt jól tervezett atomerőműben nem képzelhető el robbanás.
- A megszaladási folyamat néhányszor 10 ms alatt lezajlik, és a felszabaduló többletenergia kicsi.

• A pillanatnyi teljesítmény a névleges érték több ezerszerese lehet, ami károsíthatja a fűtőelemeket.

| $\Delta  ho / eta$ | $\gamma(s^{-1})$ | $x_1$ (s) | $t_{\rm max}~({\rm ms})$ | $y_{max}$ |
|--------------------|------------------|-----------|--------------------------|-----------|
| 1,5                | 89               | 1,90      | 57,8                     | 42        |
| 2                  | 176              | 3,79      | 37,0                     | 167       |
| 3                  | 350              | 7,57      | 22,5                     | 663       |
| 4                  | 525              | 11,35     | 16,6                     | 1491      |
| 5                  | 700              | 15,14     | 13,2                     | 2650      |
| 7                  | 1050             | 22,70     | 9,60                     | 5960      |
| 10                 | 1575             | 34,06     | 6,91                     | 13410     |

65.1. táblázat. A megszaladás jellemzői a reaktivitás függvényében

# 7. Az adjungált függvény és alkalmazásai

Sem a transzportegyenlet, sem a diffúzióegyenlet nem önadjungált – ellentétben például a Schrödinger-egyenlettel. Nem nehéz felírni ezeknek az egyenleteknek az adjungáltját (formálisan legalábbis). Érdekes kérdés viszont, van-e fizikai jelentésük az adjungált egyenlet megoldásainak. Látni fogjuk, hogy a válasz: igen, van! Tulajdonképpen ennek alapos megértése nélkül igazában magát a transzportegyenletet sem lehet igazában megérteni. A fizikai jelentés lényegét legegyszerűbb egycsoport diffúziós közelítésben megvilágítani, hiszen a transzportegyenlet e közelítésének megfelelő operátor önadjungált.

Tekintsünk egy kritikus reaktort, amelyben a fluxus időben állandó. A 3.5. alfejezetben megbeszéltük, hogy ez a (32.4) Helmholtz-egyenlet legkisebb sajátértékéhez tartozó  $\Phi_1(\mathbf{r})$  sajátfüggvénnyel arányos. Tegyük fel, hogy a t = 0 időpillanatban az  $\mathbf{r}_0$  helyen megjelenik egy neutron. A neutronsűrűséget, illetve a vele arányos fluxust ekkor a következő alakban írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)\Big|_{t=0} = c \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

Ezt követően (t > 0-ra) a fluxus időfüggését a (35.1) időfüggő diffúzióegyenlet írja le. A 3.5. alfejezetben általánosságban kiszámítottuk a megoldást:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t) = \sum_{n} f_{n} \mathrm{e}^{\omega_{n} t} \boldsymbol{\Phi}_{n}(\mathbf{r})$$

[vö. (35.2) egyenlet)], ahol az  $f_n$  együtthatók a kezdeti eloszlás sorfejtési együtthatói. Esetünkben:

$$f_n = \int (c \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \boldsymbol{\Phi}_n(\mathbf{r}) dV = c \delta_{n1} + \boldsymbol{\Phi}_n(\mathbf{r}_0).$$

Mivel kritikus állapotban  $\omega_1 = 0$  és  $\omega_n < 0$ , ha n > 1, elég nagy *t*-re a fluxus ismét állandóvá válik, és új értéke:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r},t)\Big|_{t\to\infty} = f_1 \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{r}) = (c + \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{r}_0))\boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{r}).$$

Azt kaptuk tehát, hogy a fluxust egyetlen neutron bevitele  $\Phi_1(\mathbf{r}_0)$ -lal arányos értékkel növeli meg. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a láncreakció szempontjából *ennyit ér* egy  $\mathbf{r}_0$  helyre bevitt neutron. Ez a *neutronértékesség* fogalma. Azt találtuk, hogy az egycsoport diffúzióelméletben ez magával a fluxussal egyenlő.

Az alábbiakban teljes általánosságban levezetjük a neutronértékességet meghatározó egyenletet, és azt fogjuk találni, hogy az nem más, mint a transzportegyenlet adjungáltja. A fentiekben a (35.1) egycsoport diffúzióegyenletből indultunk ki. Mivel az ennek jobb oldalán szereplő operátorok mindegyike önadjungált, nem véletlenül találtuk a fentiekben, hogy a neutronértékesség a neutronfluxussal egyenlő, hiszen ez egyben az adjungált egyenlet megoldása is.

Vannak a transzportelméletnek olyan problémái, amelyek ugyan *elvileg* megoldhatók a transzportelmélet keretén belül, de *gyakorlatilag* nem oldhatók meg az adjungált egyenlet nélkül. E problémák legfontosabb köre a kis perturbációk kezelése: a reaktor valamilyen tulajdonságát kis mértékben megváltoztatjuk (például kissé elmozdítunk egy szabályozórudat), és keressük a reaktivitás, valamint a neutronfluxus megváltozását. Tekintve, hogy a reaktornak kis változásokra adott válaszáról van szó, a probléma nem kezelhető az előző fejezetekben tárgyalt numerikus módszerekkel. Tekintsük például a reaktivitásváltozást. Ha a sokszorozási tényező értéke a rúd kiindulási és végső helyzetében rendre  $k_{eff.1}$  és  $k_{eff.2}$ , az effektus a kettő különbsége:

$$\Delta \rho \approx k_{\rm eff,2} - k_{\rm eff,1},$$

ami azt jelenti, hogy a keresett mennyiség két 1 körüli szám 10<sup>-5</sup> nagyságrendű különbsége. Mivel a transzportegyenletet a gyakorlatban csak közelítőleg tudjuk megoldani, itt arról van szó, hogy két közelítőleg számolt mennyiségnek (hozzájuk képest) kis különbségét határozzuk meg. Ilyen körülmények között a végeredmény pontossága nagyon vitatható, ezért jobb olyan számítási eljárást keresni, amelynek végeredménye közvetlenül maga a keresett változás. Ez a *perturbációelmélet* alapgondolata, amelyet nem csak a Schrödinger-egyenlethez, hanem a transzportegyenlethez is alaposan kidolgozták. Különbség azonban, hogy a reaktorfizikai perturbációelméletben nélkülözhetetlen az adjungált egyenlet megoldása.

Jóllehet gyakorlati célokra kedvezőbb a neutronteret a  $\Phi$  fluxus segítségével leírni [mint ezt (22.1)-ben és (31.8)-ban tettük], az adjungált egyenletek megoldását csak akkor tudjuk konzekvensen *értelmezni*, ha a kiindulási egyenletet a neutronsűsű-ségre írjuk fel.<sup>13</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup> Ez alól kivétel az egycsoport közelítés, mert ekkor a neutronsűrűséget a fluxussal összekapcsoló v sebesség állandó, vagyis nem szerepel a kiindulási egyenlet független változói között.

# 7.1. Az adjungált egyenlet

### Neutrontér és detektortér

Mivel megfontolásainkat – amennyire csak lehetséges – nem szeretnénk a transzportegyenlet minden közelítésére külön-külön megismételni, a kiindulási egyenletet operátoros alakban írjuk fel:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \hat{\mathbf{M}}n + S . \tag{71.1}$$

(22.1) esetében

$$\hat{\mathbf{M}}n = \hat{\mathbf{P}}n - \hat{\mathbf{D}}n, \qquad (71.2a)$$

ahol

$$\hat{\mathbf{D}}n = \vec{\Omega} \text{ grad } vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \Sigma_{t}(\mathbf{r}, E)vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) -$$

$$-\int_{4\pi0}^{\infty} \Sigma(\mathbf{r}, E' \to E, \vec{\Omega}\vec{\Omega}')v'n(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t)dE'd\vec{\Omega}'$$
(71.2b)

a neutronok eltűnését leíró, ún. destrukciós operátor és

 $\infty$ 

$$\hat{\mathbf{P}}n = \frac{f(E)}{4\pi} \int_{4\pi0}^{\infty} \nu \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E') v' n(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}'$$
(71.2c)

a neutronok termelését leíró, ún. *produkciós operátor*. (71.2b)-ben  $\Sigma(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega \Omega')$  a (22.1b)-ben szereplő rugalmas és rugalmatlan szórási magfüggvények összege. (31.8) esetében a destrukciós és produkciós operátor alakja a következő:

$$\hat{\mathbf{D}}n = -\operatorname{div}[vD(\mathbf{r}, E) \operatorname{grad} n(\mathbf{r}, E, t)] + \Sigma_{t}(\mathbf{r}, E)vn(\mathbf{r}, E, t) - -\int_{0}^{\infty} \Sigma(\mathbf{r}, E' \to E)v'n(\mathbf{r}, E', t)dE'$$
(71.3a)

és

$$\hat{\mathbf{P}}n = f(E) \int_{0} \nu \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E') v' n(\mathbf{r}, E', t) dE', \qquad (71.3b)$$

ahol – az előzők analógiájára –  $\Sigma(\mathbf{r}, E' \rightarrow E)$  a (31.3a)-ban szereplő rugalmas és rugalmatlan szórási magfüggvények összege. A (71.1) alatti egyenlethez kezdő- és peremfeltételek tartoznak. Az utóbbiakat a 2.2. és 3.1. alfejezetekben megadtuk. A kezdőfeltételt írjuk formálisan az

$$n\big|_{t=t} = n_{\rm i} \tag{71.4}$$

alakba, ahol a transzportegyenlet esetében  $n_i(\mathbf{r}, E, \overline{\Omega})$  a (22.2b) alatti, a diffúzióegyenlet esetében pedig  $n_i(\mathbf{r}, E)$  a (31.10) alatti peremfeltételt tartozik kielégíteni.

Nincs olyan műszer, amelynek a segítségével akár a neutronsűrűség, akár a neutronfluxus mérhető lenne. A gyakorlatban csak arról lehet szó, hogy a reaktorba valamilyen neutrondetektort helyezünk, és a neutronok által benne kiváltott magreakciókat megszámláljuk. Ha a detektor hatáskeresztmetszete az *E* energiájú neutronokra  $\Sigma_d(\mathbf{r}, E)$  a reaktor  $\mathbf{r}$  helyén, akkor az  $\mathbf{r}$  körüli d*V* térfogatelemben időegység alatt

$$\int_{4\pi0}^{\infty} \boldsymbol{\Sigma}_{d}(\mathbf{r}, E) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega} dV$$

magreakció történik. A detektorhoz kapcsolt műszer kijelzése tehát a t időpillanatban

$$R(t) = \int_{V} \int_{4\pi0}^{\infty} \Sigma_{d}(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega} dV =$$
$$= \int_{V} \int_{4\pi0}^{\infty} \Sigma_{d}(\mathbf{r}, E) vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega} dV , \qquad (71.5a)$$

ahol V a reaktor térfogata. Ugyanez diffúziós közelítésben így írható:

$$R(t) = \iint_{V_0}^{\infty} \Sigma_{d}(\mathbf{r}, E) vn(\mathbf{r}, E, t) dE dV.$$
(71.5b)

A detektorra két példát hozunk. Ha a detektor egy BF<sub>3</sub> töltésű számlálócső, akkor  $\Sigma_d$  arányos a detektorban levő <sup>10</sup>B-izotóp abszorpciós hatáskeresztmetszetével, továbbá a (71.5)-ben szereplő **r** szerinti integrálok csak a detektor térfogatára terjednek ki, hiszen  $\Sigma_d$  ekkor a detektor térfogatán kívül eltűnik. Mivel minden abszorpció hatására a számlálócső egy elektromos impulzust ad ki, ezek megszámlásával megmérhetjük a reakciógyakoriságot. Egy másik példa a reaktor teljesítménye: ekkor  $\Sigma_d$  arányos a hasadási hatáskeresztmetszettel, és a (71.5) alatti integrálok a reaktor egész aktív zónájára kiterjesztendők.<sup>14</sup>

Az elmondottakból következik, hogy a reaktor működésével kapcsolatban *megfigyelhető* mennyiségek leírásához nem elégséges a neutronteret ismerni, hanem szükség van a *detektortér*re is. Különböztessük meg az ezt leíró függvényeket "+" felső indexszel:  $\psi^{\dagger}$ . A detektorfüggvények változói ugyanazok, mint az éppen használt modellé, tehát a transzport- és diffúzióegyenlet esetében rendre  $\psi^{\dagger}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  és  $\psi^{\dagger}(\mathbf{r}, E, t)$ . Az előbbi fizikai jelentése: a *t* időpillanatban az ( $\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}$ )-val jellemzett ne-

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup> A fluxust csak akkor tudnánk mérni, ha lenne olyan pontszerű detektor, amelynek a hatáskeresztmetszete az *E* energia szerint  $\delta$ -függvény. Ilyen detektor azonban nem létezik.

utron hozzájárulása a *t* időpillanatban végzett méréshez.  $\psi^{\dagger}(\mathbf{r}, E, t)$  fizikai jelentése analóg.<sup>15</sup> Tehát a (71.5) képletek esetében

$$\boldsymbol{\psi}^+ = \boldsymbol{v}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{d}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{E}).$$

A (71.5)-höz hasonló, belső szorzat jellegű integrálok egyszerűsített jelölésére a funkcionálanalízisben szokásos jelölést használjuk:

$$R(t) = \left(\psi^+, n\right). \tag{71.6}$$

Az ilyen képletekből a továbbiakban elhagyjuk az **r**, *E* és  $\vec{\Omega}$  változókat, de a *t* változót feltüntetjük akkor, ha az adott kontextusban szükséges pontosan megadni, melyik időpontról van szó.

A  $\psi^{\dagger}$  detektorfüggvények elvileg tetszőlegesek lehetnek, de fizikai jelentésükre való tekintettel rájuk is ki kell szabni bizonyos peremfeltételeket. Mivel a reaktor konvex külső felületén kifelé repülő neutron (vö. 22.1. *ábra*) már semmiféle méréshez sem ad járulékot, előírjuk:

$$\psi^+(\mathbf{r}_{\rm s}, E, \vec{\Omega}, t) = 0,$$
 ha  $\mathbf{N}_{\rm s}\vec{\Omega} > 0.$  (71.7)

A diffúzióelméletben hasonló okokból megköveteljük, hogy  $\psi^{\dagger}(\mathbf{r}, E, t)$  az extrapolált határfelületen eltűnjön.

#### Neutronértékesség

Tételezzük fel, hogy valamely  $t = t_f$  időpontban egy  $H_f^+$  detektorfüggvénnyel jellemzett detektorral mérést végzünk.<sup>16</sup> Ennek az eredménye definíció szerint:

$$R(t_{\rm f}) = \left(n(t_{\rm f}), H_{\rm f}^{+}\right). \tag{71.8}$$

 $n(t_f)$  kiszámításához ismerjük az  $n_i$  kezdeti eloszlást egy  $t_i < t_f$  kezdeti időpontra vonatkozóan. A két időpont között pedig a (71.1) egyenlet adja meg a kapcsolatot. Most bevezetünk két fogalmat:

• Legyen t < t', és tekintsünk mindkét időpontban egy-egy neutront. Az utóbbit az előbbi *utódjá*nak nevezzük, ha az utóbbi keletkezése elmozdulásokon, szóródásokon és hasadásokon keresztül visszakövethető az előbbihez.

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup> Fontos hangsúlyozni, hogy a detektorfüggvény definíciójában a neutron ( $\mathbf{r}, E, \tilde{\Omega}$ ) jellemzőit *ugyanabban* a *t* időpillanatban adjuk meg, amelyben a mérés történik. A későbbiekben bevezetett neutronértékesség esetében ugyanis a két időpont *különböző* lesz.

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup> Itt az "f" index a *végső* (= finális) jelzőre utal – ugyanúgy, mint korábban az "i" index a *kezdeti* (= iniciális) jelzőre.

Nevezzük az n<sup>+</sup>(**r**,E, Ω, t) függvényt *neutronértékesség*nek, ha megadja a t időpontban (**r**,E, Ω) tulajdonságú neutron utódjainak a hozzájárulását a t<sub>f</sub> időpontban elvégzett méréshez (t < t<sub>f</sub>).

A definícióból következik, hogy az értékesség tartozik kielégíteni egyrészt a (71.7) alatti peremfeltételt, másrészt a következő "végfeltételt":

$$n^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t_{\mathrm{f}}) = H_{\mathrm{f}}^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}).$$
(71.9)

A diffúzióelméletben analóg módon definiálható az  $n^+(\mathbf{r}, E, t)$  neutronértékesség.

A most adott általános definíciónak speciális esete a jelen fejezet bevezetőjében bevezetett neutronértékesség. Nem triviális a kettő közötti kapcsolat, ezért megmutatjuk, milyen speciális esetről van szó. Először, ott egycsoport diffúziós modellben dolgoztunk, tehát elmarad az E és  $\vec{\Omega}$  változó. Másodszor, a neutron megjelenéséhez képest végtelen idő elteltével vizsgáltuk a (35.1) egyenlet megoldását:  $t_f \rightarrow \infty$ . Harmadszor, a neutronfluxust kerestük egy kiválasztott **r** pontban, tehát ezt (71.8) akkor adja meg, ha

$$H_{\rm f}^+(\mathbf{r'}) = v\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r'})\,.$$

Annak érdekében, hogy egyenletet kapjunk a neutronértékességre, ugyanazt a gondolatmenetet alkalmazzuk, amelyet a 2.2. alfejezetben a transzportegyenlet differenciális alakjának levezetésében követtünk. Felírjuk tehát matematikai formában a következő nyilvánvaló állítást: *egy neutron értékessége ugyanannyi, mint az utódjaié együttesen*. Legyen egy neutron a *t* időpontban az **r** helyen, energiája *E*, sebességének iránya  $\overline{\Omega}$ . d*t* idő elteltével az ( $\mathbf{r} + v\overline{\Omega} dt$ ) helyre mozdul el, ha közben nem vált ki magreakciót, aminek a valószínűsége ( $1 - v\Sigma_t(\mathbf{r}, E)dt$ ). A (71.2)-ben szereplő magfüggvény definíciója szerint annak a valószínűsége, hogy egy (rugalmas vagy rugalmatlan) szóródás után energiája az (E', E'+dE') intervallumba, sebességének az iránya pedig az  $\overline{\Omega}'$  körüli d $\overline{\Omega}'$  térszögbe essen,

$$vdt \Sigma(\mathbf{r}, E \rightarrow E', \vec{\Omega}\vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}'.$$

Végül a hasadások révén az (E',E'+dE') intervallumba eső energiájú, az  $\overline{\Omega}'$  körüli  $d\overline{\Omega}'$  térszögbe eső sebességirányba repülő neutronok száma:

$$v \mathrm{d}t \nu \Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}, E) f(E') \mathrm{d}E' \frac{\mathrm{d}\tilde{\Omega}'}{4\pi}$$

A neutronértékesség megmaradásából tehát az következik, hogy

$$n^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = (1 - v\Sigma_{t}(\mathbf{r}, E)dt)n^{+}(\mathbf{r} + v\vec{\Omega}dt, E, \vec{\Omega}, t + dt) +$$

$$+vdt \int_{4\pi 0}^{\infty} \Sigma(\mathbf{r}, E \to E', \vec{\Omega}\vec{\Omega}') n^{+}(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}' + vdt \nu \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E) \int_{4\pi}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(E') n^{+}(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' \frac{d\vec{\Omega}'}{4\pi}.$$

Ebből d*t*  $\rightarrow$  0 határátmenettel kapjuk:

$$-\frac{\mathrm{d}n^{+}}{\mathrm{d}t} = -v\Sigma_{\mathrm{t}}(\mathbf{r},E)n^{+}(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t) + \int_{4\pi0}^{\infty} v\Sigma(\mathbf{r},E\to E',\vec{\Omega}\vec{\Omega}')n^{+}(\mathbf{r},E,\vec{\Omega}',t)\mathrm{d}E'\mathrm{d}\vec{\Omega}' + \\ + \int_{4\pi0}^{\infty} vv\Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r},E)\frac{f(E')}{4\pi}n^{+}(\mathbf{r},E',\vec{\Omega}',t)\mathrm{d}E'\mathrm{d}\vec{\Omega}' \,.$$

Ha itt (22.1a) analógiájára kifejtjük a t szerinti teljes deriváltat, akkor a (71.1)-re emlékeztető

$$-\frac{\partial n^{+}}{\partial t} = \hat{M}^{+}n^{+} = \hat{P}^{+}n^{+} - \hat{D}^{+}n^{+}$$
(71.10)

egyenletet kapjuk, ahol

$$\hat{\mathbf{D}}^{+}n^{+} = -\vec{\Omega} \operatorname{grad} vn^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) + \Sigma_{t}(\mathbf{r}, E)vn^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) - \\ -v \int_{4\pi0}^{\infty} \Sigma(\mathbf{r}, E \to E', \vec{\Omega}\vec{\Omega}')n^{+}(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t)dE'd\vec{\Omega}'$$
(71.11a)

és

$$\hat{\mathbf{P}}^{+}n^{+} = \nu \Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}, E) v \int_{4\pi0}^{\infty} f(E') n^{+} (\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) \mathrm{d}E' \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}'}{4\pi} \,.$$
(71.11b)

Azt kaptuk tehát, hogy  $n^+$  olyan egyenletet elégít ki, amelyben a *t* idő "visszafelé telik": kiszámításához a *t*<sub>f</sub> végső időpontban adott (71.9) *végfeltétel*ből elindulva és időben visszafelé haladva kell a (71.10) egyenletet megoldani.

### A transzportegyenlet adjungáltja

A (71.11) szerint definiált  $\hat{M}^+$ ,  $\hat{P}^+$  és  $\hat{D}^+$  operátorok rendre a (71.2) alatti  $\hat{M}$ ,  $\hat{P}$  és  $\hat{D}$  operátorok *adjungált*jai. Ahhoz, hogy ezt belássuk, meg kell mutatnunk, hogy

$$(\psi^+, \hat{\mathbf{M}}n) = (\hat{\mathbf{M}}^+\psi^+, n), \qquad (\psi^+, \hat{\mathbf{P}}n) = (\hat{\mathbf{P}}^+\psi^+, n) \quad \text{és} \quad (\psi^+, \hat{\mathbf{D}}n) = (\hat{\mathbf{D}}^+\psi^+, n),$$

264

ahol *n* és  $\psi^+$  a megfelelő határfeltételeket kielégítő, de egyébként tetszőleges, a neutron-, illetve a detektortéren definiált függvények. Nézzük ezt az  $\hat{M}$  és  $\hat{M}^+$  operátorok egymásnak kölcsönösen megfelelő tagjaira külön-külön:

- Az integráloperátorokban szereplő magfüggvények csak annyiban térnek el egymástól, hogy bennük az *E* és *E'* változók fel vannak cserélve. Ez éppen az adjungálást jelenti.
- A  $\Sigma_t(\mathbf{r}, E)$ -t tartalmazó, első tag triviálisan önadjungált.
- A neutronkifolyást jellemző tagban minden azonos, kivéve az előjelet. Vegyük figyelembe, hogy minden (differenciálható) *g* és *h* függvényre fennáll:

$$\operatorname{grad}(gh) = g \cdot \operatorname{grad} h + h \cdot \operatorname{grad} g,$$

amivel

$$\iint_{4\pi0}^{\infty} \int_{V}^{\psi^{+}} \vec{\Omega}v \text{ grad } n dE d\vec{\Omega} dV =$$
  
= 
$$\iint_{4\pi0}^{\infty} \int_{V}^{\infty} \vec{\Omega}v \text{ grad} (\psi^{+}n) dE d\vec{\Omega} dV - \iint_{4\pi0}^{\infty} \int_{V}^{\infty} n\vec{\Omega}v \text{ grad } \psi^{+} dE d\vec{\Omega} dV.$$

A jobb oldal első tagjában alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\int_{\mathbf{V}} \vec{\Omega} v \operatorname{grad}(\psi^+ n) \mathrm{d} V = \int_{\mathbf{V}} \operatorname{div}(\vec{\Omega} v \psi^+ n) \mathrm{d} V = \oint \vec{\Omega} v \psi^+ n \mathrm{d} \mathbf{f} .$$

Ez a felületi integrál minden  $\hat{\Omega}$ -ra eltűnik: ha  $\hat{\Omega}$  a felületről kifelé mutat, akkor (71.7) szerint  $\psi^{\dagger} = 0$ , ha pedig  $\hat{\Omega}$  befelé mutat, akkor (22.2b) szerint n = 0. Ebből pedig az következik, hogy

$$\iint_{4\pi 0}^{\infty} \int_{V} \psi^{+} \vec{\Omega} v \text{ grad } n dE d\vec{\Omega} dV = - \iint_{4\pi 0}^{\infty} \int_{V} n \vec{\Omega} v \text{ grad } \psi^{+} dE d\vec{\Omega} dV,$$

vagyis az  $\vec{\Omega}$  grad operátor adjungáltja – $\vec{\Omega}$  grad, amint állítottuk.

Beláttuk tehát, hogy a fentiekben definiált neutronértékesség kielégíti a transzportegyenlet adjungáltját. Erre való tekintettel az  $n^+(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  mennyiséget *adjungált függvény*nek is nevezzük.

A transzportegyenlet és az adjungált egyenlet közötti formai rokonság miatt egyes szerzők az  $n^+$  függvényt *adjungált fluxus*nak nevezik. Levezetésünkből és a függvény fizikai jelentéséből következik, hogy nincsenek olyan *részecskék*, amelyek transzportját az adjungált egyenlet írná le. Emiatt téves ez a szóhasználat. Van azonban egy egyszerű formai kifogás is. Láttuk, hogy a detektortér függvényei  $v\Sigma$  alakúak,

tehát dimenziójuk 1/s. A fluxus dimenziója ezzel szemben  $1/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ . Már csak emiatt is helytelen "adjungált fluxusról" beszélni.

# Adjungált egyenletek a transzportegyenlet egyes közelítéseiben, illetve változataiban

Miután megkaptuk a transzportegyenlet differenciális alakjának az adjungáltját, felírjuk az adjungált egyenletet egyes közelítő modellekre, illetve a transzportegyenlet egyes változataira vonatkozóan.

### 1. Diffúzióegyenlet

A *diffúzióegyenlet* adjungáltját (71.3) alapján kaphatjuk meg:

$$\hat{\mathbf{D}}^{+}n^{+} = -\operatorname{div}\left[vD(\mathbf{r}, E)\operatorname{grad} n^{+}(\mathbf{r}, E, t)\right] + \Sigma_{t}(\mathbf{r}, E)vn^{+}(\mathbf{r}, E, t) - -\int_{0}^{\infty} v\Sigma(\mathbf{r}, E \to E')n^{+}(\mathbf{r}, E', t)dE'$$
(71.13a)

és

$$\hat{P}^{+}n^{+} = \int_{0}^{\infty} v \nu \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E) f(E') n^{+}(\mathbf{r}, E', t) dE'.$$
(71.13b)

 $\hat{D}^+$  második és harmadik tagja, valamint  $\hat{P}^+$  esetében triviális, hogy ezek a (71.3) alatti operátorok adjungáltjai.  $\hat{D}^+$  első tagja esetében ennek belátásához pedig a következő – könnyen belátható – összefüggésből kell kiindulni:

$$\operatorname{div}(h \cdot \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot \operatorname{grad} h + h \cdot \operatorname{div} \mathbf{g},$$

amely tetszőleges (differenciálható) *h* függvény és **g** vektor esetében érvényes. Legyen *n* és  $\psi^{\dagger}$  tetszőleges, a diffúziós határfeltételeket kielégítő függvény a neutron-, illetve detektortéren. Ekkor írhatjuk:

$$\int \psi^{+} \cdot \operatorname{div}[vD\operatorname{grad} n] \mathrm{d}V = \int \operatorname{div}[\psi^{+} \cdot vD\operatorname{grad} n] \mathrm{d}V - \int [vD\operatorname{grad} n] \cdot \operatorname{grad} \psi^{+} \mathrm{d}V =$$
$$= \oint \psi^{+} \cdot vD\operatorname{grad} n \mathrm{d}\mathbf{f} - \int [vD\operatorname{grad} n] \cdot \operatorname{grad} \psi^{+} \mathrm{d}V.$$

A jobb oldal első tagjában alkalmaztuk Gauss tételét. Mivel a reaktor külső felületén, amelyre a felületi integrál vonatkozik, a  $\psi^{\pm}$  függvény eltűnik, az integrál értéke 0. A jobb oldal másik tagjában ismételten alkalmazzuk a fenti azonosságot, majd a Gausstételt:

$$\int \psi^{+} \cdot \operatorname{div}[vD\operatorname{grad} n] dV = -\int [vD\operatorname{grad} n] \cdot \operatorname{grad} \psi^{+} dV =$$
$$= -\int \operatorname{div}(n \cdot vD\operatorname{grad} \psi^{+}) dV + \int n \cdot \operatorname{div}[vD\operatorname{grad} \psi^{+}] dV =$$

$$= -\oint n \cdot vD \operatorname{grad} \psi^{+} \mathrm{d}\mathbf{f} + \int n \cdot \operatorname{div} \left[ vD \operatorname{grad} \psi^{+} \right] \mathrm{d}V.$$

Mivel n kielégíti a diffúziós határfeltételt, a jobb oldal első tagja eltűnik. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int \psi^+ \cdot \operatorname{div}[vD \operatorname{grad} n] \mathrm{d}V = \int n \cdot \operatorname{div}[vD \operatorname{grad} \psi^+] \mathrm{d}V,$$

vagyis a div[vDgrad] operátor önadjungált, mint (71.13a)-ban állítjuk.

A transzportegyenlet (71.10) és (71.11) alatt felírt adjungáltjából közvetlenül is megkaphatjuk a diffúzióegyenlet adjungáltját, ha megismételjük a 3.1. alfejezetben követett levezetést. Kiindulásul az adjungált függvényt ugyanúgy sorba fejtjük, mint a fluxus esetében tettük:

$$n^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = n^{+}(\mathbf{r}, E, t) + 3\vec{\Omega}\mathbf{J}^{+}(\mathbf{r}, E, t) + \dots$$
(71.14)

A későbbiekben még visszatérünk arra, miért maradt el itt a fluxus esetében szereplő  $4\pi$  osztó. Ha a 3.1. alfejezetben alkalmazott levezetést *mutatis mutandis* megismételjük,<sup>17</sup> akkor egyrészt megkapjuk az *adjungált Fick-törvény*t:

$$\mathbf{J}^{+}(\mathbf{r}, E, t) = D(\mathbf{r}, E) \text{ grad } n^{+}(\mathbf{r}, E, t), \qquad (71.15)$$

másrészt az adjungált diffúzióegyenlet (71.13) szerinti alakját. Ha ezt (31.6)-tal összevetjük, feltűnik, hogy (71.15)-ben hiányzik a negatív előjel: az *adjungált áram*  $J^+$  vektora az adjungált függvény *növekedésének az irányába* mutat.

Befejezésül vizsgáljuk meg a diffúzióelméletben kapott  $n^+(\mathbf{r}, E, t)$  adjungált függvény fizikai jelentését. (71.14)-et az  $\vec{\Omega}$  irányokra integrálva azt kapjuk, hogy

$$n^{+}(\mathbf{r}, E, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi}^{0} n^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \,\mathrm{d}\vec{\Omega} \,, \tag{71.16}$$

vagyis  $n^+(\mathbf{r}, E, t)$  a neutronértékességnek az  $\Omega$  irányokra vonatkozó *átlaga* – szemben a fluxussal, amely a szögfüggő fluxusnak az  $\Omega$  irányokra való *integrálja*. Ez a különbség látszólag önkényes, hiszen ha (71.14) helyett a fluxusnál szokásos

$$n^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \frac{n^{+}(\mathbf{r}, E, t)}{4\pi} + \frac{3}{4\pi}\vec{\Omega}\mathbf{J}^{+}(\mathbf{r}, E, t) + \dots$$

alakú sorfejtésből indulunk ki, akkor változatlan formában kapjuk meg mind az adjungált Fick-törvényt, mind a diffúzióegyenlet adjungáltját.  $n^+(\mathbf{r}, E, t)$ -t azonban két okból sem célszerű ezen a módon definiálni. Először, az  $n^+(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  neutronértékes-

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup> Ajánljuk, hogy az Olvasó ezt gyakorlásképpen tegye meg.

ség – a szögfüggő fluxussal ellentétben –  $\overline{\Omega}$ -nak nem sűrűségjellegű függvénye.  $n^+(\mathbf{r}, E, \overline{\Omega}, t)$  integráljának ezért nem tudunk fizikai jelentést adni, átlagának viszont igen. Másodszor, és ez az erősebb érv, a (71.9) végfeltétel csak úgy vihető át konzekvensen a diffúzióelméletbe, ha az adjungált függvényt úgy értelmezzük, mint  $n^+(\mathbf{r}, E, \overline{\Omega}, t)$  átlaga. Legyen ugyanis a detektorfüggvény a neutroniránytól független (ami a leggyakoribb eset). Ekkor (71.9) így írható:

$$n^+(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t_{\mathrm{f}}) = H_{\mathrm{f}}^+(\mathbf{r}, E)$$

A diffúzióelméletben ennek nyilván az

$$n^+(\mathbf{r}, E, t_f) = H_f^+(\mathbf{r}, E)$$

végfeltétel felel meg. A kettő csak úgy lehet *egyszerre* érvényes, ha az utóbbi az előbbi átlaga. Ezért hiányzik (71.14)-ben a  $4\pi$  osztó.

### 2. Egycsoport modellek

Egycsoport transzportelméletben a (71.11) alatti operátorok a következőképpen egyszerűsödnek:

$$\hat{\mathbf{D}}^{+}n^{+} = -\vec{\Omega} \operatorname{grad} vn^{+}(\mathbf{r},\vec{\Omega},t) + \Sigma_{t}(\mathbf{r})vn^{+}(\mathbf{r},\vec{\Omega},t) - \int_{4\pi} v \Sigma(\mathbf{r},\vec{\Omega}\vec{\Omega}')n^{+}(\mathbf{r},\vec{\Omega}',t)d\vec{\Omega}'$$

és

$$\hat{\mathbf{P}}^{+}n^{+} = \nu \Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) v \int_{4\pi} n^{+} (\mathbf{r}, \vec{\Omega}', t) \frac{\mathrm{d}\Omega'}{4\pi}$$

A transzportegyenlet megfelelő operátorait (71.2) analóg egyszerűsítésével kapjuk:

$$\hat{D}n = \vec{\Omega} \text{grad } vn(\mathbf{r}, \vec{\Omega}, t) + \mathcal{L}_{t}(\mathbf{r})vn(\mathbf{r}, \vec{\Omega}, t) - \int_{4\pi} \mathcal{L}(\mathbf{r}, \vec{\Omega}\vec{\Omega}')vn(\mathbf{r}, \vec{\Omega}', t)d\vec{\Omega}'$$

és

$$\hat{\mathbf{P}}n = v \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}) v \int_{4\pi} n(\mathbf{r}, \vec{\Omega}', t) \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}'}{4\pi}.$$

Ha a megfelelő operátorokat összehasonlítjuk, akkor egyetlen különbséget látunk: a destrukciós operátor első tagjában más az előjel, mint az adjungáltjáéban. Ebből következik, hogy a transzportoperátor ettől az előjeltől eltekintve önadjungált.

Ez az észrevétel nagyban egyszerűsíti az adjungált egyenlet megoldását. Tekintsük például az időtől független transzportegyenletet:

$$\hat{\mathbf{P}}n-\hat{\mathbf{D}}n=0.$$

Ha ennek  $n(\mathbf{r}, \vec{\Omega})$  megoldása ismert, a

$$\hat{P}^{+}n^{+} - \hat{D}^{+}n^{+} = 0$$

adjungált egyenlet megoldása ebből egyszerűen kapható:  $n^+(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) = n(\mathbf{r}, -\vec{\Omega})$ .

Még egyszerűbb a helyzet egycsoport diffúzióelméletben. Ekkor ugyanis az operátor önadjungált, hiszen (35.1) alapján:

$$\hat{\mathbf{M}}n = vD\Delta n + (v \nu \Sigma_{\mathrm{f}} - v \Sigma_{\mathrm{a}})n,$$

amelynek az adjungáltja önmaga, amint – az első tagra vonatkozóan – fentebb beláttuk. Ez azt jelenti, hogy az időtől független egycsoport diffúzióegyenlet megoldása egyben az időtől független adjungált függvényt is megadja. Ezt az észrevételt jól ki lehet használni gyakorlati problémák közelítő megoldásában (lásd 7.4. alfejezet). Ezt láttuk a jelen fejezet bevezetőjében is, ahol egy  $\mathbf{r}_0$  helyen levő neutron értékességét  $\Phi_1(\mathbf{r}_0)$ -nak találtuk. Akkor még nem tudhattuk, hogy ez valójában az adjungált függvény.

#### 3. A transzportegyenlet integrális alakja

Az egyszerűség kedvéért csak az időtől független integrális transzportegyenlet adjungáltját írjuk fel. Ekkor a (22.5) egyenlet így írható:

$$n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{s} \exp\left(-\overline{\Sigma_{t}(s' \to s)}\right) \cdot Q(\mathbf{r}_{0} + s'\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \,\mathrm{d}s', \qquad (71.17a)$$

ahol [vö. (22.1b)]:

$$Q(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_{4\pi 0}^{\infty} \Sigma(\mathbf{r}, E' \to E, \vec{\Omega}\vec{\Omega}') v' n(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}' + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \frac{f(E)}{4\pi} \int_{4\pi 0}^{\infty} v \Sigma_{\text{f}}(\mathbf{r}, E') v' n(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}' .$$
(71.17b)

 $k_{\rm eff}$  bevezetése azért szükséges, mert az időtől független egyenletnek csak így van mindig megoldása. *Q* a *neutronkibocsátást* adja meg, és a (71.17a)-ban látható *transzmissziós* operátor kapcsolja össze a neutronsűrűséggel. A korábbiakhoz hasonlóan ezt is átírjuk operátoros alakba:

$$n = \hat{T}Q$$
 és  $Q = \hat{K}n$ ,

vagy vektoralakban:

$$\begin{bmatrix} n \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{T} \\ \hat{K} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \\ Q \end{bmatrix}.$$
(71.18)

Az  $n^+(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$  neutronértékesség egy  $t_f \rightarrow \infty$  időpontban elvégzett mérés szempontjából a fentiek szerint definiált neutronértékesség.<sup>18</sup> Bevezetjük még a  $Q^+(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$  kibocsátási értékességet is, amely megadja egy, időegység alatt, az  $\mathbf{r}$  helyen, *E* energiával,  $\vec{\Omega}$  irányban, szórás vagy hasadás által kibocsátott neutron utódainak összes értékességét:

$$Q^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_{4\pi0}^{\infty} \Sigma(\mathbf{r}, E \to E', \vec{\Omega}\vec{\Omega}') v n^{+}(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}' + \frac{1}{k_{\text{eff}}} \int_{4\pi0}^{\infty} v \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E) v \frac{f(E')}{4\pi} n^{+}(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}'.$$
(71.19a)

Könnyen belátható, hogy az itt szereplő operátorok a fent bevezetett  $\hat{K}$  kibocsátási operátor adjungáltját adják, vagyis

$$Q^+ = \hat{\mathbf{K}}^+ n^+ \, .$$

(71.17a) adjungáltjának a felírásához ki kell fejeznünk a neutronértékességet a kibocsátási értékességgel. Ehhez felhasználjuk a 71.1. ábrát, amely a 22.2. ábra fordított megfelelője. Az utóbbitól eltérően itt mind *s*, mind *s'* negatív, és így az ábra alapján nyilvánvaló, hogy s < s'. Ha az **r** pontból egy neutron elindul az  $\vec{\Omega}$  irányba, annak a valószínűsége, hogy ütközés nélkül eljut az **r'** pontba:

$$\exp\left(-\overline{\mathcal{\Sigma}_{t}(s\to s')}\right),$$

ahol

$$\overline{\mathcal{L}_{t}(s \to s')} = \int_{s}^{s'} \mathcal{L}_{t}(\mathbf{r}_{0} + s'' \vec{\Omega}, E) ds''.$$

.

Ha a neutron eljut **r'**-be, akkor dt = ds'/v idő alatt futja be az (s', s'+ds') intervallumot. Mivel  $Q^+$  az időegységre vonatkozik, az ezen az intervallumon kibocsátott neutronok értékessége  $Q^+ds'/v$ . Ha ezt a teljes neutronpályára összegezzük, megkapjuk az **r** pontból induló neutron értékességét:

$$n^{+}(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_{s}^{+\infty} \exp\left(-\overline{\Sigma_{t}(s \to s')}\right) \cdot Q^{+}\left(\mathbf{r}_{0} + s'\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}\right) \frac{\mathrm{d}s'}{v}, \qquad (71.19b)$$

 $<sup>^{18}</sup>$  A 7.2. alfejezetben látni fogjuk, hogy ez független a $H_{\rm f}^+$  detektorfüggvénytől.

aminek operátoros alakja:

$$n^+ = \hat{\mathrm{T}}^+ Q^+.$$

Az itt szereplő  $\hat{T}^+$  operátor annyiban különbözik a korábbi  $\hat{T}$  operátortól, hogy felcserélődött a pályamenti integrálás iránya, ami nyilván megfelel az idő megfordulásának. A kapott adjungált egyenleteket a (71.18) vektoros képlet szellemében a következőképpen egyesíthetjük:

$$\begin{bmatrix} Q^+ \\ n^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbf{K}}^+ \\ \hat{\mathbf{T}}^+ & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q^+ \\ n^+ \end{bmatrix}.$$
(71.20)

Vegyük észre, hogy az itt szereplő mátrix úgy lett adjungáltja a (71.18) alatti mátrixnak, hogy az adjungált vektorban (71.18)-hoz képest felcseréltük a komponenseket.



71.1. ábra. Az **r** helyről  $\vec{\Omega}$  irányba induló neutron pályája

# 4. Késő neutronokat tartalmazó időfüggő egyenlet

A késő neutronok figyelembevételét a 3.6. alfejezetben az egycsoport diffúzióelmélet keretében tárgyaltuk. Az alábbiakban ezt általánosítjuk a transzportelméletre, és felírjuk a megfelelő adjungált egyenleteket is. A késő neutronok figyelembevétele abban áll, hogy (71.1) helyett a következő egyenletből indulunk ki:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \hat{M}_{p}n + \sum_{i=1}^{6} \frac{f_{i}(E)}{4\pi} \lambda_{i}C_{i}(\mathbf{r}, t) + S, \qquad (71.21a)$$

ahol  $C_i(\mathbf{r},t)$  az *i*-edik csoportba tartozó későneutron-anyamagok sűrűsége,  $f_i(E)$  pedig az általuk kibocsátott késő neutronok spektruma (vö. 4.1. alfejezet). Az  $\hat{\mathbf{M}}_p$  operátor csak a prompt neutronokat tartalmazza:

$$\hat{M}_{p} = \hat{P}_{p} - \hat{D},$$
 (71.21b)

ahol [vö. (71.2c)]:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{p}}n = (1-\beta)\frac{f_{\mathbf{p}}(E)}{4\pi}\int_{4\pi0}^{\infty} \nu \Sigma_{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, E')v'n(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t)dE'd\vec{\Omega}'.$$
(71.21c)

 $[f_p(E)$  a prompt neutronok spektruma, vö. 4.1. alfejezet.] Az így kiegészített transzportegyenlethez a 7.5. alfejezetben még visszatérünk. Az eddig felírtakhoz járulnak még a későneutron-anyamagok koncentrációjára vonatkozó egyenletek [vö. (36.2b)]:

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\mathbf{r},t) + \beta_i \int_{4\pi 0}^{\infty} \nu \Sigma_f(\mathbf{r},E) vn(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t) dE d\vec{\Omega}, \qquad (71.21d)$$

$$(i = 1, 2, ..., 6).$$

Az alábbiakban felírjuk ezek adjungáltját. A korábban bevezetett  $n^+(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ neutronértékesség mellett definiáljuk a  $C_i^+(\mathbf{r}, t)$  későneutron-értékességet: egy, az *i*edik későneutron-csoporthoz tartozó anyamagnak valamely t' > t időpontban bekövetkező bomlása révén keletkező neutron értékessége. Ha megismételjük a (71.10) – (71.11) egyenletekhez vezető gondolatmenetet, akkor a dt idő alatt bekövetkező hasadások járulékát szét kell bontanunk a prompt és késő neutronok járulékára. A (t, t+dt) időintervallumban keletkező prompt neutronok összes értékessége:

$$(1-\beta)\int_{4\pi0}^{\infty} v \mathrm{d}t \, v \Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}, E) f_{\mathrm{p}}(E') n^{+}(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) \mathrm{d}E' \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}'}{4\pi} = \hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{p}}^{+} n^{+} \mathrm{d}t$$

Ez alatt az idő alatt keletkezik  $\beta_i v \Sigma_f(\mathbf{r}, E) v dt$  számú, az *i*-edik csoporthoz tartozó későneutron-anyamag. Mindegyikük értékessége  $C_i^+(\mathbf{r}, t)$ . A hat csoport összes járuléka tehát

$$\sum_{i=1}^{6} \beta_i v \Sigma_{\rm f}(\mathbf{r}, E) v dt C_i^+(\mathbf{r}, t)$$

Végeredményben (71.10) helyett a következőt kapjuk:

$$-\frac{\partial n^{+}}{\partial t} = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{p}}^{+} n^{+} - \hat{\mathbf{D}}^{+} n^{+} + \sum_{i=1}^{6} \beta_{i} \nu \Sigma_{\mathbf{f}}(\mathbf{r}, E) v C_{i}^{+}(\mathbf{r}, t).$$
(71.22a)

A későneutron-értékességre a következőképpen vezethetünk le egyenletet. Annak a valószínűsége, hogy egy, az *i*-edik csoporthoz tartozó anyamag a (*t*, *t*+d*t*) időintervallumban nem bomlik el:  $(1 - \lambda_i dt)$ . Az elbomló hányadból az (*E*, *E*+d*E*) energiaintervallumba eső energiájú neutronok száma:  $\lambda_i dt f_i(E) dE$ . Ha ezt megszorozzuk a keletkező neutronok értékességével, valamint a d $\overline{\Omega}/4\pi$  szögeloszlással, továbbá integrálunk *E* és  $\overline{\Omega}$  szerint, megkapjuk az *i*-edik csoporthoz tartozó anyamagok bomlása révén keletkező teljes értékességet. E két tag összegének ki kell adnia a kiindulási anyamag értékességét:

$$C_i^+(\mathbf{r},t) = (1-\lambda_i \mathrm{d}t)C_i^+(\mathbf{r},t+\mathrm{d}t) + \lambda_i \mathrm{d}t \int_{4\pi 0}^{\infty} f_i(E)n^+(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t)\mathrm{d}E \frac{\mathrm{d}\vec{\Omega}}{4\pi}.$$

Ha ezt átrendezzük, és d*t*-vel osztunk, majd d*t*-vel tartunk 0-hoz, megkapjuk a keresett egyenletet:

$$-\frac{\partial C_i^+(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i^+(\mathbf{r},t) + \lambda_i \int_{4\pi} \int_0^\infty \frac{f_i(E)}{4\pi} n^+(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t) dE d\vec{\Omega}, \qquad (71.22b)$$

$$(i = 1, 2, ..., 6).$$

Nem triviális, hogy a (71.22) egyenletrendszer valóban a (71.21) egyenletek adjungáltja. Ennek belátásához bevezetjük a következő jelöléseket. A (71.21d) jobb oldalán szereplő integrált tekintsük az alábbi operátor eredményének:

$$\hat{\mathcal{I}}_{\Sigma i} n = \beta_i \iint_{4\pi 0}^{\infty} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E) vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega}.$$
(71.23a)

Ez nem az eddigiekben megszokott alakú integráloperátor, valójában egy funkcionál, mert az  $\mathbf{r}$ , E,  $\vec{\Omega}$  és t változók függvényeit az  $\mathbf{r}$  és t változók függvényeibe viszi át. Megmutatjuk, hogy ennek adjungáltja

$$\hat{\mathscr{I}}_{\Sigma i}^{+} \psi^{+} = \beta_{i} v \Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r}, E) v \psi^{+}(\mathbf{r}, t), \qquad (71.23b)$$

ahol  $\psi^{\dagger}(\mathbf{r},t)$  tetszőleges (integrálható) függvény. Ehhez igazolnunk kell az alábbi két belső szorzat azonosságát:

$$\left(\psi^+, \hat{\gamma}_{\Sigma i}n\right) = \left(\hat{\gamma}_{\Sigma i}^+\psi^+, n\right).$$

A bal oldalon szereplő függvények csak  $\mathbf{r}$  és t függvényei, tehát a bal oldali belső szorzat csak  $\mathbf{r}$  szerint jelent integrálást:

$$\left(\psi^{+},\hat{\mathcal{I}}_{\Sigma i}n\right) = \int \psi^{+}(\mathbf{r},t)\hat{\mathcal{I}}_{\Sigma i}n\mathrm{d}V = \int \mathrm{d}V\psi^{+}(\mathbf{r},t)\beta_{i}\int_{4\pi0}^{\infty}v\Sigma_{\mathrm{f}}(\mathbf{r},E)vn(\mathbf{r},E,\vec{\Omega},t)\mathrm{d}E\mathrm{d}\vec{\Omega}.$$

A jobb oldalon szereplő függvények az  $\mathbf{r}$ , E,  $\overline{\Omega}$  és t változók függvényei, tehát a jobb oldali belső szorzat  $\mathbf{r}$ , E és  $\overline{\Omega}$  szerinti integrálást jelent:

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\Sigma i}^{+} \psi^{+}, n \end{pmatrix} = \int \int_{4\pi} \int_{0}^{\infty} \hat{\gamma}_{\Sigma i}^{+} \psi^{+} n (\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega} dV =$$
$$= \int \int \int_{4\pi0}^{\infty} \beta_{i} \nu \Sigma_{f} (\mathbf{r}, E) v \psi^{+} (\mathbf{r}, t) n (\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dE d\vec{\Omega} dV .$$

Nyilvánvaló a két belső szorzat egyenlősége.

A (71.22b) egyenlet jobb oldalán szereplő integrál szerkezete ugyanaz, mint a (71.23a)-ban definiált operátoré. Mivel ez az adjungált függvényre hat, ezt egy operátor adjungáltjának tekintjük:

$$\hat{\mathcal{I}}_{fi}^{+}n^{+} = \lambda_{i} \int_{4\pi0}^{\infty} \frac{f_{i}(E)}{4\pi} n^{+} \left(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t\right) dE d\vec{\Omega} .$$
(71.24a)

Az előbbiek mintájára be lehet látni, hogy ez a következő operátor adjungáltja:

$$\hat{\mathcal{I}}_{\mathrm{f}i}\psi = \lambda_i \frac{f_i(E)}{4\pi}\psi(\mathbf{r},t), \qquad (71.24\mathrm{b})$$

ahol  $\psi(\mathbf{r},t)$  tetszőleges függvény.

A fent bevezetett jelölésekkel a (71.21) egyenletrendszer az alábbi módon írható vektoros alakba:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} n \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{M}_p & \hat{\eta}_{f1} & \hat{\eta}_{f2} & \hat{\eta}_{f3} & \hat{\eta}_{f4} & \hat{\eta}_{f5} & \hat{\eta}_{f6} \\ \hat{\eta}_{\Sigma 1} & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\eta}_{\Sigma 2} & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\eta}_{\Sigma 3} & 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\eta}_{\Sigma 4} & 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ \hat{\eta}_{\Sigma 5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 & 0 \\ \hat{\eta}_{\Sigma 6} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}.$$
(71.25a)

A (71.22) egyenletrendszer analóg vektoros alakja:

274

$$-\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}n^{+}\\C_{1}^{+}\\C_{2}^{+}\\C_{3}^{+}\\C_{4}^{+}\\C_{5}^{+}\\C_{6}^{+}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{M}_{p}^{+} \ \hat{\gamma}_{\Sigma 1}^{+} \ \hat{\gamma}_{\Sigma 2}^{+} \ \hat{\gamma}_{\Sigma 3}^{+} \ \hat{\gamma}_{\Sigma 4}^{+} \ \hat{\gamma}_{\Sigma 5}^{+} \ \hat{\gamma}_{\Sigma 6}^{+}\\\hat{\gamma}_{5}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \\\hat{\gamma}_{6}^{+} \ \hat{\gamma}_{5}^{-} \ \hat{\gamma}_{5}^{-}$$

A két egyenlet mátrixa nyilvánvalóan egymás adjungáltja.

# 7.2. Az adjungált függvény időfüggése

A 2.2. alfejezetben bevezettük a kinetikus és sztatikus sajátértékeket [lásd a (22.6b), illetve (22.7) egyenleteket], továbbá a 3. fejezetben meg is határoztuk őket. Egycsoport diffúziós közelítésben azt találtuk, hogy mindkét fajta sajátértékek diszkrétek, és így nagyság szerint sorba rendezhetők. Tekintve, hogy az alábbiak témája az adjungált függvény időfüggése és nem a sajátérték-probléma általánosságban való vizsgálata, az egyszerűség kedvéért általánosságban is feltételezzük, hogy a sajátértékek diszkrétek. Az időfüggésre kapott következtetéseink akkor is érvényesek maradnak azonban, ha van olyan eset, amelyben a sajátértékek spektrumának van folytonos része.

A jelen fejezet operátoros jelöléseivel a sajátérték-egyenletek a következőképpen írhatók fel:

kinetikus sajátérték:

$$\omega n = \hat{P}n - \hat{D}n; \qquad (72.1a)$$

sztatikus sajátérték:

$$\hat{\mathbf{D}}n = \frac{1}{k}\,\hat{\mathbf{P}}n\,.\tag{72.2a}$$

Ezeknek az egyenleteknek az analogonja felírható az adjungált egyenletekre vonatkozóan is:

$$-\omega^{+}n^{+} = \hat{P}^{+}n^{+} - \hat{D}^{+}n^{+}$$
(72.1b)

és

$$\hat{\mathbf{D}}^{+}n^{+} = \frac{1}{k^{+}}\hat{\mathbf{P}}^{+}n^{+}.$$
(72.2b)

Az adjungált kinetikus sajátérték esetében a negatív előjel a t szerinti deriváltnak a (71.10) adjungált egyenletben szereplő negatív előjele miatt jelenik meg. A sztatikus sajátértékek és sajátfüggvények esetében – ha szükséges – megkülönböztetésül gyakran alkalmazunk egy "s" indexet.

Alábbi megfontolásainkban igyekszünk megtartani az általános operátoros jelölést, mert ez modelltől független kijelentéseket tesz lehetővé. Ha indokolt a t időváltozó mellett kitenni a modell többi változóját is, erre az **x** vektort fogjuk használni, amelynek a jelentése függ a konkrét modelltől. Például:

- transzportelméletben:  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, E, \vec{\Omega});$
- egycsoport transzportelméletben:  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \hat{\mathbf{\Omega}})$ ;
- diffúzióelméletben:  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, E)$ ;
- egycsoport diffúzióelméletben:  $\mathbf{x} = (\mathbf{r})$ ;
- többcsoport diffúzióelméletben:  $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, g)$ , ahol g a csoport indexe;

és így tovább. Amikor belső szorzatot képezünk, ez az **x** vektor minden komponense szerinti integrálást jelenti, vagyis tetszőleges  $\psi(\mathbf{x})$  és  $\psi^{\dagger}(\mathbf{x})$  függvényekre:

$$(\psi^+,\psi) = (\psi,\psi^+) = \int \psi^+(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Többcsoport modellek esetében az E energia szerinti integrálást a g csoportindexre való összegzés helyettesíti. Például többcsoport diffúzióelméletben:

$$\left(\boldsymbol{\psi}^{+},\boldsymbol{\psi}\right) = \sum_{g} \int \boldsymbol{\psi}_{g}^{+}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\psi}_{g}(\mathbf{r}) \mathrm{d}V.$$

A különböző sajátértékekhez tartozó egyenes és adjungált sajátfüggvények egymásra ortogonálisak. Ennek belátásához a kinetikus sajátérték-egyenletet felírjuk két sajátértékre:

$$\omega_j n_j = \hat{\mathbf{P}} n_j - \hat{\mathbf{D}} n_j \qquad \text{és} \qquad -\omega_\ell^+ n_\ell^+ = \hat{\mathbf{P}}^+ n_\ell^+ - \hat{\mathbf{D}}^+ n_\ell^+.$$

Ezeknek az egyenleteknek képezzük a másik sajátfüggvényekkel való belső szorzatát, majd az eredményeket egymásból kivonjuk:

$$\left(\omega_{j}+\omega_{\ell}^{+}\right)\left(n_{\ell}^{+},n_{j}\right)=\left(n_{\ell}^{+},\left(\hat{\mathbf{P}}-\hat{\mathbf{D}}\right)n_{j}\right)-\left(\left(\hat{\mathbf{P}}^{+}-\hat{\mathbf{D}}^{+}\right)n_{\ell}^{+},n_{j}\right)=0.$$

Ha tehát  $\omega_j \neq -\omega_\ell^+$ , az egyenes és adjungált sajátfüggvények egymásra ortogonálisak. A *j* és  $\ell$  indexeket célszerű úgy megválasztani, hogy  $j = \ell$  esetén  $\omega_j = -\omega_\ell^+$  legyen<sup>19</sup>. A sztatikus sajátfüggvényekre vonatkozóan a fenti módon meg lehet mutatni, hogy

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup> Ez lehetséges, mert – meglehetősen általános feltételekkel – egy operátornak és adjungáltjának azonos a sajátértékspektruma.

$$\left(n_{\mathrm{s}\ell}^+, \hat{\mathrm{P}}n_{\mathrm{s}j}\right) = 0$$
, ha  $k_{\ell}^+ \neq k_j$ .

A sztatikus sajátfüggvények esetében tehát az ortogonalitás csak a produkciós operátor közbeiktatásával érvényes.

### Neutronsűrűség és neutronértékesség

A sajátfüggvények szerinti sorfejtés segítségével megmutatjuk, hogy más nézőpontból ugyan, de az adjungált függvény ugyanazt a fizikai tartalmat fejezi ki, mint a neutronsűrűség. Mint a jelen fejezet bevezetőjében tettük, bejuttatunk a reaktorba egy neutront, amelynek a jellemzőit (helyét, energiáját stb.) az  $\mathbf{x}_0$  vektor jellemzi. Ekkor tehát a kezdeti feltétel:

$$n(\mathbf{x},t)\Big|_{t=t_{i}} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0}), \qquad (72.3)$$

amiből kiindulva a (71.1) egyenlet alapján kapjuk meg a  $t_f$  időpontban, a  $H_f^+(\mathbf{x})$  detektorfüggvénnyel jellemzett detektorral elvégzett mérés eredményét. A korábbiak analógiájára a (71.1) egyenlet megoldását az

$$n(\mathbf{x},t) = \sum_{\ell} f_{\ell} \mathrm{e}^{\omega_{\ell} t} n_{\ell}(\mathbf{x})$$

sor alakjában keressük, ahol  $\omega_{\ell}$  és  $n_{\ell}(\mathbf{x})$  a (72.1a) szerinti sajátértékek, illetve sajátfüggvények ( $\ell = 1, 2, ...$ ). Az  $f_{\ell}$  együtthatókat a kezdeti feltételből határozzuk meg:

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = \sum_{\ell} f_{\ell} \mathrm{e}^{\boldsymbol{\omega}_{\ell} t_{\mathrm{i}}} n_{\ell}(\mathbf{x}) \,.$$

Ha képezzük a (72.1b) szerinti egyik adjungált sajátfüggvénnyel való belső szorzatot, akkor az ortogonalitás miatt kapjuk:<sup>20</sup>

$$f_{\ell} = n_{\ell}^+ (\mathbf{x}_0) \mathrm{e}^{-\omega_{\ell} t_{\mathrm{i}}} ,$$

amiből

$$n(\mathbf{x},t) = \sum_{\ell} n_{\ell}^{+}(\mathbf{x}_{0}) \mathrm{e}^{\omega_{\ell}(t-t_{\mathrm{i}})} n_{\ell}(\mathbf{x}).$$
(72.4)

A  $t_i$  időpontban  $\mathbf{x}_0$  tulajdonságú neutron értékessége – definíció szerint – a  $t_f$  időpontban elvégzett mérés eredménye:

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup> Feltételezzük, hogy a sajátfüggvények nem eltűnő belső szorzatai 1-re vannak normálva.

$$n^{+}(\mathbf{x}_{0}, t_{i}) = \left(H_{f}^{+}, n(t_{f})\right) = \sum_{\ell} n_{\ell}^{+}(\mathbf{x}_{0}) e^{\omega_{\ell}(t_{f} - t_{i})} \left(H_{f}^{+}, n_{\ell}\right).$$
(72.5)

Gondolatmenetünkből látható, hogy a neutronértékesség meghatározásához tulajdonképpen nem szükséges az adjungált egyenlet megoldása, elegendő a (71.1) egyenlet megoldását ismerni. Megmutatjuk viszont, hogy – másik oldalról – az adjungált egyenlet megoldása is pontosan a (72.5) alatti eredményre vezet. A fentiek mintájára az adjungált függvényt az

$$n^+(\mathbf{x},t) = \sum_{\ell} f_{\ell}^+ \mathrm{e}^{-\omega_{\ell} t} n_{\ell}^+(\mathbf{x})$$

sor alakjában kereshetjük, ahol kihasználtuk, hogy a (72.1b) szerinti adjungált sajátértékek az előbbiek negatívjai. Az  $f_{\ell}^+$  együtthatókat a

$$H_{\rm f}^+(\mathbf{x}) = \sum_{\ell} f_{\ell}^+ \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\omega}_{\ell} t_{\rm f}} n_{\ell}^+(\mathbf{x})$$

végfeltételből határozzuk meg az ortogonalitás alapján:

$$f_{\ell}^{+} = \mathrm{e}^{\omega_{\ell} t_{\mathrm{f}}} \Big( H_{\mathrm{f}}^{+}, n_{\ell} \Big).$$

Ezzel

$$n^{+}(\mathbf{x},t) = \sum_{\ell} n_{\ell}^{+}(\mathbf{x}) \mathrm{e}^{\omega_{\ell}(t_{\mathrm{f}}-t)} \left( H_{\mathrm{f}}^{+}, n_{\ell} \right).$$
(72.5a)

Ha ide  $t = t_i$ -t és  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ -t helyettesítünk, megkapjuk (72.5)-öt. Ezt értettük azon, hogy a transzportegyenlet és adjungáltja ugyanazt a fizikai tartalmat fejezi ki.

Ha a reaktor kritikus,  $\omega_l = 0$  és  $\omega_l < 0$ , amikor l > 1. (72.4)-ből következik, hogy elég nagy *t*-re ( $t >> t_i$ ) az l > 1 tagok mind elhanyagolhatók az első tag mellett, vagyis a neutronsűrűség – a kezdeti feltételtől függetlenül – arányossá válik az  $n_1(\mathbf{x})$ sajátfüggvénnyel, amelyet a 3.4. alfejezetben *alapmódus*nak neveztünk. Analóg viselkedést mutat az adjungált függvény is. (72.5a)-ból következik, hogy elég korai *t*-re ( $t \ll t_f$ ) az l > 1 tagok mind elhanyagolhatók az l = 1 tag mellett, vagyis a neutronértékesség – a végfeltételtől függetlenül – arányossá válik az  $n_1^+(\mathbf{x})$  sajátfüggvénnyel. A transzportegyenlettel leírható diffúzív rendszerek tehát egy bizonyos idő elteltével "elfelejtik" a kezdeti eloszlást. Látjuk, hogy ez a felejtési tulajdonság az időben mindkét irányban érvényes: a neutronsűrűség esetében előre, az adjungált függvény esetében pedig visszafelé. Mivel mindkét mennyiség ugyanazt a fizikai folyamatot írja le, a felejtési időállandó azonos.

Amikor a reaktor nem kritikus,  $\omega_l \neq 0$ , vagyis nem alakul ki időben állandó neutronsűrűség, de továbbra is fennáll, hogy  $\omega_{\ell} < \omega_l$ , amikor  $\ell > 1$ . Ekkor is igaz tehát, hogy elég nagy *t*-re ( $t >> t_i$ ) az  $\ell > 1$  tagok mind elhanyagolhatók az első tag mel-

lett. Kialakul az ún. állandósult módus,<sup>21</sup> ami azt jelenti, hogy a neutronsűrűség a kezdeti feltételtől függetlenné válva az  $n_1(\mathbf{x})$  sajátfüggvénnyel arányos, és az idővel exponenciális függvény szerint változik. Hasonló kijelentés érvényes az adjungált függvényre, amely  $t \ll t_f$  időkre szintén átmegy az állandósult módusba: arányos az  $n_1^+(\mathbf{x})$ sajátfüggvénnyel, és időben exponenciálisan változik.

Szuperkritikus állapotban az állandósult módus divergens ( $\omega_l > 0$ ): a neutronsűrűség esetében a  $t \rightarrow +\infty$ , a neutronértékesség esetében pedig a  $t \rightarrow -\infty$  határesetben. Az állításnak ez a két része összhangban van egymással: a  $t_f$  időponthoz képest minél korábban juttatunk egy neutront a reaktorba, utódainak száma annál nagyobb lesz, így annál nagyobb lesz a hozzájárulása a  $t_f$  időpontban végzett méréshez is. Szubkritikus állapotban ( $\omega_l < 0$ ) az állandósult módus a fenti határesetekben 0-hoz tart: a  $t_f$  időponthoz képest elegendően korai t időpontban a reaktorba juttatott neutronnak a mérés időpontjában már gyakorlatilag nem lesz utódja.

#### Forrásértékesség

.

Tekintsünk egy szubkritikus reaktort, amelynek speciális esete lehet egy hasadóanyagot nem tartalmazó rendszer is. A fentiekben láttuk, hogy ebben a neutronsűrűség és a neutronértékesség 0-hoz tart a  $t \rightarrow +\infty$ , illetve  $t \rightarrow -\infty$  határesetekben. Emiatt ilyen rendszerekben csak külső neutronforrás jelenlétében lehetséges időben állandó megoldás:

$$(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{D}})n + S = 0,$$
 (72.6)

ahol  $S(\mathbf{x})$  az említett, időben állandó külső neutronforrás. Megnézzük, értelmezhető-e a detektortérben is egy ilyen alakú egyenlet, és ha igen, mi annak forrástagja.

Feltesszük, hogy a külső neutronforrás  $t = -\infty$ -től kezdve juttat neutronokat a rendszerbe, és kérdezzük, milyen hozzájárulást adnak ezek utódai a  $t_f$  időpontban elvégzett méréshez. A neutronértékesség  $t \rightarrow -\infty$ -re 0-hoz tart, így  $t_f$ -hez képest elegendően korán bejutatott forrásneutronok utódai elhanyagolható járulékot adnak. Egy  $t_f$ -hez közeli (t, t+dt) intervallumban bejutó forrásneutronok utódainak a járuléka (definíció szerint):

$$\left(n^+(\mathbf{x},t),S(\mathbf{x})\mathrm{d}t\right).$$

Ha ezt a szóba jövő időintervallumokra összegezzük, kiadódik a keresett teljes járulék:

$$R(t_{\rm f}) = \left(S^+(\mathbf{x}), S(\mathbf{x})\right),\tag{72.7}$$

ahol

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup> Az angol nyelvű irodalom *perzisztens módus*ról beszél (persistent mode).

$$S^{+}(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{t_{\mathrm{f}}} n^{+}(\mathbf{x}, t) \mathrm{d}t \,. \tag{72.8}$$

Az integrál konvergens, mivel – mint fentebb láttuk – az alsó határ felé tartva az integrandus *exponenciálisan* 0-hoz tart. A (72.8) egyenletben definiált mennyiség neve: *forrásértékesség*.

A (71.10) egyenlet alapján könnyen levezethetjük a forrásértékesség által kielégített egyenletet. (71.10)-et *t* szerint integráljuk a  $(-\infty, t_f]$  intervallumban:

$$-n^{+}(\mathbf{x},t_{\mathrm{f}}) = \left(\hat{\mathrm{P}}^{+} - \hat{\mathrm{D}}^{+}\right) \int_{-\infty}^{t_{\mathrm{f}}} n^{+}(\mathbf{x},t) \mathrm{d}t$$

A (72.8) definíció és a (71.9) végfeltétel felhasználásával ezt a következő alakra hozhatjuk:

$$(\hat{\mathbf{P}}^{+} - \hat{\mathbf{D}}^{+})S^{+} + H_{\rm f}^{+} = 0.$$
 (72.9)

Ez az egyenlet emlékeztet a (72.6) egyenletre. Azt találtuk tehát, hogy a forrásos adjungált egyenlet "forrása" a detektorfüggvény.

Utóbbi eredményünk alkalmazására a következő példát hozzuk. Feltesszük, hogy egy térben kiterjedt neutronforrás neutronokat juttat a vizsgált rendszerbe, és a rendszeren kívül eső pontban (a dózispontban) keressük az ott kialakuló neutronsugárzás által leadott sugárdózist. Fenti jelöléseinkkel: S(x) egy kiterjedt térfogatban különbözik 0-tól, viszont  $H_{\rm f}^+(\mathbf{x})$  a dózisponton kívül eltűnik. Amikor a (72.6) egyenletnek Monte Carlo módszerrel (lásd 2.4. alfejezet) való megoldása révén kívánjuk kiszámítani a dózist, a számítás nem fog konvergálni. Ennek oka a következő. A számításban a neutrongenerációkat nyilván az  $S(\mathbf{x})$  neutronforrásból indítjuk. Miután a neutronok keresztüldiffundálnak a vizsgált rendszeren, nincs valószínűsége annak, hogy valamelyik neutron egy pontszerű detektoron áthaladjon, és abban reakciót váltson ki. A problémán némileg segít, ha a detektort nem pontszerűnek vesszük, hanem kiterjesztjük annak egy kis környezetére, de továbbra is nehézséget okoz, hogy nagyon kevés olyan neutrongeneráció lesz, amely járulékot ad a keresett dózishoz. A megoldást az ún. adjungált Monte Carlo módszer jelenti, amely a (72.9) egyenlet megoldását igényli. Jóllehet a 7.1. alfejezetben hangsúlyoztuk, hogy nincsenek olyan részecskék, amelyek fluxusát az adjungált függvény jelentené, formálisan mégis lehet a forrásértékességet ilyennek tekinteni, amelynek transzportját a  $(\hat{P}^+ - \hat{D}^+)$  adjungált operátor írja

le. Tehát az "adjungált részecskéket" a  $H_{\rm f}^+$  "adjungált forrásból" indítjuk, majd a vizsgált rendszeren való "adjungált diffúzió" után akkor regisztrálunk járulékot a keresett dózishoz, amikor a részecske áthalad a neutronforráson – mint ez (72.7)-ben látható. Tekintve, hogy a neutronforrás térben kiterjedt, számottevő annak a valószínűsége, hogy egy "adjungált részecske" áthaladjon rajta. Természetesen az adjungált

Monte Carlo módszer nem jár ezzel az előnnyel, ha az  $S(\mathbf{x})$  neutronforrás is pontszerű.<sup>22</sup>

#### Sztatikus sajátfüggvény

Gyakorlati alkalmazásokban leggyakrabban az adjungált sztatikus sajátfüggvényt számítjuk ki, vagyis megoldjuk a (72.2) sajátérték-problémát. A 3.5. alfejezetben láttuk, hogy a sztatikus sajátértékek sorozata [vö. (35.7)] monoton csökken, amelynek első tagja az effektív sokszorozási tényező ( $k_{eff}$ ). A neki megfelelő sajátérték-egyenlet:

$$\hat{\mathbf{D}}n_{\rm s} = \frac{1}{k_{\rm eff}}\hat{\mathbf{P}}n_{\rm s} \tag{72.10a}$$

és

$$\hat{\mathbf{D}}^+ n_{\rm s}^+ = \frac{1}{k_{\rm eff}} \hat{\mathbf{P}}^+ n_{\rm s}^+ \,.$$
 (72.10b)

Az itt használt "s" index az egyenlet "sztatikus" voltára utal. A különböző geometriák esetében számos program létezik a (72.10) egyenletek megoldására. Ezért az alábbiakban úgy tekinthetjük, hogy az  $n_s$  és  $n_s^+$  sztatikus sajátfüggvények minden konkrét esetben ismertek. Többcsoport diffúzióelméletben ennek módszereit az 5.3. és 5.4. alfejezetekben tárgyaljuk.

### 7.3. Variációs elvek

A fentiekben tárgyaltakon túlmenően az adjungált függvénynek van egy további szerepe is: lehetővé teszi a transzportegyenletnek (és közelítéseinek) *variációs elvek* formájában való megfogalmazását. A fizikában gyakran alkalmazunk variációs elveket. Szerepük kettős: egyrészt tömör formában tartalmazzák az alapegyenleteket, másrészt az egyenletek közelítő megoldásával is lehetővé teszik bizonyos mennyiségeknek *első rendben* pontos számítását. Tekintve, hogy a transzportegyenlet nem önadjungált, a variációs elv megfogalmazásához is két függvény szükséges: a neutronsűrűség és az adjungált függvény.

### A transzportelmélet Lagrange-függvénye

A transzportegyenletnek megfelelő *Lagrange-függvény* a (71.8) alatt felírt reakciógyakoriság. Legyen  $n^+$  a detektortéren értelmezett (egyelőre tetszőleges) függvény, amely kielégíti a (71.7) alatti határfeltételt. Írjuk fel  $R(t_f)$ -et az alábbi alakban:

<sup>&</sup>lt;sup>22</sup> Pontszerű neutronforrás és neutrondetektor esetében egyik módszer sem alkalmazható, sem a direkt, sem az adjungált Monte Carlo szimuláció. Ilyenkor a transzportegyenlet valamilyen más közelítő megoldási módszerét kell keresni.

$$R(t_{\rm f}) = R(t_{\rm i}) + \int_{t_{\rm i}}^{t_{\rm f}} \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t \;,$$

ahol  $t_i$  az az időpont, amelyre a (71.4) kezdőfeltétel vonatkozik. Itt R(t) helyére a  $t_i < t < t_f$  időpontokban az

$$R(t) = \left(n(t), n^+(t)\right)$$

kifejezést kell írni. Ha még figyelembe vesszük (71.1)-et is, akkor

$$R(t_{\rm f}) = \left(n(t_{\rm i}), n^{+}(t_{\rm i})\right) + \int_{t_{\rm i}}^{t_{\rm f}} \left[ \left(\frac{\partial n(t)}{\partial t}, n^{+}(t)\right) + \left(n(t), \frac{\partial n^{+}(t)}{\partial t}\right) \right] dt =$$
$$= \left(n(t_{\rm i}), n^{+}(t_{\rm i})\right) + \int_{t_{\rm i}}^{t_{\rm f}} \left[ \left(\hat{M}n + S, n^{+}(t)\right) + \left(n(t), \frac{\partial n^{+}(t)}{\partial t}\right) \right] dt$$
(73.1)

adódik. A variációs elvnek megfelelően feltesszük a kérdést: hogyan kell  $n^+$ -et megválasztani, hogy  $R(t_f)$  stacionárius maradjon a neutronsűrűség kis variációival szemben? Tehát *n*-et megváltoztatjuk  $\delta n$ -nel. Mivel (71.4) szerint a neutronsűrűség  $t = t_i$ -re adott,  $\delta n(t_i) = 0$ , amivel

$$\delta R(t_{\rm f}) = \int_{t_{\rm i}}^{t_{\rm f}} \left[ \left( \hat{M} \delta n, n^+(t) \right) + \left( \delta n(t), \frac{\partial n^+(t)}{\partial t} \right) \right] dt = \int_{t_{\rm i}}^{t_{\rm f}} \left( \delta n(t), \hat{M}^+ n^+ + \frac{\partial n^+(t)}{\partial t} \right) dt.$$
(73.2)

Ez akkor tűnik el minden  $\delta n$ -re, ha

$$\hat{\mathbf{M}}^{+}n^{+} + \frac{\partial n^{+}(t)}{\partial t} = 0,$$

vagyis  $n^+$  kielégíti a (71.10) alatti adjungált egyenletet.

A (73.1) alatti Lagrange-függvényre alapozott variációs elv tehát tartalmazza az adjungált egyenletet. Egyszerűen beláthatjuk, hogy ebben az elvben benne van a (71.1) transzportegyenlet *is*. (73.1)-ben parciálisan integrálunk:

$$R(t_{\rm f}) = \left(n(t_{\rm f}), n^+(t_{\rm f})\right) + \int_{t_{\rm f}}^{t_{\rm f}} \left[\left(\hat{\rm M}n + S, n^+(t)\right) - \left(\frac{\partial n(t)}{\partial t}, n^+(t)\right)\right] \mathrm{d}t, \qquad (73.3)$$

majd ezt  $n^+$  szerint variáljuk:

$$\delta R(t_{\rm f}) = \left(n(t_{\rm f}), \delta n^+(t_{\rm f})\right) + \int_{t_{\rm i}}^{t_{\rm f}} \left(\hat{M}n + S - \frac{\partial n(t)}{\partial t}, \delta n^+(t)\right) dt .$$
(73.4)

Ahhoz, hogy ez minden  $\delta n^+$ -re stacionárius legyen, az szükséges, hogy *n* kielégítse a (71.1) alatti transzportegyenletet, továbbá

$$\delta n^+(t_{\rm f}) = 0$$

legyen, vagyis  $n^+$  elégítse ki a (71.9) végfeltételt.

Azt kaptuk tehát, hogy a (73.1) alatti Lagrange-függvény mind a neutronsűrűségre, mind az adjungált függvényre vonatkozóan stacionárius, továbbá ebből mint variációs elvből mindkét egyenlet származtatható.

### Stacionárius képletek

A fentiekben definiált variációs elvnek az elméleti jelentőségen kívül van gyakorlati haszna is: lehetővé teszi bizonyos fizikai mennyiségek közelítő számításának a javítását. Ennek legfontosabb alkalmazása a következő fejezetben kifejtett *perturbációelmélet*, amely elsősorban kis reaktivitáseffektusok nagy pontosságú számítására szolgál. A jelen alfejezet befejezéséül a (32.4) Helmholtz-egyenletre vonatkozóan mutatunk egy példát.<sup>23</sup>

Mivel ez az egyenlet önadjungált, a  $B^2$  görbületi paraméterre vonatkozó stacionárius képletet az alábbi alakban kereshetjük:

$$B^{2} = -\frac{\left(\boldsymbol{\Phi}, \Delta \boldsymbol{\Phi}\right)}{\left(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}\right)}.$$
(73.5)

Ha ugyanis valamely  $\Phi(\mathbf{r})$  függvény kielégíti (32.4)-et, akkor ennek kis  $\delta \Phi(\mathbf{r})$  variációja első rendben nem változtatja meg  $B^2$ -et:

$$\begin{split} \delta B^2 &\approx -\frac{\left(\delta \Phi, \Delta \Phi\right) + \left(\Phi, \Delta \delta \Phi\right)}{\left(\Phi, \Phi\right)} + \frac{2\left(\Phi, \Delta \Phi\right) \cdot \left(\delta \Phi, \Phi\right)}{\left(\Phi, \Phi\right)^2} = \\ &= -\frac{2\left(\delta \Phi, \Delta \Phi\right)}{\left(\Phi, \Phi\right)} + \frac{2\left(\Phi, \Delta \Phi\right) \cdot \left(\delta \Phi, \Phi\right)}{\left(\Phi, \Phi\right)^2} = \\ &= B^2 \frac{2\left(\delta \Phi, \Phi\right)}{\left(\Phi, \Phi\right)} - B^2 \frac{2\left(\delta \Phi, \Phi\right)}{\left(\Phi, \Phi\right)} = 0 \,. \end{split}$$

Vegyünk például egy R = 1 sugarú gömböt, amelyre:

<sup>&</sup>lt;sup>23</sup> Az alábbi példákat a [20] kézikönyvből vettük át.

$$\Delta \Phi(r) = \frac{\mathrm{d}^2 \Phi(r)}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r} \frac{\mathrm{d}\Phi(r)}{\mathrm{d}r},$$

továbbá pontosan ismert a görbületi paraméter értéke:  $B^2 = \pi^2 = 9,87$ . Ezzel a (73.5) szerinti stacionárius képlet:

$$B^{2} = -\frac{\int_{0}^{1} \Phi(r) \left[ \frac{d^{2} \Phi(r)}{dr^{2}} + \frac{2}{r} \frac{d \Phi(r)}{dr} \right] 4\pi r^{2} dr}{\int_{0}^{1} \Phi(r)^{2} 4\pi r^{2} dr}.$$
(73.6)

A görbületi paraméter számítására felveszünk néhány, a diffúziós határfeltételt  $[\Phi(1) = 0]$  és bizonyos triviális követelményeket kielégítő próbafüggvényt. Az egyik legegyszerűbb kétszer differenciálható függvény:

$$\boldsymbol{\Phi}_{1}(r) = (1-r)^{2}, \tag{73.7a}$$

amelyre a (73.6) képlet szerinti görbületi paraméter:  $B_{(1)}^2 = 14$ . Ennek hibája 40%. E próbafüggvény hiányossága, hogy az r = 0 pontban nincs szélsőértéke, hiszen első deriváltjának értéke itt –2. Módosítjuk tehát a próbafüggvényt:

$$\Phi_2(r) = 1 - r^2, \tag{73.7b}$$

amelynek a deriváltja már eltűnik az r = 0 pontban. Erre (73.6) szerint  $B_{(2)}^2 = 10,5$  adódik, amely már lényegesen jobb közelítés. (Hibája csak 6,5%.)

További próbafüggvények is elképzelhetők. Felmerül a kérdés, melyik közülük a legjobb. A funkcionálanalízisből tudjuk, hogy a (73.5) szerinti képleteknek van egy minimumtulajdonságuk: az elképzelhető próbafüggvények közül az vezet az egzakt megoldáshoz legközelebbi eredményre, amely a képletben a legkisebb görbületi paramétert adja. Ez az észrevétel a módszer további javítását teszi lehetővé. Legyen például a próbafüggvény a (73.7b) függvénynek és négyzetének a kombinációja:

$$\Phi_3(r) = 1 - r^2 + c\left(1 - r^2\right)^2, \tag{73.7c}$$

ahol *c* egyelőre határozatlan együttható. Ha úgy választjuk meg, hogy  $\Phi_3$ -at (73.6)-ba helyettesítve a kapott eredmény minimális legyen, két érték adódik:

$$c_1 = 1,098$$
 és  $c_2 = -1,41.$ 

A megfelelő görbületi paraméterek:

$$c = c_1 - \text{re:} \ B_{(3)}^2 = 9,88$$
 és  $c = c_2 - \text{re:} \ B_{(3)}^2 = 34$ .

Az előbbi érték már mindössze 0,1% hibával adja meg a pontos értéket. A másik érték az első felharmonikushoz tartozó sajátérték ( $4\pi^2 = 39,5$ ) közelítése. Az ilyen módszerek *Rayleigh-Ritz módszerek* néven ismertek a matematikában.

# 7.4. Perturbációelmélet

A *perturbációelmélet* feladata, hogy a reaktorban bekövetkező kis változások hatását *közvetlenül* szolgáltassa. A leggyakrabban a reaktivitás megváltozását keressük, de előfordul, hogy a fluxus perturbációjára is szükség van. Az alábbiakban mindkét feladat megoldásának az alapelveit ismertetjük. A perturbációt matematikailag úgy tekintjük, mint a reaktort leíró operátorok kis megváltozását. Tekintsünk két példát:

- (1) Amikor a perturbáció abban áll, hogy az egyik szabályozórudat kis mértékben elmozdítjuk, a reaktornak egy szűk térfogatrészében megváltoznak a hatáskeresztmetszetek. Ez a változás ugyan lokálisan nagy lehet, de csak egy kis térfogatra korlátozódik.
- (2) Amikor a moderátorban kis mértékben megváltozik a bórsav koncentrációja, az abszorpciós hatáskeresztmetszet megváltozik. Itt a perturbáció ugyan a reaktor egész térfogatát érinti, de a változás minden pontban kicsi.

### A reaktivitás perturbációja

A reaktivitást a (72.10a) sztatikus sajátérték-egyenlet megoldása révén kapjuk. Önként adódik, hogy az egyenletből közvetlenül fejezzük ki a sokszorozási tényezőt:

$$\frac{1}{k_{\rm eff}} = \frac{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{D}}n_{\rm s}\right)}{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{P}}n_{\rm s}\right)}, \qquad \text{illetve} \qquad \rho = 1 - \frac{1}{k_{\rm eff}} = \frac{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{M}}n_{\rm s}\right)}{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{P}}n_{\rm s}\right)},$$

ahol  $\psi^{\dagger}(\mathbf{x})$  tetszőleges súlyfüggvény. A reaktor perturbációja azt jelenti, hogy megváltoznak a kiindulási egyenletben szereplő operátorok:

$$\hat{M}$$
 helyett  $\hat{M} + \delta \hat{M}$ ,

 $\hat{P}$  helyett  $\hat{P} + \delta \hat{P}$ 

írandó, aminek következtében megváltozik a reaktivitás és a sztatikus fluxus:

$$\begin{array}{ll} \rho & \text{helyett} & \rho + \delta \rho, \\ n_{s}(\mathbf{x}) & \text{helyett} & n_{s}(\mathbf{x}) + \delta n_{s}(\mathbf{x}) \end{array}$$

adódik megoldásként. A reaktivitás perturbációját ekkor a következőképpen számíthatjuk:

$$\delta \rho = \frac{\left(\psi^+, \left(\hat{\mathbf{M}} + \delta \hat{\mathbf{M}}\right) \left(n_{\rm s} + \delta n_{\rm s}\right)\right)}{\left(\psi^+, \left(\hat{\mathbf{P}} + \delta \hat{\mathbf{P}}\right) \left(n_{\rm s} + \delta n_{\rm s}\right)\right)} - \frac{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{M}} n_{\rm s}\right)}{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{P}} n_{\rm s}\right)}.$$
(74.1)

Ez a képlet ugyan megadja a kívánt végeredményt, de két szempontból sem kielégítő: egyrészt alkalmazásához ki kell számítani a neutronsűrűség  $\delta n_s(\mathbf{x})$  perturbációját, másrészt semmi sem biztosítja, hogy az egyenlet megoldásában alkalmazott közelítések hatása minél kisebb legyen. Mindkét nehézséget ki tudjuk küszöbölni a  $\psi^+$  súlyfüggvény alkalmas megválasztásával. Az előző fejezetben tárgyalt variációs elvek azt sugallják, hogy a legjobb választás a (72.10b) megoldásaként kapott adjungált sztatikus sajátfüggvény:

$$\frac{1}{k_{\rm eff}} = \frac{\left(n_{\rm s}^+, \hat{\mathbf{D}}n_{\rm s}\right)}{\left(n_{\rm s}^+, \hat{\mathbf{P}}n_{\rm s}\right)}, \qquad \text{illetve} \qquad \rho = \frac{\left(n_{\rm s}^+, \hat{\mathbf{M}}n_{\rm s}\right)}{\left(n_{\rm s}^+, \hat{\mathbf{P}}n_{\rm s}\right)}. \tag{74.2}$$

Belátjuk, hogy ez stacionárius  $n_s(\mathbf{x})$  kis változásaival szemben:

$$\begin{split} \delta \frac{1}{k_{\rm eff}} &= \frac{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{D}(n_{\rm s} + \delta n_{\rm s})\right)}{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{P}(n_{\rm s} + \delta n_{\rm s})\right)} - \frac{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{D}n_{\rm s}\right)}{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{P}n_{\rm s}\right)} \approx \frac{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{D}\delta n_{\rm s}\right)}{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{P}n_{\rm s}\right)} - \frac{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{D}n_{\rm s}\right)}{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{P}n_{\rm s}\right)^{2}} \left(n_{\rm s}^{+}, \hat{P}\delta n_{\rm s}\right) = \\ &= \frac{\left(n_{\rm s}^{+}, \left(\hat{D} - \frac{1}{k_{\rm eff}}, \hat{P}\right)\delta n_{\rm s}\right)}{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{P}n_{\rm s}\right)} = \frac{\left(\left(\hat{D}^{+} - \frac{1}{k_{\rm eff}}, \hat{P}^{+}\right)n_{\rm s}^{+}, \delta n_{\rm s}\right)}{\left(n_{\rm s}^{+}, \hat{P}n_{\rm s}\right)} = 0. \end{split}$$

A levezetés utolsó két lépésében kihasználtuk (74.2)-t, továbbá hogy az adjungált függvény kielégíti (72.10b)-t. Ebből következik, hogy a súlyfüggvénynek ez a megválasztása – első rendben – kiküszöböli a neutronsűrűség számításában használt közelítések hibáit. Sajnos azonban az adjungált sajátfüggvényt is csak közelítőleg tudjuk kiszámítani, vagyis – gondolná az ember – megoldásunk csak félmegoldás: a reaktivitást *emiatt* fogjuk pontatlanul megkapni. A helyzet ennél kedvezőbb, ugyanis hasonló gondolatmenettel megmutathatjuk, hogy a (74.2) formula az adjungált függvény kis változásaival szemben is stacionárius. Végeredményben tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy (74.2) képletünk hibája a

$$\delta n_{\rm s}({f x}) \cdot \delta n_{\rm s}^+({f x})$$

szorzattal arányos, tehát csak másodrendű.

Az elmondottakból az is következik, hogy a kis perturbációk hatásának (74.1) szerint való számításakor nem kell figyelembe vennünk a neutronsűrűség megváltozásának a hatását, első rendben elég az operátorok megváltozására szorítkozni:

$$\delta \frac{1}{k_{\rm eff}} = \frac{\left(\psi^+, \left(\hat{\mathbf{D}} + \delta\hat{\mathbf{D}}\right)n_{\rm s}\right)}{\left(\psi^+, \left(\hat{\mathbf{P}} + \delta\hat{\mathbf{P}}\right)n_{\rm s}\right)} - \frac{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{D}}n_{\rm s}\right)}{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{P}}n_{\rm s}\right)} \approx \frac{\left(\psi^+, \left(\delta\hat{\mathbf{D}} - \frac{1}{k_{\rm eff}}\delta\hat{\mathbf{P}}\right)n_{\rm s}\right)}{\left(\psi^+, \hat{\mathbf{P}}n_{\rm s}\right)}, \quad (74.3a)$$

amit reaktivitásra átírva a szokásos perturbációs képletet kapjuk:

$$\delta \rho \approx \frac{\left(\psi^{+}, \delta \hat{M} n_{s}\right)}{\left(\psi^{+}, \hat{P} n_{s}\right)},$$
(74.3b)

ahol

$$\delta \hat{\mathbf{M}} = \delta \hat{\mathbf{D}} - \frac{1}{k_{\text{eff}}} \delta \hat{\mathbf{P}} \,. \tag{74.4}$$

A (74.3) képletek a perturbációelmélet alapképletei. Általuk válik világossá, hogyan valósul meg a 7. fejezet bevezetőjében megfogalmazott cél: a kis perturbáció által okozott reaktivitásváltozás számításához [a (72.10) egyenletek megoldásával] elég kiszámítani  $k_{eff}$ -et és a sztatikus sajátfüggvényeket. Segítségükkel a (74.3) képletek tetszőleges perturbációra megadják a reaktivitásváltozást. A módszernek lényeges velejárója, hogy a perturbált állapot(ok)ra egyáltalán nem kell megoldani a (72.10) sajátérték-problémát.

### Szabályozórúd jelleggörbéje

A perturbációelmélet egyik nevezetes alkalmazása a szabályozórúd jelleggörbéje. Mozogjon a rúd egy levegős csőben a *z* tengellyel párhuzamosan, és radiális pozíciója legyen az ( $x_0$ ,  $y_0$ ) pont. Legyen a reaktor kritikus, amikor a rúd teljesen ki van húzva. Mivel a rúd levegős csőben mozog, a kihúzott rúd helyén a hatáskeresztmetszetek (gyakorlatilag) eltűnnek. Ebben az állapotban megoldjuk a (72.10) sajátértékproblémát. Választott modellünk az egycsoport diffúzióegyenlet, amely szerint a megoldás

$$n_{\rm s} = n_{\rm s}^+ = A(x_0, y_0) \sin \frac{\pi z}{H},$$
 (74.5)

ahol H a reaktor magassága és A a rúd helyétől függő együttható.

Amikor a rudat valameddig beengedjük, úgy tekinthetjük, hogy csak az abszorpciós hatáskeresztmetszet változott meg az aktív zónának a rúd által elfoglalt részében, ugyanis a rúd anyagának általában kicsi a szórási hatáskeresztmetszete. Amikor a rudat z magasságig eresztjük be, az operátor perturbációja tehát

$$\delta \hat{\mathbf{M}}(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\Sigma_{a}, & \text{ha } \mathbf{r} \in \mathbf{V}_{\text{szab.r.}} \\ 0, & \text{ha } \mathbf{r} \notin \mathbf{V}_{\text{szab.r.}} \end{cases}$$
(74.6)
ahol  $\Sigma_a$  a rúd anyagának abszorpciós hatáskeresztmetszete. Eszerint (74.3b) számlálójában csak a szabályozórúd beeresztett térfogatára kell integrálni, viszont a nevezőben az integrálás az aktív zóna teljes térfogatára kiterjed. Így a rúd beeresztése által okozott reaktivitásnak z-től való függését a számláló határozza meg. A nevezőt,  $\Sigma_a$ -t és a többi (z-től független) mennyiséget egyetlen *C* állandóba vonjuk össze. Ezzel:

$$\delta\rho(z) = C \int_{z}^{H} \sin^{2} \frac{\pi z'}{H} dz' = C \left[ \frac{H-z}{2} + \frac{H}{4\pi} \sin \frac{2\pi z}{H} \right].$$
(74.7)

Ha ezt z függvényében ábrázoljuk, a 74.1. ábrán látható alakú görbét kapjuk. A görbének ez az "S" betűre emlékeztető alakja jellegzetes olyan szabályozórudak esetében, amelyek abszorpciós hatáskeresztmetszete z-től független. A reaktoroperátorok ilyen rudak esetében üzemszerűen felveszik ezt az ún. S görbét. A görbének z = H/2 közelében van egy meglehetősen hosszú szakasza, amelyen a (74.7) alatti szinusz függvény görbéje közel van az egyeneshez. Ez a szabályozórudak jelleggörbéjének a *lineáris* szakasza. Itt a meredekség:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \delta \rho(z) \right|_{z=H/2} = -C$$

Ezzel megtaláltuk a C együttható fizikai jelentését: –C a rúd jelleggörbéjének meredeksége az S görbe lineáris szakaszán.



74.1. ábra. Szabályozórúd jelleggörbéje a (74.7) képlet szerint (C = 0.05 (C = 0.05 )/cm; H = 100 cm)

# A fluxus perturbációja

A fluxus (pontosabban: a neutronsűrűség) perturbációjának a számítása lényegesen bonyolultabb feladat, mint a reaktivitásé. A közhasznú programoknak nem is

szokott ilyen opciójuk lenni, pedig vannak esetek, amikor szükség lenne rá. Ilyen eset például a fűtőelem-átrakás optimalizálása: olyan elrendezést keresünk, amelyre az aktív zónában a lehető legsimább teljesítményeloszlás alakul ki.<sup>24</sup> Az optimalizálási számítás előkészítése keretében szükség van a teljesítményeloszlás akkor fellépő megváltozására, amikor az aktív zónában két fűtőelemköteget egymással felcserélünk. Ennek meghatározásához ismerni kell a fluxus perturbációját. Ezért az alábbiakban összegezzük a fluxus perturbációjának a számítására vonatkozó legfontosabb ismereteket. Látni fogjuk, hogy ez a számítás sem igényel bonyolultabb számítógépi eljárásokat, mint magának a fluxusnak a kiszámítása. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a reaktor a perturbáció előtt kritikus állapotban van. Az elmondottak könnyen általánosíthatók a  $k_{eff} \neq 1$  esetre.

A (72.2a) kiindulási egyenlet tehát k = 1 mellett:

$$\hat{\mathbf{M}}n = \left(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{D}}\right)n = 0.$$
(74.8)

*n* nem más, mint a  $k_1 = k_{eff} = 1$  sajátértékhez tartozó  $n_1$  sajátfüggvény, vagyis az alapmódus. Az "1" indexet az egyszerűség kedvéért elhagytuk. Ha fellép valamilyen perturbáció, akkor megváltoznak az operátorok, de megváltozik  $k_{eff}$  és a neutronsűrűség is. A megváltozott sztatikus sajátérték-egyenlet:

$$\left(\frac{1}{k_{\rm eff}}\left(\hat{\mathbf{P}}+\delta\hat{\mathbf{P}}\right)-\hat{\mathbf{D}}-\delta\hat{\mathbf{D}}\right)(n+\delta n)=0.$$

Ezt a következő alakban is felírhatjuk:

$$(\hat{\mathbf{M}} + \delta \hat{\mathbf{M}}')(n + \delta n) = 0$$
,

ahol

$$\delta \hat{\mathbf{M}}' = \delta \hat{\mathbf{P}} - \rho (\hat{\mathbf{P}} + \delta \hat{\mathbf{P}}) - \delta \hat{\mathbf{D}}, \qquad \rho = 1 - \frac{1}{k_{\text{eff}}}.$$

Ha a perturbált egyenletből elhagyjuk a másodrendű tagokat, a neutronsűrűség perturbációjára az

$$\hat{\mathbf{M}}\delta n = -\delta \hat{\mathbf{M}}n = S \tag{74.9}$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$\delta \hat{\mathbf{M}} = \delta \hat{\mathbf{P}} - \rho \hat{\mathbf{P}} - \delta \hat{\mathbf{D}} \,. \tag{74.10}$$

Az itt megjelent S "forrástag" az operátor perturbációjától és a sztatikus sajátfüggvénytől függ. A (74.10) képletben szereplő  $\rho$  reaktitivtáseffektust a (74.2) képlettel

<sup>&</sup>lt;sup>24</sup> Erről még lesz szó a 8. fejezetben.

számítjuk ki. Látszólag tehát megoldottuk a problémát: a megoldandó (74.9) egyenletben minden ismert, az operátor éppúgy, mint a "forrástag". Probléma viszont, hogy a (74.9) egyenlet megoldása egy szinguláris operátor invertálását igényli, hiszen a (74.8) homogén egyenletnek van nemtriviális megoldása. Az ilyen egyenlet nem megoldhatatlan, a probléma "csupán" abban áll, hogy (74.9)-nek végtelen sok megoldása van:

$$\delta n = \delta n_{\text{part}} + cn, \qquad (74.11)$$

ahol *c* tetszőleges állandó,  $\delta n_{\text{part}}$  pedig a (74.9) inhomogén egyenlet egyik *partikuláris* megoldása. Ha a perturbálatlan állapothoz tartozó sztatikus adjungált alapmódust  $n^+$ -tel jelöljük, akkor ez *n*-et kivéve ortogonális (74.8) minden sajátfüggvényére. *n*-re viszont nem ortogonális:

$$\left(n^+, \hat{\mathbf{P}}n\right) \neq 0$$
.

Ez azt jelenti, hogy a legbiztosabban úgy tudjuk megakadályozni a (74.11)-ben szereplő *cn* tag ellenőrizetlen fellépését, hogy olyan megoldási algoritmust keresünk, amely biztosítja az

$$\left(n^{+}, \hat{\mathbf{P}}\delta n\right) = 0 \tag{74.12}$$

ortogonalitási feltétel teljesülését. Ennek a kikötésnek megvan az az előnye is, hogy lokális (a reaktor kis részére korlátozódó) perturbáció hatása is *lokális*nak adódik, vagyis nem tartalmaz a reaktor egészére kiterjedő, *globális* hatást, amilyent a *cn* tag megjelenése jelentene. A (74.12) kikötés mögött – a matematikai célszerűségen túlmenően – meghúzódik egy fizikai megfontolás is. Amikor a fluxus perturbációját keressük, ennek csak a fluxus valamilyen normálása mellett van értelme. Ennek megfelelően megköveteljük, hogy a fluxus normája ugyanaz legyen a perturbált és perturbálatlan reaktorban:

$$(n^+, \hat{\mathbf{P}}n) = (n^+, \hat{\mathbf{P}}(n+\delta n)) = (n^+, \hat{\mathbf{P}}n) + (n^+, \hat{\mathbf{P}}\delta n).$$

Ez pedig nem más, mint a (74.12) feltétel.

A feladat megoldására szolgáló alábbi módszert a meglévő közhasználatú programokból kiindulva is realizálni lehet. Az algoritmus ugyanis emlékeztet az 5.4. alfejezetben tárgyalt forrásiterációra. Így minden olyan program, amely azt megvalósítja, átalakítható az alábbi algoritmus megvalósítására is. Először megoldjuk a

$$\hat{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi}_0 = -S \tag{74.13a}$$

egyenletet, majd  $\ell = 1, 2, \dots$ -re kiszámítjuk a

$$\hat{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi}_{\ell} = \hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{\psi}_{\ell-1} \tag{74.13b}$$

egyenleteket kielégítő  $\psi_{\ell}$  sorozatot, amelynek minden tagja egyértelműen meg van határozva.<sup>25</sup> A keresett megoldást a

$$\delta n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell} \tag{74.14}$$

sor adja.

A későbbiekben belátjuk, hogy ez a sor konvergens. Előbb azonban megmutatjuk, hogy a sor – konvergencia esetén – kielégíti a (74.9) egyenletet:

$$\hat{\mathbf{M}}\delta n = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{D}}\right) \psi_{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \hat{\mathbf{P}} \psi_{\ell} - \hat{\mathbf{D}} \psi_{0} - \sum_{\ell=1}^{\infty} \hat{\mathbf{D}} \psi_{\ell} = S + \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\hat{\mathbf{P}} \psi_{\ell-1} - \hat{\mathbf{D}} \psi_{\ell}\right) = S.$$

Az utolsó lépésben figyelembe vettük (74.13b)-t. A (74.12) feltétel teljesülésének az igazolásául megmutatjuk, hogy a (74.14) sor minden tagja ortogonális  $n^+$ -re. Az ortogonalitást először  $\ell = 0$ -ra vizsgáljuk meg:

$$(n^+, \hat{\mathbf{P}}\psi_0) = (\hat{\mathbf{P}}^+n^+, \psi_0) = (\hat{\mathbf{D}}^+n^+, \psi_0) = (n^+, \hat{\mathbf{D}}\psi_0) = (n^+, -S).$$

A levezetés harmadik lépésében kihasználtuk, hogy  $n^+$  kielégíti az adjungált sajátérték-egyenletet:

$$\hat{\mathbf{D}}^+ n^+ = \hat{\mathbf{P}}^+ n^+ \, .$$

Az ortogonalitás igazolásához tehát már csak azt kell megmutatnunk, hogy a (74.9) alatti *S* forrástag ortogonális  $n^+$ -re [vö. (74.9) és (74.10)]:

$$(n^+,S) = (n^+,(\delta\hat{\mathbf{P}}-\delta\hat{\mathbf{D}})n) - \rho(n^+,\hat{\mathbf{P}}n) = (n^+,\hat{\mathbf{P}}n)\left(\frac{(n^+,(\delta\hat{\mathbf{P}}-\delta\hat{\mathbf{D}})n)}{(n^+,\hat{\mathbf{P}}n)} - \rho\right) = 0.$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk a (74.3) és (74.4) alatti perturbációs képleteket. Ezzel beláttuk, hogy az ortogonalitási feltétel  $\ell = 0$ -ra teljesül.  $\ell > 0$ -ra teljes indukciót alkalmazunk. Tegyük fel tehát, hogy az ( $\ell$ -1)-edik tag ortogonális  $n^+$ -re. Ebből következik az  $\ell$ -edik tag ortogonalitása:

$$0 = \left(n^+, \hat{\mathbf{P}}\psi_{\ell-1}\right) = \left(n^+, \hat{\mathbf{D}}\psi_{\ell}\right) = \left(\hat{\mathbf{D}}^+n^+, \psi_{\ell}\right) = \left(\hat{\mathbf{P}}^+n^+, \psi_{\ell}\right) = \left(n^+, \hat{\mathbf{P}}\psi_{\ell}\right).$$

<sup>&</sup>lt;sup>25</sup> Vegyük észre, hogy a (74.13) egyenletek pontosan olyan alakúak, mint a forrásiterációt jelentő (54.15a) egyenlet. (74.13b)-nek  $\ell$  adott értékére való megoldása egy belső iterációt jelent ugyanazzal a programmal, amellyel a többcsoport diffúzióegyenletet megoldjuk. Ezért állítottuk az előbb, hogy a fluxusperturbáció számítása nem igényel mást, mint meglévő programok módosítását.

Ezzel beláttuk, hogy (74.14) alatti sor mindegyik tagja külön-külön kielégíti az ortogonalitási feltételt, így a sor is kielégíti azt.

Befejezésül megvizsgáljuk a (74.14) sor konvergenciáját. Ehhez sorba fejtjük a  $\psi_{\ell}$  függvényeket a (74.8) egyenlet  $n_i$  sajátfüggvényei szerint:

$$\Psi_{\ell} = \sum_{i=2}^{\infty} a_{\ell i} n_i, \qquad (\ell = 0, 1, 2, ...).$$
(74.15)

A sorfejtésből az ortogonalitási feltétel miatt hiányzik az i = 1-hez tartozó alapmódus, hiszen  $n_1 \equiv n$  nem ortogonális  $n^+$ -re. A többi módus kielégíti a (72.2a) sajátértékegyenletet:

$$\hat{D}n_i = \frac{1}{k_i}\hat{P}n_i, \qquad i = 2, 3, ...$$
 (74.16)

Mivel  $k_1 \equiv k_{\text{eff}} = 1$ , továbbá a sajátértékek csökkenő sorozatot alkotnak, mindegyik *i*-re igaz, hogy  $k_i < 1$ , ( $i \ge 2$ ). A (74.15) összeget a (74.13b) egyenletbe helyettesítjük:

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_{\ell i} \hat{\mathbf{D}} n_i = \sum_{i=2}^{\infty} a_{\ell-1,i} \hat{\mathbf{P}} n_i ,$$

majd figyelembe vesszük (74.16)-ot:

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_{\ell i} \frac{1}{k_i} \hat{\mathbf{P}} n_i = \sum_{i=2}^{\infty} a_{\ell-1,i} \hat{\mathbf{P}} n_i \; .$$

Mivel  $(n_j^+, \hat{P}n_i = 0)$ , amikor  $j \neq i$ , ez csak akkor állhat fenn, ha minden  $\ell$ -re és *i*-re

$$a_{\ell i} = k_i a_{\ell-1,i} = k_i^2 a_{\ell-2,i} = \dots = k_i^\ell a_{0i}.$$

Ezt (74.15)-be helyettesítve a

$$\psi_{\ell} = \sum_{i=2}^{\infty} k_i^{\ell} a_{0i} n_i$$

összefüggést kapjuk. Amikor ezt (74.14)-be helyettesítjük, az  $\ell$  szerinti összegzésre vonatkozóan konvergens sort kapunk:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{i=2}^{\infty} k_i^{\ell} a_{0i} n_i = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_{0i}}{1 - k_i} n_i \,.$$

## 7.5. A pontkinetikai egyenlet és az effektív későneutron-hányad

A 3.6. alfejezetben az egycsoport diffúzióegyenletből kiindulva vezettük le a pontkinetikai egyenletet. Ez a levezetés hasznos abból a szempontból, hogy megmutatta: azonos szerkezetű, független egyenletet lehet kapni mindegyik módusra vonatkozóan. A levezetés hiányossága viszont, hogy nem szolgáltatja a reaktorkinetika egyik alapvető paraméterét, az *effektív későneutron-hányad*ot ( $\beta_{eff}$ ), amelynek a magfizikai későneutron-hányadtól ( $\beta$ ) való eltérése spektrális effektus, így meghatározásához kevés az egycsoport időfüggő diffúzióegyenlet, többcsoport vagy folytonos energiaváltozójú időfüggő diffúzió- vagy transzportegyenletből kell kiindulni. Az 5. függelékben belátjuk, hogy ekkor nem lehetséges a 3.6. alfejezetben leírt sorfejtést és levezetést megismételni: azon a módon nem kaphatunk olyan egyenleteket, amelyek alakja megegyezne a (36.3) pontkinetikai egyenletrendszerével. Mivel a pontkinetikai egyenlet a magfizikai  $\beta$ -val nem használható, célszerű azt valamilyen feltevésekkel levezetni annak érdekében, hogy  $\beta_{eff}$ -re a gyakorlatban használható képletet kapjunk.

A kiindulási időfüggő egyenlet megoldását egy, csak a *t* időtől függő tényező és egy másik függvény szorzata alakjában keressük:

$$n(\mathbf{x},t) = \psi(\mathbf{x},t)\varphi(t), \qquad (75.1a)$$

és a pontkinetikai egyenletet  $\varphi(t)$ -re vonatkoztatjuk. Egy ilyen felbontás nyilván tetszőleges, és csak akkor van haszna, ha az egyik tényezőt valahogy korlátozzuk. Esetünkben az alábbit célszerű megkövetelni:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n^{+},\psi(t)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int n^{+}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t)\mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \qquad (75.1b)$$

ahol  $n^+$  az adjungált sztatikus sajátfüggvény, amely kielégíti a következő egyenletet:

$$0 = \frac{1}{k_{\rm eff}} \hat{\mathbf{P}}^+ n^+ - \hat{\mathbf{D}}^+ n^+ \,. \tag{75.2}$$

A x változó értelmét a 7.2. alfejezet elején megadtuk.<sup>26</sup>

A (75.1b) kikötés megszünteti az 5. függelékben tárgyalt problémát. Ezzel ugyanis elérjük, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n^{+}, n(t)\right) = \left(n^{+}, \psi(t)\right) \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}$$
(75.3)

legyen, és így lehetővé válik egyfajta pontkinetikai egyenlet levezetése. Ha megtartjuk a  $\psi(\mathbf{x},t)$  függvény *t*-től való függését, az egyenlet paraméterei ( $\Lambda$  és  $\beta_{eff}$ ) *t*-től függőnek adódnak. Egy ilyen pontkinetikai egyenlet haszna azonban igen csekély, ezért a továb-

<sup>&</sup>lt;sup>26</sup> Ha a (75.1b) képlethez hasonlóan egy belső szorzatban jelöljük, hogy az egyik tényező függ *t*-től, ez azt jelenti, hogy **x**-en kívül még *t*-től *is* függ. Ha *t* hiányzik, ez azt jelenti, hogy a függvény *csak* **x**-től függ.

biakban feltesszük, hogy  $\psi(\mathbf{x},t)$  *t*-től független.<sup>27</sup> A leggyakoribb választás az  $n(\mathbf{x})$  sztatikus sajátfüggvény, amely kielégíti a

$$0 = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \hat{P}n - \hat{D}n \tag{75.4}$$

egyenletet. Ha  $\psi(\mathbf{x},t) \equiv n(\mathbf{x})$ , a (75.1b) kikötés automatikusan teljesül. A fejezet végén megvizsgáljuk, milyen következménnyel jár, ha  $\psi(\mathbf{x},t)$ -t más időtől független függ-vénnyel tesszük egyenlővé.

#### Jelölések

Kiindulásul a (71.21) alatti egyenletrendszert választjuk, amely abban az esetben érvényes, amikor a reaktorban egyetlen fajta hasadó izotóp van. Ez a legritkább eset, hiszen általában mindkét uránizotóp jelen van, de teljesítményreaktorokban megjelennek a plutóniumizotópok is (vö. 8. fejezet). Emiatt a (71.21) egyenleteket általánosítanunk kell arra az esetre, amikor több hasadó izotóp van. Ehhez bevezetjük az alábbi jelöléseket.

A különböző fajta hasadó izotópokat a képletekben az *m* indexszel különböztetjük meg egymástól ( $m = {}^{235}$ U,  ${}^{238}$ U,  ${}^{239}$ Pu stb.). Az  $f_i(E)$  későneutron-spektrumok és az  $f_p(E)$  promptneutron-spektrum (vö. 4.1. alfejezet), továbbá a  $\lambda_i$  bomlási állandók (vö. 36.2. *táblázat*) jó közelítéssel függetlenek *m*-től. A többi mennyiség azonban függ *m*-től:  $\beta_{im}$ ,  $v\Sigma_{fm}$ . Ezek alapján definiáljuk a következő produkciós operátorokat. Az *m* indexű anyaghoz tartozó *prompt produkciós operátor*:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathrm{p}m}n = (1 - \boldsymbol{\beta}_m) \frac{f_{\mathrm{p}}(E)}{4\pi} \int_{4\pi 0}^{\infty} v \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{f}m}(\mathbf{r}, E') v' n(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) \mathrm{d}E' \mathrm{d}\vec{\Omega}', \qquad (75.5a)$$

ahol  $\beta_m$  az *m* indexű anyagra jellemző (magfizikai) későneutron-hányad:

$$\beta_m = \sum_{i=1}^6 \beta_{im} \tag{75.5b}$$

(vö. 36.1. táblázat). Analóg módon definiáljuk a késő produkciós operátorokat (i = 1, 2, ..., 6):

$$\hat{\mathbf{P}}_{im}n = \boldsymbol{\beta}_{im} \frac{f_i(E)}{4\pi} \int_{4\pi 0}^{\infty} \boldsymbol{\nu} \boldsymbol{\Sigma}_{fm}(\mathbf{r}, E') \boldsymbol{v}' n(\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}'.$$
(75.5c)

Ezekkel a jelölésekkel a (75.2) és (75.4) egyenletekben szereplő sztatikus produkciós operátor a következő alakban állítható elő:

<sup>&</sup>lt;sup>27</sup> Természetesen az alábbi levezetés e nélkül a feltevés nélkül is elvégezhető.

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{m} \left( \hat{\mathbf{P}}_{pm} + \sum_{i=1}^{6} \hat{\mathbf{P}}_{im} \right).$$
(75.5d)

A későneutron-anyamagoknak a (71.21) egyenletekben szereplő sűrűségét szintén részekre kell bontanunk *m* szerint:  $C_{im}(\mathbf{r},t)$  az *m* indexű izotóp hasadásaiban keletkezett, az *i*-edik csoportba tartozó későneutron-anyamagok sűrűsége az **r** helyen és a *t* időpillanatban. Végül megadjuk, hogy a (75.4) egyenletben a produkciós operátorban milyen hasadási spektrum szerepel. Ha csak egyetlen hasadó izotóp van, a hasadási spektrumot a (41.2) képlet adja meg. Több hasadó izotóp esetében mindegyik anyaghoz kell egy (41.2) szerinti spektrumot rendelni, majd az eredményt a neutrontermeléshez való hozzájárulásuk arányával súlyozva átlagolni. Ennek explicit felírása érdekében további jelöléseket vezetünk be:<sup>28</sup>

$$F = \sum_{m} F_m \,, \tag{75.6a}$$

ahol

$$F_m = \int_{4\pi 0}^{\infty} \nu \Sigma_{\rm fm}(\mathbf{r}, E) vn(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}) dE d\vec{\Omega} .$$
(75.6b)

(75.5d) értelmében tehát a használandó hasadási spektrum:

$$f(E) = \frac{\sum_{m} F_{m} \left[ (1 - \beta_{m}) f_{p}(E) + \sum_{i=1}^{6} \beta_{im} f_{i}(E) \right]}{F}.$$
 (75.6c)

Vegyük észre, hogy ez tulajdonképpen a (41.2) képlet alakjára hozható, ha a magfizikai későneutron-hányadok súlyozott átlagát helyettesítjük be. Mégis célszerű az itt felírt alakot megtartani, mert világosan mutatja, hogy az aszimptotikus lassuláselméletben az  $F_m$  súlyfaktorokra iterálni kell (lásd alább).

E jelölések felhasználásával a (71.21) egyenletek helyett a következőkből kell kiindulnunk:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \left(\sum_{m} \hat{\mathbf{P}}_{pm} - \hat{\mathbf{D}}\right) n + \sum_{m} \sum_{i=1}^{6} \frac{f_i(E)}{4\pi} \lambda_i C_{im}(\mathbf{r}, t) + S, \qquad (75.7a)$$

$$\frac{\partial C_{im}}{\partial t} = -\lambda_i C_{im} + \beta_{im} \int_{4\pi 0}^{\infty} \nu \Sigma_{fm} (\mathbf{r}, E') v' n (\mathbf{r}, E', \vec{\Omega}', t) dE' d\vec{\Omega}', \qquad (75.7b)$$

$$(i = 1, 2, ..., 6).$$

A pontkinetikai egyenlet levezetése

 $<sup>^{28}</sup>$  Az általános esetben ezek a mennyiségek függnek **r**-től, de ezt nem jelöljük.

A (75.7) egyenletek csak időfüggést tartalmaznak, és semmi nem utal bennük a  $\rho$  reaktivitásra, illetve  $k_{\text{eff}}$ -re. Mivel azonban a pontkinetikai egyenlet tartalmazza  $\rho$ -t, az időfüggő egyenleteket ki kell egészíteni egy sztatikus sajátérték-egyenlettel. Esetünkben ez az adjungált sztatikus sajátérték-egyenlet lesz. A produkciós operátort a (75.5) képletek adják meg a transzportegyenlet esetében. A diffúzióegyenletre ebből egyszerű formális változtatással át lehet térni: nem kell mást tenni, mint a spektrumok mellől elhagyni a  $4\pi$  osztót. Természetesen más a destrukciós és produkciós operátorok alakja [lásd a (71.3) képleteket], továbbá az **x** változó értelme is (vö. 7.2. alfejezet). A (75.7a) egyenletet beszorozzuk  $n^+$ -tel, és integrálunk **x** szerint:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n^+, n(t)) = \sum_{m} \left(n^+, \hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{pm}}n(t)\right) - \left(n^+, \hat{\mathrm{D}}n(t)\right) + \sum_{m} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \left(n^+, \frac{f_i}{4\pi} C_{im}(t)\right) + \left(n^+, S\right).$$

Ha ide behelyettesítjük a fentiekben választott

$$n(\mathbf{x},t) = n(\mathbf{x})\varphi(t)$$

próbafüggvényt, ahol – ismételjük –  $n(\mathbf{x})$  a (75.4) egyenlet megoldása (sajátfüggvénye), a következő egyenlet adódik:

$$\begin{pmatrix} n^+, n \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi(t) \sum_m \left( n^+, \hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{pm}} n \right) - \varphi(t) \left( n^+, \hat{\mathrm{D}} n \right) + \\ + \sum_m \sum_{i=1}^6 \lambda_i \left( n^+, \frac{f_i}{4\pi} C_{im}(t) \right) + \left( n^+, S(t) \right).$$

Ezután (75.2)-t beszorozzuk  $n(\mathbf{x},t)$ -vel, és integrálunk **x** szerint:

$$0 = \frac{1}{k_{\rm eff}} \left( \hat{\mathbf{P}}^+ n^+, n \right) \varphi(t) - \left( \hat{\mathbf{D}}^+ n^+, n \right) \varphi(t) = \frac{1}{k_{\rm eff}} \left( n^+, \hat{\mathbf{P}}n \right) \varphi(t) - \left( n^+, \hat{\mathbf{D}}n \right) \varphi(t) \,.$$

Ha ezt kivonjuk az előző egyenletből, akkor az

$$\binom{n^{+},n}{dt} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi(t) \left(1 - \frac{1}{k_{\text{eff}}}\right) \binom{n^{+},\hat{P}n}{-\varphi(t)} \sum_{m} \sum_{i=1}^{6} \binom{n^{+},\hat{P}_{im}n}{+\sum_{m} \sum_{i=1}^{6} \lambda_{i} \binom{n^{+},\frac{f_{i}}{4\pi} C_{im}(t)}{+\left(n^{+},S(t)\right)} + \binom{n^{+},S(t)}{-\varphi(t)}$$
(75.8)

egyenlet adódik, amelynek felírásában figyelembe vettük a (75.5d) összefüggést is.

(75.8) egyszerűen a (36.3a) egyenlet alakjára hozható, ha bevezetjük a következő definíciókat:

$$\beta_{\text{eff}} = \sum_{m} \sum_{i=1}^{6} \beta_{im}^{\text{eff}}, \quad \text{ahol} \quad \beta_{im}^{\text{eff}} = \frac{\left(n^{+}, \hat{P}_{im}n\right)}{\left(n^{+}, \hat{P}n\right)}, \quad (75.9)$$

$$\Lambda = \frac{\left(n^+, n\right)}{\left(n^+, \hat{\mathbf{P}}n\right)},\tag{75.10}$$

továbbá

$$\mathcal{C}_{im}(t) = \frac{\left(n^+, \frac{f_i}{4\pi}C_{im}(t)\right)}{\left(n^+, n\right)}$$
(75.11)

és

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}(t) = \frac{\left(n^+, S(t)\right)}{\left(n^+, n\right)}.$$
(75.12)

Ezekkel a jelölésekkel (75.8)-at a következő alakra hozhatjuk:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho - \beta_{\mathrm{eff}}}{\Lambda} \varphi(t) + \sum_{m} \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \mathcal{C}_{im}(t) + \mathcal{S}(t).$$
(75.13a)

A (36.3b) egyenletek analogonját úgy kapjuk, hogy a (75.7b) egyenleteket beszorozzuk az

$$\frac{f_i(E)}{4\pi}n^+(\mathbf{x})$$

függvénnyel, majd integrálunk  $\mathbf{x}$  szerint. A fenti jelölésekkel az eredmény a következő:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{C}_{im}(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda_i \mathcal{C}_{im}(t) + \beta_{im}^{\mathrm{eff}} \frac{\varphi(t)}{\Lambda}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6), \qquad (75.13b)$$

ami ugyanolyan alakú, mint (36.3b). A kapott egyenletekből kiküszöbölhetjük az m indexet, ha bevezetjük a

$$\beta_i^{\text{eff}} = \sum_m \beta_{im}^{\text{eff}}$$
 és  $\mathcal{C}_i(t) = \sum_m \mathcal{C}_{im}(t)$  (75.14a)

jelöléseket:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho - \beta_{\mathrm{eff}}}{\Lambda} \varphi(t) + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i \mathcal{C}_i(t) + \mathcal{S}(t), \qquad (75.14\mathrm{b})$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\mathscr{C}}_{i}(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda_{i}\boldsymbol{\mathscr{C}}_{i}(t) + \beta_{i}^{\mathrm{eff}} \frac{\boldsymbol{\varphi}(t)}{\Lambda}, \qquad (i = 1, 2, ..., 6).$$
(75.14c)

Megkaptuk tehát a keresett pontkinetikai egyenleteket, továbbá sikerült definiálni az egyenlet paramétereit. Közülük a legfontosabb  $\beta_{\text{eff}}$ , amelynek a számításával a későbbiekben részletesen foglalkozunk. Egyébként ez az egyetlen paraméter, amelynek a számítása igényli az egyes hasadó izotópok hozzájárulásának külön-külön való számítását.

Befejezésül megvizsgáljuk, milyen következményekkel jár a  $\psi(\mathbf{x},t) \equiv n(\mathbf{x})$  feltevés és nem más, időben állandó függvény választása. Bell és Glasstone monográfiája [5] elképzelhetőnek tartja valamelyik kinetikus sajátfüggvény választását, amit más szerzők is követnek. Nem szerencsés ez a választás. Tegyük fel ugyanis, hogy  $\psi(\mathbf{x},t) \equiv n_{\omega}(\mathbf{x})$ , vagyis az  $\omega$  kinetikus sajátértékhez tartozó sajátfüggvény. Ha a késő neutronokat is figyelembe vesszük, akkor ez nem a (72.1a) alatti ( $\hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{D}}$ ) operátorhoz, hanem a (71.25a) alatti operátormátrixhoz tartozik. Ebből az következik, hogy amikor ezt a (75.7) egyenletekbe helyettesítjük, az

$$n_{\omega}(\mathbf{x}) \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \omega n_{\omega}(\mathbf{x})\varphi(t) + S(\mathbf{x},t)$$

egyenlet adódik, ami aligha használható egy pontkinetikai egyenlet levezetéséhez. Forrásmentes esetben természetesen kiadódik a triviális  $\varphi(t) = e^{\omega t}$  megoldás. Nyilvánvaló, hogy ha  $n_{\omega}(\mathbf{x})$ -et helyettesítjük a (75.9) – (75.12) képletekbe, a kiadódó (75.13) pontkinetikai egyenletek olyanok lesznek, hogy annak a reaktorállapotnak a reaktivitására, amelyre  $n_{\omega}(\mathbf{x})$ -et kiszámították, pontosan az  $\omega$  sajátértéket fogják adni, de kétséges, mi adódik egyéb reaktivitásokra. Szerencsére a sztatikus sajátfüggvény alakja csak kissé különbözik a kinetikus alapmódus alakjától, így a (75.9) – (75.12) képletekben szereplő integrálok megfelelő értékei nagyon közel vannak egymáshoz. Mindenesetre nem lebecsülendő körülmény, hogy lényegesen egyszerűbb a sztatikus sajátfüggvényt kiszámítani, mint a kinetikus sajátfüggvényeket.

#### Az effektív későneutron-hányad számítása

Az effektív későneutron-hányadot a (75.9) képlet adja meg. Alkalmazásához meg kell oldani a többcsoport transzport- vagy diffúzióegyenletet és a megfelelő adjungált egyenletet. A megoldás általában a reaktor kritikus állapotára történik. A (75.9) képlet tartalmaz térbeli integrálást és az energiacsoportokra való összegzést, tehát  $\beta_{eff}$  tükrözi a sztatikus sajátfüggvény és adjungált függvény tér- és energiafüggését. A későbbiekben mutatunk számpéldát arra, hogy  $\beta_{eff}$  számításában milyen fontos az energiacsoportok elegendően nagy száma, amely mellett kisebb jelentőségű a térfüggés hatása. Sorozatszámítások esetében a korszerű számítógépekkel is ritkán van lehetőség arra, hogy több térbeli dimenzióban sok energiacsoporttal nagy számú esetre megoldjuk a többcsoport diffúzióegyenletet, viszont az aszimptotikus egyenlet megoldása variánsszámítások esetében sem okoz problémát. Ezért az alábbiakban  $\beta_{eff}$ -nek az aszimptotikus modellben való számítását ismertetjük.

A (75.9) képletet folytonos energiaváltozójú diffúzióelméletben részletesen kiírva a következő adódik:

$$\beta_{im}^{\text{eff}} = \frac{\int dV \int_{0}^{\infty} dEn^{+}(\mathbf{r}, E) \beta_{im} f_{i}(E) \int_{0}^{\infty} v \Sigma_{fm}(\mathbf{r}, E') v' n(\mathbf{r}, E') dE'}{\int dV \int_{0}^{\infty} dEn^{+}(\mathbf{r}, E) f(E) \int_{0}^{\infty} v \Sigma_{f}(\mathbf{r}, E') v' n(\mathbf{r}, E') dE'}, \quad (75.15)$$

ahol V a reaktor térfogata. Az aszimptotikus közelítés azt jelenti, hogy

$$n(\mathbf{r}, E) = \phi(\mathbf{r})\psi(E)$$
 és  $n^+(\mathbf{r}, E) = \phi^+(\mathbf{r})\psi^+(E)$ ,

amit (75.15)-be helyettesítve az <br/>  ${\bf r}$ változóra vonatkozó integrálok azonosak a számlálóban és a nevezőben, vagy<br/>is

$$\beta_{im}^{\text{eff}} = \frac{\int_{0}^{\infty} dE \psi^{+}(E) \beta_{im} f_{i}(E) \int_{0}^{\infty} v \Sigma_{fm}(E') v' \psi(E') dE'}{\int_{0}^{\infty} dE \psi^{+}(E) f(E) \int_{0}^{\infty} v \Sigma_{f}(E') v' \psi(E') dE'}.$$

A (75.6a) és (75.6b) képletek segítségével ez tovább egyszerűsíthető:

$$\beta_{im}^{\text{eff}} = \beta_{im} \frac{F_m}{F} \frac{\int_{0}^{\infty} dE \psi^+(E) f_i(E)}{\int_{0}^{\infty} dE \psi^+(E) f(E)} = \beta_{im} \frac{F_m}{F} \frac{(\psi^+, f_i)}{(\psi^+, f)}.$$
(75.16)

Az itt szereplő belső szorzatokban már csak az E energiára integrálunk.

A 4. fejezetben foglalkozunk a (32.5) aszimptotikus lassulási egyenlet megoldásával. A fentiekben szereplő  $\psi(E)$  függvény ennek az egyenletnek a megoldása,<sup>29</sup> amelyet most operátoros alakban írunk fel:

$$\hat{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi} = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{\psi} \equiv \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_{0}^{\infty} \nu \Sigma_{\text{f}}(E') v' \boldsymbol{\psi}(E') dE', \qquad (75.17a)$$

ahol

$$\hat{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi} = \left[D(E)B^2 + \boldsymbol{\Sigma}_{t}(E)\right]\boldsymbol{v}\boldsymbol{\psi}(E) - \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{\Sigma}_{s0}(E' \to E)\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\psi}(E')dE'.$$
(75.17b)

<sup>&</sup>lt;sup>29</sup> A 3. és 4. fejezetben írtaktől eltérően  $\psi(E)$  itt nem a fluxus, hanem a neutronsűrűség spektruma. Az integrálokban ezért szerepel a *v*-vel való szorzás.

Ez  $\psi(E)$ -re vonatkozóan sajátérték-egyenlet, amelynek csak  $k_{\text{eff}}$  és  $B^2$  speciális értékei mellett van nemtriviális megoldása. Ha viszont ilyen megoldás létezik, akkor ezt tetszőleges módon normálhatjuk. Az aszimptotikus lassuláselméletben legkényelmesebb az alábbi normálást választani:

$$k_{\rm eff} = \int_{0}^{\infty} \nu \Sigma_{\rm f}(E) v \psi(E) dE . \qquad (75.18)$$

Ezzel (75.17a) az alábbi alakba megy át:

$$\hat{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi} = f(\boldsymbol{E}). \tag{75.19}$$

Ezzel a "fogással" (amely egyébként csak az aszimptotikus elméletben lehetséges) a lassulási egyenletet inhomogénné tettük, ami matematikai szempontból nagy könnyebbség: tetszőleges  $B^2$  mellett megoldható. Ha  $B^2$  különböző értékei mellett kapott  $\psi(E)$  megoldásokat (75.18)-ba helyettesítjük, akkor meg tudjuk határozni a sokszorozási tényezőt  $B^2$  (tehát végső soron a geometriai méretek) függvényében. (75.19) alkalmazásának azonban van egy másik módja is: megkereshetjük  $B^2$ -nek azt az értékét, amelyre vonatkozóan  $k_{eff} = 1$ . Ez éppen  $B_m^2$ -tel, tehát az anyagi görbületi paraméterrel egyenlő. Az 5.2. alfejezetben ismertetjük, hogyan lehet ezeket az egyenleteket sokcsoport modellre átírni és megoldani. A megoldás lehetővé teszi az  $F_m$  mennyiségek számítását is. (75.9c) szerint az f(E) spektrum függ tőlük, tehát – szigorúan véve – iterációra van szükség. A gyakorlatban ezt ritkán tesszük meg, mert hatása csekély.

A (75.16) képlet alkalmazásához tulajdonképpen ki kellene számítanunk a  $\psi^{\dagger}(E)$  adjungált spektrumot is. A gyakorlatban azonban ez a számítás megkerülhető.<sup>30</sup> Írjuk fel ugyanis az adjungált lassulási egyenletet:

$$\hat{\mathbf{D}}^{+}\boldsymbol{\psi}^{+} = \frac{1}{k_{\text{eff}}}\hat{\mathbf{P}}^{+}\boldsymbol{\psi}^{+} \equiv \frac{\nu\Sigma_{\text{f}}(E)v}{k_{\text{eff}}}\int_{0}^{\infty}\boldsymbol{\psi}^{+}(E')f(E')dE' = \frac{\nu\Sigma_{\text{f}}(E)v}{k_{\text{eff}}}(\boldsymbol{\psi}^{+},f)$$

Az adjungált függvényt is normálhatjuk (75.18)-hoz hasonlóan:

$$k_{\rm eff} = \left(\psi^+, f\right),\tag{75.20}$$

amivel az adjungált egyenlet átmegy a

$$\hat{\mathbf{D}}^+ \boldsymbol{\psi}^+ = \boldsymbol{v} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{E}) \boldsymbol{v} \tag{75.21}$$

egyenletbe. Látható innen, hogy az adjungált függvény *nem függ* az f(E) spektrumtól. Ez az észrevétel lehetőséget ad arra, hogy egyszerűen kiszámítsuk a

<sup>&</sup>lt;sup>30</sup> Ez is csak az aszimptotikus elméletben lehetséges.

$$k_i = \left( \psi^+, f_i \right)$$

mennyiséget is. Eszerint (75.21) jobb oldalát kiegészíthetjük a következő, 1-gyel egyenlő tényezővel:

$$\hat{\mathbf{D}}^{+}\boldsymbol{\psi}^{+} = \boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{f}}(E)\boldsymbol{v}\frac{\left(\boldsymbol{\psi}^{+},f_{i}\right)}{k_{i}},$$

ami viszont a

$$\hat{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi}_{i} = \frac{1}{k_{i}}\hat{\mathbf{P}}_{i}\boldsymbol{\psi}_{i} \equiv \frac{f_{i}(E)}{k_{i}}\int_{0}^{\infty}\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\Sigma}_{f}(E')\boldsymbol{v}'\boldsymbol{\psi}_{i}(E')\mathrm{d}E'$$

egyenlet adjungáltja. Ezt a fentiek mintájára oldjuk meg [vö. (75.18) és (75.19)]: először megoldjuk a

$$\hat{\mathbf{D}}\boldsymbol{\psi}_i = f_i(E) \tag{75.22a}$$

egyenletet, majd ki értékét a

$$k_i = \int_{0}^{\infty} v \Sigma_{\rm f}(E) v \psi_i(E) dE$$
(75.22b)

képlettel számítjuk ki. Végül (75.16) alapján kapjuk a keresett végeredményt:

$$\beta_{im}^{\text{eff}} = \beta_{im} \frac{F_m}{F} \frac{k_i}{k_{\text{eff}}}.$$
(75.23)

A fentieket a következő számítási sémában foglalhatjuk össze:

- 1. Először meghatározzuk  $B_m^2$ -et, vagyis  $B^2$ -nek azt az értékét, amelyre  $k_{\text{eff}} = 1$ . Az ebben a lépésben kapott  $\psi(E)$  spektrummal a (75.6) képletek alapján kiszámítjuk az  $F_m$  és F mennyiségeket.
- 2.  $B^2$  értékét változatlanul tartva i = 1, 2, ..., 6-ra megoldjuk a (75.22a) egyenletet, és (75.22b) szerint kiszámítjuk a  $k_i$  tényezőket.
- 3. Az egyes lésőneutron-csoportokhoz és hasadó izotópokhoz tartozó effektív későneutron-hányadokat kiszámítjuk (75.23) alapján.
- 4. Az *i*-edik csoporthoz tartozó effektív későneutron-hányadot a (75.14a) képlet, a teljes  $\beta_{\text{eff}}$ -et pedig a (75.9) képlet adja.

Megjegyezzük, hogy az 1. lépést lehet általánosítani: meg lehet keresni  $B^2$ -nek azt az értékét, amelyre  $k_{\text{eff}}$  értéke előre megadott (esetleg 1-től különböző) szám.

Az itt leírt algoritmust megvalósítottuk a GRACE lassulási programból [17] kiindulva. Így  $\beta_{eff}$ -et (legfeljebb) 40 energiacsoportban lehet kiszámítani. A neutronsűrűség hely- és energiafüggésének a hatását az alábbi négy eset alapján vizsgáltuk:

- 1. közelítés: aszimptotikus számítás GRACE-szel, 38 csoportban, amelyek között az egyik a termikus csoport;
- 2. közelítés: aszimptotikus számítás 6 csoportban, amelyek között az egyik a termikus csoport;
- 3. közelítés: csupasz reaktor számítása 6 csoportban, a véges differenciák módszerével;
- 4. közelítés: reflektorral körülvett aktív zóna számítása 6 csoportban, a véges differenciák módszerével.

Mind a négy közelítésben a fent leírt módszerrel, illetve a (75.15) képlettel kiszámítottuk  $\beta_{eff}$ -et, és a 75.1. *táblázat*ban mutatott eredményeket kaptuk. Látható, hogy a legnagyobb változás (2,9%) az 1. és 2. közelítés között adódott, a 2. – 4. közelítések között jóval kisebb az eltérés (<0,6%). Az utóbbi három számítás mindegyike 6 energiacsoportban történt, viszont a 3. és 4. közelítésben más a geometria: a 3.-ban nincs, a 4.-ben pedig van reflektor. Mindez azt mutatja, hogy a legjelentősebb befolyást az energiacsoportok száma gyakorolja. Ez nem csoda, hiszen a 41.1. ábrákról látható, hogy a későneutron- és a promptneutron-spektrumok közötti eltérés csak meglehetősen sok energiacsoporttal írható le kellő pontossággal.

75.1. táblázat.  $\beta_{\text{eff}}$  különböző közelítésekben számított értékei

| Közelítés | $eta_{ m eff}$ |
|-----------|----------------|
| 1         | 0,007217       |
| 2         | 0,007016       |
| 3         | 0,006973       |
| 4         | 0,006984       |

Az 1. és 2. közelítés között talált 2,9% relatív eltérés meglehetősen nagy. A későneutron-hányad magfizikai értéke 0,0065, tehát

$$\frac{\beta_{\rm eff}}{\beta} = \frac{0,007217}{0,0065} = 1,11.$$

Ez azt jelenti, hogy a vizsgált spektrális effektus mindössze 11%, amihez képest 2,9%-os hibát okoz az energiacsoportok kis száma. Ez pedig a teljes spektrális effektusnak 26%-a.

## 8. A kiégés

Miközben a reaktor energiát termel, a nukleáris üzemanyag átalakul. Mindenekelőtt beszélhetünk technológiai elhasználódásról (a mechanikai tulajdonságok romlása a hasadási termékek felhalmozódása miatt, a neutron- és γ-sugárzás által okozott sugárkárosodás, az egymást ciklikusan váltó felmelegítések és lehűtések káros hatásai, a fűtőelem-burkolat korróziója stb.), amelynek eredményeképpen egy bizonyos mennyiségű energia megtermelése után az üzemanyagot frissre kell kicserélni. Ezeknek a technológiai folyamatoknak a tárgyalása túlnőne könyvünk keretein. Ezért a továbbiakban csak a változások másik fontos köréről, a neutronfizikai elhasználódásról lesz szó:

- a hasadások fogyasztják a hasadóképes magokat;
- a hasadásokban hasadási termékek keletkeznek, amelyek között számos neutronabszorbens (ún. *neutronméreg*) van;
- neutronbefogás és radioaktív bomlás révén transzurán elemek, köztük hasadó izotópok keletkeznek.

Ezeket a folyamatokat együttesen – a hagyományos erőművekkel való analógia alapján – *kiégés*nek nevezzük. Egy adott reaktortöltet addig tartható üzemben, amíg a kiégés révén a hasadóanyag mennyisége annyira le nem csökken, hogy a reaktor többé nem tehető kritikussá. Ezután a reaktort friss üzemanyaggal kell feltölteni. Biztonsági okokból a nukleáris üzemanyagot úgy tervezik, hogy előbb kelljen a kiégés miatt frissre cserélni, mint ahogy a technológiai elhasználódás bekövetkezik.

# 8.1. Izotópláncok

## Nehéz elemek

A nehéz elemek körében két fontos izotóplánc van: az uránlánc (81.1. ábra) és a tóriumlánc (81.2. ábra). Az ábrákon bemutatott sémákban vastagon kereteztük be a gyakorlatban is jelentős hasadó izotópokat, vékonyan kereteztük be a viszonylag hoszszú életű nemhasadó (pontosabban: csak a gyors neutronok hatására hasadó) izotópokat. Vannak rövid élettartamú izotópok is, amelyek csak mint a többi izotóp *anyamag*- jai játszanak szerepet. A vastag nyilak magreakciók útján való átalakulást jelölnek. A radioaktív bomlásokat vékony nyíllal jelöljük. A nyilak alatt olvasható számok a felezési időket adják meg. (Egységek: a = év, d = nap, m = perc, s = másodperc.)

Az atomenergetika mai gyakorlatában csak az uránlánc játszik szerepet, így a továbbiakban ezzel foglalkozunk. A tóriumláncot is érdemes azonban megismerni, mert a Föld hasadóanyag-készletének jelentős része tórium formájában áll rendelkezésre. Tekintve azonban, hogy a természetben található kiindulási izotóp, a <sup>232</sup>Th maga nem hasadó, a benne rejlő energia hasznosításához előbb hasadóanyaggá kell átalakítani a tóriumlánc szerint való magátalakítások útján.



81.1. ábra. Az uránlánc



81.2. ábra. A tóriumlánc

A 81.1. és 81.2. ábrákon feltüntetett nehéz izotópok mindegyike radioaktív. Az ábrák egyszerűsítése érdekében a bomlások módját azonban csak azokban az esetekben tüntettük fel, amelyekben ez az izotóplánc felépülésében szerepet játszik. A fel nem tüntetett bomlások általában  $\alpha$ -bomlások, amelyek felezési ideje az izotópok többségére ezer évnél hosszabb. (Például, a <sup>239</sup>Pu esetében 24 ezer év.) Mint a sémákból kitűnik, a  $\beta$ -bomlások felezési ideje lényegesen rövidebb, többnyire néhány nap vagy kevesebb. Ezek alól az általános megállapítások alól néhány nevezetes kivétel van:

- A <sup>241</sup>Pu-izotóp mind  $\alpha$ -, mind  $\beta$ -bomlásra képes. Az  $\alpha$ -bomlás felezési ideje nagy, de  $\beta$ -bomlásáé csak 15 év (vö. *81.1. ábra*). Ez éppen akkora, hogy az üzemanyagnak a reaktorban töltött ideje (általában 3–4 év) alatt már érezhetően befolyásolja ennek és a láncban utána következő izotópoknak a mennyiségét. (Pontos numerikus számí-tásokban ezt figyelembe is szokás venni, de az alábbiakban elhanyagoljuk.)
- A <sup>238</sup>Pu a reaktorban ugyan kis mennyiségben keletkezik, így a reaktor működését befolyásolni nem tudja, más területeken azonban különleges jelentősége van, mert α-bomlását nem kíséri kemény (vagyis nagy áthatolóképességű) γ-sugarak kibocsátása. α-bomlásának felezési ideje 88 év, így jól használható izotópgenerátorok energiaforrásaként (pl. pacemakerekben).

• A tóriumláncban két izotóp van, amelyek α-bomlása rövid felezési idejű. Ezeket a *81.2. ábrán* bejelöltük.

A bemutatott izotópláncokban keletkező hasadóképes anyagok nukleáris üzemanyagként újra felhasználhatók. A láncokhoz tartozó többi izotóp viszont a nukleáris energiatermelés hulladékának tekintendő. Ebben a minőségükben elég kellemetlenek, mert ezer év feletti felezési idejük miatt tárolásukról hosszú időn keresztül kell gondoskodni.

A legfontosabb nehéz izotópok néhány magfizikai adatát a 81.1. táblázat tartalmazza.

| Izotóp             | $\sigma_{a}$ | Ia   | $\sigma_{ m f}$ | $I_{ m f}$ |
|--------------------|--------------|------|-----------------|------------|
| <sup>232</sup> Th  | 7,4          | 85   |                 |            |
| <sup>233</sup> U   | 578,8        | 904  | 531,1           | 764        |
| <sup>235</sup> U   | 680,8        | 419  | 582,2           | 275        |
| <sup>238</sup> U   | 2,7          | 275  |                 |            |
| <sup>239</sup> Pu  | 1011,3       | 501  | 742,5           | 301        |
| <sup>240</sup> Pu  | 289,5        | 8013 | 0,03            |            |
| <sup>241</sup> Pu  | 1377         | 732  | 1009            | 570        |
| <sup>242</sup> Pu  | 18,5         | 1130 |                 |            |
| <sup>241</sup> Am  | 835          | 1500 | 3,15            | 21         |
| <sup>242m</sup> Am | 8000         | 9000 | 6600            | 1570       |
| <sup>243</sup> Am  | 79,3         | 1820 |                 |            |
| <sup>242</sup> Cm  | 16           | 150  |                 |            |
| <sup>243</sup> Cm  | 825          | 2345 | 600             | 1860       |
| $^{244}$ Cm        | 15,1         | 660  | 1,2             | 12,5       |

81.1. táblázat. Az urán- és tóriumlánc fontosabb izotópjainak termikus hatáskeresztmetszetei és rezonanciaintegráljai (barn)

## Hasadási termékek

A hasadásban több száz fajta izotóp keletkezhet hasadási termékként. Közülük több mint 600-nak mérték ki a magfizikai jellemzőit (gyakoriság, hatáskeresztmetszetek, rezonanciaintegrál, felezési idő, bomlási séma, a kibocsátott  $\gamma$ - és  $\beta$ -sugárzás energiája stb.). A gyakoriságnak a tömegszám szerint való eloszlását a 81.3. *ábra* mutatja be az <sup>235</sup>U-izotóp termikus neutronok által kiváltott hasadására vonatkozóan. Látható, hogy a legnagyobb gyakorisággal a 94-es és a 138-as tömegszámú izotópok keletkeznek. Más hasadó izotópokra vagy gyors neutronok által kiváltott hasadásokra az eloszlásgörbe jellege a 81.3. *ábrá*hoz hasonló, de pontos alakja eltérő.

A hasadási termékek megjelenése több szempontból is káros:

 a nukleáris energiatermelés hulladékának minősülnek, és – mivel radioaktívak – biztonságos elhelyezésükről és hosszú idejű tárolásukról gondoskodni kell (kb. 600 évig);

- radioaktivitásuk révén hőt termelnek, így a nukleáris üzemanyag hűtéséről a láncreakció megszűnése után is gondoskodni kell: ez a *remanens hő*, amelynek biztonságos elvezetése okozza a reaktorbiztonság legnehezebb problémáját;
- a hasadási termékek egy részének nagy a neutronbefogási hatáskeresztmetszete, így felhalmozódásuk rontja a neutronmérleget, vagyis csökkenti a reaktivitást; emiatt az ilyen hasadási termékeket *reaktormérgek*nek, felhalmozódásukat pedig *mérgeződés*nek nevezzük;
- a hasadási termékek két úton is rontják a fűtőelemek mechanikai tulajdonságait: egyrészt a kristályrácsba beépülve azt roncsolják, másrészt radioaktív sugárzásuk károsítja a fűtőelem-burkolatot.



81.3. ábra. A hasadási termékek gyakorisága és tömegszáma közötti összefüggés (az <sup>235</sup>U termikus hasadására vonatkozóan)

A nehéz elemekhez hasonlóan a hasadási termékek is bomlási láncokba sorolhatók, amelyeket a két legjelentősebb reaktorméreg, a <sup>135</sup>Xe és a <sup>149</sup>Sm példájával illusztráljuk. A <sup>135</sup>Xe lehet hasadási termék Y = 0,001 gyakorisággal, de keletkezhet az Y = 0,064 gyakoriságú <sup>135</sup>Te hasadási termék bomlása révén is (81.4a. ábra). A <sup>149</sup>Sm a 81.4b.ábrán látható sémával keletkezik. Teljes hatáskeresztmetszetüket a 81.5. és a 81.6. ábrák mutatják be. (Esetükben  $\sigma_t$  gyakorlatilag azonos az abszorpciós hatáskeresztmetszettel.) Itt szokatlanul nagy hatáskeresztmetszetekről van szó. Ha ezeket egy 20 °C-hoz tartozó Maxwell-spektrumra átlagoljuk, akkor

```
<sup>135</sup>Xe-re \sigma_a = 3,1\cdot 10^6 barn,

<sup>149</sup>Sm-re \sigma_a = 6,5\cdot 10^4 barn
```

adódik. Ezek akkora értékek, hogy az izotópok egészen kis mennyisége már elegendő ahhoz, hogy a reaktivitást jelentősen befolyásolják (vö. 8.3. alfejezet).



b)

81.4. ábra. Hasadási termékek bomlási lánca: a) A = 135, b) A = 149



## 8.2. Az uránlánc

A *81.1. ábrá*n bemutatott uránlánc több fő ágra bomlik: az egyik az <sup>235</sup>U-ből indul ki, ettől gyakorlatilag független az <sup>238</sup>U-ból kiinduló ág, végül ez utóbbihoz csatlakozik a távoli transzuránokat tartalmazó ág. Közöttük ugyan vannak vissza- csatolások: például a <sup>239</sup>Pu  $\alpha$ -bomlása révén <sup>235</sup>U keletkezik (az ábrán ez nincs jelölve), de ezeket figyelmen kívül hagyjuk, mert gyakorlati jelentőségük nincs.

A lánchoz tartozó atommagok a reaktornak gyakorlatilag azon a helyén maradnak, ahol kialakultak. Ez bizonyos fokig megkönnyíti a keletkező izotópok menynyiségének a kiszámítását. Az izotóplánchoz tartozó *i*-edik izotópra vonatkozóan bevezetjük a következő jelöléseket:

*N<sub>i</sub>* magsűrűség;

 $\sigma_i^{\rm a}$  abszorpciós hatáskeresztmetszet;

- $\lambda_i$  radioaktív bomlási állandó;
- *j* annak az izotópnak a sorszáma, amelyből az *i*-edik izotóp (n,γ) reakció útján keletkezik;
- *k* annak az izotópnak a sorszáma, amelyből az *i*-edik izotóp radioaktív bomlás útján keletkezik.

Ezek a mennyiségek a reaktornak egy kiszemelt pontjára vonatkoznak. A hatáskeresztmetszetek a kiszemelt helyhez tartozó teljes neutronspektrumra vett átlagok. A teljes spektrumra integrált fluxust jelöljük  $\phi$ -vel. A reaktor üzeme során az  $N_i$  magsűrűségek változnak, aminek az időfüggését a következő egyenletrendszer írja le:

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = -\left(\sigma_i^{\mathrm{a}}\phi + \lambda_i\right)N_i + \sigma_j^{\mathrm{c}}\phi N_j + \lambda_k N_k, \qquad (82.1)$$

ahol az "*i*" index végigfut az izotóplánc valamennyi tagján. Az itt szereplő tagok fizikai jelentése világos: az első szerint a radioaktív bomlás és neutronabszorpció csökkenti, a második és a harmadik szerint pedig a *j*-edik fajta magban bekövetkező neutronbefogás, illetve a *k*-adik fajta mag radioaktív bomlása növeli az *i*-edik fajta izotóp mennyiségét. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy itt az abszorpció és a befogás között különbséget kell tenni: az izotóp *fogyását az abszorpció* (tehát a befogás és a hasadás együttesen) határozza meg, viszont az új izotóp *keletkezését a befogás* szabja meg.

A (82.1) egyenletet a lánchoz tartozó mindegyik izotópra felírva egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amelyet általában numerikus módszerekkel tudunk megoldani. A megoldást nehezítik a következő körülmények:

- a kiégés során változó izotóp-összetétel hatására változik a neutronspektrum, és emiatt a (82.1) egyenletben szereplő hatáskeresztmetszetek is függnek az időtől, tehát egy változó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerrel van dolgunk;
- a  $\phi$  fluxus értéke a reaktorban helyről-helyre változik, tehát az időben változó izotóp-összetételt a reaktor minden helyén külön-külön ki kell számolni;

- a helyről-helyre változó izotóp-összetétel miatt a kiszemelt ponthoz tartozó spektrumra – szigorúan véve – befolyással van a szomszédos fűtőelemek izotópösszetétele is; ez az effektus azonban olyan gyenge, hogy általában elhanyagolható;
- a  $\phi$  fluxus általában változik az időben, ami a (82.1) alatti egyenletrendszert még akkor is változó együtthatóssá teszi, ha egyébként a fenti effektusok elhanyagolhatók lennének;
- végül megjegyezzük, hogy az időben változó izotóp-összetétel ellenére a reaktornak végig kritikusnak kell lennie, amit szabályozórudak mozgatásával vagy a moderátorban oldott bórsav koncentrációjának a változtatásával érnek el (lásd 8.4. alfejezet); ennek hatására szintén megváltozik a neutronspektrum és ezzel együtt a (82.1)ben szereplő hatáskeresztmetszetek is; hasonló hatása van a hasadási termékek felhalmozódásának (lásd 8.3. alfejezet).

Mindezeknek az effektusoknak akár közelítő kezelése is bonyolult számítási sémákat igényel, amelyekről a 8.4. alfejezetben lesz szó. Egyelőre a kiégés jelenségének kvalitatív megértésére törekszünk, és ezért a fenti effektusokat mind elhanyagoljuk, azaz (82.1)-ben a hatáskeresztmetszeteket időtől függetlennek tekintjük (néha még a fluxust is). Ez az *állandó hatáskeresztmetszet modell*.

A 81.1. táblázatban közölt hatáskeresztmetszetek csak nagyságrendi tájékoztatást adnak arra vonatkozóan, hogy (82.1)-ben milyen értékeket kell használni. Arról van szó, hogy az itt szereplő hatáskeresztmetszetek egycsoport hatáskeresztmetszetek, tehát a termikus és a rezonancia tartományban bekövetkező reakciók gyakoriságának a termikus és a gyors csoportra vett átlagát fejezik ki. Tekintve, hogy a gyors fluxus általában sokkal nagyobb, mint a termikus, a (82.1) szerinti egyenletekben szereplő hatáskeresztmetszetek jelentősen eltérhetnek a 81.1. táblázatban a termikus csoportra megadott értékektől.

A reaktorfizikában a nehéz izotópok jelölésére a következő egyszerű konvenciót szoktuk alkalmazni. Mindegyik izotóp esetében vesszük a rendszám és a tömegszám utolsó számjegyét, és a kettőből együtt (ebben a sorrendben) egy kétjegyű számot képezünk. Az egyes izotópokhoz tartozó mennyiségek indexelésére [tehát a (82.1) egyenletben az *i*, *j* és *k* indexek helyében] ezeket a számokat használjuk. Példák:

| <sup>235</sup> U: | 25 | $^{232}$ Th: 02 | <sup>239</sup> Pu: | 49 |
|-------------------|----|-----------------|--------------------|----|
| <sup>238</sup> U: | 28 |                 | <sup>240</sup> Pu: | 40 |

stb. Könnyű ellenőrizni, hogy a 81.1. és 81.2. *ábrák*on mutatott izotópláncokra ez a jelölésmód egyértelmű.

# Az<sup>235</sup>U-izotópból induló ág

Nézzük először az <sup>235</sup>U-izotópból induló ágat. A kiindulási izotópra (82.1) a következő alakot veszi fel:

$$\frac{\mathrm{d}N_{25}(t)}{\mathrm{d}t} = -\sigma_{25}^{\mathrm{a}}\phi(t)N_{25}(t).$$
(82.2)

Mivel itt a radioaktív bomlás felezési ideje 0,7 milliárd év, ennek a hatása a neutronabszorpció mellett  $\phi(t)$  minden szóba jövő értékénél elhanyagolható. Az egyenlet megoldása egyszerű:

$$N_{25}(F) = N_{25}(0) \exp(-\sigma_{25}^{a}F), \qquad (82.3)$$

ahol:

$$F = \int_{0}^{t} \phi(t') dt'.$$
 (82.4)

*F*-et *fluenciá*nak, *integrális fluxus*nak vagy *besugárzás*nak nevezzük, egysége neutron/cm<sup>2</sup>. Tekintve, hogy *F* általában 10<sup>21</sup> nagyságrendű, szokás a neutron/kbarn egységet is használni.<sup>31</sup>Azt kaptuk tehát (82.3)-ban, hogy az <sup>235</sup>U-izotóp mennyisége a besugárzással exponenciálisan csökken. Ebből kiindulva a (82.1) egyenlet és a *81.1. ábra* alapján kiszámíthatnánk az <sup>236</sup>U-, <sup>237</sup>U- stb. izotópok mennyiségét is, de ez a gyakorlatban különösebben nem érdekes, úgyhogy ezt elhagyjuk.

A kiégés mértékéül a számításokban legkézenfekvőbb a (82.4) alatt definiált F besugárzást használni. A gyakorlat emberei azonban más jellemzőket is használnak. Ritkábban a (82.3)-ban szereplő exponenciális tényezőt adják meg, hiszen ez megadja, hogy az <sup>235</sup>U-izotóp magsűrűsége a kezdeti értékhez képest hányad részére csökkent. Ilyen értelemben beszélnek 70%, 50% stb. kiégésről, ami azt jelenti, hogy az <sup>235</sup>U mennyisége kezdeti értékének rendre 70, 50 stb. %-ára csökkent le. Ezt leggyakrabban kutatóreaktoroknál használják, mert ott nagy dúsítású uránt alkalmaznak, és ebben az esetben az a döntő, hogy az egyetlen hasadóanyagból, az <sup>235</sup>U-ből mennyi fogyott.

A nukleáris energetikában egy másik mennyiség természetes: azt adják meg, hogy a reaktorba eredetileg bevitt nehéz elemek tömegegységére vonatkoztatva menynyi energiát termelt a reaktor. Ez a mennyiség a

$$\int_{0}^{t} \Sigma_{f} \phi(t') dt'$$
(82.6)

integrállal arányos. Viszonyíthatjuk a reaktor bármelyik pontján az oda eredetileg bevitt urán sűrűségéhez. Ekkor a kiégésnek lokális jellemzőjét kapjuk. Ha viszont ezt a reaktor minden pontjában kiszámítjuk, majd a reaktor egész térfogatára integráljuk, és osztjuk a reaktorba helyezett urán teljes mennyiségével, a kiégésre egy átlagos mérőszámot kapunk. Az így kapott mennyiség egysége a MWnap/tonna. Az *F* besugárzás és a dúsítás (*e*), valamint a mérnöki egység között nem lehet általános átszámítási té-

<sup>&</sup>lt;sup>31</sup> Hétköznapi nyelven szoktunk "nvt"-ről is beszélni, hiszen a fluxus *nv*, azaz a neutronsűrűség és a sebesség szorzata, aminek az integrálása *t*-vel való szorzást jelent, ha a fluxus időben állandó. Többen a latin eredetű "fluens" kifejezést használják. Ez nem szerencsés, mert ez a szó a latinban melléknév. Ezen túlmenően germanizmus, mert a német "Fluente" szó átvétele (eredetileg a matematikában). A fizikában jobb lenne a latin "fluentia" főnévnél, illetve annak magyaros "fluencia" ejtésénél maradni, mint számos ez nyelvben történik: az angol és francia "fluence", a spanyol "fluencia" mind ebből a főnévből származik.

nyezőt megadni, hiszen (82.6)-ban a hasadási hatáskeresztmetszetbe beleszámítanak a kiégés során keletkező plutóniumizotópok is, amelyek mennyisége reaktorról reaktorra változhat. Ha csak tiszta uránnal dolgozunk, akkor termikus reaktorban

1 neutron/kbarn 
$$\Rightarrow$$
 5515*e* MWnap/tonna,

ahol *e* az urán %-ban kifejezett dúsítása. Kvalitatív megfontolásokban a nagyságrendek érzékeltetésére jól használhatjuk ezt az összefüggést.

# Az<sup>238</sup>U-izotópból kiinduló ág

Térjünk most át az uránláncnak az <sup>238</sup>U-ból kiinduló ágára. A 81.1. *ábrá*ról látható, hogy erre a (82.1) egyenletek első néhány tagja így írható:

$$\frac{\mathrm{d}N_{28}(t)}{\mathrm{d}t} = -\sigma_{28}^{\mathrm{a}}\phi(t)N_{28}(t), \qquad (82.7a)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{29}(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma_{28}^{\mathrm{c}}\phi(t)N_{28}(t) - \lambda_{29}N_{29}(t), \qquad (82.7b)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{39}(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_{29}N_{29}(t) - \lambda_{39}N_{39}(t), \qquad (82.7c)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{49}(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda_{39}N_{39}(t) - \sigma_{49}^{\mathrm{a}}\phi(t)N_{49}(t).$$
(82.7d)

Mielőtt továbbmennénk, megmutatjuk, hogy a rövid felezési idejű izotópok, tehát az <sup>239</sup>U és a <sup>239</sup>Np figyelmen kívül hagyhatók, és az izotópláncot jó közelítéssel úgy tekinthetjük, mintha az <sup>238</sup>U-ból (n,  $\gamma$ ) reakcióval rögtön <sup>239</sup>Pu keletkezne.<sup>32</sup> Ehhez kiszámítjuk az itt szereplő bomlási állandókat:

$$\lambda_{29} = \frac{\ln 2}{23,6\cdot 60} = 4,9\cdot 10^{-4} / \text{ s},$$
$$\lambda_{39} = \frac{\ln 2}{2,3\cdot 86400} = 3,5\cdot 10^{-6} / \text{ s}.$$

A <sup>239</sup>Pu (termikus) abszorpciós hatáskeresztmetszete 1011 barn a *81.1. táblázat* szerint. A  $\phi$  fluxus tipikus értéke 10<sup>13</sup>/(cm<sup>2</sup>·s), amivel

$$\sigma_{49}^{\rm a} \phi = 10^{-8} / {\rm s}$$

<sup>&</sup>lt;sup>32</sup> Az említett két izotóp esetében elhanyagolható az abszorpció. Ezért hiányzik az abszorpciónak megfelelő tag az egyenletekből.

A 81.1. táblázat szerint az <sup>238</sup>U (termikus) hatáskeresztmetszete 2,7 barn, vagyis fennállnak a következő relációk:

$$\lambda_{29} >> \lambda_{39} >> \sigma_{49}^{a} \phi >> \sigma_{28}^{a} \phi.$$

A (82.7a) egyenlet megoldását (82.3) analógiájára írhatjuk fel:

$$N_{28}(F) = N_{28}(0) \exp(-\sigma_{28}^{a}F), \qquad (82.8)$$

ahol F a (82.4) alatt definiált fluencia. Ha a fluxusra a fenti, tipikus értéket vesszük, akkor egy a reaktorban három évet töltő fűtőelemre:

$$F = 3 \cdot 365 \cdot 86400 \cdot 10^{13} = 9.5 \cdot 10^{20} \text{ neutron/cm}^2 \approx 1 \text{ neutron/kbarn}.$$

Erre való tekintettel a (82.8) alatti exponenciális kifejezés kitevőjének jellegzetes értéke 0,003, vagyis az <sup>238</sup>U-izotóp magsűrűsége a kiégés során kevéssé változik meg. Ezért a következőkben állandónak fogjuk tekinteni.

Az <sup>238</sup>U-izotópból származó izotópok kezdeti értékét 0-nak vehetjük, hiszen a friss nukleáris üzemanyagban nem fordulnak elő. Ezzel a kezdőfeltétellel a (82.7b) és (82.7c) egyenletek megoldását könnyen kiszámíthatjuk, ha a  $\phi$  fluxust *t*-től függetlennek tételezzük fel:

$$\lambda_{29}N_{29}(t) = \sigma_{28}^{c}\phi N_{28}[1 - \exp(-\lambda_{29}t)], \qquad (82.9)$$

$$\lambda_{39}N_{39}(t) = \sigma_{28}^{c} \phi N_{28} \times \left[1 - \frac{\lambda_{29}}{\lambda_{29} - \lambda_{39}} \exp(-\lambda_{39}t) + \frac{\lambda_{39}}{\lambda_{29} - \lambda_{39}} \exp(-\lambda_{29}t)\right].$$
(82.10)

Mivel  $\lambda_{29}$  két nagyságrenddel nagyobb, mint  $\lambda_{39}$ , van olyan *t*, hogy

$$\lambda_{29}t >> 1$$
 és  $\lambda_{39}t << 1$ ,

amire vonatkozóan fennáll:

$$\lambda_{29} N_{29}(t) \approx \sigma_{28}^{c} \phi N_{28}, \qquad (82.11)$$

$$\lambda_{39} N_{39}(t) \approx \sigma_{28}^{c} \phi N_{28} [1 - \exp(-\lambda_{39} t)].$$
(82.12)

Ha (82.12)-t (82.9)-cel összevetjük, akkor látjuk, hogy  $N_{39}(t)$ -t azzal a feltevéssel is megkaphattuk volna, hogy <sup>238</sup>U-ból rögtön <sup>239</sup>Np keletkezik.

Ha (82.12)-vel számolunk tovább (82.7d)-ben, akkor teljesen analóg okoskodással levezethetjük, hogy olyan *t*-re, amelyre

$$\lambda_{39}t >> 1,$$

és így

$$\sigma_{49}^{a} N_{49}(t) \approx \sigma_{28}^{c} N_{28} \Big[ 1 - \exp(-\sigma_{49}^{a} F) \Big].$$
(82.13)

Ez pedig a

$$\frac{\mathrm{d}N_{49}(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma_{28}^{\mathrm{c}}\phi(t)N_{28}(t) - \sigma_{49}^{\mathrm{a}}N_{49}(t)$$

differenciálegyenlet megoldása. Ezzel beláttuk, hogy elegendően hosszú idő elteltével a rövid felezési idejű izotópok magsűrűsége telítési értéket vesz fel, és az izotóplánc későbbi tagjait úgy tekinthetjük, mintha ezek "átugrásával", közvetlenül a kiindulási izotópból keletkeztek volna. Az átugrott izotópok mennyisége arányos az <sup>238</sup>U-izotóp mindenkori mennyiségével. Meg lehet mutatni, hogy ez jó közelítéssel akkor is igaz, ha az utóbbi lassan változik. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az <sup>239</sup>U- és <sup>239</sup>Np-izotópok az <sup>238</sup>U-izotóppal *szekuláris egyensúly*ban vannak. Valahányszor ilyen egyensúly kialakul, a gyorsan bomló izotópok bomlástermékeit az anyamagok figyelmen kívül hagyásával számíthatjuk ki.

A mondottak figyelembevételével a plutóniumizotópokra vonatkozó egyenleteket jelentősen egyszerűsíthetjük: a t változó helyett használhatjuk F-et független változóként. (82.4) alapján ugyanis tetszőleges N(t) függvényre igaz, hogy

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N(F)}{\mathrm{d}F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}N(F)}{\mathrm{d}F}\phi.$$
(82.14)

Ezzel a változócserével a differenciálegyenletekből kiküszöbölhetjük a fluxust:

$$\frac{\mathrm{d}N_{49}(F)}{\mathrm{d}F} = \sigma_{28}^{\mathrm{c}} N_{28}(F) - \sigma_{49}^{\mathrm{a}} N_{49}(F), \qquad (82.15a)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{40}(F)}{\mathrm{d}F} = \sigma_{49}^{\mathrm{c}} N_{49}(F) - \sigma_{40}^{\mathrm{a}} N_{40}(F), \qquad (82.15b)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{41}(F)}{\mathrm{d}F} = \sigma_{40}^{\mathrm{c}} N_{40}(F) - \sigma_{41}^{\mathrm{a}} N_{41}(F).$$
(82.15c)

(82.15a) megoldását (82.13)-ban már tulajdonképpen felírtuk, de ott *t* szerepelt változóként. Ugyanez *F*-fel kifejezve:

$$\sigma_{49}^{a} N_{49}(F) = \sigma_{28}^{c} N_{28} \Big[ 1 - \exp\left(-\sigma_{49}^{a} F\right) \Big].$$
(82.16a)

Mivel a 81.1. táblázat szerint  $\sigma_{49} \approx 1$  kbarn, F értéke pedig 1 n/kbarn nagyságrendű, az itt szereplő exponenciális kifejezés kitevőjének értéke –1 körül van akkor, amikor a nukleáris üzemanyagot a reaktorból kirakjuk. Ez azt jelenti, hogy a <sup>239</sup>Pu mennyisége általában nem éri el az  $F \rightarrow \infty$ -hez tartozó telítési értéket, hanem annak csak körülbelül 60%-át. A 81.1. táblázat és (82.3) alapján ezalatt az <sup>235</sup>U-nek körülbelül 50%-a fogy el. A kirakást jóval megelőző besugárzásokra ( $F \ll 1$  n/kbarn) (82.16a)-ban az exponenciális függvényt sorba fejthetjük, és azt kapjuk, hogy

$$N_{49}(F) \approx \sigma_{28}^{\rm c} N_{28} F$$
, (82.16b)

vagyis a kiégés kezdetén a  $^{239}$ Pu koncentrációja az F besugárzással közelítőleg lineárisan nő.

(82.16b)-t (82.15b)-be helyettesítve kapjuk a <sup>240</sup>Pu-izotóp mennyiségét:

$$\sigma_{40}^{a} N_{40}(F) = \sigma_{28}^{c} \sigma_{49}^{c} N_{28} \left[ \frac{1 - \exp(-\sigma_{40}^{a} F)}{\sigma_{40}^{a}} - F \right], \qquad (82.17a)$$

amiből sorfejtés után kis F-re kapjuk:

$$N_{40}(F) \approx \sigma_{28}^{\rm c} \sigma_{49}^{\rm c} N_{28} \frac{F^2}{2}.$$
 (82.17b)

Ha ezt az utóbbi kifejezést (82.15c)-be helyettesítjük, az egyenlet kisF-re érvényes megoldásaként az

$$N_{41}(F) \approx \sigma_{28}^{\rm c} \sigma_{49}^{\rm c} \sigma_{40}^{\rm c} N_{28} \frac{F^3}{6}$$
(82.18)

eredmény adódik.

Végeredményben tehát azt találtuk, hogy az üzemanyagciklus elején a <sup>240</sup>Pu mennyisége a besugárzás négyzetével, a <sup>241</sup>Pu mennyisége pedig a köbével arányosan nő. Ez azt jelenti, hogy kis és közepes besugárzás mellett az utóbbiak mennyisége a <sup>239</sup>Pu-éhez képest kicsi, viszont a továbbiakban a nehezebb plutóniumizotópok menynyisége már rohamosan nő, mégpedig annál gyorsabban, a láncnak minél későbbi tagjáról van szó. Ezek a kijelentések fokozottan érvényesek a távolabbi transzurán elemekre, tehát az ameríciumra, a kűriumra és a továbbiakra, hiszen mennyiségük *F*-nek egyre magasabb hatványával nő. A *82.1. ábrá*n sematikusan mutatjuk az egyes fajta izotópok mennyiségének *F*-től való függését.<sup>33</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>33</sup> A "sematikus" jelző azért indokolt, mert az ábrázolt függvények kiszámításában használt hatáskeresztmetszetek a valóságos értékeknek csak hozzávetőleg felelnek meg. Az utóbbiak ugyanis erősen függnek a konkrét reaktortípustól, mi viszont *általában* vizsgáljuk az izotópláncot.



82.1. ábra. A nehéz izotópok felhalmozódása (sematikus ábrázolás)

#### Konverzió és szaporítás

A reaktorból kirakott nukleáris üzemanyag legfontosabb jellemzője a *konver*ziós tényező:

$$C = \frac{\text{keletkezett plutónium tömege}}{\text{elfogyott}^{235}\text{U tömege}}.$$
(82.19a)

Ezt a mennyiséget az üzemanyag által a reaktorban töltött teljes üzemidőre vonatkoztatjuk, és kielégítő pontossággal csak úgy lehet megmérni, hogy a kirakott üzemanyagot *reprocesszál*juk, vagyis abból kivonjuk az uránt és a plutóniumot, majd mennyiségüket kémiai úton meghatározzuk. Az így definiált konverziós tényező mellett szoktunk beszélni a *kezdeti konverziós tényező*ről is, amely a kiégés kezdetére vonatkoztatott mennyiség:

$$C_{\text{kezd.}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} N_{28} \sigma_{28}^{c}(E) \psi(E) dE}{\int_{0}^{\infty} N_{25} \sigma_{25}^{a}(E) \psi(E) dE},$$
(82.19b)

ahol  $\psi(E)$  a neutronspektrum a reaktor vizsgált pontjában (vagy az egész reaktorra átlagolva). Természetesen lehetne a (82.19a) alatt definiált mennyiségre vonatkozóan is felírni egy (82.19b)-nek megfelelő képletet, de ettől – itt nem részletezett nehézségek miatt – eltekintünk. A ma üzemelő reaktorok nagy részéből kirakott üzemanyagot (egyelőre) nem reprocesszálják (vö. 1. fejezet, "Történelmi áttekintés"), így *C*-re vonatkozóan többnyire csak számított értékek állnak rendelkezésre.

A konverziós tényező értéke jelentősen függ a reaktor típusától, aminek két fő oka van: más a neutronspektrum és így mások a (82.1)-ben szereplő hatáskeresztmetszetek; más a kezdeti dúsítás; végül különbözik a kirakott üzemanyag kiégésének a mértéke. Könnyűvízzel moderált reaktorokban a konverziós tényező 0,6 körül van, viszont grafitos reaktorokban 0,8 vagy annál nagyobb is lehet. A nehézvizes reaktorok még ennél is kedvezőbbek, sőt, a nehézvízzel moderált,  $^{233}$ U-mal működő reaktorban (vö. 81.2. *ábra*) kissé meg is haladhatja az 1-et. Végül megemlítjük a gyors reaktorokat, amelyekben *C* jóval meghaladja az 1-et.

A konverziós tényező 1-nél nagyobb vagy kisebb volta az urán (és a tórium) hosszú távú hasznosítása szempontjából döntő jelentőségű. Ha ugyanis C > 1, akkor a reaktor üzeme során több hasadóanyag keletkezik, mint amennyi elfogy. Ebben az esetben *üzemanyag-szaporítás*ról beszélünk, és az ilyen reaktorokat *szaporító reakto-r*oknak nevezzük. Ellenkező esetben csak *konverzió*ról beszélünk, és a megfelelő re-aktort *konverter*nek nevezzük. Ha az említett nehézvizes <sup>233</sup>U reaktortól eltekintünk, akkor az előbbi csoportba a gyors reaktorok, az utóbbiba pedig a termikus reaktorok tartoznak.

Nézzük meg, a természetes urán energiatartalmának hasznosítása szempontjából milyen következményei vannak a konverziós tényező értékének. Nevezzük *kiégési ciklus*nak azt az időt, amelyet egy adott töltet a reaktorban tölt. Képzeljük el, hogy minden ciklusban *M* tömegű friss üzemanyagot viszünk be a reaktorokba, de mindig felhasználjuk az előző ciklusokban termelt új hasadóanyagot is. A konverziós tényező definíciója szerint az első ciklus végére *MC* új hasadóanyag keletkezik, tehát a második ciklusban

$$M + MC$$

tömegű hasadóanyagot használunk fel. Hasonló meggondolással kapjuk, hogy a harmadik ciklusban felhasznált hasadóanyag tömege:

$$M + (M + MC)C = M + MC + MC^2.$$

Ezt tovább folytatva látjuk, hogy végső soron

$$M + MC + MC^2 + MC^3 + \dots$$

tömegű hasadóanyagot tudunk felhasználni. Konverzió esetében (C < 1) ennek a sornak a felső korlátja M/(1 - C), viszont szaporításkor a sornak nincs felső korlátja, vagyis elvileg a teljes <sup>238</sup>U mennyiséget hasadóvá tudjuk tenni.<sup>34</sup> Ha például csak könynyűvizes reaktorokat alkalmazunk, akkor a felhasználható hasadóanyag az <sup>235</sup>U menynyiségének legfeljebb csak 1/(1 - 0,6) = 2,5-szerese lehet, de grafitos reaktorok esetében is csak mintegy 1/(1 - 0,8) = 5-szörös növekedéssel számolhatunk. A gyakorlatban mindig fellépnek feldolgozási veszteségek, tehát a tényleges számok ennél kisebbek. Ha a Föld uránkészleteiből csak az <sup>235</sup>U-t hasznosítjuk, akkor ezek teljes energiatartalma nagyságrendileg megfelel a Földön található szénhidrogén-készletek energiatartalmának. A mondottak szerint tehát gyors reaktorok nélkül a Föld uránkészletei hosszútávon nem enyhítik jelentős mértékben az emberiség energiagondjait. Újrafeldolgozás és visszatáplálás esetén azonban óriási energiatartalékot képviselnek.

<sup>&</sup>lt;sup>34</sup> Akinek nem tetszik fenti gondolatmenetünk, egyszerűbben is okoskodhat. Ha a világon rendelkezésre álló hasadóanyag össztömege M, továbbá M'-vel jelöljük a végül hasznosított hasadóanyag össztömegét, akkor ebből M'C lesz az a tömeg, amelyet a reprocesszálás révén nyerünk. Fennáll tehát a következő egyenlőség: M' = M + M'C, amiből M' = M/(1 - C).

A különböző reaktortípusok között nemcsak a konverziós tényező értékében, hanem a plutónium izotóp-összetételében is különbségek vannak. Például tipikus értékek a következők:

|                  | <sup>240</sup> Pu | <sup>241</sup> Pu |
|------------------|-------------------|-------------------|
| vizes reaktor    | 24%               | 15%               |
| grafitos reaktor | 20%               | 3%                |

A különbség oka elsősorban az, hogy a vizes reaktorokban a kiégetettség értéke általában 30 ezer MWnap/tonna, a grafitosokban pedig kevesebb. Ha figyelembe vesszük is, hogy a grafitos reaktorokban természetes uránt, a vizesekben pedig (kereken) 3% dúsítású uránt alkalmaznak, azt látjuk, hogy a vizes reaktorokban a kirakott üzemanyag besugárzása (tehát F) közelítőleg másfélszer nagyobb, mint a grafitos reaktorokban.

A plutónium izotóp-összetételének a további felhasználás szempontjából van jelentősége. Nézzük először a reaktorban való ismételt felhasználást. Ekkor a <sup>240</sup>Puből hasadóanyag (ti. <sup>241</sup>Pu), a <sup>241</sup>Pu-ből pedig neutronabszorbens (ti. <sup>242</sup>Pu) keletkezik. Ez azt jelenti, hogy a további szaporítás szempontjából a sok <sup>240</sup>Pu és a kevés <sup>241</sup>Pu a kedvező. Ezért gyors reaktorokban kiindulásul kedvezőbb a grafitos reaktorban termelt plutóniumot felhasználni. Ha termikus reaktorban használnánk fel a plutóniumot (ami egyébként a világon egyelőre csak Franciaországban történik), akkor a szaporítás szempontjai helyett a jó neutronháztartás a fő szempont, vagyis itt a kis mennyiségű <sup>240</sup>Pu és a sok <sup>241</sup>Pu az előnyös. Látjuk, hogy erre inkább a vizes reaktorban termelt plutónium a jobb, de ez a különbség nem számottevő. Van egy további szempont is: a nagyobb tömegszámú plutóniumizotópok hatással vannak a reaktor hőfoktényezőjére (vö. 5.6. alfejezet). Egyes vizsgálatok szerint – heterogén reaktorokban – 4–6-szoros visszatáplálás után a hőfoktényező pozitívvá válhat, így ez biztonsági megfontolásokból nem engedhető meg. A dologgal kapcsolatban közvetlen tapasztalat kevés van, így ezt kategorikusan – egyelőre – nem célszerű kijelenteni.

A nukleáris fegyvergyártás számára nagyon kritikus a plutónium izotópösszetétele. Itt egyértelműen a grafitos reaktorok javára billen a mérleg, mert az atombombában a <sup>239</sup>Pu-nél nehezebb izotópok két módon is rontják a bomba tulajdonságait. Egyrészt a <sup>240</sup>Pu nagy abszorpciós rezonanciaintegrálja az <sup>238</sup>U-hoz hasonlóan rontja a neutronmérleget, tehát a <sup>240</sup>Pu mennyisége csökkenti a robbanás érdekében előidézett többletreaktivitást. Másrészt a nehezebb plutóniumizotópok spontán hasadásának rövid a felezési ideje, aminek következtében a bombában minden pillanatban meglehetősen sok neutron van jelen. Ez azt jelenti, hogy a robbanás még az előtt kifejlődik és szétveti a bombát, mielőtt a nagy robbanóerőhöz szükséges többletreaktivitás kialakulhatna. Ez az oka annak, hogy a nukleáris fegyverekhez felhasznált plutóniumot grafitos reaktorokban termelik, de az energetikai felhasználásnál lényegesen kisebb (általában 1000 MWnap/tonna alatti) kiégés mellett. Következésképpen a grafitos reaktorok (például a Csernobilban felrobbant reaktorhoz hasonló, RBMK<sup>35</sup> típusú reaktorok) ugyan felhasználhatók a nukleáris fegyvergyártás céljaira, de ez a fajta felhasználás ellentmond az energetikai szempontoknak: csak akkor keletkezik ún.

<sup>&</sup>lt;sup>35</sup> RBMK orosz rövidítés, amelynek a jelentése: csatornatípusú nagy teljesítményű reaktor.

*fegyvertisztaságú* plutónium, ha az üzemanyagot nagyon kevéssé égetik ki, vagyis belőle nagyon kevés energiát vonnak ki.

### 8.3. A hasadási termékek

A hasadási termékek felhalmozódását leíró általános egyenletet (82.1) analógiájára írhatjuk fel. Egy kiszemelt (*i*-vel jelölt) hasadási termék háromféle módon keletkezhet:

- közvetlenül a hasadásban keletkezik; ennek a valószínűségét (vagyis a hasadási termék hozamát) Y<sub>i</sub>-vel jelöljük (ezt ábrázoljuk a 81.3. ábrán); mivel egy hasadásban általában két hasadási termék keletkezik, a hozamoknak az összes hasadási termékekre vett összege 2;
- egy másik (*j*-vel jelölt) hasadási termék radioaktív bomlásának a terméke;
- egy másik (k-val jelölt) hasadási termékben bekövetkező neutronbefogás terméke.

Egy kiszemelt hasadási termék kétféle módon tűnhet el a reaktorból:

- radioaktív bomlással más izotóppá alakul;
- neutronbefogással más izotóppá alakul.

Mindezeknek a folyamatoknak a mérlegét a következő egyenlet fejezi ki:

$$\frac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = Y_i \Sigma_\mathrm{f} \phi + \lambda_j N_j + \sigma_k N_k \phi - \lambda_i N_i - \sigma_i N_i \phi.$$
(83.1)

Az itt alkalmazott jelölések megegyeznek az előző alfejezetben alkalmazott jelölésekkel.

A nagy számú hasadási terméket két fő csoportba szokás osztani:

- azok, amelyekre vagy  $\lambda_i$  vagy  $\sigma_i$  (vagy mindkettő) nagy: mennyiségük rövid idő alatt telítési értéket ér el; e csoport tipikus példái a <sup>135</sup>Xe- és a <sup>149</sup>Sm-izotópok, amelyeket a későbbiekben részletesen fogunk tanulmányozni;
- azok, amelyekre mind  $\lambda_i$ , mind  $\sigma_i$  kicsi:

 $\sigma_i \phi t \ll 1$  és  $\lambda_i t \ll 1$ ;

mennyiségük a kiégés során folyamatosan nő, és a következőképpen írható fel:

$$N_{i}(t) = Y_{i} \int_{0}^{t} \Sigma_{f} \phi(t') dt'.$$
(83.2)

Az utóbbi csoportba tartozó izotópokat "salaknak" is szoktuk nevezni. Összes mennyiségük arányos a termelt energiával.<sup>36</sup> Ha kiválasztunk egy jól ismert hozamú, hosszú felezési idejű hasadási terméket, amelynek mennyiségét az általa kibocsátott  $\gamma$ -sugárzás alapján kielégítő pontossággal meg lehet mérni, akkor (83.2) alapján ebből anélkül is meghatározhatjuk a kiégés számszerű értékét, hogy a besugárzott üzem-anyagot reprocesszálni kellene. Ilyen célokra jól használható például a <sup>148</sup>Nd-izotóp.

A salakok csoportjába tartozó hasadási termékek mennyiségét nem szükséges külön-külön számba venni. Elégséges őket néhány csoportba összefogni, amelyeken belül a felezési idők egymástól nem térnek el nagyon, és ezekre a csoportokra eredő hozamot meg átlagos hatáskeresztmetszeteket definiálni.

A reaktorokban felhalmozódó hasadási termékek abszorpciós hatáskeresztmetszetük nagysága szerint növelik meg a fűtőelem abszorpciós hatáskeresztmetszetét. Ezt a folyamatot *mérgeződés*nek nevezzük. ( $\Sigma_a$  növekedése elsősorban a termikus csoportban számottevő.) Két hasadási termék van, amelyek által okozott mérgeződés különösen jelentős: <sup>135</sup>Xe és <sup>149</sup>Sm. Kivételesen nagy abszorpciós hatáskeresztmetszetük miatt különleges szerepet játszanak a reaktorok üzemvitelében. Tekintve, hogy az előbbi radioaktív, az utóbbi pedig stabil, hatásuk jellege eltérő. Ezért külön foglalkozunk velük.

## Xe-mérgeződés

A <sup>135</sup>Xe bomlási sémáját a 8.1. alfejezetben felírtuk. A <sup>135</sup>Te-t figyelmen kívül hagyhatjuk, mert felezési ideje sokkal kisebb, mint a <sup>135</sup>I-é. Ezzel (83.1) alapján a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} = Y_{\mathrm{I}} \mathcal{\Sigma}_{\mathrm{f}} \phi - \lambda_{\mathrm{I}} N_{\mathrm{I}} , \qquad (83.3a)$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathrm{Xe}}}{\mathrm{d}t} = Y_{\mathrm{Xe}} \Sigma_{\mathrm{f}} \phi + \lambda_{\mathrm{I}} N_{\mathrm{I}} - \lambda_{\mathrm{Xe}} N_{\mathrm{Xe}} - \sigma_{\mathrm{Xe}} N_{\mathrm{Xe}} \phi.$$
(83.3b)

Ezt az egyenletrendszert nem nehéz megoldani. A következőkben két speciális esetet fogunk vizsgálni: az *egyensúlyi* és a *leállás utáni* mérgeződést.

(83.3) baloldalán a deriváltakat 0-val téve egyenlővé megkapjuk a xenon és a jód egyensúlyi koncentrációját:

$$N_{\rm I}(\infty) = \frac{Y_{\rm I} \mathcal{L}_{\rm f} \phi}{\lambda_{\rm I}}, \qquad (83.4a)$$

<sup>&</sup>lt;sup>36</sup> Az orosz atomerőművi gyakorlatban a MWnap/tonná-ban kifejezett kiégés helyett gyakran használják a kg salak/kg urán mérőszámot. Számértéke véletlenül megegyezik az ezer MWnap/tonnában kifejezett kiégéssel, mert ezer MWnap energia termelésekor kereken 1 kg urán hasad el.

$$N_{\rm Xe}(\infty) = \frac{(Y_{\rm I} + Y_{\rm Xe})\Sigma_{\rm f}\phi}{\lambda_{\rm Xe} + \sigma_{\rm Xe}\phi}.$$
(83.4b)

Amikor a  $\phi$  fluxus kicsi (vagyis  $10^{12}$  n/(cm<sup>2</sup>·s)-nál kisebb), a nevezőben  $\sigma_{Xe}\phi$  elhanyagolható. Ilyenkor (83.4b) szerint a xenon egyensúlyi koncentrációja a fluxussal arányos. A másik végletben, amikor a fluxus nagy (vagyis  $10^{14}$  n/(cm<sup>2</sup>·s)-nál nagyobb), (83.4b) nevezőjében a  $\lambda_{Xe}$  bomlási állandó hanyagolható el. Ilyenkor a xenon egyensúlyi koncentrációja a fluxustól független. Atomerőművekben a fluxus nagyságrendje általában  $10^{13}$  n/(cm<sup>2</sup>·s), tehát közbenső érték, amelyre a xenon egyensúlyi koncentrációja a fluxussal ugyan már nem arányos, de még nő. A fluxustól független koncentráció csak a nagy fluxusú kutatóreaktorokban szokott előfordulni.

A gyakorlat számára különös problémákat okoz a következő, az erőművek életében gyakori eset. Tételezzük fel, hogy az erőmű a t = 0 időpillanat előtt hosszú ideig állandó teljesítményen üzemelt. Ezalatt mind a jód, mind a xenon felvette telítési koncentrációját. Ha a (83.3) egyenlet számára a (83.4) alatti koncentrációkat vesszük kezdeti feltételnek, akkor az egyenlet megoldása a következőnek adódik:

$$N_{\rm Xe}(t) = N_{\rm Xe}(\infty) e^{-\lambda_{\rm Xe}t} + \frac{\lambda_{\rm I}}{\lambda_{\rm Xe} - \lambda_{\rm I}} N_{\rm I}(\infty) \left( e^{-\lambda_{\rm I}t} - e^{-\lambda_{\rm Xe}t} \right).$$
(83.5)

Ebben a kifejezésben *t* nagy értékeire a xenon koncentrációja 0-hoz tart. Kezdetben azonban – tekintve, hogy  $\lambda_{I} > \lambda_{Xe}$  – a xenon koncentrációja *növekszik*, aminek az a fizikai magyarázata, hogy a leállás utáni néhány órában a jód bomlása több xenont termel, mint amennyit a xenon bomlása elfogyaszt. A leállás után tehát lesz egy időpont, amikor a xenon koncentrációja maximumot ér el, és csak azt követően kezd csökkenni. A maximum időpontja a leállás után 8–10 óra, nagysága pedig erősen függ attól, hogy a leállás előtt mekkora volt a fluxus értéke.

A 83.1. ábrán a fluxus három értékére vonatkozóan mutatjuk be a reaktor mérgeződésének az időtől való függését. (A mérgeződést a xenon és az urán makroszkopikus abszorpciós hatáskeresztmetszetének a hányadosával mérjük.) Látható, hogy a mérgeződés elég érzékenyen függ a fluxus kiindulási értékétől. A jelenségnek a reaktorok üzemvitele szempontjából az a következménye, hogy a leállás után néhány órával a reaktivitás lecsökken, és ha nem tudunk a reaktorból elegendően sok szabályozórudat kihúzni, nem tudjuk a reaktort addig újraindítani, amíg a xenon el nem bomlott, tehát csak 24–48 óra múlva. Ezért a tervezőknek erre az esetre speciális rendeltetésű szabályozórudakról kell gondoskodniuk, vagyis a reaktorba kellő menynyiségű *reaktivitástartalék*ot kell beépíteniük. Mivel a mérgeződés mértéke erősen nő a fluxussal, a xenon a legtöbb gondot a nagy fluxusú kutatóreaktorokban okozza.



83.1. ábra. Xenon-mérgeződés az idő függvényében (paraméter:  $\phi$ )

A xenon megjelenése nemcsak a reaktivitást befolyásolja, hanem a fluxus térbeli eloszlását is. Kedvezőtlen esetben ez bonyolult térbeli ingadozásokhoz vezet. Erről a kérdésről részletesebben olvashatunk a [18] kézikönyvben.

### Sm-mérgeződés

A xenonhoz hasonlóan a szamárium is okoz mérgeződést, amelyet a (83.3)hoz hasonló egyenletek írnak le azzal a különbséggel, hogy a 8.1. alfejezetben mutatott bomlási séma szerint a <sup>149</sup>Sm stabil izotóp. Ennek megfelelően a szamárium koncentrációja monoton nő, hiszen a <sup>149</sup>Pm bomlása folyamatosan termeli a <sup>149</sup>Sm magokat, de azok nem bomlanak le. A 8.1. alfejezetben közölt bomlási séma szerint – (83.1) mintájára – a következő egyenletek érvényesek rájuk:

$$\frac{dN_{\rm Pm}}{dt} = Y_{\rm Pm} \Sigma_{\rm f} \phi - \lambda_{\rm Pm} N_{\rm Pm}, \qquad (83.6a)$$

$$\frac{dN_{\rm Sm}}{dt} = \lambda_{\rm Pm} N_{\rm Pm} - \phi \sigma_{\rm Sm} N_{\rm Sm}.$$
(83.6b)

Ha ezeket az egyenleteket a  $N_{Pm}(0) = N_{Sm}(0) = 0$  kezdeti feltételekkel megoldjuk, a következő eredményt kapjuk:

$$N_{\rm Pm}(t) = \frac{Y_{\rm Pm} \Sigma_{\rm f} \phi}{\lambda_{\rm Pm}} \left(1 - e^{-\lambda_{\rm Pm} t}\right),\tag{83.7a}$$

$$N_{\rm Sm}(t) = \frac{Y_{\rm Pm} \Sigma_{\rm f}}{\sigma_{\rm Sm}} \left( 1 - \frac{\sigma_{\rm Sm} \phi e^{-\lambda_{\rm Pm} t} - \lambda_{\rm Pm} e^{-\sigma_{\rm Sm} \phi t}}{\sigma_{\rm Sm} \phi - \lambda_{\rm Pm}} \right).$$
(83.7b)

Kiolvasható ebből, hogy elegendően hosszú idő alatt a következő stacionárius értékek állnak be [vö. (83.4)]:

$$N_{\rm Pm}(\infty) = \frac{Y_{\rm Pm} \mathcal{L}_{\rm f} \phi}{\lambda_{\rm Pm}},\tag{83.8a}$$

$$N_{\rm Sm}(\infty) = \frac{Y_{\rm Pm} \Sigma_{\rm f}}{\sigma_{\rm Sm}}.$$
(83.8b)

Figyelemre méltó, hogy a <sup>149</sup>Sm egyensúlyi koncentrációja független a fluxustól. Ha ezt összevetjük (83.4b)-vel, azt látjuk, hogy ennek a <sup>149</sup>Sm stabil volta az oka. Ebből következik, hogy a reaktor leállítása után a Sm-mérgeződés időbeli lefolyása is más, mint a Xe-mérgeződésé. Oldjuk ugyanis meg  $\phi = 0$  mellett a (83.6) egyenleteket a

$$N_{\rm Pm}(0) = N_{\rm Pm}(\infty)$$
 és  $N_{\rm Sm}(0) = N_{\rm Sm}(\infty)$ 

kezdőfeltételekkel. Mint könnyen belátható, a megoldás:

$$N_{\rm Pm}(t) = N_{\rm Pm}(\infty) e^{-\lambda_{\rm Pm}t},$$
$$N_{\rm Sm}(t) = N_{\rm Sm}(\infty) + N_{\rm Pm}(\infty) (1 - e^{-\lambda_{\rm Pm}t}).$$

Elegendően hosszú várakozási idő elteltével tehát a <sup>149</sup>Sm koncentrációja felveszi az  $N_{\rm Pm}(\infty) + N_{\rm Sm}(\infty)$  értéket. Mivel (83.8a) szerint  $N_{\rm Pm}(\infty)$  függ a fluxustól, ez a határérték is függni fog attól, hogy a leállás előtt milyen volt a reaktor fluxusa. A függés mértéke a

$$\frac{N_{\rm Pm}(\infty)}{N_{\rm Sm}(\infty)} = \frac{\sigma_{\rm Sm}\phi}{\lambda_{\rm Pm}} \approx \frac{1.95 \cdot 10^{-6} \, {\rm s}^{-1}}{3.63 \cdot 10^{-6} \, {\rm s}^{-1}} = 0.54$$
(83.9)

arány [vö. (83.8)]. A képletben  $\phi = 3 \cdot 10^{13} \text{ n/(cm}^2 \cdot \text{s})$  fluxust tételeztünk fel, továbbá felhasználtuk a 8.1. alfejezetben megadott számértékeket. A fluxustól való függés tehát jelentős, hiszen – például – a kutatóreaktorokra jellemző fluxus mellett ennek az aránynak az értéke elérheti az 5-öt is.

A Xe-mérgeződéssel szemben azonban lényes különbség, hogy a <sup>149</sup>Sm-nek ez a koncentrációja nem bomlik le, hanem a reaktor újraindításakor ott marad a reaktorban. Felmerül a kérdés, vajon a következő üzemeltetési ciklusban tovább halmozódike a <sup>149</sup>Sm mennyisége. Ennek megválaszolásához a (83.7) egyenleteket a következő kezdőfeltétellel kell megoldanunk:

$$N_{\rm Pm}(0) = 0$$
 és  $N_{\rm Sm}(0) = N_{\rm Sm}(\infty) + N_{\rm Pm}(\infty)$ .
Ha feltételezzük, hogy a  $\phi$  fluxus ugyanakkora, mint az előző kampányban<sup>37</sup>, akkor a megoldás a következő:

$$N_{\rm Sm}(t) = \frac{Y_{\rm Pm}\Sigma_{\rm f}}{\sigma_{\rm Sm}} - \frac{Y_{\rm Pm}\Sigma_{\rm f}\phi}{\lambda_{\rm Pm}} \cdot \frac{\lambda_{\rm Pm}e^{-\lambda_{\rm Pm}t} - \sigma_{\rm Sm}\phi e^{-\sigma_{\rm Sm}\phi t}}{\sigma_{\rm Sm}\phi - \lambda_{\rm Pm}} \,. \tag{83.10}$$

Nyilvánvaló, hogy  $t \rightarrow \infty$  esetén ennek a határértéke ugyanúgy  $N_{\rm Sm}(\infty)$ , mint amikor a szamárium koncentrációja 0-ról indul. Végeredményben tehát azt az – egyébként heurisztikusan is várható – eredményt kaptuk, hogy az előző kampányokban felhalmozódott szamárium minden kampányban kiég. Természetesen meg kell még néznünk, hogy egy kampány ideje, vagyis kereken 1 év  $\approx 3 \cdot 10^7$  s elegendően hosszú idő-e ehhez. A válasz: igen, hiszen

$$\lambda_{\rm Pm} t \approx 3,63 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7 = 109$$
 és  $\sigma_{\rm Sm} \phi t \approx 1,95 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7 = 59$ 

Befejezésül összevetjük a Xe- és Sm-mérgeződés mértékét. Ehhez kiszámítjuk az egyensúlyi koncentrációhoz tartozó makroszkopikus abszorpciós hatáskeresztmetszetek arányát [vö. (83.4b) és (83.8b)]:

$$\frac{\Sigma_{\rm a}^{\rm Sm}}{\Sigma_{\rm a}^{\rm Xe}} = \frac{N_{\rm Sm}(\infty)\sigma_{\rm Sm}}{N_{\rm Xe}(\infty)\sigma_{\rm Xe}} = \frac{Y_{\rm Pm}(\lambda_{\rm Xe} + \sigma_{\rm Xe}\phi)}{(Y_{\rm I} + Y_{\rm Xe})\sigma_{\rm Xe}\phi}.$$

Elegendően nagy fluxus esetében ez csak a gyakoriságok arányától függ:

$$\frac{\left. \frac{\Sigma_{\rm a}^{\rm Sm}}{\Sigma_{\rm a}^{\rm Xe}} \right|_{\phi \text{ nagy}} = \frac{Y_{\rm Pm}}{Y_{\rm I} + Y_{\rm Xe}} = \frac{0,0109}{0,001 + 0,064} = 0,168.$$

Közepes fluxus esetében nagyobb szám adódik. Például a  $\phi = 3 \cdot 10^{13} \text{ n/(cm}^2 \cdot \text{s})$  fluxus mellett ennek az aránynak az értéke: 0,206. A Sm-mérgeződés mértéke tehát a Xe-mérgeződésnek mintegy 20%-a. Emiatt a xenon lényegesen több gondot okoz az operátoroknak, mint a szamárium.

#### 8.4. Atomerőművek üzemeltetése

Ha a reaktor egy adott pillanatban kritikus, akkor a kiégés hatására rövid időn belül szubkritikussá válik, tehát leáll az energiatermelés. Ennek megakadályozására a reaktort úgy építik meg, hogy benne az üzemvitel igényei szerint változtatni lehessen az abszorpciós hatáskeresztmetszetet, nevezetesen a moderátorban bórsavat oldanak fel, továbbá a reaktor meghatározott helyein szabályozórudakat helyeznek el. Ahogy a kiégés hatására fogy a hasadóanyag, és mérgeződik a reaktor, a kritikus állapot fenntartása érdekében az abszorbens anyagok mennyiségét csökkentik.

<sup>&</sup>lt;sup>37</sup> A "kampány" a reaktor két átrakása között eltelt idő. A kifejezés értelmét később világítjuk meg részletesebben.

### A kampány

Az erőmű üzemének menete vázlatosan a következő. A szabályozórudak egy része a rövid idejű (legfeljebb néhány órás) reaktivitásváltozások ellensúlyozására szolgál:

- kellő számú szabályozórudat állandóan kihúzott állapotban kell tartani, hogy tetszőleges vészjel esetén a reaktort le lehessen állítani (ezek a *biztonságvédelmi rudak*);
- néhány rúdra szükség van a xenon- és szamárium-mérgeződés, továbbá a reaktor változó hőmérsékletéből eredő reaktivitásváltozások ellensúlyozására.

A hosszú idejű változások (vagyis a kiégés) ellensúlyozására a bórsav és a szabályozórudak fennmaradó része szolgál:

- az első szakaszban folyamatosan csökkentik a bórsav koncentrációját;
- amikor ez (gyakorlatilag) 0-ra csökkent, kezdik a maradék rudakat kihúzni; amikor az utolsó rudat is kihúzták, a reaktor tovább nem tartható üzemben, és le kell állítani, majd friss üzemanyaggal kell feltölteni.

Az első szakasz körülbelül 9–10 hónapig tart, a második pedig 1–2 hónapig. Ezt az időszakot együttesen *kampány*nak nevezzük. A reaktort úgy kell megtervezni, hogy két átrakás között jó közelítéssel egy év teljen el. Így lehet elérni, hogy egy reaktor átrakása a naptári évnek mindig ugyanarra a szakaszára essen. Ennek különösen a magyarhoz hasonló kis energiarendszerek esetében van jelentősége, hiszen ilyenekben nem lehet megengedni, hogy egyszerre két blokk álljon le tartósan.

A kampány hosszát *effektív nap*okban mérjük. Egy kampány folyamán a reaktor teljesítménye időben változhat. A teljesítménygörbe alatti terület adja meg a reaktor által a kampány alatt termelt teljes (hő)energiát. Nos, az *effektív üzemidő* az az idő, amely alatt a reaktor ugyanennyi energiát termelt volna, ha végig a névleges teljesítményen működött volna. Nyilvánvaló, hogy az effektív napok száma mindig kisebb, mint a kampány naptári napokban mért hossza. Ha nem jön közbe be nem tervezett leállás, a 11 naptári hónap hosszúságú kampány effektív hossza 270–280 effektív nap.

A kampány minden pillanatában be kell tartani bizonyos korlátozó feltételeket, amelyeket az alábbi két biztonsági követelményből vezetünk le:

- A reaktor egyik fűtőelemének a felületén sem léphet fel *forrásos krízis*, ami azt jelenti, hogy a fűtőelemből a moderátor felé irányuló hőáram értéke nem lehet akkora, hogy a moderátor forrása révén keletkező buborékok a fűtőelem felületén összefüggő gőzréteggé olvadjanak össze. Ilyenkor ugyanis a hőátadás annyira leromlik, hogy a fűtőelem megolvadhat.
- A reaktor legsúlyosabb üzemzavara esetén sem lehet a fűtőelemekben annyi hasadási termék, hogy a radioaktív bomlásuk által termelt hő (az ún. *remanens hő*) a fűtőelem megolvadását okozhassa.

Mindkét feltétel a lokális teljesítménysűrűség korlátozását jelenti, amit végső soron egyetlen mennyiség segítségével szokás kifejezni: a fűtőelemek hosszegységére eső

hőteljesítmény (a *lineáris teljesítménysűrűség*) a legmelegebb helyen sem haladhat meg egy felső korlátot. A paksi atomerőmű esetében ez a korlát 500 W/cm. Ha ezt a mennyiséget csak számítás útján határozzuk meg, akkor ezt tovább kell csökkenteni egy biztonsági tényezővel. Így adódik a paksi reaktorok esetében 325 W/cm.

Ennek figyelembevételéhez számítás útján meg kell határozni a legnagyobb teljesítményt leadó fűtőelemköteget, azon belül a legmelegebb fűtőelemet, majd annak legmelegebb szakaszát. A korszerű atomerőművekben (így Pakson is) van egy mérő-rendszer, amely mindezeket a mennyiségeket meghatározza. Ezért a gyakorlatban olyan korlátozásokat szokás előírni, amelyek a mért mennyiségek bizonyos kombinációinak a felső határát szabják meg. További részletekbe nem mehetünk bele.

## A reaktor manőverezhetősége

Normális körülmények között az a leggazdaságosabb, hogy az atomerőművek teljesítménye minél közelebb van névleges teljesítményükhöz, és a villamosenergiaigények változásait a hagyományos erőművek követik. Gyakran ez nem lehetséges, ha több atomerőmű szolgálja ki ugyanazt a villamosenergia-rendszert. Ebben az esetben az atomerőmű teljesítményének is követnie kell a változó igényeket, amit *terheléskö-vető üzemmód*nak nevezünk. Megvalósításához az atomerőműnek kellő mértékben *manőverezhető*nek kell lennie.

A VVER-típusú atomerőművek közül a Kóla félszigeten működő 440 MW-os reaktorblokkok esetében már szükségessé vált a terheléskövető üzemmód. A paksi atomerőművet nem ilyen módon üzemeltetik. Ha azonban szükségessé válna valamelyik blokk változó terheléssel való üzemeltetése, változatlanul érvényben maradnának az előző részben említett korlátozó feltételek, amelyeknek ilyen körülmények között való betartása az alábbiakban ismertetett problémákat veti fel.

A reaktor teljesítményének változása felborítja az egyensúlyi feltételeket, és a xenon mennyiségében tranziens folyamatokat indít el. Az operátornak tisztában kell lennie a reaktivitás változásának irányával, hogy a bórkoncentrációt megfelelő értékre tudja beállítani a hűtőközeg hőmérsékletének állandó értéken való tartása érdekében. A szabályozórudak mozgatása eltorzítja az axiális eloszlást, továbbá fokozhatja a megindult xenontranzienst. Emiatt a tranzienseket lehetőleg bórsavval és nem szabályozórudakkal célszerű követni. A kampány végén már nincs bórsav a moderátorban, ezért ekkor a manőverezhetőség két okból is leromlik: egyrészt kicsi a reaktivitástartalék (emiatt alig van mivel kompenzálni a xenon hatását), másrészt a rudak húzása (a mondottak értelmében) nagy axiális egyenlőtlenségeket okozhat, és emiatt csak a teljesítmény csökkentésével lehet betartani a korlátozó feltételeket. A teljesítmény csök

Amikor a teljesítmény csökkenni kezd, a hűtőközeg hőmérsékletének csökkenése miatt a reaktivitás nő, tehát az automatikus szabályozórendszer ereszti be a szabályozórudakat. Amikor a teljesítmény elérte a kívánt, kisebb értékét, a xenon felhalmozódása miatt a szabályozórudak kezdenek kifelé mozogni. Ha még van a reaktorban bór (tehát nem a kampány vége felé járunk), a bórkoncentráció kezdeti növelésével, majd csökkentésével biztosítani lehet, hogy a szabályozórudak visszakerüljenek eredeti helyükre, és így az axiális egyenlőtlenség a megengedett határok között maradjon. Ha a kisebb teljesítményen hosszabb ideig kell üzemelni, a xenon mennyisége újra csökkenni kezd, és ekkor már szükségessé válthat a bórkoncentráció növelése, nehogy a szabályozórudaknak ismét el kelljen mozdulniuk. A kampány végén erre nincs lehetőség, ezért a szabályozórudak elmozdulása jelentősen befolyásolja a teljesítmény axiális eloszlását.

A fentiekkel analóg módon járunk el, amikor növelni kell a teljesítményt. A növelés előtt még időben meg kell kezdeni a bórsav hígítását. Enélkül ugyanis a teljesítmény növelésekor a szabályozórudak kifelé kezdenének mozogni. Az axiális egyenlőtlenségnek emiatt bekövetkező romlását csak úgy tudjuk megakadályozni, valamint a korlátozó feltételeket csak úgy tudjuk betartani, hogy a bórsavat tovább hígítjuk.



84.1. ábra. A reaktor paramétereinek változása terheléskövető üzemmódban. A felső diagramm a teljesítmény változását mutatja, az alsó görbék pedig a különböző reaktivitáseffektusokat, valamint az eredő reaktivitásváltozást mutatják. A jobb oldali skáláról leolvasható, hogy a mutatott reaktivitásváltozások ellensúlyozásához mennyivel kell a bórsav koncentrációját megváltoztatni.

Amikor a reaktor elérte az előírt, nagyobb teljesítményt, a kisebb teljesítményen felhalmozódott xenon kezd kiégni, amit először a szabályozórudak befelé való mozgása jelez. Ennek ellensúlyozása és az axiális egyenlőtlenségnek az előírt határok között való tartása érdekében a bórkoncentrációt növelni kell. A nagyobb teljesítményen való néhány órai üzem után a xenon mennyisége ismét növekedni kezd, ami miatt a bórkoncentráció növelését lassítani kell.

Látjuk tehát, hogy a terheléskövető üzemmódban a teljesítmény előírt változásait a reaktor jellemzőinek (bórkoncentráció, rúdhelyzet stb.) bonyolult és gondosan megtervezett változtatásával kell kísérni. Egy tipikus terheléskövető ciklus látható a *84.1. ábrá*n, amelyen feltételeztük, hogy a teljesítmény előírt változása a következő: 12 óra 100%-on, a terhelés 50%-ra való csökkentése 3 óra alatt, 6 óra üzem 50%-on, a terhelés 100%-ra növelése 3 óra alatt. Ez a ciklus hosszú időn keresztül naponta viszszatérhet, bár előfordulhat, hogy a teljesítmény növelésének és csökkentésének az ideje, valamint az állandó teljesítményszintek értéke változik a teherelosztó központ utasításai szerint. A *84.1. ábra* felső görbéje a szabályosan ismétlődő ciklusok esetét mutatja.

A ciklus alatt a xenon által bevitt reaktivitáseffektus a ciklus kezdetén és végén zérus. Ezekben az időpontokban a teljesítmény 100%. Ezután egyre negatívabbá válik, mert a xenon mennyisége kezd közeledni a 100%-hoz tartozó egyensúlyi értékéhez, amelyet nem tud elérni, mert a 7. órában kezdődik a teljesítmény csökkentése. Ezt követően a xenoneffektus tovább nő, mert a <sup>135</sup>I atomok bomlása tovább termeli a xenont, viszont a xenon fogyása a kisebb teljesítményen lassabb. Körülbelül a 15. órában maximumon megy keresztül: ekkor kezd a kisebb teljesítményhez tartozó egyensúlyi értékhez közeledni, amit a teljesítmény növelése miatt szintén nem tud elérni, emiatt a csökkenés a 24. órában megáll, és a ciklus kezdődik elölről.

Közben a teljesítmény változásai is visznek be reaktivitást. Ezt mutatja a 84.1. ábra alsó görbéje. Az ebből eredő reaktivitásváltozás a kisebb teljesítményen, továbbá a teljesítmény csökkentése és növelése alatt pozitív (a 100%-hoz képest). A két hatás eredőjét mutatja a 84.1. ábra középső görbéje, amelyen a teljesítményváltozások kezdetén és végén éles változások (a görbéken törések) vannak. Az eredő reaktivitásváltozások ellensúlyozására a jobb oldali függőleges tengelyen felmért bórkoncentráció-változásra van szükség. A dolog természetéből következik, hogy a bórkoncentráció csak néhány perc késéssel követheti a reaktivitás változásait. Ezért szükséges, hogy az operátor előre lássa a teljesítménynek és a hűtőközeg hőmérsékletének várható értékeit.

Mint említettük, a terheléskövetés nehéz a reaktorkampány végén: ekkor már nehéz a fenti ciklust végrehajtani, és könnyen bekövetkezhet, hogy a tervezetthez képest csökkenteni kell a teljesítményt (mert ezzel kissé megnövelhetjük a reaktivitástartalékot). Emiatt a terheléskövetés a kampány végén nem gazdaságos.

A *manőverezhetőség* legnagyobb problémája a teljesítményváltozások miatt kialakuló aszimmetrikus xenoneloszlás. Az axiális teljesítményeloszlás nagy torzulásai meg nem engedett lineáris teljesítménysűrűségekhez vezethetnek, ezért szigorú műszaki előírások vonatkoznak a megengedett axiális fluxuskülönbségre.

## Üzemviteli számítások

A fentiekben vázolt kampány elméleti leírásához tulajdonképpen elégséges egy számítógépi kód, amely a diffúzióegyenletet az 5. fejezetben ismertetett kevéscsoport közelítésben megoldja, ha ismerjük, hogyan függnek a kevéscsoport állandók a kiégéstől, a bórsav-koncentrációtól, a xenonkoncentrációtól, a hőmérséklettől és a többi, az erőmű üzeme során szintén változó mennyiségtől. Az alábbiakban megbeszéljük, hogy kell ezt kiszámítani, így egyelőre feltételezzük, hogy ismert a kevéscsoport állandóknak a kiégéstől és a többi mennyiségtől való függése. Először a kiindulási állapotra (t = 0) számítjuk ki a fluxus térbeli eloszlását, amiből rögtön megkapjuk a reaktorteljesítménynek, tehát  $\Sigma_t \phi$ -nek a térbeli eloszlását is. Ezt az eloszlást egy bizonyos  $\Delta t$  ideig érvényesnek tekintve extrapolálhatunk a  $\Delta t$ -vel későbbi időpontra, vagyis kiszámíthatjuk a kiégés térbeli eloszlását a  $t = \Delta t$  időpontban. Feltevésünk értelmében ekkor minden pontban ismernénk a kevéscsoport állandókat, ha ismernénk a bórsavnak azt a koncentrációját, amely mellett az ilyen mértékben kiégett reaktor kritikus. Ezt alkalmas iterációval meghatározhatjuk. Ezzel megkapjuk a  $t = \Delta t$  időponthoz tartozó teljesítményeloszlást, amelyet a  $t = 2\Delta t$  időpontra extrapolálva megismételhetjük a fenti iterációt, amiből megkapjuk az ekkor fennálló bórsav-koncentráció beiterált értéke 0 alá nem csökken. Ezután – pontosan úgy, ahogy az üzemvitelben is történik – az iterációt a szabályozórudak kritikus helyzetére vonatkozóan végezzük. Amikor ilyen rúdhelyzetet nem találunk, a számítás szerint elérkeztünk a kampány végéhez. A fentiekben mondottak szerint ezeket a számításokat három dimenzióban kell elvégezni, hiszen a biztonsági korlátok elsősorban az axiális teljesítményeloszlásra vonatkoznak.

Az itt leírthoz hasonló számítást az erőmű üzemeltetői általában nemcsak egyszer végzik el, hiszen a reaktort olyan üzemanyaggal igyekeznek feltölteni, amely egyrészt a szükséges ideig tartható üzemben, másrészt a legkevesebb költséggel a legtöbb energiát szolgáltatja. Az ilyen összetétel megkeresését nevezzük *optimalizálás*nak. Általában ehhez nem szükséges a teljes kiégési ciklust végigszámolni, hanem elég a t = 0-hoz tartozó teljesítményeloszlást optimalizálni. A teljesítmény térbeli egyenlőtlensége ugyanis a kiégéssel csökken.

Befejezésül szólnunk kell még arról, hogyan lehet a kevéscsoport állandókat a kiégés függvényében meghatározni. Ehhez az 5. fejezetben ismertetett (52.4) sokcsoport egyenletből kell kiindulni. Ez az egyenlet a reaktor egyetlen cellájára vonatkozik, tehát az alábbi számítási sémát mindegyik fajta fűtőelemre külön alkalmazni kell. Az egyenletet először a fűtőelem kiindulási, tehát a üzemanyaggyár által szállított összetételre kell megoldani. A megoldásul kapott fluxust és energiaspektrumot egy ideig érvényesnek tekintve, egy későbbi időpontra kiszámítjuk az uránlánchoz tartozó izotópok és a hasadási termékek mennyiségét. Ezzel újraszámoljuk az (52.4) egyenletben szereplő sokcsoport állandókat, amivel az (52.4) egyenletet újra meg tudjuk oldani. Ezzel visszatérünk a számítási séma elejére, amit többször ismételve a neutronspektrumot a kívánt értékű kiégésig kiszámolhatjuk a kiégés függvényében. E séma alapgondolata emlékeztet a reaktor egészének a számítására vonatkozó fenti sémára. Vannak azonban lényeges különbségek:

• A reaktor egészének a számításakor a kritikusság könnyen értelmezhető, hiszen az éppen a reaktor egészére van definiálva. Az elemi cellára vonatkozó számítások viszont aszimptotikus közelítésben történnek, ahol a kritikusság értelmezése nem triviális. A kezdeti összetételre a dolog még egyszerű: megkeressük az anyagi görbületi paramétert. Amikor azonban a kiégés későbbi fázisait számítjuk, nem egyértelmű, melyik paraméter változtatásával biztosítsuk, hogy k<sub>eff</sub> = 1 legyen. Nyilván a lehető legközelebb szeretnénk kerülni a valóságos reaktorhoz. Nos, amíg a bórsav koncentrációja nem zérus, célszerű a görbületi paramétert a kezdeti anyagi görbületi paraméterrel egyenlő értéken tartani, és a kritikusságot a bórsav-koncentrációja zérussá válik, a valóságban a szabályozórudak elmozdításával biztosítják a kriti-

kusságot, ami azt jelenti, hogy minden fűtőelemcella helyén folyamatosan változni kezd a fluxus térbeli görbülete. Ezt pedig legjobban úgy lehet szimulálni, hogy ekkor a görbületi paraméter alkalmas megválasztásával tesszük a cellát kritikussá.

Tegyük fel, hogy a fenti módon minden kiégési lépésben biztosítjuk a kritikusságot. Ez azonban függni fog attól, hogy mit tételeztünk fel a hőmérsékletre, a xenon koncentrációjára és a többi paraméterre vonatkozóan. Logikus a számítást a névleges paraméterek, illetve a xenon és szamárium egyensúlyi koncentrációja mellett végezni. A gyakorlatban azonban ez sohasem valósul meg. Ezért minden kiégési lépésben – a kritikus állapotból kiindulva – variálni kell ezeket a paramétereket, és alkalmasan megválasztott értékeik mellett ki kell számítani a neutronspektrumot. Itt válik az egész számítás "művészetté": alaposan meg kell gondolni, milyenek legyenek ezek az értékek.

Az így számolt neutronspektrumokra az 5.3. alfejezet képletei szerint kiszámíthatjuk a kevéscsoport állandókat. Ha jól választottuk meg azokat a reaktorállapotokat, amelyekre ezek rendelkezésre állnak, a reaktor egészének a számításakor minden pontban interpolálhatjuk az ott kialakuló paraméterekhez tartozó kevéscsoport állandókat. Ez az interpoláció általában közelítő függvények szerint történik, amelyek meghatározását a *kevéscsoport állandók parametrizálásá*nak nevezzük.

## Irodalom

- [1] A. M. Weinberg & E. P. Wigner, The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, The University of Chicago Press, 1958.
- [2] K. H. Beckurts & K. Wirtz, Neutron Physics, Springer Verlag, 1964.
- [3] K. M. Case & P. F. Zweifel, Linear Transport Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- [4] J. R. Mika, Nucl. Sci. Eng. 11, 415, (1961).
- [5] G. I. Bell & S. Glasstone, Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold Company, 1970.
- [6] J. Duderstadt & L. Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, John Wiley, 1976.
- [7] L. Schwartz, Théorie de distributions, Paris, 1950.
- [8] G. C. Wick, Zeitschrift für Physik, 121, 702 (1943).
- [9] S. ChandraSekar, Radiative Transfer, Oxford University Press, 1950.
- [10] Jahnke-Emde
- [11] B. Carlson, Solution of the Transport Equation by S<sub>n</sub> Approximation, report LA-1891 (1955).
- [12] R. J. J. Stamm'ler, K-7 THERMOS, Kjeller report KR-47 (1963).
  B. J. Toppel, I. Baksys, The Argonne-Revised THERMOS Code, report ANL-7023 (1965).
- [13] Iván Lux & László Koblinger, Monte Carlo Particle Transport Methods: Neutron and Photon Calculations, CRC Press, 1990.
- [14] J. Bussac & P. Reuss, Traité de neutronique, Hermann, Paris, 1985.
- [15] J. Gadó & A. Keresztúri, Moments of the Fourier-Transformed Slowing Down Kernel: the Computer Code MAGGIE, report KFKI-1977-44.
- [16] R. E. MacFarlane & D. W. Muir, NJOY87 A Code System for Pointwise Multigroup and Photon Cross Sections from ENDF/B Evaluated Nuclear Data, PSR-171 (1987).
- [17] Z. Szatmáry & J. Valkó GRACE A Multigroup Fast Neutron Spectrum Code, report KFKI-70-14 (1970).
- [18] Csom Gyula, Atomerőművek üzemtana, I. kötet, Műegyetemi Kiadó, 1997.
- [19] Experimental Investigations of the Physical Properties of VVER-type Uranium-Water Lattices, Final Report of TIC, Vol. 1 (1985), Budapest.
  Experimental Investigations of the Physical Properties of VVER-type Uranium-Water Lattices, Final Report of TIC, Vol. 3 (1991), Budapest.
  Experimental Investigations of the Physical Properties of VVER-type Uranium-Water Lattices, Final Report of TIC, Vol. 4 (2000), Budapest.
- [20] I. Lewins, Importance: The Adjoint Function, Pergamon Press, 1965.
- [21] L. Pál, Acta Phys. Hung. 14, 345, 356, 369 (1962).
- L. Pál, Reactor Sci. Techn. 17, 395, (1963).
- [22] Z. Szatmáry & L. Túri, Nukleonik, 12, 243 (1969).
- [23] Reactivity Measurements, Report on a Panel Sponsored by the IAEA held in Vienna, IAEA-108 (1968).

## 1. függelék. A Wigner–Wilkins-magfüggvény levezetése

A (45.6) egyenlet szerint:

$$\sigma_{\rm s}(v' \to v) = \frac{\sigma_{\rm s}}{2v'} \int_{0}^{\infty} 4\pi V^2 \mathrm{d}V \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu v_{\rm r} g(v' \to v | V, \mu) P_3(V).$$
(F1.1)

A használt jelölések magyarázata a 4.6. alfejezetben olvasható. A szóró mag sebességeloszlása a (44.15) képlet szerint:<sup>38</sup>

$$P_{3}(V) 4\pi V^{2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mA}{2kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mAV^{2}}{2kT}\right) V^{2}, \qquad (F1.2)$$

ahol *m* a neutron tömege, *A* a szóró mag tömegszáma, *T* a szóró közeg hőmérséklete, végül *k* a Boltzmann állandó. Adott v', V és  $\mu$  mellett az (F1.1) képletben szereplő *g* valószínűség csak akkor különbözik 0-tól, ha  $v_{\min} \le v \le v_{\max}$ , és ekkor [vö. (45.5)]

$$g(v' \to v | V, \mu) \mathrm{d}v = \frac{v \mathrm{d}v}{2 \frac{A}{A+1} v_{\mathrm{r}} v_{\mathrm{c}}},$$
(F1.3)

ha figyelembe vesszük a 4.5. alfejezet többi képletét is.

Amikor a szórási magfüggvényt számítjuk, v' és v adott, tehát a v-re vonatkozó  $v_{\min} \le v \le v_{\max}$  feltétel úgy elégíthető ki, hogy az (F1.1)-ben szereplő integrálokban megfelelően választjuk meg az alsó és felső határt. Először  $\mu$  szerint integrálunk. Adott V mellett legyen ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ) az az intervallum, amelyben a v-re vonatkozó feltétel teljesül. Ekkor tehát

$$\int_{-1}^{1} d\mu v_r g(v' \to v | V, \mu) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} d\mu v_r \frac{v}{2\frac{A}{A+1}v_r v_c} = \frac{v(A+1)}{2A} \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{v_c}$$

Ha  $v_c$ -t (45.3b) szerint  $\mu$  szerint deriváljuk, a

 $<sup>\</sup>frac{1}{38}$  (44.15)-ben dV<sub>x</sub>dV<sub>y</sub>dV<sub>z</sub> =  $4\pi V^2$ dV helyettesítendő.

$$\mathrm{d}v_{\mathrm{c}} = \frac{Av'V}{v_{\mathrm{c}}(A+1)^2} \,\mathrm{d}\mu$$

eredményt kapjuk, vagyis

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{v_{\rm c}} = \frac{\left(A+1\right)^2}{Av'V} \,\mathrm{d}v_{\rm c}\,.$$

Ezt az integrálba helyettesítve adódik a  $\mu$  szerinti integrálás eredménye:

$$\frac{v(A+1)^3}{2A^2v'V} \int_{v_c(\mu_1)}^{v_c(\mu_2)} dv_c = \frac{v(A+1)^3}{2A^2v'V} \left[ v_c(\mu_2) - v_c(\mu_1) \right],$$

amivel

$$\sigma_{\rm s}(v' \to v) = \frac{\sigma_{\rm s}v}{4v'^2} \frac{(A+1)^3}{A^2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}V}{V} [v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1)] P_3(V) 4\pi V^2 .$$
(F1.4)

A továbbiakban tehát adott v, v' és V mellett meg kell határoznunk az integrandus alatti szögletes zárójel értékét. Látni fogjuk, hogy számos esetet kell egymástól megkülönböztetnünk. Mindenekelőtt: külön kell tárgyalnunk a  $v \ge v'$  és a  $v \le v'$  eseteket.

### Felfelé szórás ( $v \ge v'$ )

A 4.5. alfejezet képletei szerint:

$$v_{\max} = v_{c} + \frac{A}{A+1}v_{r} \ge v' \tag{F1.5a}$$

és

$$v_{\min} = \left| v_{c} - \frac{A}{A+1} v_{r} \right| \le v'.$$
(F1.5b)

Felfelé szórás esetében a  $v_{\min} \le v$  feltétel automatikusan teljesül, tehát elég a  $v \le v_{\max}$  feltétel teljesülését vizsgálni.

Ha  $v_{max}$ -ot  $\mu$  függvényében tekintjük, az (F1.4) alatti integrálban szereplő  $\mu_1$  és  $\mu_2$  mennyiségek a  $\mu$ -re vonatkozó

$$v_{\max}(\mu) = v \tag{F1.6}$$

egyenlet megoldásai. v' és V értékétől függően a  $v_{max}(\mu)$  függvény jellege különböző lehet, amint ez az *F1.1a.–d. ábrák*on látható. Mivel a görbe alakja csak a sebességek arányától függ, az egyszerűség kedvéért az ábrákat v' = 1 mellett készítettük. A követ-kező négy típus fordul elő:

*F1.1a. ábra:*  $V \le v'/A$  esetén a görbe maximumot vesz fel, és  $v_{max}(\pm 1) = v'$ . *F1.1b. ábra:*  $v'/A \le V \le 2v'/(A-1)$  esetén a görbe maximumot vesz fel, és  $v_{max}(1) = v'$ , de  $v_{max}(-1) > v'$ .

*F1.1c. ábra*:  $2v'/(A-1) \le V \le v'$  esetén a görbe monoton csökken, és  $v_{max}(1) = v'$ . *F1.1d. ábra*: v' < V esetén a görbe monoton csökken, és  $v_{max}(1) > v'$ .

Ezekre az esetekre a továbbiakban úgy hivatkozunk, hogy (a), (b) stb. esetek.



d)  
*F1.1. ábra.* A 
$$v_{max}(\mu)$$
 függvény  $v' = 1$  és  $A = 12$  esetében:  
a)  $V = 0,07$ ; b)  $V = 0,12$ ; c)  $V = 0,4$ ; d)  $V = 1,5$ 

Ha az F1.1a.-d. *ábrák*on látható görbéket a [-1,+1] intervallumon kívül tovább folytatjuk, mindegyik esetben egy maximummal rendelkező görbét kapunk, vagyis az (F1.6) egyenletnek két megoldása van, vagy egy sincs aszerint, hogy v kisebb, illetve nagyobb, mint a görbe maximuma. Az F1.1a.-d. *ábrák* haszna az, hogy segítenek meghatározni, mikor esik e két megoldás valamelyike a [-1,+1] intervallum belsejébe. Az alábbiakban ennek részleteit vizsgáljuk meg.

 $v_{\rm max}(\mu)$  differenciálható függvény, és könnyen kiszámíthatjuk, hogy a maximumát

$$\mu = \mu_{\rm m} = -\frac{(A-1)V}{2v'}$$

mellett veszi fel, amelynek értéke

$$v_{\max}(\mu_m) = \sqrt{v'^2 + AV^2} = v_1.$$
 (F1.7)

A fenti (a) és (b) esetekben  $-1 \le \mu_m \le 0$ , aminek a feltétele:  $V \le 2v'/(A-1)$ . A határesetben, vagyis amikor V = 2v'/(A-1), a maximum értéke

$$v_{\max}(\mu_{\rm m})\Big|_{V=\frac{2v'}{A-1}} = \frac{A+1}{A-1}v'$$
. (F1.8)

Ezekből az összefüggésekből a következőket olvassuk ki. Egyrészt, a  $v \le v_{max}$  feltétel miatt *V* minimális értéke (F1.7) szerint:

$$V_0 = \sqrt{\frac{v^2 - {v'}^2}{A}} \le V \quad . \tag{F1.9}$$

Másrészt (F1.8) megadja *v*-nek azt a maximális értékét, amely mellett az (a) és (b) típusok egyáltalán szóba jönnek. Ennél nagyobb *v*-nél nem lehetséges maximum, tehát csak a (c) és (d) eseteket kell vizsgálni.

Ez után az előkészítés után megkeressük az (F1.6) egyenlet megoldását [vö. (45.1b), (45.3b) és (F1.5a)], amelynek részletesen kiírt alakja

$$\frac{\sqrt{v'^2 + A^2 V^2 + 2Av' V \mu} + A \sqrt{v'^2 + V^2 - 2v' V \mu}}{A+1} = v.$$
(F1.6a)

Elemi (bár fáradságos) számítással kapjuk ennek két gyökét:

$$\mu_{\pm} = \frac{(A-1)(v'^2 - v^2) \pm 2v\sqrt{A(v_1^2 - v^2)}}{2Av'V} \,. \tag{F1.10}$$

A későbbiek kedvéért megjegyezzük, hogy – mint könnyen belátható – a  $v \le v'$  esetben ez megoldása a

$$v_{\min}(\mu) = v$$

egyenletnek is. Ha ezeket a megoldásokat (45.3b)-be helyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$v_{\rm c}(\mu_{\pm}) = \frac{\left| v \pm \sqrt{A(v_1^2 - v^2)} \right|}{A+1}$$
 és  $v_{\rm r}(\mu_{\pm}) = \left| v \mp \sqrt{\frac{v_1^2 - v^2}{A}} \right|.$  (F1.11)

Az F1.1a.-d. ábrákról nyilvánvaló, hogy

(a) esetben:

$$v_{c}(\mu_{2}) - v_{c}(\mu_{1}) = v_{c}(\mu_{+}) - v_{c}(\mu_{-}) =$$

$$= \frac{v + \sqrt{A(v_{1}^{2} - v^{2})} - \left|v - \sqrt{A(v_{1}^{2} - v^{2})}\right|}{A + 1}.$$
(F1.12)

(b) esetben:

Amikor  $v \ge v_{max}(-1)$ , az (F1.12) képlet érvényes. A későbbiekben szükségünk lesz a

$$v_{\max}(-1) = \frac{2AV + (A-1)v'}{A+1}$$
(F1.13)

képletre. Ennél kisebb v-re a  $\mu_{-}$  gyök már –1-nél kisebb, tehát

$$v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1) = v_{\rm c}(\mu_+) - v_{\rm c}(-1) = \frac{v + \sqrt{A(v_1^2 - v^2) - |v' - AV|}}{A + 1}.$$
(F1.14)

Minden v-re az (F1.14) képlet érvényes.

#### (d) esetben:

Amikor  $v \ge v_{max}(+1)$ , az (F1.14) képlet érvényes. A későbbiekben szükségünk lesz a

$$v_{\max}(+1) = \frac{|2AV - (A-1)v'|}{A+1}$$

képletre. Mivel ebben az esetben  $V \ge v'$ , az abszolút érték jele elhagyható:

$$v_{\max}(+1) = \frac{2AV - (A-1)v'}{A+1}.$$
(F1.15)

Ennél kisebb v-re a  $\mu_+$  gyök már +1-nél nagyobb, tehát

$$v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1) = v_{\rm c}(+1) - v_{\rm c}(-1) = \frac{v' + AV - |v' - AV|}{A + 1}.$$
 (F1.16)

Képleteink ebben a formájukban még nem alkalmasak az (F1.4) integrál kiszámítására, hiszen abban v adott, és a V változó értéke mellett kell eldöntenünk, melyik eset szerinti képletek alkalmazandók. Az alábbiakban tehát a fentieket V függvényében kell vizsgálnunk.

(1) Az (a) és (b) eset csak akkor fordulhat elő, amikor  $v \le (A+1)v'/(A-1)$  [vö. (F1.8)]. Továbbá az (F1.12) képlet alkalmazhatóságának a feltétele (F1.13) szerint

$$V \le \frac{(A+1)v - (A-1)v'}{2A} = v_{-}.$$
(F1.17)

Megmutatjuk, hogy ezekkel a feltételekkel

$$= \frac{v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1) =}{A+1} = \frac{2\sqrt{A}}{A+1} = \frac{2\sqrt{A}}{A+1} \sqrt{v_1^2 - v^2} \,.$$
(F1.12a)

Ehhez azt kell belátnunk, hogy az (F1.12)-ben szereplő abszolútérték-jel alatt álló mennyiség – a most kikötött feltételek mellett – nemnegatív:

$$v - \sqrt{A(v_1^2 - v^2)} \ge v - \sqrt{A(v'^2 + Av_-^2 - v^2)} = v - \frac{|(A+1)v' - (A-1)v|}{2} = v - \frac{(A+1)v' - (A-1)v}{2} = \frac{(A+1)(v-v')}{2} \ge 0.$$

Megjegyezzük még, hogy  $v \le (A+1)v'/(A-1)$ -re az (F1.9) szerinti  $V_0 \le v_-$ . Tehát (F1.4)-ben ekkor a ( $V_0$ ,  $v_-$ ) intervallumban is szükséges integrálni. Nagyobb v-re, vagyis  $v \ge (A+1)v'/(A-1)$  esetén nem szükséges, mert ekkor  $2v'/(A-1) \le V_0 \le V$ , tehát csak a (c) és (d) esetek lehetségesek.

(2) Az (F1.14) képlet érvényessége kiterjed a (b), (c) és (d) esetekre is, amikor *V* eleget tesz a következő feltételnek:

$$v_{-} \le V \le v_{+} = \frac{(A+1)v + (A-1)v'}{2A}$$
. (F1.18)

Ekkor (F1.14) szerint

$$v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1) = \frac{v + \sqrt{A(v_1^2 - v^2)} - AV + v'}{A + 1},$$
 (F1.14a)

hiszen a (b), (c) és (d) esetekben  $V \ge v'/A$ .

(3) Az (F1.16) képlet csak a (d) esetben lehet érvényes, amikor *V* eleget tesz a következő feltételnek:

$$\frac{(A+1)v + (A-1)v'}{2A} = v_+ \le V.$$
(F1.19)

Ekkor nyilván

$$v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1) = \frac{v' + AV - |v' - AV|}{A+1} = \frac{2v'}{A+1}.$$
 (F1.16a)

*V*-nek (1)–(3) alatt definiált tartományaira külön-külön integrálva, (F1.4) a következőképpen írható:

$$\begin{split} \sigma_{\rm s}(v' \to v) &= \frac{\sigma_{\rm s} v}{4 {v'}^2} \frac{\left(A+1\right)^3}{A^2} \int_{V_0}^{v_-} \frac{\mathrm{d} V}{V} \frac{2\sqrt{A}}{A+1} \sqrt{v_1^2 - v^2} P_3(V) 4\pi V^2 + \\ &+ \frac{\sigma_{\rm s} v}{4 {v'}^2} \frac{\left(A+1\right)^3}{A^2} \int_{v_-}^{v_+} \frac{\mathrm{d} V}{V} \frac{v + \sqrt{A\left(v_1^2 - v^2\right)} - AV + v'}{A+1} P_3(V) 4\pi V^2 + \\ &+ \frac{\sigma_{\rm s} v}{4 {v'}^2} \frac{\left(A+1\right)^3}{A^2} \int_{v_+}^{\infty} \frac{\mathrm{d} V}{V} \frac{2v'}{A+1} P_3(V) 4\pi V^2 \,. \end{split}$$

Ha  $P_3(V)$  értékét (F1.2)-ből behelyettesítjük, az integrálok elemi úton kiszámíthatók. Nem szabad elfelejteni, hogy az első integrált csak  $v \le (A+1)v'/(A-1)$ -re kell figyelembe venni. A végeredmény a következő:

$$\sigma_{s}(v' \to v) = \frac{\sigma_{s}v}{{v'}^{2}} \eta^{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v - \rho v')\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v + \rho v')\right) \right] + \frac{\sigma_{s}v}{{v'}^{2}} \eta^{2} \exp\left(-\frac{m(v^{2} - {v'}^{2})}{2kT}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v' - \rho v)\right) + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v' + \rho v)\right) \right],$$
(F1.20)

ahol

$$\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}}$$
 és  $\rho = \frac{A-1}{2\sqrt{A}}$ .

Lefelé szórás ( $v \le v'$ )

Lefelé való szórás esetében a  $v_{\min}(\mu)$  függvényt kell vizsgálnunk. Könnyű belátni, hogy minden  $\mu$ -re

$$v_{\min} = \frac{A}{A+1} v_{\rm r} - v_{\rm c}, \qquad \text{amig} \quad V \le \frac{A-1}{2A} v', \qquad (F1.21a)$$

továbbá ennél nagyobb V-re

$$v_{\min} = \begin{cases} \frac{A}{A+1}v_{\mathrm{r}} - v_{\mathrm{c}}, & \text{ha} \quad \mu \leq \mu_{0}, \\ v_{\mathrm{c}} - \frac{A}{A+1}v_{\mathrm{r}}, & \text{ha} \quad \mu \geq \mu_{0}, \end{cases}$$
(F1.21b)

ahol

$$\mu_0 = \frac{A - 1}{2A} \frac{v'}{V} \,. \tag{F1.21c}$$

A felfelé való szóráshoz hasonlóan a  $v_{\min}(\mu)$  függvény alakja most is négy csoportba osztható, amelyeket az *F1.2a.–d. ábrák*on mutatunk be.

*F1.2a. ábra:*  $V \le v'/A$  esetén a görbe monoton csökken, és  $v_{\min}(-1) \le v'$ . *F1.2b. ábra:*  $v'/A \le V \le (A-1)v'/2A$  esetén a görbe monoton csökken, és  $v_{\min}(-1) = v'$ . *F1.2c. ábra:*  $(A-1)v'/2A \le V \le v'$  esetén a görbe minimumot vesz fel, és  $v_{\min}(1) \le v'$ . *F1.2d. ábra:* v' < V esetén a görbe minimumot vesz fel, és  $v_{\min}(\pm 1) = v'$ .

A  $v_{\min}(\mu)$  görbe minimumának értéke 0, de ott –  $v_{\max}(\mu)$ -vel ellentétben – a  $v_{\min}(\mu)$  függvény nem differenciálható.



*F1.2. ábra.* A  $v_{\min}(\mu)$  függvény v' = 1 és A = 12 esetében: a) V = 0,07; b) V = 0,12; c) V = 0,6; d) V = 1,5

Ezeket az eseteket a fentiek mintájára lehet elemezni. A jelen esetben könynyebbség, hogy V minden szóba jövő értékére

$$\left|v - \sqrt{A(v_1^2 - v^2)}\right| = \sqrt{A(v_1^2 - v^2)} - v.$$

Azt ajánljuk, hogy az Olvasó – gyakorlásképpen – az elemzést végezze el.<sup>39</sup> Az eredmény a következőkben összegezhető. A korábbiakhoz hasonlóan vezessük be a következő jelölést:

$$v_{-} = \begin{cases} \frac{(A+1)v - (A-1)v'}{2A}, & \text{ha} & v \ge \frac{A-1}{A+1}v'; \\ \frac{(A-1)v' - (A+1)v}{2A}, & \text{ha} & v \le \frac{A-1}{A+1}v'. \end{cases}$$
(F1.22)

(1) A

$$v \ge \frac{A-1}{A+1} v' \tag{F1.23a}$$

esetben

$$v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1) = \frac{v' + AV - |v' - AV|}{A+1} = \frac{2AV}{A+1},$$
 (F1.23b)

amikor

$$0 \le V \le v_{-} \le \frac{v'}{A}.$$
(F1.23c)

Megjegyezzük, hogy az utóbbi intervallumban nem kell integrálni, amikor az (F1.23a) feltétel nem teljesül.

(2) Az (F1.23a) feltétel teljesülésétől függetlenül

$$= \frac{v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1)}{A + 1} = \frac{v' + AV - \sqrt{A(v_1^2 - v^2)}}{A + 1} = \frac{v' + AV - \sqrt{A(v_1^2 - v^2)} + v}{A + 1},$$
 (F1.24a)

amikor

$$v_{-} \le V \le v_{+}, \tag{F1.24b}$$

ahol

<sup>&</sup>lt;sup>39</sup> Útmutatás: Az (a) és (b) esetekben célszerű külön vizsgálni *v*-nek a következő két intervallumba eső értékeit: [0, (A-1)v'/(A+1)] és [(A-1)v'/(A+1), v']. A (d) esetben ez a megkülönböztetés nem szükséges.

$$v_{+} = \frac{(A-1)v' + (A+1)v}{2A}.$$
 (F1.24c)

(3) Minden  $v \le v'$ -re:

$$= \frac{v_{\rm c}(\mu_2) - v_{\rm c}(\mu_1)}{A + 1} = \frac{\sqrt{A(v_1^2 - v^2)} + v - \left|v - \sqrt{A(v_1^2 - v^2)}\right|}{A + 1} = \frac{2\sqrt{A(v_1^2 - v^2)}}{A + 1},$$
 (F1.25a)

amikor

$$v_+ \le V \,. \tag{F1.25b}$$

Ezzel az (F1.4) alatti integrál kiszámítható, és az eredmény – két előjeltől eltekintve – azonos (F1.20)-szal. Ilyen módon a szórási magfüggvény egyetlen képlettel írható le:

$$\sigma_{s}(v' \to v) = \frac{\sigma_{s}v}{{v'}^{2}} \eta^{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v - \rho v')\right) \pm \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v + \rho v')\right) \right] + \frac{\sigma_{s}v}{{v'}^{2}} \eta^{2} \exp\left(-\frac{m(v^{2} - {v'}^{2})}{2kT}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v' - \rho v)\right) \mp \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}}(\eta v' + \rho v)\right) \right],$$
(F1.26)

ahol a felső előjel  $v \le v'$ , az alsó előjel pedig  $v \ge v'$  esetén érvényes.

A magfüggvényt általában az energia szerint szoktuk alkalmazni. Az átírás azon alapul, hogy

$$\sigma_{\rm s}(v' \to v) \mathrm{d}v = \sigma_{\rm s}(E' \to E) \mathrm{d}E = \sigma_{\rm s}(E' \to E) m \mathrm{d}v$$
.

Ezzel egyszerűen kapjuk, hogy

$$\sigma_{\rm s}(E' \to E) = \frac{\sigma_{\rm s}}{2E'} \eta^2 \left[ \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E}{kT}} - \rho \sqrt{\frac{E'}{kT}}\right) \pm \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E}{kT}} + \rho \sqrt{\frac{E'}{kT}}\right) \right] + \frac{\sigma_{\rm s}}{2E'} \eta^2 \exp\left(-\frac{E - E'}{kT}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E'}{kT}} - \rho \sqrt{\frac{E}{kT}}\right) \mp \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E'}{kT}} + \rho \sqrt{\frac{E}{kT}}\right) \right], \quad (F1.27)$$

ahol a felső előjel  $E \le E'$ , az alsó előjel pedig  $E \ge E'$  esetén érvényes.

A  $\sigma_{s}(E')$  szórási hatáskeresztmetszetet ennek *E* szerinti integrálja adja. Könynyebben érünk célhoz, ha az integrálást (F1.1)-ben végezzük el:

342

$$\sigma_{\rm s}(v') = \frac{\sigma_{\rm s}}{2v'} \int_{0}^{\infty} 4\pi V^2 dV \int_{-1}^{1} d\mu v_{\rm r} P_3(V), \qquad (F1.28)$$

ugyanis  $v_r$  nem függ v-től. (45.1b) alapján a  $\mu$  szerinti integrál  $v_r$  szerinti integrállá alakítható át:

$$\sigma_{s}(v') = \frac{\sigma_{s}}{2v'} \int_{0}^{\infty} 4\pi V^{2} dV \int_{v_{r}(+1)}^{v_{r}(-1)} dv_{r} \frac{v_{r}^{2}}{v'V} P_{3}(V) =$$
$$= \frac{\sigma_{s}}{2v'^{2}} \int_{0}^{\infty} \frac{dV}{V} \frac{(v'+V)^{3} - |v'-V|^{3}}{3} P_{3}(V) 4\pi V^{2}.$$

Ez az integrál könnyen kiszámítható, és az eredmény:

$$\sigma_{\rm s}(E') = \frac{\sigma_{\rm s}}{\beta\sqrt{\pi}} \exp(-\beta^2) + \sigma_{\rm s}\left(1 + \frac{1}{2\beta^2}\right) \operatorname{erf}(\beta), \qquad (F1.29a)$$

ahol

$$\beta^2 = \frac{AE'}{kT}.$$
 (F1.29b)

## 2. függelék. Gauss-kvadratúra

A véges ordináták módszerének Wick-Chandrasekar-féle változatában (lásd 2.4. alfejezet) a szórási integrált Gauss-kvadratúrával közelítjük. Ebben a függelékben összegezzük a leggyakrabban szükséges tudnivalókat.

Jelöljük  $\mu_k$ -val a  $P_{L+1}(\mu)$  Legendre-polinom gyökhelyeit. A Gauss-kvadratúra abban áll, hogy a [-1, 1] intervallumra vonatkozó integrálokat az alábbi módon közelítjük:

$$\int_{-1}^{1} f(\mu) \, \mathrm{d}\mu \approx \sum_{k} w_{k} f(\mu_{k}). \tag{F2.1}$$

A  $w_k$  együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy ez a közelítés egzakt legyen, ha  $f(\mu)$  legfeljebb *L*-edfokú polinom. Legyen

$$u_k(\mu) = \frac{P_{L+1}(\mu)}{(\mu - \mu_k)P'_{L+1}(\mu_k)}.$$

Nyilvánvaló, hogy ezekre a polinomokra fennáll (k, j = 1, 2, ..., L+1):

$$u_k(\mu_j) = \delta_{kj}$$

Egy *L*-edfokú polinomot meghatározza, ha *L*+1 helyen megadjuk az értékét, tehát egy ilyen polinom  $[F_L(\mu)]$  előállítható az

$$F_L(\mu) = \sum_k u_k(\mu) F_L(\mu_k)$$

alakban (Lagrange-féle interpoláció). Így tehát integrálja egzaktul kiszámítható az (F2.1) képlettel, ha

$$w_k = \int_{-1}^{1} u_k(\mu) \,\mathrm{d}\mu \,. \tag{F2.2}$$

Az F2.1 táblázatban megadjuk a Gauss-kvadratúra alkalmazásához szükséges mennyiségeket L = 1, 3 és 5 esetében.

Befejezésül megmutatjuk, hogy az (F2.1) képlet nemcsak legfeljebb *L*-edfokú polinomokra, hanem még egy (2*L*+1)-edfokú polinomra vonatkozóan is egzakt. Legyen ez a legfeljebb (2*L*+1)-edfokú polinom  $F(\mu)$ . Ha elosztjuk  $P_{L+1}(\mu)$ -vel, mind a maradék, mind a hányados legfeljebb *L*-edfokú. A hányadost tehát elő lehet állítani az első *L* Legendre-polinom lineáris kombinációjaként:

$$F(\mu) = P_{L+1}(\mu) \sum_{j=0}^{L} a_j P_j(\mu) + F_L(\mu).$$

A Legendre-polinomok ortogonalitása miatt ennek az integrálja megegyezik a maradék integráljával:

$$\int_{-1}^{1} F(\mu) \, \mathrm{d}\mu = \int_{-1}^{1} F_L(\mu) \, \mathrm{d}\mu \, .$$

 $F_L(\mu)$ -re viszont az (F2.1) integrálformula egzakt, hiszen legfeljebb *L*-edfokú polinom:

$$\int_{-1}^{1} F_L(\mu) \,\mathrm{d}\mu = \sum_k w_k F_L(\mu_k) = \sum_k w_k F(\mu_k).$$

Az utóbbi egyenlőség amiatt érvényes, hogy  $\mu = \mu_k$ -ra  $P_{L+1}(\mu)$  definíció szerint eltűnik. A fentiek szerint ez az integrál megegyezik  $F(\mu)$  integráljával, amivel állításunkat igazoltuk.

| L | k | $w_k = w_{-k}$ | $\mu_k = \mu_{-k}$ |
|---|---|----------------|--------------------|
| 1 | 1 | 1,0000         | 0,57735            |
| 3 | 1 | 0,65214        | 0,33998            |
|   | 2 | 0,34786        | 0,86114            |
| 5 | 1 | 0,46792        | 0,23861            |
|   | 2 | 0,36076        | 0,66121            |
|   | 3 | 0,17132        | 0,93247            |

F2.1. táblázat. A Gauss-kvadratúra állandói

## 3. függelék. Differenciális termalizációs modellek

A (45.7) szórási magfüggvény szerinti integráloperátor két határesetben alakítható át differenciáloperátorrá: hidrogén és nehéz szóró mag esetében. Ennek az a jelentősége, hogy a termalizációt integrálegyenlet helyett könnyebben kezelhető differenciálegyenlettel írhatjuk le.

## F3.1. Termalizáció hidrogénatomokból álló gázon

Hidrogén esetében (A = 1) az (F1.26) magfüggvény alakja:

$$\sigma_{s}(v' \to v) = \begin{cases} \frac{2\sigma_{s}v}{v'^{2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{mv^{2}}{2kT}}\right) & v \leq v'; \\ \frac{2\sigma_{s}v}{v'^{2}} \exp\left(\frac{m(v'^{2} - v^{2})}{2kT}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{mv'^{2}}{2kT}}\right) & v \geq v'. \end{cases}$$

A termalizációs egyenletet a fluxus helyett az n(v) neutronsűrűségre írjuk fel:

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(v' \to v) v' n(v') dv' = \left[ \Sigma_{s}(v) + \Sigma_{a}(v) \right] v n(v) .$$
(F3.1)

Bevezetjük az  $x = v/v_0$  redukált sebességet, ahol  $v_0$  a kT energiához tartozó sebesség:

$$\frac{mv_0^2}{2} = kT, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{E}{kT} = \frac{v^2}{v_0^2} = x^2.$$

Mind a magfüggvényt, mind a neutronsűrűséget a v sebesség helyett x függvényének fogjuk tekinteni.

Mint könnyen ellenőrizhetjük, a szórási magfüggvényt szimmetrikus magfüggvénnyé lehet transzformálni:

$$\Sigma_0^{\mathrm{s}} S(x', x) = \sqrt{M(x')} \ \Sigma_{\mathrm{s}}(x' \to x) x' \frac{1}{\sqrt{M(x)}} = \Sigma_0^{\mathrm{s}} S(x, x'),$$

ahol  $\Sigma_0^{s}$  az  $x \to \infty$ -hez tartozó szórási hatáskeresztmetszet, továbbá

$$M(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$$

a Maxwell-spektrum [vö. (45.11)]. Ezt a magfüggvényt a következő képlet adja meg:

$$S(x',x) = \begin{cases} 2\exp\left(\frac{x^2 - x'^2}{2}\right) \operatorname{erf}(x), & x \le x'; \\ 2\exp\left(\frac{x'^2 - x^2}{2}\right) \operatorname{erf}(x'), & x \ge x'. \end{cases}$$
 (F3.2)

Ha – új ismeretlen függvényként – bevezetjük a

$$h(x) = \frac{xn(x)}{\sqrt{M(x)}}$$

függvényt, akkor (F3.1) alapján egyszerűen belátható, hogy ez kielégíti a

$$\Sigma_0^s \int_0^\infty S(x', x) h(x') dx' = \left[ \Sigma_s(x) + \Sigma_a(x) \right] h(x)$$
(F3.3)

egyenletet.

A differenciálegyenletté való átalakítás érdekében részletesen kiírjuk a bal oldalon szereplő integrált [lásd (F3.2)]:

$$I = \int_{0}^{\infty} S(x', x)h(x')dx' =$$
  
=  $2e^{-x^2/2} \int_{0}^{x} e^{x'^2/2} \operatorname{erf}(x')h(x')dx' + 2e^{x^2/2} \operatorname{erf}(x) \int_{x}^{\infty} e^{-x'^2/2}h(x')dx'$ 

Keresünk egy

$$\hat{\mathbf{L}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( k(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right) + r(x)$$

alakú differenciáloperátort, amelyben a k(x) és r(x) függvények biztosítják, hogy az  $\hat{L}I(x)$  függvény ne tartalmazzon integrálokat. Hosszadalmas, de elemi számítással ellenőrizhetjük, hogy e függvények megfelelő választása a következő:

$$k(x) = \frac{1}{e^{-x^{2}} + x\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)} \qquad \text{és} \qquad r(x) = k(x) \Big[ k(x) e^{-x^{2}} - x^{2} \Big],$$

mert ekkor

$$\hat{\mathbf{L}}I(x) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} k(x) (1 + x\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)) h(x)$$

Ezzel a keresett differenciálegyenlet:

$$\hat{L}\left\{\left[\Sigma_{s}(x) + \Sigma_{a}(x)\right]h(x)\right\} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}k(x)\left(1 + x\sqrt{\pi}\mathrm{erf}(x)\right)h(x) = 0.$$
(F3.4)

### F3.2. Termalizáció nehéz atomokból álló gázban

A másik végletben a termalizációt az  $A \rightarrow \infty$  határesetben tárgyaljuk. Mint a 45.1. *ábrák*ról látszik, ekkor a szórási magfüggvény az  $E \approx E'$  tartománytól eltekintve elhanyagolható. Ennek megfelelően a szórási integrálban érdemes a fluxust (E' - E) szerint haladó sorba fejteni. Mielőtt azonban ezt megtennénk, – a hidrogén esetében követett levezetéshez hasonlóan – kihasználjuk a (45.11) szerinti részletes egyensúlyt. Ehhez bevezetjük a

$$H(E) = \frac{\psi(E)}{M_T(E)}$$

függvényt, ahol a Maxwell-spektrumot (45.10)-ben adjuk meg. A szórási integrál így a következő alakra hozható:

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E' \to E) \psi(E') dE' = \int_{0}^{\infty} M_{T}(E') \Sigma_{s}(E' \to E) \frac{\psi(E')}{M_{T}(E')} dE' =$$
$$= M_{T}(E) \int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E \to E') H(E') dE' .$$

A termalizációs egyenlet ekkor átmegy az

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E \to E') H(E') dE' = \left[ \Sigma_{s}(E) + \Sigma_{a}(E) \right] H(E)$$
(F3.5)

alakba. A fent említett sorfejtést az itt szereplő integrálban hajtjuk végre:

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E \to E') H(E') dE' =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E \to E') \left[ H(E) + (E' - E) \frac{dH}{dE} + \frac{1}{2} (E' - E)^{2} \frac{d^{2}H}{dE^{2}} + \dots \right] dE'.$$

Az egyes tagok integráljai – az első kivételével – 0-hoz tartanak, amikor  $A \rightarrow \infty$ . Itt nem részletezett számítások szerint ennek aszimptotikája a következő:<sup>40</sup>

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E \to E') dE' = \Sigma_{s}(E),$$

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E \to E')(E' - E) dE' \approx \xi \Sigma_{s}(E)(2kT - E),$$

$$\int_{0}^{\infty} \Sigma_{s}(E \to E')(E' - E)^{2} dE' \approx \frac{4\Sigma_{s}(E)EkT}{A} \approx 2\xi \Sigma_{s}(E)EkT.$$

Ha ezt (F3.5)-be helyettesítjük, az

$$EkT \frac{\mathrm{d}^2 H(E)}{\mathrm{d}E^2} + (2kT - E)\frac{\mathrm{d}H(E)}{\mathrm{d}E} - \frac{\Sigma_{\mathrm{a}}(E)}{\xi \Sigma_{\mathrm{s}}(E)}H(E) = 0$$
(F3.6)

egyenletet kapjuk. Ezt egyszerűbb alakra hozhatjuk, ha a  $\psi(E)$  fluxus helyett az n(x) sűrűségre térünk át. (x a redukált sebesség:  $E = kTx^2$ .) Az (F3.6) egyenlet végső soron azt jelenti, hogy az

$$\hat{\mathbf{L}}\boldsymbol{\psi}(E) = \int_{0}^{\infty} \boldsymbol{\Sigma}_{s}(E' \to E)\boldsymbol{\psi}(E') \mathrm{d}E' - \boldsymbol{\Sigma}_{s}(E)\boldsymbol{\psi}(E)$$

operátort az alábbi módon közelítjük:

$$\hat{\mathcal{L}}_{E}\psi(E) \cong M_{T}(E)\xi\Sigma_{s}(E)\left[\left(2kT-E\right)\frac{\mathrm{d}H(E)}{\mathrm{d}E} + EkT\frac{\mathrm{d}^{2}H(E)}{\mathrm{d}E^{2}}\right],\tag{F3.7}$$

ahol az "E" index arra utal, hogy a jobb oldalt E függvényének tekintjük. Amikor ugyanezt x függvényeként fejezzük ki, értelemszerűen megköveteljük, hogy

$$\hat{\mathbf{L}}_E \boldsymbol{\psi}(E) \mathrm{d}E = \hat{\mathbf{L}}_E \boldsymbol{\psi}(E) 2kTx\mathrm{d}x = \hat{\mathbf{L}}_x n(x)\mathrm{d}x$$

<sup>&</sup>lt;sup>40</sup> A határátmenet úgy értendő, hogy  $A \rightarrow \infty$ ,  $\Sigma_s \rightarrow \infty$ , miközben a  $\xi \Sigma_s$  szorzat véges marad.

teljesüljön, vagyis

$$\hat{\mathbf{L}}_{x}n(x) = 2kTx\hat{\mathbf{L}}_{E}\boldsymbol{\psi}(E).$$
(F3.8)

Az  $\hat{L}_x$  operátor alakjának a meghatározásához előbb n(x)-et fejezzük ki a korábbi mennyiségekkel:

$$\psi(E)\mathrm{d}E = 2kTx\psi(kTx^2)\mathrm{d}x = xn(x)\mathrm{d}x,$$

vagyis<sup>41</sup>

$$n(x) = 2kT\psi(kTx^{2}) = 2kTM_{T}(kTx^{2})H(kTx^{2}) = 2x^{2}e^{-x^{2}}H(kTx^{2}).$$

Ha ezt *x* szerint kétszer deriváljuk, egyszerű számítás<sup>42</sup> után kapjuk:

$$\begin{aligned} x \frac{\mathrm{d}^2 n(x)}{\mathrm{d}x^2} + \left(2x^2 - 1\right) \frac{\mathrm{d}n(x)}{\mathrm{d}x} + 4xn(x) = \\ &= 8xkTM_T(E) \left[ EkT \frac{\mathrm{d}^2 H(E)}{\mathrm{d}E^2} + \left(2kT - E\right) \frac{\mathrm{d}H(E)}{\mathrm{d}E} \right] = \\ &= \frac{8xkT\hat{\mathrm{L}}_E \psi(E)}{\xi \Sigma_{\mathrm{s}}(E)}, \end{aligned}$$

amiből

$$\hat{L}_{x}n(x) = \xi \Sigma_{s}(x) \left[ x \frac{d^{2}}{dx^{2}} + (2x^{2} - 1) \frac{d}{dx} + 4x \right] n(x).$$
(F3.9)

A termalizációs egyenlet tehát így írható:

$$\hat{\mathbf{L}}_{x}n(x)\mathrm{d}x = \hat{\mathbf{L}}_{E}\psi(E)\mathrm{d}E = \mathcal{\Sigma}_{\mathrm{a}}(E)\psi(E)\mathrm{d}E = \mathcal{\Sigma}_{\mathrm{a}}(x)xn(x)\mathrm{d}x$$

vagyis

$$\hat{\mathbf{L}}_{x}n(x) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{a}}(x)xn(x).$$
(F3.10)

<sup>&</sup>lt;sup>41</sup> Egy *x*-től független tényezőtől eltekintve n(x)dx azoknak a neutronoknak a sűrűsége, amelyek redu-kált sebessége az (x, x+dx) intervallumba esik. <sup>42</sup> A számítások egyszerűbbé válnak az  $y = x^2$  helyettesítéssel.

#### F3.3. Cadilhac szintetikus modellje

Az előző két differenciálegyenletet a (45.7) modellből kiindulva kaptuk. Tudjuk azonban, hogy a reális moderátorok esetében a hőmozgáson kívül figyelembe kell venni a kémiai kötés és/vagy a kristályszerkezet hatását is, ami csak integráloperátorok segítségével lehetséges. Cadilhac szintetikus modellje azonban lehetővé teszi, hogy ezeket is – legalább közelítőleg – differenciáloperátorral helyettesítsük.

Cadilhac modelljében a termalizációs egyenlet alakja:

$$\frac{\xi \Sigma_{\rm s}}{4} \left[ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{a(x)} \left( x \frac{\mathrm{d}n_1(x)}{\mathrm{d}x} + 2\left(x^2 - 1\right)n_1(x) \right) \right] = x \Sigma_{\rm a}(x)n(x), \tag{F3.11}$$

ahol

$$n_1(x) = \left[1 + \frac{\Sigma_a(x)}{\xi \Sigma_s(x)} b(x)\right] n(x),$$

továbbá a(x) és b(x) alkalmasan megválasztandó függvények. Belátható, hogy ez a modell magába foglalja a nehézgáz-modellt is: a  $b(x) \equiv 0$  és  $a(x) \equiv 1$  választással visz-szakapjuk az erre az esetre levezetett differenciálegyenletet.

Emögött az alábbi heurisztikus gondolatmenet húzódik meg. Mindenképpen meg akarjuk tartani a nehézgáz-modell alakját [lásd (F3.10)], mert ez matematikailag kényelmes. (F3.10) megoldásától a valóságban annál nagyobb eltérést várunk, minél nagyobb az abszorpció. Így a relatív eltérés első közelítésben  $\Sigma_a/(\xi\Sigma_s)$ -sel arányos. Az arányossági tényező a b(x) függvény. A differenciálegyenletet tehát  $n_1(x)$ -re írjuk fel. Ez azonban nem ad elég pontos eredményeket. Ennek korrekciója érdekében vezetjük be az a(x) függvényt.

Az a(x) és b(x) függvényeket úgy kell megválasztani, hogy az adott termalizációs integráloperátorral kapott mennyiségeket a lehető legjobban közelítse. A legegyszerűbben teljesíthető kritérium a következő. Kiszámítjuk az integráloperátor első és második momentumát:

$$m_{\rm l}(E) = \int_{0}^{\infty} \Sigma_{\rm s}(E \to E')(E' - E) \mathrm{d}E' ,$$

illetve

$$m_2(E) = \int_0^\infty \Sigma_s(E \to E') \left( E'^2 - E^2 \right) dE' ,$$

továbbá az a(x) és b(x) függvényeket úgy választjuk meg, hogy a velük képzett differenciáloperátor ezeket visszaadja. Grafitmoderátor esetében ez az eljárás megfelelőnek bizonyult. Vízmoderátor esetében egy másik módszert választottak, mert ez nem adott kielégítő pontosságot. A termalizációs egyenletet megoldották két különböző nagyságú "1/v" abszorbensre, és az a(x) és b(x) függvényeket úgy választották meg, hogy a differenciálegyenlet megoldása visszaadja az integrálegyenlet megoldását.

## 4. függelék. A fluxus logaritmikus deriváltjának a számítása

A 3.1. alfejezet végén láttuk, hogy megfelelő határfeltétel segítségével a diffúzióegyenlet olyan rendszerekben is használható, amelyekben vannak olyan tartományok, ahol a diffúziós közelítés nem érvényes. Ezeket a tartományokat többnyire az jellemzi, hogy belsejükben – bizonyos neutronenergiákra – túlságosan nagy az abszorpciós hatáskeresztmetszet. Tekintve, hogy ezek általában szabályozórudak, az alábbiakban – az egyszerűbb kifejezés kedvéért – ezekről fogunk beszélni, de megjegyezzük, hogy az elmondottak általánosabban is érvényesek. A szóban forgó neutronenergiák általában a termikus tartományba esnek, tehát a logaritmikus határfeltétel rendszerint a termikus fluxusra vonatkozik.

A szabályozórudakat a diffúzióegyenlet megoldásából ki kell zárni, és külső felületükön határfeltételként elő kell írni *a fluxus logaritmikus deriváltját*. E mennyiség számításában a diffúziós közelítésnél magasabb közelítésben kell meghatározni a rúd belsejében kialakuló fluxust. A jelen függelék célja a számítás elveinek az ismertetése. Két alapfeltevésből indulunk ki:

- (1) A szabályozórúd határán érvényes a diffúziós közelítés. Ennek érdekében a leggyakrabban a rúdhoz hozzá kell számítani a rúd bizonyos környezetét.
- (2) A szabályozórúd belsejében elhanyagoljuk a neutronszórásban bekövetkező energiaváltozást. Ennek következtében válik lehetővé az egycsoport közelítés. A függelék végén kitérünk arra, hogyan lehet ettől a meglehetősen durva elhanyagolástól megszabadulni.

#### Végtelen féltér esete

A módszer lényegének minél egyszerűbb előadása érdekében tegyük fel, hogy a "szabályozórúd" egy végtelen féltér, amelynek albédóját a 2.3. alfejezetben kiszámítottuk. A (23.35) egyenlet egy  $\Omega_x = \mu_0$  iránnyal jellemzett, párhuzamos neutronnyalábra adja meg a visszaszórt neutronok  $\alpha(\mu_0)$  számát. Ha a féltér határán a fluxus  $\Phi$ , az áram *J*, akkor az (1) feltevés szerint minden  $\mu$ -re

$$\psi(0,\mu) \cong \frac{\Phi}{4\pi} + \frac{3\mu J}{4\pi} \,. \tag{F4.1}$$

A vizsgált féltérbe belépő neutronok száma:

$$J_{\rm x}^{\,+} = \frac{\Phi}{4} + \frac{J}{2} \,. \tag{F4.2}$$

A kilépő neutronok teljes száma ugyanakkor:

$$J_{x}^{-} = \frac{\Phi}{4} - \frac{J}{2} = 2\pi \int_{0}^{1} \psi(0, \mu_{0}) \alpha(\mu_{0}) \mu_{0} d\mu_{0} = \frac{\Phi}{2} w_{1} + \frac{3J}{2} w_{2}, \quad (F4.3)$$

ahol

$$w_1 = \int_0^1 \mu_0 \alpha(\mu_0) d\mu_0 \qquad \text{és} \qquad w_2 = \int_0^1 \mu_0^2 \alpha(\mu_0) d\mu_0. \qquad (F4.4)$$

(F4.3)-ból kifejezhetjük a (31.13) alatti képletben definiált logaritmikus deriváltat:

$$\frac{J}{\Phi} = \frac{0.5 - w_1}{1 + 3w_2}, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{\partial \ln \Phi}{\partial x} = -\frac{1}{D} \frac{0.5 - w_1}{1 + 3w_2}, \qquad (F4.5)$$

ahol D a szabályozórúdon kívül levő közeg diffúzióállandója. Végül a (31.12) alatt definiált albédó:

$$a = \frac{\frac{\Phi}{4} - \frac{J}{2}}{\frac{\Phi}{4} + \frac{J}{2}} = \frac{1 - \frac{2J}{\Phi}}{1 + \frac{2J}{\Phi}} = \frac{3w_2 + 2w_1}{2 + 3w_2 - 2w_1}.$$
 (F4.6)



*F4.1. ábra.* A visszaszórt neutronok teljes száma,  $\alpha(\mu_0)$  a belépő neutronnyaláb beesési irányának a függvényében (c = 0.98)

Numerikus példát a 23.2. *ábrá*n látható görbékből kaphatunk. Ha ezekre (F4.4) szerint  $\mu_0$  függvényében kiszámítjuk az  $\alpha(\mu_0)$  integrált, az F4.1. *ábrá*n látható eredményt kapjuk c = 0.98 esetében. Amikor erre vonatkozóan kiszámítjuk az (F4.4) szerinti  $w_1$  és  $w_2$  integrálokat, (F4.5) és (F4.6) adja a keresett logaritmikus deriváltat, illetve albédót:

354

$$\frac{J}{\Phi} = 0,17028$$
 és  $a = 0,49191.$ 

A c = 0,98-cal jellemzett közeg nem tekinthető szabályozórúdnak, hiszen abszorpciója csekély: az abszorpciós hatáskeresztmetszet a teljes hatáskeresztmetszetnek mindössze 2%-a. Ezért a fenti mennyiségeket érdemes c függvényében vizsgálni. Ez látható az *F4.2.* és *F4.3. ábrák*on, amelyek a  $J/\Phi$  hányadost, illetve az a albédót mutatják (1 - c), vagyis az abszorpció részarányának a függvényében. Nagy abszorpcióra az albédó 0-hoz,  $J/\Phi$  pedig 0,5-höz tart, amint ez a diffúzióelmélet szerint várható [vö. (31.13)]. Kis abszorpció esetében az albédó természetesen 1-hez tart, de meglehetősen lassan,  $\sqrt{1-c}$ -vel arányosan.



F4.3. ábra. Az a albédó (1 - c) függvényében

## Valóságos szabályozórúd

Az előzőkben vizsgált végtelen féltér csak nagyon idealizált módon tekinthető egy szabályozórúd modelljének. A valóságos szabályozórudak egyik mérete ugyan tekinthető végtelennek, de másik két méretük nagyon is véges. Az alábbiakban képzeljünk el egy hosszú, de véges sugarú hengert, amelyre érvényesek az (1) és (2) feltevések. Ekkor a szabályozórúd belsejében az alábbi alakban írhatjuk fel a transzport-egyenletet:

$$-\vec{\Omega} \operatorname{grad} \psi(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) - \mathcal{L}_{t}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, \vec{\Omega}) + \int_{4\pi} \mathcal{L}_{s}(\mathbf{r}, \vec{\Omega}' \to \vec{\Omega})\psi(\mathbf{r}, \vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' = 0, \quad (F4.7)$$

a (2) feltevés miatt ugyanis elegendő egycsoport modellben számolni. Integráljuk ezt az egyenletet  $\vec{\Omega}$  szerint:

$$-\operatorname{div} \mathbf{J}(\mathbf{r}) - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{a}}(\mathbf{r})\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}) = 0$$

Ha ezt a szabályozórúd térfogatára integráljuk, akkor a második tag integrálja a rúd belsejében bekövetkező abszorpciók teljes számát adja, amely megegyezik az áram felületi integráljának a negatívjával:

$$T_{a} = \int_{V_{sz.r.}} \Sigma_{a}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) dV = - \int_{F_{sz.r.}} \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{f} .$$
(F4.8)

Vegyük észre, hogy ez lényegében ugyanaz, mint a végtelen féltérre számolt  $\alpha(\mu_0)$  teljes kiszökés, hiszen ami nem szökik ki, az a rúdban abszorbeálódik.<sup>43</sup> Így tehát ez az a mennyiség, amelyet a transzportelmélet magasabb közelítésében kell kiszámolnunk, hiszen – a fentiek mintájára – ezt fogjuk tudni a rúdon kívül érvényes diffúziós közelítéssel összekapcsolni. Legyen  $p_a(\mathbf{r}_s, \vec{\Omega})$  annak a valószínűsége, hogy a rúd felületének  $\mathbf{r}_s$  pontjából  $\vec{\Omega}$  irányban (befelé) repülő neutron abszorbeálódik, mielőtt a rúdból kiszökne. Ezzel az abszorbeálódó neutronok teljes számát az alábbi módon *is* kifejezhetjük:

$$T_{\rm a} = -\int_{\vec{\Omega}d\mathbf{f}<0} \int_{\rm F_{sz.r.}} p_{\rm a}(\mathbf{r}_{\rm s},\vec{\Omega}) \psi(\mathbf{r}_{\rm s},\vec{\Omega}) (\vec{\Omega}d\mathbf{f}) d\vec{\Omega} \,. \tag{F4.9}$$

Az (1) feltevés szerint a szögfüggő fluxus a felületen a 3.1. alfejezetben definiált diffúziós közelítéssel fejezhető ki:

$$\psi(\mathbf{r}_{\rm s},\vec{\Omega}) = \frac{\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{r}_{\rm s})}{4\pi} + \frac{3}{4\pi}\vec{\Omega}\mathbf{J}(\mathbf{r}_{\rm s}),$$

amit előző két egyenletünkbe helyettesítve megkapjuk a keresett kapcsolatot az áramnak és a fluxusnak a rúd felületén felvett értékei között.

Ennek egyszerűsítése érdekében néhány további feltevést teszünk, amelyek a gyakorlatban jó közelítéssel érvényesek:

(3) Az áram a rúd felületi normálisával párhuzamosan befelé mutat:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_{\mathrm{s}}) = -J(\mathbf{r}_{\mathrm{s}})\mathbf{N}_{\mathrm{s}}.$$

<sup>&</sup>lt;sup>43</sup> Ez az állítás csak addig igaz, amíg a (2) feltevés érvényes, lásd alább.

# (4) A $J/\Phi$ hányados a felületen állandó.<sup>44</sup>

Ekkor (F4.8) és (F4.9) alapján egyszerűen levezethetjük:

$$\frac{J}{\varPhi} = \frac{\int\limits_{F_{sz.r.}} \eta_1(\mathbf{r}_s) df}{F_{sz.r.} - 3 \int\limits_{F_{sz.r.}} \eta_2(\mathbf{r}_s) df},$$
(F4.10)

ahol F<sub>sz.r.</sub> a szabályozórúd felülete, továbbá

$$\eta_{1}(\mathbf{r}_{s}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega}\mathbf{N}_{s}<0} p_{a}(\mathbf{r}_{s},\vec{\Omega})(\vec{\Omega}\mathbf{N}_{s}) d\vec{\Omega}$$

és

$$\eta_2(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \int_{\vec{\Omega}\mathbf{N}_s < 0} p_a(\mathbf{r}_s, \vec{\Omega}) (\vec{\Omega}\mathbf{N}_s)^2 d\vec{\Omega} .$$

Hengeres szimmetriájú szabályozórúd esetében ezek az integrálok függetlenek az  $\mathbf{r}_s$  helyvektortól, tehát ekkor az (F4.10) képlet egyszerűsödik:

$$\frac{J}{\Phi} = \frac{\eta_1}{1 - 3\eta_2}$$

A korábbi eredményekkel való összekapcsolás céljából tekintsük a teljesen "fekete" rudat, amely minden neutront elnyel, vagyis amelyre  $p_a(\mathbf{r}_s, \vec{\Omega}) \equiv 1$ . Ha bevezetjük az  $\vec{\Omega} \mathbf{N}_s = \mu$  jelölést, egyszerűen beláthatjuk, hogy ekkor

$$\eta_1 = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \mu d\mu = \frac{1}{4}$$
 és  $\eta_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \mu^2 d\mu = \frac{1}{6}$ ,

amivel  $J/\Phi = 1/2$ . Ez ugyanaz, mint amit a végtelen féltérre a  $c \rightarrow 0$  határesetben kaptunk. A 3.1. alfejezet szerint ez megegyezik a vákuummal határos (konvex) felületen érvényes határfeltétellel is, ami nem véletlen, hiszen a vákuum is minden, a vákuum felé kiszökő neutront elnyel.

"Szürke" szabályozórudak esetében (amelyeken a neutronok bizonyos valószínűséggel át tudnak hatolni) megkerülhetetlen a  $p_a(\mathbf{r}_s, \vec{\Omega})$  valószínűség kiszámítása. Ez az a művelet, amelyhez a transzportegyenlet magasabb közelítésére van szükség. Tekintve, hogy végső soron nem erre a valószínűségre, hanem csak annak  $\eta_1$  és  $\eta_2$  integráljaira van szükség, itt előnyös a Monte Carlo módszer használata (lásd a 2.4. alfejezetben).

<sup>&</sup>lt;sup>44</sup> Ez például hengerszimmetriájú rúd esetében biztosan teljesül.

#### Lassulás a szabályozórúdban

Vannak szabályozórudak, amelyek esetében nem érvényes a (2) feltevés. Ilyen például egy vizes csőben mozgó abszorbensrúd, hiszen nyilván nem hanyagolható el a vízen való lassulás. E függelék befejezéseképpen megvizsgáljuk ennek következményeit.

Ha van lassulás, akkor az (F4.7) egyenletet módosítani kell:

$$-\vec{\Omega}\operatorname{grad}\psi(\mathbf{r},\vec{\Omega}) - \mathcal{\Sigma}_{t}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},\vec{\Omega}) + \int_{4\pi}\mathcal{\Sigma}_{s}(\mathbf{r},\vec{\Omega}'\rightarrow\vec{\Omega})\psi(\mathbf{r},\vec{\Omega}')d\vec{\Omega}' + \frac{Q(\mathbf{r})}{4\pi} = 0,$$
(F4.11)

ahol  $\psi(\mathbf{r}, \vec{\Omega})$  a termikus csoport fluxusa és  $Q(\mathbf{r})$  a neutronlassulásból származó (izotropnak feltételezett) forrás az  $\mathbf{r}$  pontban. Az utóbbi mennyiséget az epitermikus csoportokhoz tartozó fluxussal lehet kifejezni, ahol – többnyire – érvényesnek tekinthetjük a diffúziós közelítést. Így tehát  $Q(\mathbf{r})$  ismert, amikor a szabályozórúd környezetében a termikus fluxust szeretnénk kiszámítani. A fentiek mintájára integráljuk az (F4.11) egyenletet is  $\vec{\Omega}$  minden értékére és a szabályozórúd belsejére. Ha  $T_Q$ -val jelöljük  $Q(\mathbf{r})$  integrálját, akkor (F4.8) helyett most a következő eredményt kapjuk:

$$T_{\rm a} - T_{\rm Q} = -\int_{\rm F_{sz.r.}} \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{f} .$$
 (F4.12)

Nem érvényes tehát az a korábbi megállapítás, hogy a rúd belsejében abszorbeálódó neutronok teljes száma megegyezik a rúdba befolyó neutronok nettó számával, így nem írhatjuk fel az (F4.9) összefüggést sem.

A lassulás hatásának tárgyalásához be kell vezetnünk a  $p_Q$  mennyiséget, amely annak a valószínűsége, hogy egy  $Q(\mathbf{r})$  térbeli eloszlással lassuló neutron a rúdban abszorbeálódik, mielőtt kiszökne. Ezzel (F4.9) a következőképpen módosul:

$$T_{\rm a} = T_{\rm Q} p_{\rm Q} - \int_{\vec{\Omega} d\mathbf{f} < 0} \int_{\mathbf{F}_{\rm sz.r.}} p_{\rm a} (\mathbf{r}_{\rm s}, \vec{\Omega}) \psi(\mathbf{r}_{\rm s}, \vec{\Omega}) (\vec{\Omega} d\mathbf{f}) d\vec{\Omega} \,. \tag{F4.13}$$

Ha fenti levezetésünket innen indulva megismételjük, a

$$\frac{J}{\boldsymbol{\Phi}} = \frac{\int\limits_{\mathbf{F}_{sz.r.}} \eta_1(\mathbf{r}_s) \mathrm{d}f - \frac{T_Q}{\boldsymbol{\Phi}} (1 - p_Q)}{F_{sz.r.} - 3 \int\limits_{\mathbf{F}_{sz.r.}} \eta_2(\mathbf{r}_s) \mathrm{d}f}$$
(F4.14)

képlet adódik. Ez az eredmény alapvetően különbözik a korábbitól. A  $T_Q/\Phi$  hányados ugyanis függ a szabályozórúd környezetétől, tehát a rúdban való neutronlassulás esetében a termikus fluxus logaritmikus deriváltja (illetve a  $J/\Phi$  arány) egymagában nem

elégséges a rúd határán előírandó határfeltétel megadásához. A probléma kezelésére több megoldás képzelhető el.

Az eddigiekben vázolt modell keretében a legegyszerűbb megoldás abban áll, hogy a szabályozórudat az  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  és  $p_Q$  paraméterekkel jellemezzük, és a diffúzióegyenlet megoldásához szükséges iteráció (vö. 5.3. és 5.4. alfejezetek) során (F4.14) szerint minden lépésben újraszámoljuk a  $J/\Phi$  arányt, és a logaritmikus határfeltételt ennek alapján vesszük figyelembe. Így az iteráció végén nemcsak a fluxus, hanem a logaritmikus derivált értéke is kiadódik. Ennek a módszernek jelentős előnye, hogy nem igényli a szokásos diffúziós programok jelentős átalakítását.

Az ismertetett módszer megfelelő, ha a rúdon belül való lassulás az egyetlen probléma. A helyzet azonban általában bonyolultabb. Ha ugyanis lassulás van, akkor rendszerint van termalizáció is. Ekkor pedig nem alkalmazható az egycsoport elmélet. Ilyen helyzet leírására nem elégséges a fentiekben definiált abszorpciós valószínűségek számítása, hanem szükség van az ún. *válaszmátrix* bevezetésére:  $\alpha_{g'g}$  annak a valószínűsége, hogy a g' energiacsoportban a rúdba belépő neutron a g csoportban lép ki a rúd felületén. Ennek a mátrixnak a figyelembevételével le lehet írni a rúd belsejében való lassulást és termalizációt. Ahhoz azonban, hogy ezt mint határfeltételt figyelembe tudjuk venni, a szabályozórúdon kívül alkalmazott diffúziós számítási sémát jelentősen módosítani kell. További bonyodalom, hogy a hengerszimmetriától eltérő geometriájú szabályozórudak esetében arra is szükség lehet, hogy a válaszmátrixot ne csak energia szerint, hanem a rúd geometriája alapján kiválasztott felületelemek szerint is differenciáljuk.<sup>45</sup> A korszerű reaktorfizikai programok ilyen módon működnek, de a részletek tárgyalásától ebben a könyvben el kell tekintenünk.

<sup>&</sup>lt;sup>45</sup> Például, hatszöges geometriájú rudak esetében érdemes a következő kérdést feltenni: mennyi annak a valószínűsége, hogy a hatszög egyik lapján belépő neutron egy másik lapon keresztül a rúdból kiszö-kik? Ha az ezt leíró mátrixot is korrektül figyelembe kívánjuk venni, az 5. fejezetben tárgyalt elven alapuló végesdifferencia-sémáktól eltérő numerikus módszerekre van szükség.
#### 5. függelék. Pontkinetikai egyenlet energiafüggő esetekben

A 7.5. alfejezetben állítjuk, hogy a 3.6. alfejezetben levezetett pontkinetikai egyenletet nem lehet megkapni abban az esetben, amikor többcsoport vagy folytonos energiaváltozójú időfüggő diffúzió- vagy transzportegyenletből indulunk ki. Az alábbiakban belátjuk, hogy ezen az úton valóban nem kaphatunk olyan alakú egyenleteket, mint a 3.6. alfejezetben levezetett pontkinetikai egyenletrendszer. Az egyszerűség kedvéért elhanyagoljuk a késő neutronokat, vagyis a (71.1) egyenletből indulunk ki. Ha a levezetés ebben az esetben sem sikerül, még kevésbé sikerülhet a késő neutronok figyelembevételével. Ha nincsenek késő neutronok, a pontkinetikai egyenlet alakja a következő:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho}{\Lambda}\varphi(t) + S \; .$$

A (72.2a) sajátérték-probléma sajátértékeit és sajátfüggvényeit – a korábbi fejezetekkel összhangban –  $k_{\ell}$ -lel, illetve  $n_{\ell}$ -lel jelöljük. A mondottak szerint a (71.1) időtől függő egyenlet megoldását a következő sor alakjában keressük:

$$n(\mathbf{x},t) = \sum_{\ell} \varphi_{\ell}(t) n_{\ell}(\mathbf{x}),$$

ahol az **x** változót a 7.2. alfejezet elején definiáltuk. Az időtől függő  $\varphi_{\ell}(t)$  együtthatókat az ortogonalitást kihasználva határozzuk meg:

$$\varphi_{\ell}(t) = \int n_{\ell}^{+}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{P}} n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \left(n_{\ell}^{+}, \hat{\mathbf{P}} n(t)\right).$$

A reaktivitásnak a levezetendő egyenletbe való beépítéséhez szükségünk van az adjungált sztatikus sajátérték-egyenletre [vö. (72.2b)]:

$$0 = \frac{1}{k_{\rm eff}} \hat{\mathbf{P}}^+ n_1^+ - \hat{\mathbf{D}}^+ n_1^+ \,.$$

Itt figyelembe vettük, hogy  $k_1 \equiv k_{\text{eff}}$ . (71.1)-et beszorozzuk az adjungált sajátfüggvénynyel, majd integrálunk minden változó szerint:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n_{1}^{+},n(t)\right)=\left(n_{1}^{+},\hat{\mathrm{P}}n(t)\right)-\left(n_{1}^{+},\hat{\mathrm{D}}n(t)\right)+\left(n_{1}^{+},S\right).$$

Ezután beszorozzuk a sztatikus sajátérték-egyenletet  $n(\mathbf{x},t)$ -vel, majd integrálunk **x** szerint:

$$0 = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \left( \hat{\mathbf{P}}^+ n_1^+, n(t) \right) - \left( \hat{\mathbf{D}}^+ n_1^+, n(t) \right) = \frac{1}{k_{\text{eff}}} \left( n_1^+, \hat{\mathbf{P}}n(t) \right) - \left( n_1^+, \hat{\mathbf{D}}n(t) \right).$$

A két egyenletet kivonjuk egymásból:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(n_{1}^{+},n(t)\right) = \left(1-\frac{1}{k_{\mathrm{eff}}}\right)\left(n_{1}^{+},\hat{\mathrm{P}}n(t)\right) + \left(n_{1}^{+},S\right).$$

A  $\rho$  reaktivitás valóban megjelent. Beírjuk be a fenti sorfejtést:

$$\sum_{\ell} \left( n_1^+, n_{\ell} \right) \frac{\mathrm{d}\varphi_{\ell}(t)}{\mathrm{d}t} = \rho \varphi_1(t) + \left( n_1^+, S \right).$$

Ez akkor jelentené a 3.6. alfejezetben követett levezetés megismétlését, ha benne csak  $\varphi_l(t)$  szerepelne. Mivel azonban a különbző indexű adjungált, illetve direkt sajátfüggvények nem közvetlenül, hanem csak a produkciós operátoron keresztül ortogonálisak egymásra, ez nem lehetséges.

Közvetlenül ortogonálisak a (72.1) kinetikus sajátérték-egyenlet sajátfüggvényei. Ebből az okfejtésből tehát látszik, hogy a pontkinetikai egyenletrendszer olyan kiindulási modell esetében lehet pontosan érvényes, amelyben a sztatikus és kinetikus sajátfüggvények egymással megegyeznek. Ilyenek az egycsoport modellek, de már nem ilyenek az energiafüggő modellek.

#### Tárgymutató

1/N módszer, 1421/v hatáskeresztmetszet, 36, 277

# A, Á

a reaktorfizika alaptétele, 83, 109, 259 adjungált áram, 300 adjungált egyenlet, 46, 290, 316 adjungált függvény, 298, 300, 308, 310, 315 aktív zóna, 144, 260, 322, 337 alapmódus, 119, 122, 126, 134, 266 albédó, 68, 108, 394 végtelen féltérről, 68 Albert Einstein, 24 állandósult módus, 312 általánosított függvény, disztribúció, 55 alulmoderált, 270 Alvin M. Weinberg, 24 anyamag, 306 aszimptotikus reaktorelmélet, 83, 96, 112,230 átlagos húrhossz, 196 atombomba, 26, 356 atomerőmű, 18, 27 CANDU, 18 Csernobil, 29 nyomottvizes, 274 paksi, 18, 27, 197, 253, 269, 280, 287, 363 atomsorompó-szerződés, 26 atomtitok, 26 átviteli függvény, 161, 164

#### B

 $B_1$  közelítés, 88  $\beta_{eff}$ , *lásd* későneutron-hányad, effektív bennmaradási valószínűség, 130, 216 termikus, 273
berillium, 172
besugárzás, 348
bórsavegyüttható, 282
Breit-Wigner formula, 190

### C, Cs

Cadilhac szintetikus modellje, 206, 391 Case-módszer, 52 csoportállandó, 220 egycsoport, 110, 262 kevéscsoport, 251, 367 sokcsoport, 227, 367 csoportállandó-könyvtár, 227

## D

detektortér, 292 diffúzióegyenlet, 20, 98, 103, 220, 393 adjungált, 298 egycsoport, 125, 291 309, 322 kevéscsoport, 228, 243, 241 többcsoport, 20, 221, 334 diffúzióelmélet, 98, 116 egycsoport, 98, 131, 302 kevéscsoport, 228 többcsoport, 309 diffúziós együttható, 102, 190, 240 diffúziós hossz, 66, 115, 123, 261 diffúziós közelítés, 19, 107, 125, 290, 393, 397 diffúziós terület, 115, 257 Diven-tényező, 157 dollár (reaktivitásegység), 137 Doppler-effektus, 36, 198, 283 Doppler-együttható, 278 Doppler-kiszélesedett vonalalak, 199 Doppler-szélesség, 199

## E, É

egycsoport elmélet, 94, 98, 109, 125, 260 effektív nap, 363 ekvivalenciatétel, 196 elemi cella, 209 élettartam, 134, 138 előnytelenségi tényező, 212 eltolási szabály, 21 Enrico Fermi, 22 Ernest Rutherford, 20 értékesség forrás-, 313 későneutron-, 305 kibocsátási, 302 neutron-, 291, 294, 310 extrapolációs távolság, 67, 78, 79, 80, 82, 107, 263 extrapolált határfelület, 236, 294

#### F

fehérzaj, 160 fel nem bontott rezonancia, 191 felbontott rezonancia, 191 Fermi-kor, 214, 257 Fermi modell, 187 Fermi-féle koregyenlet, 214 Fermi-féle korelmélet, 213 Feynman-kísérlet, 157 Fick-törvény, 98 adjungált, 300 fluencia, 348 fluxus, 38, 293, 298, 359 aszimptotikus, 67, 70, 267 csoport-, 219 epitermikus, 255, 265 fiktív, 192, 227 gyors, 347 integrális, 348 logaritmikus deriváltja szabályozórúd felületén, 237, 251, 396 logaritmikus deriváltja végtelen féltér felületén, 393 logaritmikus deriváltja, 393, 399 makro-, 209 mikro-, 209 szögfüggő, 40, 217, 300, 397 szögre integrált, 40 termikus, 205, 255, 265, 268, 393, 399 forrásos krízis, 363 Frédéric Joliot-Curie, 22 Fritz Strassmann, 23

Fuchs-Hansen modell, 283 fűtőelem, 194, 212, 253, 253, 268, 339, 363 fűtőelemköteg, 253 fűtőelemrács, 209, 253 alulmoderált, 270 optimális, 267, 270 szabályos, 256 túlmoderált, 270 fűtőelemrúd, *lásd* fűtőelem

### G, Gy

generációs idő, 134
görbületi paraméter anyagi, 89, 112, 129, 224, 225, 257, 336, 368
geometriai, 112, 129, 224
GRACE program, 228, 267, 337
grafit, 172
Green-függvény, 61, 113
Greuling-Goertzel modell, 185, 225
gyorshasítási tényező, 15, 268

### Η

hasadási termék, 13, 19, 131, 252, 254, 339, 343, 356, 363 hasadvány, 13 határfeltétel, 46, 48, 63, 75, 79, 236, 393, 399 albédó, 108 diffúziós, 76, 258, 263, 299 fehér, 211 logaritmikus, 108, 238, 393 Mark. 76 Marshak, 75 hatáskeresztmetszet, 15, 17, 30, 251 abszorpciós, 32, 33, 168, 237, 268, 277, 293, 322, 343, 358, 393 befogási, 17 detektor-, 293 effektív, 36, 198 hasadási, 15, 293, 349 időabszorpciós, 50 151 makroszkopikus, 31 mikroszkopikus, 30 potenciálszórási, 190, 267 removal, 229

rugalmas szórási, 32, 168 rugalmatlan szórási, 168 szórási, 32, 206, 229, 322, 383 teljes, 31, 191, 394 transzport, 102 Hellstrand-formulák, 197, 279 Helmholtz-egyenlet, 111, 119 Henri Becquerel, 20 hőfoktényező, 163, 273, 356 izotermikus, 273, 279 moderátor, 273 prompt, 279

### I

IAEA, *lásd* NAÜ 28, időanalizátor, 145, 154 inverz kinetika, 150 Irčne Curie, 22 iteráció belső, 243 külső, 243, 246

### J

James Chadwick, 21

### K

kampány, 362 késő neutron, 23, 131, 137, 140, 149, 165, 304, 401 későneutron-hányad effektív, 141, 328, 334 magfizikai, 132, 329 kétcsoport elmélet, 255, 264 kétszerezési idő, 136, 141, 283 kezdőfeltétel, 106 kiégés, 19, 339, 346, 363 kiégési ciklus, 354 kifolyás, 39, 127, 131 nettó, 39 Koppel-Young modell, 206 konverziós tényező, 17, 353 kezdeti, 353, 354 könnyűvíz, 17, 172 kritikus állapot, 137, 290, 323, 362

méret, 14, 128, 251, 261, 265 tömeg, 14, 128, 260, 267 kritikus rendszer, 27 kritikusság, 50, 125, 261, 368 feltétele, 111, 127, 129, 261, 263, 265 kritikussági kísérlet, 142

## L

Lagrange-függvény, 315 láncreakció, 14, 50, 290 önfenntartó, 14, 127, 142 lassítási képesség, 172 lassuláselmélet, 251 aszimptotikus, 98, 221, 335 sokcsoport, 222 lassulási egyenlet, 20, 88, 173, 181, 224 aszimptotikus, 20, 112, 335 lassulási modellek, 185 lassulási sűrűség, 181, 185, 189, 208, 213, 224, 271 letargia, 172 lineáris teljesítménysűrűség, 363 Lise Meitner, 23

## M

magfüggvény lassulási, 176 rugalmatlan szórási, 292 rugalmas szórási, 99, 168 szórási, 34, 52, 88, 181, 204, 220, 292, 371, 386 termalizációs, 12, 202 transzport, 210 Wigner-Wilkins, 371 maghasadás, 11, 13, 23 magsűrűség, 345 Manhattan Project, 24 manőverezhetőség, 364 Marie Curie, 20 megszaladás, 137, 283 mérgeződés, 358, 360, 363 migrációs terület, 115, 216, 258 Milne-probléma, 66 moderálási arány, 172 moderátor, 25, 253, 268, 363

Monte Carlo módszer, 96 adjungált, 314

### N, Ny

NAÜ, Nemzetközi Atomenergia Ügynökség, 26 négyfaktor-formula, nehézvíz, 18, 172 Nelkin-modell, 206 nemsokszorozó rendszer, 218 Neumann János, 24 neutron epitermikus, 211 gyors, 15, 22, 339, 343 termikus, 15, 212, 343 neutronáram, 39, 41, 102, 105, 265, 396 neutronbefogás, 17, 339, 346 neutronforrás, 74, 93, 113, 142, 313 pulzált, 145, 152, 167 neutron-hőmérséklet, 212 neutronkifolyás, lásd kifolyás neutronlassulás, 22, 168, 399 neutronméreg, 339 neutronnyaláb, 30, 44, 47, 70 neutronsűrűség, 37, 293, 310 neutrontér, 37 neutronzaj, 153, 159 Niels Bohr, 24 NJOY program, 228, 251 nyomásegyüttható, 243, 281

### 0

operátor adjungált, 314 destrukciós, 292, 301 késő produkciós, 330 produkciós, 246, 292, 301, 402 prompt produkciós, 329 transzport, 301 optikai úthossz, 47 Otto Hahn, 23

## P

P1 közelítés, 41, 81, 88, 98

 $P_3$  közelítés, 76 Paul. F. Zweifel, 52 perturbációelmélet, 162, 273 Pierre Curie, 20 perturbáció fluxusé, 323 reaktivitásé, 319 perturbációelmélet, 291, 317, 319  $P_L$  közelítés, 40, 72, 75, 76, 88, 89, 91 Placzek-tranziensek, 179 plutónium, 17, 254, 355, 356 pontforrás, 61, 94, 113, 215 pontkinetikai egyenlet, 131, 140, 328, 331, 401 pulzált neutronforrás, 150

# R

rácsállandó, 253 Rayleigh-Ritz módszer, 319 reakciógyakoriság, 315 reaktivitás, 20, 134, 137, 319, 359, 402 reaktivitás mérése, 140, 157 reaktivitástényező, 201 272 reaktor, csupasz, 256, 260, 337 grafitos, 18, 354, 355 gyors, 19, 168, 354, 355 heterogén, 356 homogén, 109, 201, 260 nehézvizes, 354 kutató-, 27, nyomottvizes, 18, 254 oktató-, 27 reflektált, 232 számítási sémája, 244, 251, 337, 367 szaporító, 354 szubkritikus, 14, 142, 313 szuperkritikus, 141 termikus, 15, 168, 253, 256, 347, 354, 355 reaktorkinetika, 131 reciprocitási tétel, 95, 195 reciprokóra formula, 134 reflektor, 259, 338 -púp, 266 -megtakarítás, 262 remanens hő, 343, 363 reprocesszálás, lásd újrafeldolgozás

részletes egyensúlyi feltétel, 207 rúdejtés módszere (rod drop), 150 rezonancia, 15, 190, 223, 251 rezonanciaabszorpció, 20, 183 rezonanciaintegrál, 192, 197, 227, 268, 343 effektív, 192 végtelen hígítású, 192, 199 rezonanciakikerülési valószínűség, 185, 188, 191, 259, 267 Rosenberg-házaspár, 26 Rossi-α kísérlet, 153 R–Z geometria, 233

#### S, Sz

S görbe, 322 sajátérték, 54, 111, 243, 245, 258 adjungált, 311, 323 kinetikus, 49, 105, 125, 151, 308, 333, 402 sztatikus, 50, 125, 127, 140, 229, 260, 308, 315, 401 sajátfüggvény, 54, 119, 127 adjungált, 310 kinetikus, 49, 333 sztatikus, 50, 310, 315, 323, 329 salak, 357 síkforrás, 61, 118, 123, 215 Simmons és King módszere, 147, 151 Sjöstrand-módszer, 148 S<sub>N</sub> módszer, 89 sokszorozási tényező, 14, 51, 84, 134, 139, 165, 224, 261, 291 effektív, 128, 315 sokszorozó rendszer, 119 spektrum 1/E, 181, 212, 222 epitermikus, 208 hasadási, 84, 330 Maxwell-, 207 sztatikus hasadási, 165 termikus, 206, 254, 277 Watt-, 165 stacionárius képlet, 317 szabad úthossz, átlagos, 27, 32 transzport, 102, 107

szabályozórúd, 103, 144, 162, 237, 242, 251, 362, 364, 393, 396 jelleggörbéje, 321 lassulás a rúdban, 398 véges differenciák módszerében, 237 szamárium, 344, 360, 363 szaporítás, 353 szekuláris egyensúly, 351 Szilárd Leó, 24 szimmetria-határfeltétel, 210 szórási mátrix, 220 szubkritikus, 14, 127 állapot, 136, 147 neutronsokszorozás, 143 szuperkritikus, 14, 127 szuperkritikus állapot, 136, 141

### Т

technológiai eredetű zaj, 153, 162 teljesítménytényező, 273 adiabatikus, 282 izotermikus, 282 kvázisztatikus, 282 Teller Ede, 24 terheléskövető üzemmód, 364 termalizáció, 20, 36, 201, 251 differenciális modellek, 386 hidrogénatomokból álló gázon, 386 nehéz atomokból álló gázon, 388 termikus hasznosítási tényező, 16, 212, 259 THERMOS program, 82, 212, 267 tórium, 339, 354 tóriumlánc, 339 többcsoport módszer, 219 tömegszám, 21, 32, 343 transzportegyenlet, 19, 30, 291, 316 adjungált, 297 differenciális alak, 43, 206, 296 integrális alak, 46, 202, 211, 302 transzportelmélet, 396 egycsoport, 94, 196, 309 transzurán, 22, 339, 353 túlmoderált, 270

#### U

újafeldolgozás, 354

urán, 14, 253, 354 dúsított, 17 uránlánc, 339, 345

## Ü

üregegyüttható, 281 ütközési sűrűség, 95, 196 ütközési valószínűség, 92, 95 üzemanyag-dúsítás, 253, 354 üzemviteli korlátok, 363

### V

válaszmátrix, 399 véges differenciák módszere, 230, 233 visszacsatolás, 282 vonalforrás, 61, 116 VVER, 253, 268 -1000, 253 -440, 253, 364

### W

Wigner Jenő, 24, 196 Wigner modell, 187 Wigner-Seitz cella, 210 Wigner-Wilkins modell, 206 Wilhelm Röntgen, 20

# X

xenon, 344, 358, 363, 364 X–Y geometria, 231, 238