Bevezetés a fúziós plazmafizikába 2.

Töltött részecskék ütközésmentes mozgása mágneses térben

Dr. Zoletnik Sándor, Dr. Pokol Gergő

MTA Wigner FK

BME NTI

Tematika, időbeosztás

Dátum	Előadó	Cím
Szeptember 10	Pokol	Energiatermelés, fúziós reaktor felépítése, Lawson-kritérium, plazma alapok.
Szeptember 17	**Pokol**	**Töltött részecskék ütközésmentes mozgása mágneses térben.**
Szeptember 24	Pokol	Mágneses összetartás: konfigurációk.
Október 1	Veres	Termodinamikai egyensúly, ionizációs és sugárzási folyamatok plazmában.
Október 8	Pokol	Bevezetés mágnesezett plazmák elméleti leírásába: kinetikus elmélet, MHD.
Október 15	Pokol	Részecskék ütközése plazmában: ellenállás, transzport.
Október 22	Földes ?	Mikrorobbantásos fúzió.
Október 29	Pokol	Mágnesesen összetartott plazma egyensúlya, instabilitások.
November 5	Zoletnik	Laboratóriumi kísérletek: plazma előállítás, fűtés, plazma-fal kapcsolat.
November 12		BME TDK Konferencia
November 19	Zoletnik	Fúziós diagnosztika.
November 26	Zoletnik	Aktuális eredmények mágneses összetartású berendezéseknél.
December 3	Veres ?	Fúziós Útiterv
December 10	Raczkevi, Kedves, Aladi	Részecskegyorsítás lézerplazmával

Múlt héten

Plazma:

1. Szabad elektronok, ionok (és semlegesek)
2. **Kvázi-semleges, kollektív, ionizált**

Fúzió:

$$\boldsymbol{D} + \boldsymbol{T} \rightarrow {}^4\boldsymbol{He}(3.52\ \text{MeV}) + \boldsymbol{n}(14.1\ \text{MeV})$$

Energiatermelés **termikus egyensúlyban** $T_i = 25 keV$

α-részecske fűtés → begyújtás → fúziós égés

Lawson-kritérium a begyújtásra: $\boxed{n\tau_E \geq 10^{20} sm^{-3}}$

Tehetetlenségi összetartás / mágneses összetartás

Egyrészecske kép

Lawson-kritérium: $n\tau_E \geq 10^{20} sm^{-3}$

$T_i = 25 keV$ → **Teljesen ionizált plazma,** ami kölcsönhat a **mágneses térrel.**

$\tau_E = 1\text{s}$ esetén $n = 10^{20}\,\text{m}^{-3}$, ami a légköri sűrűség 10^{-5}-öd része.

Ilyen ritka és forró plazmában az ütközések közötti átlagos szabad úthossz 10-1000 m, ami nagyobb a berendezés méreténél.

Ezért érdemes foglalkozni a **részecskék ütközésmentes mozgásával**.

Vázlat

1. **Mozgás homogén mágneses térben**
2. **Diamágnesség**
3. **Mozgás mágneses térre merőleges elektromos térben**
4. **Egyéb driftek**
5. **Mozgás inhomogén mágneses térben**
6. **Mágneses tükör**
7. **Mágneses pumpálás**

Mozgásegyenlet

Mozgásegyenlet
Lorenz-erővel:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

Homogén, *z*-irányú mágneses és elektromos tér esetén:

$$\mathbf{B} = \left(0,0,B\right) \quad \mathbf{E} = \left(0,0,E_z\right)$$

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= q\left(v_y B\right) \\ m\frac{dv_y}{dt} &= q\left(-v_x B\right) \end{aligned}\right\}$$

A *z*-irányú mozgás független a többi dimenziótól, ezért azt külön vizsgáljuk. $\Rightarrow$

$$m\frac{dv_z}{dt} = qE_z$$

Larmor-pálya

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt} &= q(v_y B) \\ m\frac{dv_y}{dt} &= q(-v_x B) \end{aligned}\right\} \qquad \frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

A megoldás körmozgás **ciklotron frekvenciával**:

$$v_x(t) = v_\perp \sin \omega_c t \qquad \boxed{\omega_c = \frac{qB}{m}}$$

A ciklotron frekvencia adott mágneses térben csak a részecske fajtájától függ. A forgásirányt a töltés előjele határozza meg.

A **Larmor-pálya sugara**:

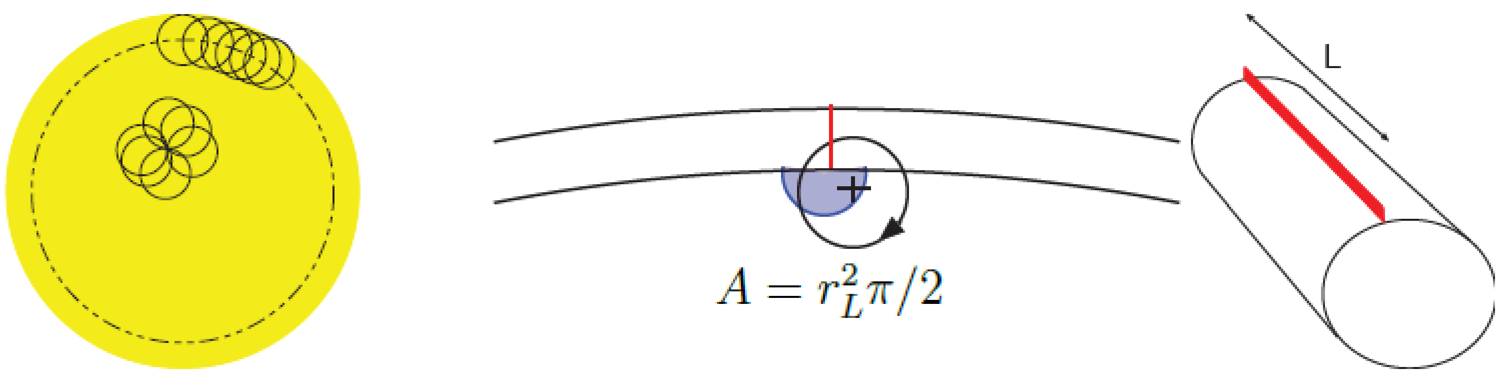
$$\boxed{r_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{m v_\perp}{qB}}$$

Diamágnesség

A Larmor-pályán mozgó részecskék kis köráramokat keltenek, amik az eredeti térrel ellentétes irányú mágneses teret indukálnak.

Diamágneses mágneses tér a plazmaszéli kompenzálatlan köráramok miatt homogén mágneses tér esetén:

$$\oint B_{\mathrm{dia}}\mathrm{d}l = \int I\mathrm{d}F$$



$$A = r_L^2\pi/2$$

$$B_{\mathrm{dia}}L = ALn\frac{ev_\perp}{2\pi r_L} = Ln\frac{r_L^2\pi}{2}\frac{ev_\perp}{2\pi r_L} = \frac{1}{4}en\frac{mv_\perp}{eB}v_\perp = \frac{1}{4B}nmv_\perp^2 = \frac{1}{2B}\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}V}$$

Diamágneses fluxus arányos a plazma mágneses térre merőleges energiatartamával:

$$\psi_{\mathrm{dia}} = \int B_{\mathrm{dia}}\mathrm{d}F = \frac{1}{2B}\frac{\mathrm{d}E_\perp}{\mathrm{d}L}$$

Mozgás mágneses térre merőleges elektromos térben

Homogén, időben állandó terek: $\mathbf{E} = (E,0,0)$ $\mathbf{B} = (0,0,B)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m}\left(E + v_y B\right) = \frac{qB}{m}\left(\frac{E}{B} + v_y\right) = \omega_c\left(\frac{E}{B} + v_y\right) \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m}\left(-v_x B\right) = -\frac{qB}{m} v_x = -\omega_c v_x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x$$

A megoldás Larmor-pálya + egy elektromos és mágneses térre is merőleges állandó töltésfüggetlen drift:

$$v_x(t) = v_\perp \sin \omega_c t \qquad v_y(t) = -v_\perp \cos \omega_c t - \frac{E}{B}$$

ExB drift

Általánosan: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_c$ $\qquad \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} = 0$

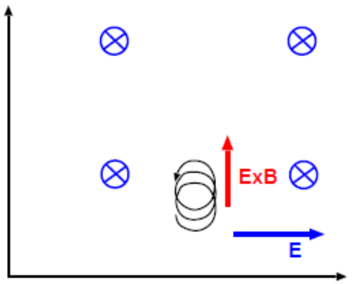
$$m\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_c \times \mathbf{B}\right)$$

Visszakapjuk a Larmor-pálya egyenletét, ha : $\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \times \mathbf{B} = 0$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\left(\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}\right) \times \mathbf{B} = -\mathbf{B}\left(\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{B}\right) + \mathbf{v}_D B^2$$

Ha $\mathbf{E}$ valóban merőleges volt a mágneses térre, egy részecske típusától független driftet kapunk:

$$\boxed{\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}}$$



https://deep.reak.bme.hu:8080/home/pub/10/

Driftek egyéb erők hatására

Ha **qE** elektrosztatikus erőt tetszőleges erővel helyettesítjük, driftet kapunk:

$$\boxed{\mathbf{v}_D = \frac{1}{q}\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{B^2}}$$

A driftek általában töltésfüggőek!

Gravitációs drift homogén mágneses térben?

Driftek egyéb erők hatására

Ha **qE** elektrosztatikus erőt tetszőleges erővel helyettesítjük, driftet kapunk:

$$\boxed{\mathbf{v}_D = \frac{1}{q}\frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{B^2}}$$

A driftek általában töltésfüggőek!

Görbült mágneses tér esetén centrifugális erő hat a részecskére:

$$\mathbf{F} = m v_{\|}^2 \frac{\mathbf{R}}{R^2}$$

Ez **görbületi driftet** okoz:

$$\boxed{\mathbf{v}_\mathbf{R} = \frac{m v_{\|}^2}{q R^2}\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{B}}{B^2}}$$

Mozgás inhomogén mágneses térben

$$\nabla B \perp \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{e}_z \left(B + \frac{\partial B}{\partial x} x \right)$$

Kis gradiens esetén vegyük a részecskére ható erő átlagát egy perturbálatlan Larmor-pályára:

$$v_x(t) = v_\perp \sin \omega_c t \qquad v_y(t) = \pm v_\perp \cos \omega_c t \qquad x(t) = -\frac{v_\perp}{\omega_c} \cos \omega_c t$$

$$\langle F_y \rangle = q \langle v_x B(x) \rangle = 0$$

$$\langle F_x \rangle = q \langle v_y B(x) \rangle = q \left\langle \pm v_\perp \cos \omega_c t \left(-\frac{v_\perp}{\omega_c} \frac{\partial B}{\partial x} \cos \omega_c t \right) \right\rangle = -\frac{q v_\perp^2}{2\omega_c} \frac{\partial B}{\partial x}$$

x irányú erő egy y irányú driftet eredményez, ami töltésfüggő:

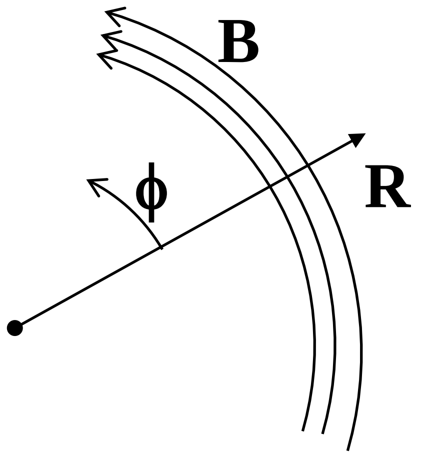
$$\boxed{\mathbf{v}_{\nabla B} = -\frac{m v_\perp^2}{2qB} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2} = \mp \frac{1}{2} v_\perp r_L \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^2}}$$

Állítás: $\nabla\times\mathbf{B}=0$ ⟶ $\dfrac{\nabla B}{B}=-\dfrac{\mathbf{R}}{R^2}$

Bizonyítás:

(by Chen)

$$\mathbf{R}=(R,0,0)$$
$$\mathbf{B}=(0,B,0)$$
$$\nabla B=(|\nabla B|,0,0)$$



$$(\nabla\times\mathbf{B})_R=\frac{1}{R}\frac{\partial B_z}{\partial\phi}-\frac{\partial B_\phi}{\partial z}=0$$

$$(\nabla\times\mathbf{B})_\phi=\frac{\partial B_r}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial R}=0$$

$$(\nabla\times\mathbf{B})_z=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB_\phi)-\frac{1}{R}\frac{\partial B_r}{\partial\phi}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB)$$

Vákuumban:

$$\nabla\times\mathbf{B}=0\Rightarrow\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RB)=0\Rightarrow B=B_0\frac{1}{R}\Rightarrow\nabla B=-B_0\frac{1}{R^2}\frac{\mathbf{R}}{R}=-B\frac{\mathbf{R}}{R^2}$$

Görbületi és gradB drift

Vákuumban a görbület és a mágneses térerősség nem független.

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\nabla B}{B} = -\frac{\mathbf{R}}{R^2}$$

Görbületi és gradB drift kombinálva:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{R}+\nabla B} = \frac{m}{q}\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{B}}{R^2 B^2}\left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right)$$

Polarizációs drift

Homogén, **időben változó** elektromos tér: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}} + \mathbf{v}'$ $\quad \frac{d\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}}{dt} \neq 0$

$$m\frac{d\left(\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}} + \mathbf{v}'\right)}{dt} = q(\underbrace{\mathbf{E} + \mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}} \times \mathbf{B}}_{=0} + \mathbf{v}'\times\mathbf{B})$$

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = q(-\frac{m}{q}\frac{d\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}}{dt} + \mathbf{v}'\times\mathbf{B})$$

Új, állandó drift bevezetésével: $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_p + \mathbf{v}_c$ $\quad \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = 0$

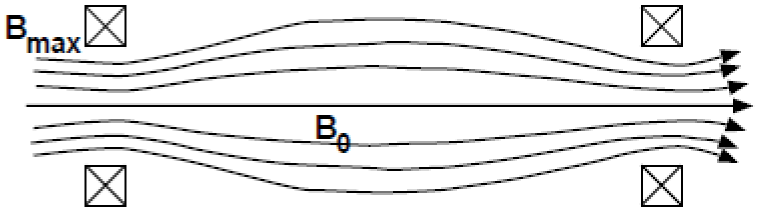
$$m\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q(-\frac{m}{q}\frac{d\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}}{dt} + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B} + \mathbf{v}_c \times \mathbf{B})$$

$$-\frac{m}{qB^2}\left(\frac{d\mathbf{E}}{dt}\times\mathbf{B}\right) + \mathbf{v}_p \times \mathbf{B} = 0$$

$$\boxed{\mathbf{v}_p = \frac{m}{q}\frac{\dot{\mathbf{E}}}{B^2}}$$

Mozgás inhomogén mágneses térben

$$\nabla B \,\|\, \mathbf{B}$$



$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ miatt nem lehet a mágneses tér csak z-irányú!

Henger koordinátákban:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rB_r\right) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad B_\theta = 0$$

Adott z-irányú változás esetén a radiális mágneses tér:

$$B_r(r) = -\frac{1}{r}\int_0^r r'\frac{\partial B_z}{\partial z}dr' \approx -\frac{1}{2}r\left[\frac{\partial B_z}{\partial z}\right]_{r=0}$$

Mágneses tükör erő

$$F_r = q\left(\overbrace{v_\theta B_z}^{1} - \overbrace{v_z B_\theta}^{=0}\right)$$

$$F_\theta = q\left(\overbrace{v_z B_r}^{2} - \overbrace{v_r B_z}^{1}\right)$$

$$F_z = q\left(\overbrace{v_r B_\theta}^{=0} - \overbrace{v_\theta B_r}^{3}\right)$$

1. Larmor mozgás
2. Egy θ irányú erő, ami radiális driftet okoz, amivel a részecske követi az erővonalat: $v_r / v_z = B_r / B_z$
3. z irányú erő.

A mágneses tengelyen $v_\theta = v_\perp$ $\quad r = r_L$

$$\boxed{F_z = q v_\perp \frac{1}{2} r_L \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{m v_\perp^2}{B}\frac{\partial B_z}{\partial z}}$$

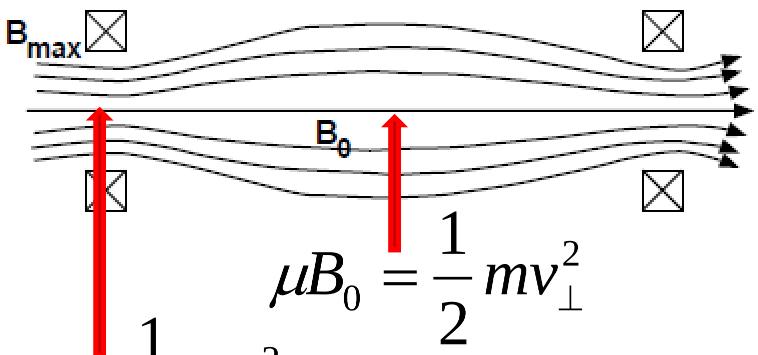
Mágneses tükör

A mágneses momentum

$$\boxed{\mu = IA = \frac{1}{2}\frac{mv_\perp^2}{B}}$$

$$F_z = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

invariáns, mert mágneses tér nem tudja a részecske teljes mozgási energiáját megváltoztatni.

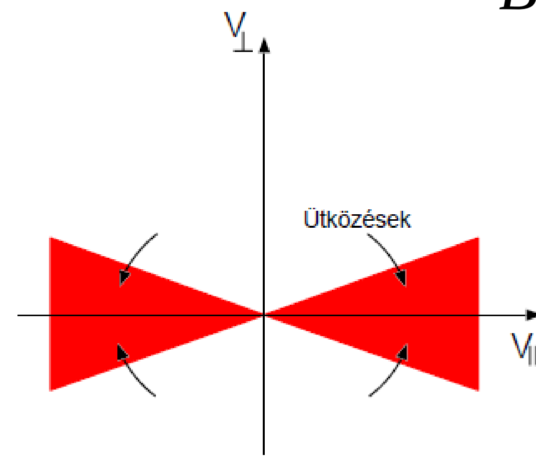


$$\mu B_0 = \frac{1}{2} m v_\perp^2$$

$$\mu B_{\max} = \frac{1}{2} m v^2$$

A részecskék a **veszteségi kúpban** vannak, ha

$$v_\perp^2 < v^2 \frac{B_0}{B_{\max}}$$



Kritikus hajlásszög és tükörarány:

$$\frac{B_0}{B_{\max}} = \sin^2 \Theta_m = \frac{1}{R_m}$$

Driftek összefoglalás

Erő/drift	q függ.	irány	nagyság
$E \times B$	-	$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$	$\frac{E}{B}$
polarizációs	+	$\dot{\mathbf{E}}$	$\frac{\omega}{\omega_c}\frac{E}{B}$
grad B	+	$\nabla\mathbf{B} \times \mathbf{B}$	$W_\perp \frac{\nabla B}{B}$
görbületi	+	$\mathbf{R} \times \mathbf{B}$	$W_\| \frac{1}{RB}$
tükör erő	-	$\mathbf{B}$	$\frac{W_\perp}{B}\frac{\partial B_z}{\partial z}$