

Bevezetés a fúziós plazmafizikába 5.

Bevezetés mágnesezett plazmák elméleti
leírásába: kinetikus elmélet - MHD

Pokol Gergő



M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BME NTI

Bevezetés a fúziós plazmafizikába

2019. október 8.

Tematika, időbeosztás

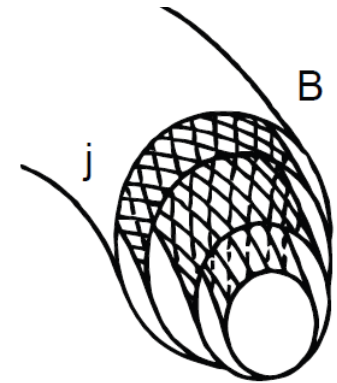
Dátum	Előadó	Cím
Szeptember 10	Pokol	Energiatermelés, fúziós reaktor felépítése, Lawson-kritérium, plazma alapok.
Szeptember 17	Pokol	Töltött részecskék ütközésmentes mozgása mágneses térben.
Szeptember 24	Pokol	Mágneses összetartás: konfigurációk.
Október 1	Veres	Termodinamikai egyensúly, ionizációs és sugárzási folyamatok plazmában.
Október 8	Pokol	Bevezetés mágnesezett plazmák elméleti leírásába: kinetikus elmélet, MHD.
Október 15	Pokol	Részecskék ütközése plazmában: ellenállás, transzport.
Október 22	Földes ?	Mikrorobbantásos fúzió.
Október 29	Pokol	Mágnesesen összetartott plazma egyensúlya, instabilitások.
November 5	Zoletnik	Laboratóriumi kísérletek: plazma előállítás, fűtés, plazma-fal kapcsolat.
November 12		BME TDK Konferencia
November 19	Zoletnik	Fúziós diagnosztika.
November 26	Zoletnik	Aktuális eredmények mágneses összetartású berendezéseknél.
December 3	Veres	Fúziós Útiterv
December 10	Raczkevi, Kedves, Aladi	Részecskegyorsítás lézerplazmával

Ismétlés

Részecskék ütközésmentes mozgása → **Larmor-pálya, driftek**

Erő/drift	q függ.	irány	nagyság
$E \times B$	-	$E \times B$	$\frac{E}{B}$
polarizációs	+	\dot{E}	$\frac{\omega}{\omega_c} \frac{E}{B}$
grad B	+	$\nabla B \times B$	$W_{\perp} \frac{\nabla B}{B}$
görbületi	+	$R \times B$	$W_{\parallel} \frac{1}{RB}$
tükör erő	-	B	$\frac{W_{\perp}}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}$

Mágneses összetartás → **helikálisan csavart toroidális erővonalrendszer** (tokamak, sztellarátor)



Atomfizikai folyamatok, rugalmatlan ütközések
→ **egyensúlyok, rátaegyenletek**

$$\begin{aligned} \frac{dn_0}{dt} &= n_e [-\langle \sigma_i^0 v \rangle n_0 + \langle \sigma_r^1 v \rangle n_1] \\ \frac{dn_1}{dt} &= n_e [-\langle \sigma_i^1 v \rangle n_1 + \langle \sigma_r^2 v \rangle n_2 + \langle \sigma_i^0 v \rangle n_0 - \langle \sigma_r^1 v \rangle n_1] \\ \frac{dn_2}{dt} &= n_e [-\langle \sigma_i^2 v \rangle n_2 + \langle \sigma_r^3 v \rangle n_3 + \langle \sigma_i^1 v \rangle n_1 - \langle \sigma_r^2 v \rangle n_2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mágnesezett plazmák elméleti leírása

Eddig kiemelt folyamatokat vizsgáltunk a plazmában: atomfizika, driftek, ütközések...

A plazmának többféle önkonzisztens leírása adható, ami magában foglalja a fontosabb folyamatokat: **egyrészecske mozgások, kinetikus elmélet, többfolyadék elmélet, magnetohidrodinamika.**

Mágnesezett plazmák elméleti leírása

Eddig kiemelt folyamatokat vizsgáltunk a plazmában: atomfizika, driftek, ütközések...

A plazmának többféle önkonzisztens leírása adható, ami magában foglalja a fontosabb folyamatokat: **egyrészecske mozgások, kinetikus elmélet, többfolyadék elmélet, magnetohidrodinamika.**

Egyrészecske mozgások:

Mozgásegyenlet az összes részecskére:

$$m\ddot{\mathbf{x}}_i = q_i (\mathbf{E}(\mathbf{x}_i) + \dot{\mathbf{x}}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)) \quad i = 1, \dots, N$$

Terek a külső és belső terekből, pl.:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}$$

3N darab másodrendű differenciálegyenlet szimultán megoldása, ahol $N \gg N_D$ plusz atomfizika \rightarrow statisztikus kezelés szükséges!

Eloszlásfüggvény, kinetikus egyenlet

A 6 dimenziós (\mathbf{r}, \mathbf{v}) egyrészecske fázistérben egy részecskét egy pont jelez, mozgását egy trajektória írja le. Minket általában nem érdekel minden részecske mozgása (ezt mérni sem tudjuk), csak a részecskék átlagos viselkedése. A 'a' típusú részecskék $f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ eloszlásfüggvénye egy valószínűség-sűrűségfüggvény: a fázistér egy (\mathbf{r}, \mathbf{v}) pont (dr, dv) sugarú környezetében

$$F_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, dr, dv, t) = f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v$$

részecske található átlagosan. Amennyiben a részecskék száma megmarad, ebben a fázistérben érvényes a kontinuitás egyenlet:

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

Ha $(dr, dv) \rightarrow (0, 0)$, akkor kapjuk a mikroszkopikus eloszlásfüggvényt, amire a **mikroszkopikus kinetikus egyenlet** (Vlaszov-egyenlet):

$$\frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{q_a}{m_a} (\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \tilde{\mathbf{B}}) \cdot \frac{\partial f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

Ütközési operátor, Boltzmann-egyenlet

A mikroszkopikus kinetikus egyenletben a teljes elektromos és mágneses térerősség szerepel, ami magában foglalja a **Debye-hosszon belüli ingadozásokat** is.

Ezen ingadozásokat nem tudjuk mérni és nem akarjuk kiszámolni sem, ezért a hatásukat különválasztjuk egy $C_a(f_a)$ **ütközési tagba**. Így kapjuk a **Boltzmann-egyenletet**:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} = C_a(f_a)$$

Amennyiben az ütközések hatása elhanyagolható, visszacapjuk a mikroszkopikus kinetikus egyenlethez hasonló alakú **Vlaszov-egyenletet**:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_a + \frac{q_a}{m_a} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

Az ütközési operátor általános tulajdonságai

Additív:
$$C_a(f_a) = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b)$$

A részecskék térbeli sűrűségét közvetlenül nem befolyásolja:
$$\frac{\partial n_a}{\partial t}(\text{coll.}) = \int C_{ab}(f_a) d^3V = 0$$

Impulzusmegmaradás:
$$\int m_a \mathbf{v} C_{ab}(f_a) d^3V = - \int m_b \mathbf{v} C_{ba}(f_b) d^3V$$

Energiamegmaradás:
$$\int \frac{m_a v^2}{2} C_{ab}(f_a) d^3V = - \int \frac{m_b v^2}{2} C_{ba}(f_b) d^3V$$

A lokális termodinamikai egyensúly irányába hat:

Az ütközési operátor akkor tűnik el, ha minden részecske Maxwell-eloszlású ugyanakkora T_a hőmérséklettel és \mathbf{V}_a átlagos sebességgel.

$$f_{Ma}(\mathbf{r}, t) = n_a(\mathbf{r}, t) \left(\frac{m_a}{2\pi k T_a(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \exp\left(- \frac{m_a [\mathbf{v} - \mathbf{V}_a(\mathbf{r}, t)]^2}{2k T_a(\mathbf{r}, t)} \right)$$

Fokker-Planck operátor

$$f(v, t + \Delta t) = \int f(v - \Delta v, t) F(v - \Delta v, \Delta v) d\Delta v$$

Taylor-sorba fejtünk a kisszögű szórásokra.

$$f(v, t + \Delta t) = \int \left[f(v, t) F(v, \Delta v) - \Delta v \frac{\partial f(v, t) F(v, \Delta v)}{\partial v} + \frac{(\Delta v)^2}{2} \frac{\partial^2 f(v, t) F(v, \Delta v)}{\partial v^2} - \dots \right] d\Delta v$$

Definíció szerint:
$$C(f) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(v, t + \Delta t) - f(v, t)}{\Delta t}$$

A $\langle \Delta v \rangle$ és $\langle (\Delta v)^2 \rangle$ várható értékekkel kifejezve:

$$C(f) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\langle \Delta v \rangle}{\Delta t} f \right)}_{\text{súrlódási erő}} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{\langle (\Delta v)^2 \rangle}{2\Delta t} f \right)}_{\text{sebességtérbeli diffúzió}} - \dots$$

Gyakorlatban használt ütközési operátorok

Általános Fokker–Planck operátor:

- A nagyszögű szórások el vannak hanyagolva.
- Coulomb-szórásra pontos alak: Landau (1936)

Elektron–ion ütközési operátor:

- $v_{Ti} \ll v_{Te}$
- szögszórás + (elektron–ion impulzusátadás)

Ion–elektron ütközési operátor:

- $v_{Ti} \ll v_{Te}$
- elektron–ion sűrűlódás + (elektron–ion energiaátadás)

Linearizált Fokker–Planck operátor:

- Alapból bilineáris, közel Maxwell-eloszlás esetén lineáris közelítés.

Modell operátorok:

- Egy kiemelt folyamatot jól reprodukálnak.
- A megmaradási tételek (általában) teljesülnek.
- pl. Krook–operátor: $C(f) = \nu(f_{Ma} - f)$

Teljes kinetikus egyenletrendszer

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_e - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} = C_{ee}(f_e) + C_{ei}(f_e, f_i)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_i + \frac{eZ_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = C_{ii}(f_i) + C_{ie}(f_i, f_e)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = eZ_i \int \mathbf{v}_i f_i d^3 v_i - e \int \mathbf{v}_e f_e d^3 v_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = eZ_i \int f_i d^3 v_i - e \int f_e d^3 v_e$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Folyadék egyenletek származtatása

Ha $\frac{\partial}{\partial t} \ll v_{aa}$ és $\lambda \ll L$, (sok az ütközés) akkor az **eloszlásfüggvény lokálisan jól közelíti a Maxwell-eloszlást**, és az első pár momentumával jól leírható.

Vegyük a Boltzmann-egyenlet momentumait az alábbi definíció szerint:

$$n_a = \int f_a d^3V \quad \langle A \rangle_f = \frac{1}{n_a} \int A f_a d^3V$$

Példák:

átlagsebesség: $\langle \mathbf{v} \rangle_f = \mathbf{V}_a(\mathbf{r}, t)$

hőmérséklet: $\left\langle \frac{m_a \mathbf{v}'_a{}^2}{2} \right\rangle_f = \frac{3}{2} T_a(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_a - \mathbf{V}_a$

Kontinuitás- és Navier-Stokes-egyenlet

Nulladik momentum \rightarrow **Kontinuitás-egyenlet** (részecskemegmaradás):

$$\frac{dn_a}{dt} + n_a \nabla \cdot \mathbf{V}_a = 0$$

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_a \cdot \nabla \right)$$

Első momentum \rightarrow **Navier-Stokes-egyenlet** (mozgásegyenlet, impulzusmegmaradás):

$$A = \mathbf{v}_a$$

$$m_a n_a \frac{d\mathbf{V}_a}{dt} = -\nabla p_a - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_a + q_a n_a (\mathbf{E} + \mathbf{V}_a \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_a$$

nyomás:

$$p_a = n_a T_a$$

nyírás tenzor:

$$\boldsymbol{\pi}_a = m_a n_a \langle \mathbf{v}'_a \mathbf{v}'_a \rangle - p_a \mathbf{1}$$

súrlódási erő:

$$\mathbf{R}_a = m_a \int \mathbf{v}_a C_a(f_a) d^3 v$$

Hőtranszport-egyenlet

Második momentum \rightarrow Hőtranszport-egyenlet (energiamegmaradás):

$$A = \frac{m_a v_a^2}{2}$$

$$\frac{3}{2} n_a \frac{dT_a}{dt} + p_a \nabla \cdot \mathbf{V}_a = -\nabla \cdot \mathbf{q}_a - \boldsymbol{\pi}_a : \nabla \mathbf{V}_a + Q_a$$

energiaáram-sűrűség: $\mathbf{q}_a = \frac{m_a n_a}{2} \langle v_a'^2 \mathbf{v}'_a \rangle$

hőátadás: $Q_a = \frac{m_a}{2} \int v_a'^2 C_a(f_a) d^3 v$

Lezárás: legmagasabb figyelembe vett rendű változó becslése.

Példa (adiabatikus lezárás): $\frac{d}{dt} \left(\frac{p_a}{n_a^\gamma} \right) = 0 \quad \gamma = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3}$ (izotrop)

Teljes kétfolyadék egyenletrendszer

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \mathbf{V}_e \cdot \nabla n_e + n_e \nabla \cdot \mathbf{V}_e = 0$$

$$m_e n_e \left(\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + \mathbf{V}_e \cdot \nabla \mathbf{V}_e \right) = -\nabla p_e - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_e - e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_{ei}$$

$$\frac{3}{2} n_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial t} + \mathbf{V}_e \cdot \nabla T_e \right) + p_e \nabla \cdot \mathbf{V}_e = -\nabla \cdot \mathbf{q}_e - \boldsymbol{\pi}_e : \nabla \mathbf{V}_e + Q_{ei}$$

lezárás elektronokra

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = e Z_i n_i \mathbf{V}_i - e n_e \mathbf{V}_e + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla n_i + n_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i = 0$$

$$\varepsilon_0 \nabla \mathbf{E} = e Z_i n_i - e n_e$$

$$m_i n_i \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{V}_i \right) = -\nabla p_i - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}_i + e Z_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_{ie}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{3}{2} n_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla T_i \right) + p_i \nabla \cdot \mathbf{V}_i = -\nabla \cdot \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\pi}_i : \nabla \mathbf{V}_i + Q_{ie}$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0$$

lezárás ionokra

Magnetohidrodinamika (MHD)

Ha $\frac{\partial}{\partial t} \ll v_{ie}$ és $r_L, \lambda_D \ll \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ (ion-elektron termalizációnál lassabban változó, térben a Larmor-sugárnál lassabban változó, kvázisemleges plazma), akkor a plazma **egyetlen folyadékként** is leírható.

Ennek a folyadéknak a jellemzői:

tömegsűrűség:
$$\rho_m = \sum_a n_a m_a$$

átlagsebesség:
$$\mathbf{V} = \frac{1}{\rho_m} \sum_a n_a m_a \mathbf{V}_a$$

áramsűrűség:
$$\mathbf{j} = \sum_a q_a n_a \mathbf{V}_a$$

MHD egyenletek

Tömeg kontinuitás-egyenlet:
$$\frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Impulzus-egyenlet:
$$\rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

Adiabatikus állapotegyenlet:
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho_m^\gamma} \right) = 0$$

Ohm-törvény:
$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

$\eta=0$: ideális MHD

Amper-törvény:
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

Faraday-törvény:
$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

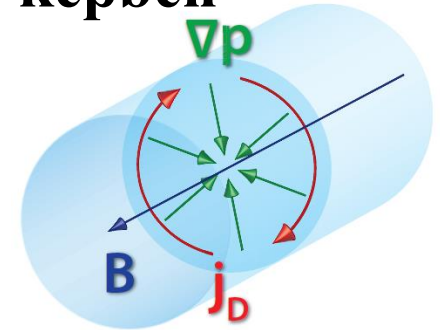
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Driftek egyrészecske, kétfolyadék és MHD képben

Hengeres plazmára

Kétfolyadék képben:
(mozgásegyenletből)

$$\mathbf{V}_a = \underbrace{\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}}_{\text{ExB drift}} - \underbrace{\frac{1}{q_a n_a} \frac{\nabla p_a \times \mathbf{B}}{B^2}}_{\text{diamágneses drift}}$$



A diamágneses drift nem jelent meg az egyrészecske képben, mert a részecskék Larmor-pálya középpontja nem változik.

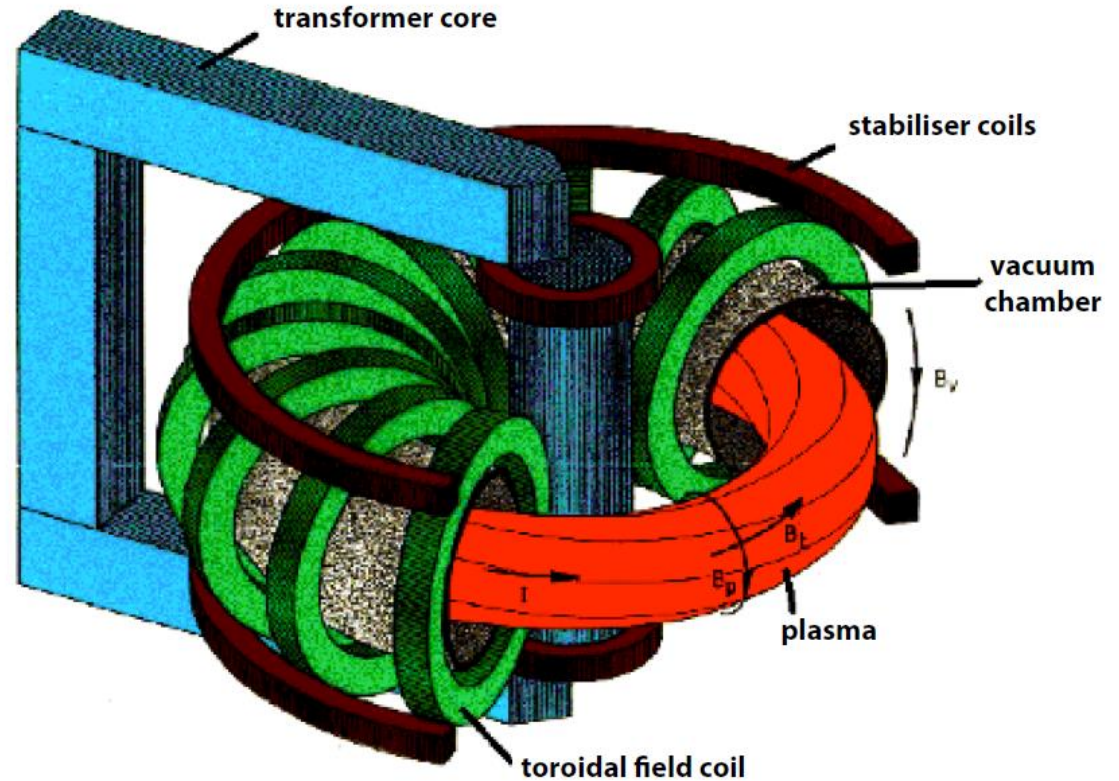
Ionokra és elektronokra ellentétes irányú → diamágneses áram:

$$\mathbf{j}_D = eZ_i n_i \mathbf{V}_{Di} - e n_e \mathbf{V}_{De} = -\frac{\nabla(p_i + p_e) \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Ez kijön az MHD egyenletekből is:

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \Rightarrow \mathbf{j}_D = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{B^2}$$

Diamágneses drift irányok



$$\mathbf{V}_a = \underbrace{\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}}_{\text{ExB drift}} - \underbrace{\frac{1}{q_a n_a} \frac{\nabla p_a \times \mathbf{B}}{B^2}}_{\text{diamágneses drift}}$$

Mágneses tér befagyása, diffúziója

Ha a plazma nyugalomban van (illetve együtt mozgunk a plazmával):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \mathbf{E} = \eta \mathbf{j} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \nabla \mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$

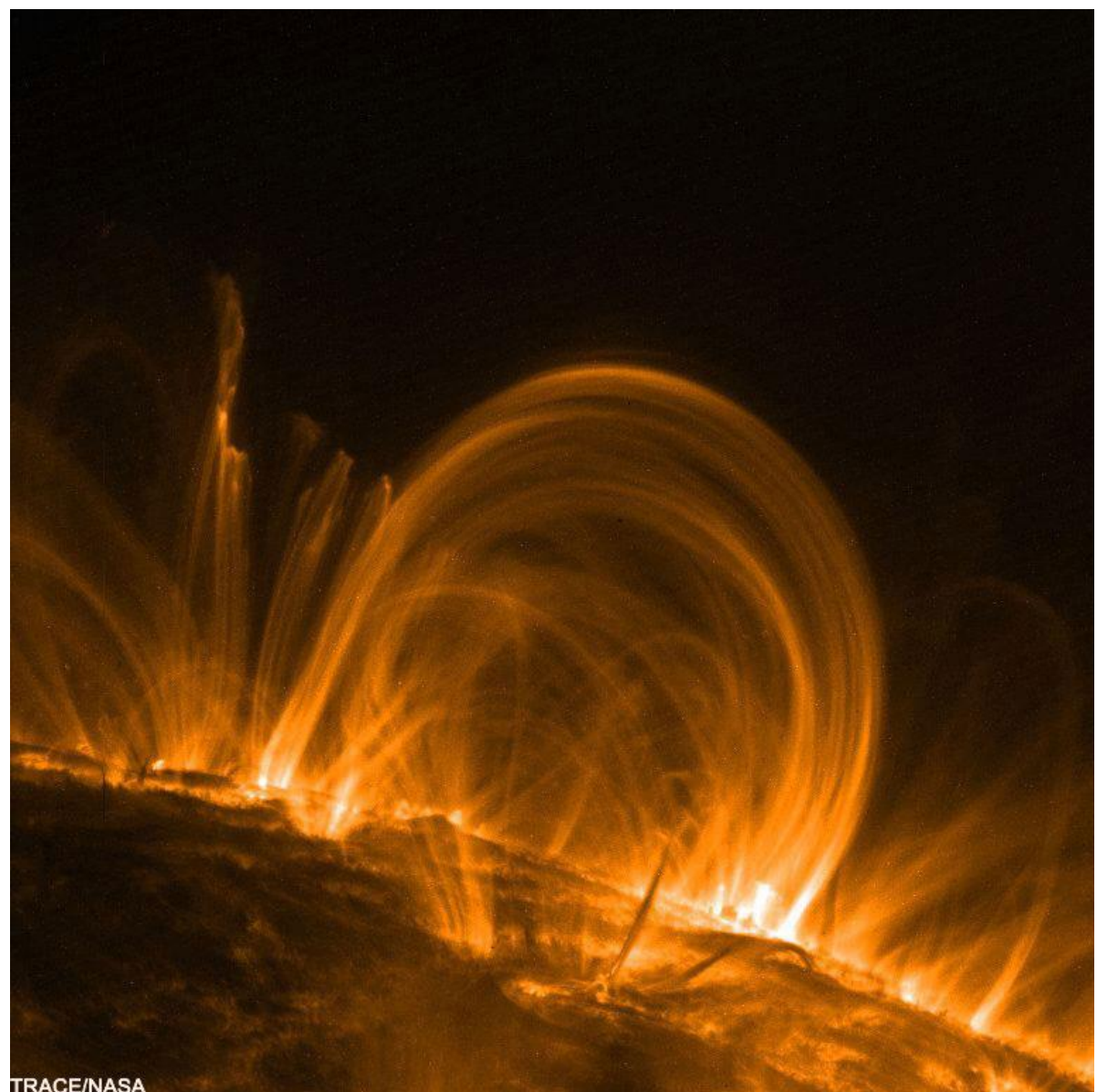
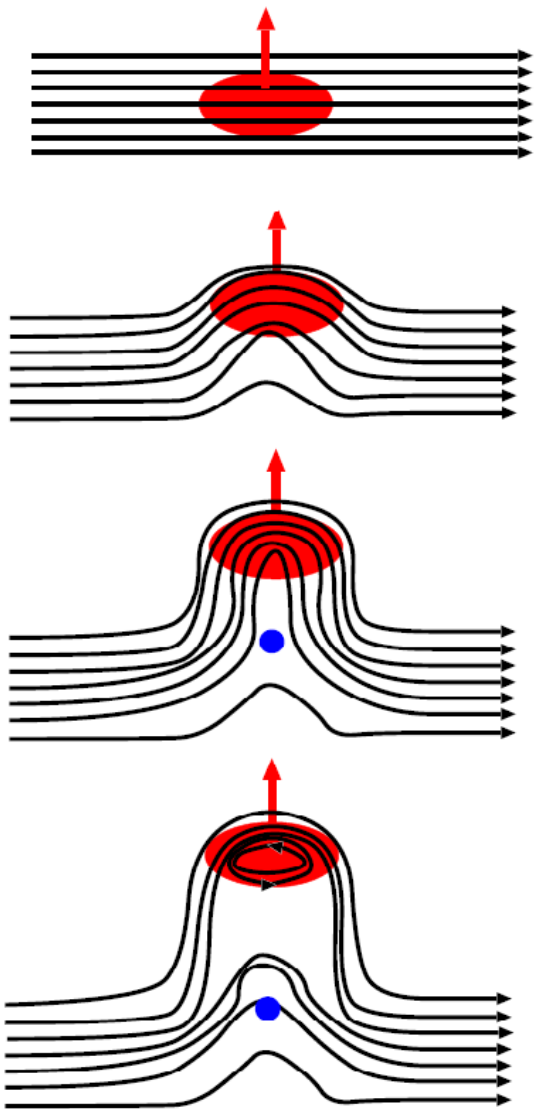
Ez egy diffúziós egyenlet a mágneses térre. 1D esetben:

$$B = B_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau} - \frac{x}{L}\right) \quad \tau = \frac{\mu_0 L^2}{\eta}$$

Az áramsűrűség diffúziója

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{j}$$

Flare, filamentum



Elméleti leírások összefoglalás

Kinetikus elmélet: statisztikus megközelítés, Boltzmann-egyenletek az eloszlásfüggvények időbeli változására + Maxwell-egyenletek. Általánosan használható, de makroszkopikus problémákra erőforrásigényes.

Többfolyadék elmélet: Ha az eloszlásfüggvények lokálisan közel Maxwell-eloszlásúak (sok az ütközés), akkor a Boltzmann-egyenlet első 3 momentuma (mérlegegyenletek) jellemzik az eloszlásfüggvény időfejlődését + lezárás + Maxwell-egyenletek. A különböző folyadékok dinamikája különböző lehet.

Rezisztív MHD: Nagy léptékű és lassú folyamatok, egyensúlyok leírására. Egyetlen, elektromosan töltött részeket tartalmazó, semleges folyadék: Kontinuitás + Navier-Stokes + állapotegyenlet + Ohm-törvény + Maxwell-egyenletek.

Ideális MHD: Nagy léptékű és lassú, de a mágneses tér diffúziójához képest gyors folyamatok. A mágneses tér együtt mozog a plazmával, a mágneses tér topológiája nem változik.