

M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
EGYETEM

**COMPRESSED SENSING
REKONSTRUKCIÓ MEGVALÓSÍTÁSA
MRI KÉPALKOTÁSHOZ**

DIPLOMAMUNKA

VEITZ KRISTÓF TAMÁS

BME TTK Fizika MSC

TÉMAVEZETŐ: DR. BABOS MAGOR

Fejlesztő Fizikus, Mediso Kft.

KONZULENS: DR. LÉGRÁDY DÁVID

egy. docens, Nukleáris Technikai
Intézet

2018

Önállósági nyilatkozat

Alulírott **Veitz Kristóf Tamás** a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem fizika MSc szakos hallgatója kijelentem, hogy ezt a diplomamunkát meg nem engedett segédeszközök nélkül, önállóan, a témavezető irányításával készítettem, és csak a megadott forrásokat használtam fel.

Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból vettem, a forrás megadásával jelöltem.

Budapest, 2018. június 8.,

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék külön köszönetet mondani Kettinger Ádámnak a szakmai segítségért, a rendelkezésemre bocsátott agyfantomért és mért adatokért, valamint családomnak a dolgozat megírása alatt nyújtott támogatásért.

Tartalomjegyzék

1. Bevezető	1
2. Elméleti összefoglaló	2
2.1. Az MRI képképzés elméleti alapjai	2
2.2. Compressed sensing	3
2.3. Ritkaság	4
2.4. Inkoherens mintavételezés	5
2.5. Nemlineáris rekonstrukció	6
3. Vizsgált módszerek	7
3.1. Threshold (küszöbszint) módszer	7
3.2. POCS módszer	9
3.3. Gradiens módszer	11
4. Paramétervizsgálat	14
4.1. Képtérben ritka képek vizsgálata	14
4.2. Wavelet térben ritka fantomok vizsgálata	19
5. Zajerősítés vizsgálata	25
6. Valós képek vizsgálata	30
6.1. Paraméterek ellenőrzése 2 dimenziós képeken	30
6.2. Zajcsökkentés	34
6.3. Compressed sensing 3 dimenzióban	34
7. Konklúzió	39

1. Bevezető

Az MR képalkotás egyik hátránya, hogy az adatgyűjtés, mérés sok időt vesz igénybe. A mérési idő csökkentésének egyik lehetséges módja a mérendő adatok alulmintavételezése, majd a kép rekonstruálása ezen hiányos adatokból.

A gyorsított MR képalkotás egyik legújabb területe az ún. compressed sensing [1] [2], a számítástechnikában elterjedt tömörítési eljárások alkalmazása a rekonstrukcióban. Ennek során kihasználják, hogy a természetes képek, így az MRI felvételek is, bizonyos integráltranszformációval (pl. Wavelet) ritkává tehetők, azaz tömöríthetők. A rekonstrukció során a hiányos adatokból nemlineáris módon állítják elő a képet, egyszerre optimalizálva a mért adatokkal való konzisztencia, valamint a ritkasági kritérium alapján.

A diplomamunkámban három lehetséges, nemlineáris compressed sensing rekonstrukciós módszert vizsgáltam. Mivel ezen módszerek eredménye függ az algoritmusokban megjelenő paraméterek értékétől, ezért célom ezen módszerek paraméterfüggésének vizsgálata, optimális paraméterérték meghatározása. Célom továbbá ezen meghatározott paraméterek ellenőrzése valós, mért képek szimulált alulmintavételezésével, valamint a kapott eredmények alapján a módszerek összehasonlítása.

A valós, mért képek minden esetben tartalmaznak valamekkora zajt. Mivel a paramétervizsgálatot zajmentes fantomokon végeztem, ezért fontos megvizsgálni, hogy az egyes módszerek miként hatnak a képeken megjelenő zajra (zajerősítés). Megvizsgáltam továbbá a compressed sensing egy speciális alkalmazását, a zajcsökkentést, mely során a compressed sensinget teljesen mintavételezett képeken alkalmazzuk.

Végezetül implementáltam a három vizsgált compressed sensing módszer mérési szempontból hatékonyabb, 3 dimenziós változatait. Ezt követően megvizsgáltam és összehasonlítottam ezen módszereket mért adatok rekonstruálásával.

2. Elméleti összefoglaló

2.1. Az MRI képalkotás elméleti alapjai

Az MRI képalkotás ([3] [4]) során a spinsűrűség térbeli eloszlását szeretnénk mérni. Egy spinet mágneses (B) térbe helyezve (ha a spin nem párhuzamos a mágneses térrel) a mágneses tér iránya körül precesszálni fog Larmor-frekvenciával: $\omega_{\text{Larmor}} = -\gamma B$ (γ a giromágneses együttható). Mivel a B tér túl nagy, ezért a spinek mágnesezettségét közvetlenül nem tudjuk mérni, így a képalkotás során a precesszió által indukált feszültséget mérjük. Mivel a mágnesezettségnek csak a mágneses térre merőleges komponense precesszál, ezért csak ez indukál feszültséget. Nyugalmi állapotban a spinek iránya a külső mágneses térrel párhuzamos, azaz nincs precesszió (ezáltal nincs jel), ezért egy B -nél kisebb, ω_{Larmor} -al forgó mágneses teret alkalmazva gerjesztjük őket, vagyis a mágneses térrel párhuzamos irányból kiforgatjuk az egyes spineket.

A képalkotás során az eltérő pozíciójú spinekből származó jeleket szeretnénk elkülöníteni, melyhez úgynevezett gradiens mágneses tereket alkalmazunk (3 dimenziós képalkotás esetén 3 gradiens teret: szeletkiválasztó, frekvenciakódoló és fáziskódoló gradiens teret). A gradiens terek olyan – az alap B térnél kisebb nagyságú – mágneses terek, melyek nagysága adott irány mentén lineárisan változik.

A szeletkiválasztás során egy z irányú gradiens teret kapcsolunk be (a mágneses tér nagysága z irány mentén változik), melynek hatására a z irány mentén haladva megváltozik a Larmor-frekvencia. Mivel a gerjesztés adott frekvencián történik, ezért ez csak a tér egy részén fogja a spineket gerjeszteni (egy szeletben), mivel a spinek Larmor-frekvenciája csak ezen tartományban esik közel ω gerjesztési frekvenciához.

A szeleten belüli pozíció meghatározására további két gradiens alkalmazására van szükség. Ezek a frekvenciakódoló vagy kiolvasó gradiens és a fáziskódoló gradiens. Az x irányú kiolvasó gradienst a mérés idejére kapcsoljuk be. Hasonlóan az előző gradienshez, a gradiens mágneses tér x irány mentén megváltoztatja a Larmor-frekvenciát, ezzel az adott x pozícióból érkező jel frekvenciáját is, vagyis az x irányú pozíciót különböző frekvenciáknak feleltetjük meg. A mért jel ezen eltérő frekvenciájú komponensek összegeként áll elő, melyet Fourier-transzformálva megkaphatjuk az egyes x pozíciókhoz tartozó jelintenzitásokat.

Az előző két gradiens (x és z irányú) alkalmazásával az azonos x pozíciójú, azonban y irányban eltérő helyről származó jeleket nem tudjuk elkülöníteni. Ehhez szükségünk

van egy harmadik, y irányú, úgynevezett fáziskódoló gradiensre, amelyet a mérést megelőzően rövid időre kapcsolunk be. Ez ugyancsak megváltoztatja a frekvenciát ezen időtartamra, azonban a kikapcsolást követően a frekvencia visszaáll a gradiens előtti értékre. Ennek hatása, hogy a bekapcsolás idején az eltérő frekvencia miatt y irány mentén a jel fázisa eltérő nagysággal változik. A képalkotás során ezt többször megismételjük eltérő nagyságú gradienssel.

Az előzőek alapján belátható, hogy MRI képalkotás során nem közvetlenül a képet, hanem annak Fourier-transzformáltját, az úgynevezett k -teret mérjük.

2.2. Compressed sensing

A compressed sensing-et először az információelmélet és jelfeldolgozás területén használták a mérési idő és mintavételezendő adatok számának csökkentésére. A módszer célja, hogy minél kevesebb mért adatból rekonstruálni lehessen az eredeti jelet, ezzel csökkentve a mintavételezéshez szükséges időt és gyorsítva a mérést. Ezen mintavételezendő adatok számára ad elégséges feltételt a Nyquist mintavételi törvény, amely megadja, hogy egy előre megadott paraméterekkel (felbontás, képméret) rendelkező kép rekonstruálásához legalább mekkora k -térbeli mintavételezési frekvenciára van szükségünk,

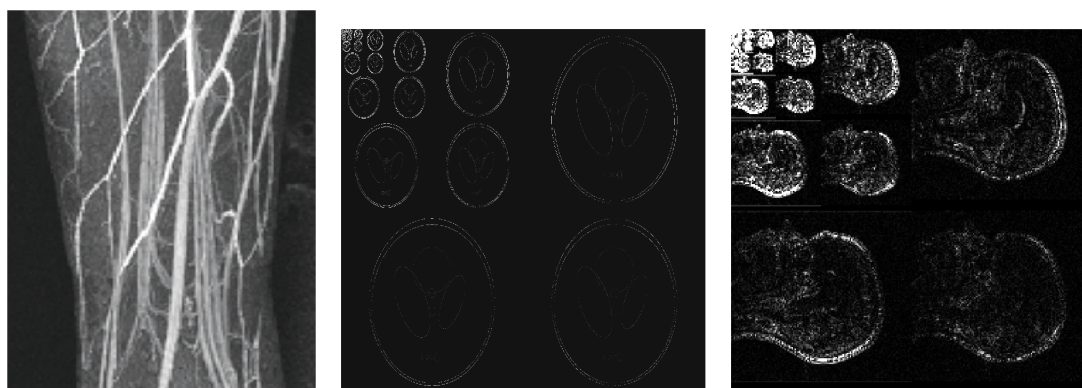
$$f_{s,k} = \frac{1}{\Delta k} \geq N \cdot \Delta x \quad (1)$$

ahol $f_{s,k}$ a k -térbeli mintavételezési frekvencia, Δk a k -térbeli felbontás, N a képpontok száma, Δx a képtérbeli felbontás. Ha ennél kisebb frekvenciával mintavételezünk, akkor a Fourier-transzformáció tulajdonságai alapján könnyedén belátható, hogy a kapott kép át fog lapolni.

A compressed sensing célja, hogy a Nyquist mintavételi törvényben megadott szükséges adatmennyiségnél kevesebb adatból is rekonstruálható legyen az eredeti jel. Mivel a mintavételi törvény értelmében a rekonstrukció nem lenne lehetséges, ezért szükség van valamilyen extra információra, feltételre. A compressed sensing esetén ez a ritkaság, amely az információt hordozó képpontok számáról, számának arányáról ad információt. A rekonstrukció megvalósításához az említett ritkaságon kívül szükség van arra, hogy a mintavételezés utáni műtermék inkoherens legyen, továbbá szükség van egy nemlineáris rekonstrukciós eljárásra is.

2.3. Ritkaság

A ritkaság mint feltétel megköveteli, hogy a kép adott térben (például képtér vagy wavelet tér) minél kevesebb nem nulla intenzitású képponttal rendelkezzen. Ez erős feltételnek tekinthető, mivel a képtérbeli (nullától eltérő) pontok számának csökkentésével csökkenthetjük a mintavételezendő adatpontok számát (pl. felbontás, látómező csökkentése). Továbbá a ritkaság meglehetősen általános feltétel, mivel nem ad megkötést az információt hordozó pixelek elhelyezkedésére, csoportosulására, csak azok számára, ezért a ritkának tekinthető jelek, képek halmaza igen nagy. A mérések során előforduló jelek, képek nagy része adott transzformáció (pl. wavelet, diszkrét koszinusz-transzformáció, véges differencia (1. ábra)) segítségével ritkává tehető. Ezt a tulajdonságot használják ki a különböző tömörítési eljárások (pl. JPEG - koszinusz-transzformált, JPEG-2000 - wavelet transzformált) is.



(a) Angiográfia – identitás, (b) Shepp-Logan fantom – (c) Mért kép – Wavelet-
nincs transzformáció [1] Wavelet-transzformált transzformált

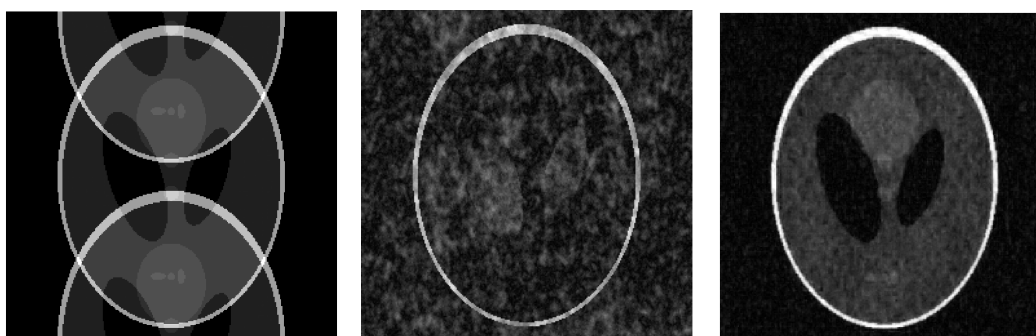
1. ábra. Példák ritkasági transzformáltakra. Angiográfia esetén a kép ritkának tekinthető, így nincs szükség transzformációra, azonban még az angiográfias felvételek is ritkábbá tehetőek véges differencia használatával. Az MRI képek nagy része az angiográfias képektől eltérően a képtérben nem ritka, ezért szükség van valamilyen transzformáció alkalmazására (pl. wavelet-transzformáció)

A compressed sensing alkalmazása esetén elegendő, hogy a képünk valamilyen transzformáció terében legyen ritka, ezáltal a ritkasági feltétel még általánosabb, így az MRI képalkotásban előforduló képek jelentős részére jól alkalmazható.

2.4. Inkoherens mintavételezés

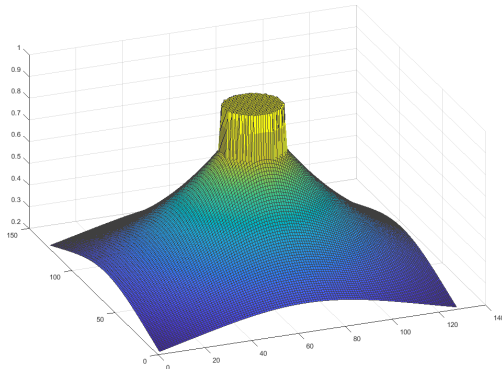
A rekonstrukció megvalósításához a ritkaságon kívül szükség van egy másik elengedhetetlen feltételre is, ez pedig az inkoherens mintavételezés. Ennek során azt szeretnénk elérni, hogy a képtérben megjelenő műtermékek inkoherenciája minél nagyobb legyen, ezáltal zajszerűen jelenjen meg a rekonstruálandó képen. Az említett műtermékek a Fourier-tér alulmintavételezése miatt jelennek meg. Ha az alulmintavételezést például minden n -edik sor mintavételezésével valósítanánk meg, akkor ez a képtérben átlapolást okozna (koherens műtermék). Ekkor azonban nem tudnánk a ritkasági kritérium felhasználásával megkülönböztetni az eredeti és az átlapolt képet.

Inkoherens mintavételezés megvalósításának legegyszerűbb módja a véletlen mintavételezés, melynek eloszlása lehet egyenletes eloszlású, vagy térben változó eloszlású. A térben változó eloszlás alkalmazása előnyösebb, mivel az MRI képek esetén az információ nagy része a k -tér közepén található, tehát jobb eredményre vezet, ha ezt a tartományt sűrűbben mintavételezzük (3. ábra). A térben változó eloszlású mintavételezés további előnye, hogy nagyobb inkoherencia érhető el vele (2. ábra).

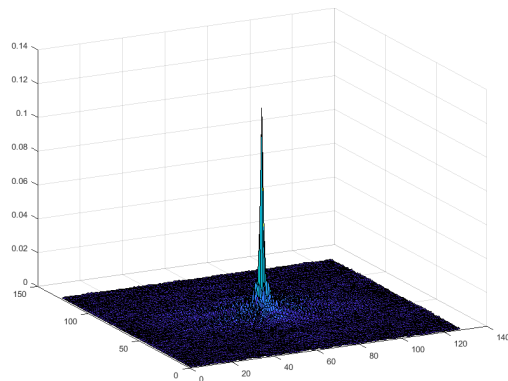


(a) Koherens műtermékek minden második sor mintavételezése után. (b) Inkoherens műtermék, egyenletes eloszlású mintavételezés (c) Inkoherens műtermék, a k -tér közepén sűrű mintavételezés

2. ábra. Shepp-Logan fantom alul-mintavételezése után kapott képek egyenletes és változó (k -tér közepén sűrű) eloszlású mintavételezések esetén megfigyelhető, hogyan jelennek meg az inkoherens műtermékek a képen.



(a) Mintavételezési sűrűségfüggvény.



(b) Shepp-Logan fantom Fourier-transzformáltja

3. ábra. Példa a rekonstrukciónál használt mintavételezési sűrűségfüggvényre, illetve az információ Fourier-térbeli eloszlására.

2.5. Nemlineáris rekonstrukció

Egy kép mért adatokból történő rekonstruálásához szükségünk van valamilyen rekonstrukciós módszerre. Mivel a probléma nemlineáris, valamint meglehetősen összetett, célszerű nemlineáris iterációs megoldást alkalmazni. Ennek a módszernek meg kell követelnie a transzformációs térbeli ritkaságot, azaz, hogy a kép transzformáltja legfeljebb hány nem nulla képpontot tartalmazhat, továbbá a k -térben az adatkonzisztenciát, vagyis a kép Fourier-transzformáltjának a mért pontokban meg kell egyeznie a mért értékekkel (vagy tartania kell azokhoz optimalizáció esetén). A nemlineáris rekonstrukció több különböző módszerrel is megvalósítható.

3. Vizsgált módszerek

Dolgozatomban három lehetséges rekonstrukciós módszert vizsgáltam. Mindhárom módszer iteratív nemlineáris rekonstrukció, amelyek megkövetelik a ritkasági kritériumot és az adatkonzisztenciát. A három vizsgált módszer közül kettő (**Threshold módszer** és **POCS módszer**) algoritmusuk nagymértékben azonos, eltérés a ritkaságot megkövetelő lépésben van, amely eltérést okoz a kapott eredményekben. A harmadik módszer (**Gradiens módszer**) egy gradiens módszeren alapuló minimalizáció, amely során egy a ritkaságot és adatkonzisztenciát figyelembe vevő függvényt szeretnénk minimalizálni, ezzel rekonstruálva az eredeti képet.

3.1. Threshold (küszöbszint) módszer

Az első vizsgált módszer során a ritkaságot és az adatkonzisztenciát is az iterációs ciklus egy-egy lépése követeli meg. A módszer folyamatábrája a 4. ábrán látható.

Jelen módszer esetén a ritkaság a képtérben (ritkasági transzformáció után) levágással érhető el, amely a megadott küszöbszintnél (λ_L) nagyobb pontokat hagyja meg (M a transzformáció utáni kép):

$$M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{ha } |M_{ij}| \geq \lambda_L \\ 0, & \text{ha } |M_{ij}| < \lambda_L \end{cases} \quad (2)$$

Jól beállított küszöbszint használatával ez a lépés elegendő lehet a ritkasági kritérium teljesítéséhez. (Ez felfogható egy vetítésnek, amely a ritka képek halmazára vetít.)

Az adatkonzisztenciára vonatkozó kritériumot a k -térben tudjuk kielégíteni. Ehhez a levágott kép Fourier-transzformáltjának azon pontjait, ahol rendelkezünk mért adattal a mért adatokra cseréljük (K a k -térbeli kép (rekonstruált), D a mért k -tér):

$$K_{ij} = \begin{cases} D_{ij}, & \text{ha } D_{ij} \neq 0 \\ K_{ij}, & \text{ha } D_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

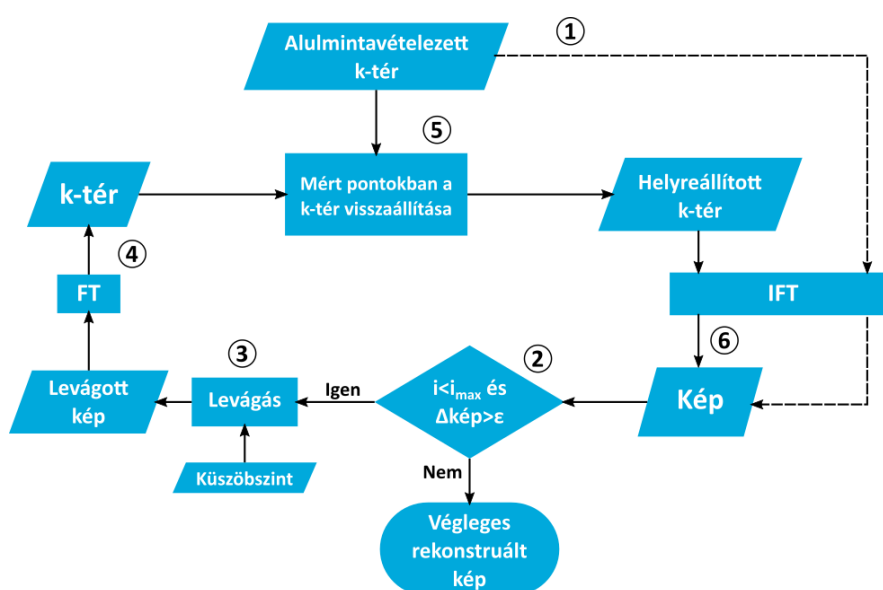
Az így kapott k -térbeli kép várhatóan egy ritka kép Fourier-transzformáltja, amely a mérési pontokban megegyezik a mért adatokkal. (Ez a lépés is tekinthető vetítésnek, amely a mért pontokat tartalmazó k -térbeli képek halmazára vetít, így összességében a két lépés két vetítésnek felel meg két halmaz között (ritka képek és adatkonzisztenciát

teljesítő k-térbeli képek halmaza). Megmutatható, hogy a két halmaz konvex, ezért a módszer konvergál.)

Az iteráció addig tart, míg nem teljesülnek a kilépési feltételek. Ez lehet például két egymást követő iteráció során kapott képek különbségén alapuló kritérium:

$$\| \text{kép}_{k+1} - \text{kép}_k \|_2 < \varepsilon \quad (4)$$

Továbbá célszerű megadni egy maximális lépésszámot (i_{max}), arra az esetre, ha az elsődleges feltétel ezen lépésszám alatt nem teljesülne.



4. ábra. Threshold módszer. Az alul-mintavételezett k-teret inverz Fourier-transzformálva megkapjuk a kiindulási képet (1). Ezt követően kezdődik az iterációs ciklus: ha a kilépési feltételek (lépésszám, kép változása) nem teljesülnek (2) a kép küszöbszintnél kisebb abszolút értékű pontjait nullára állítjuk, míg a többi pontot változtatlanul hagyjuk (3), ezzel megkapva a levágott képet. A képen Fourier-transzformációt hajtunk végre, majd a k-térben visszaállítjuk a mérési pontokban a mért adatokat (4,5). Végezetül inverz Fourier-transzformációval visszajutunk a kép-térbe(6).

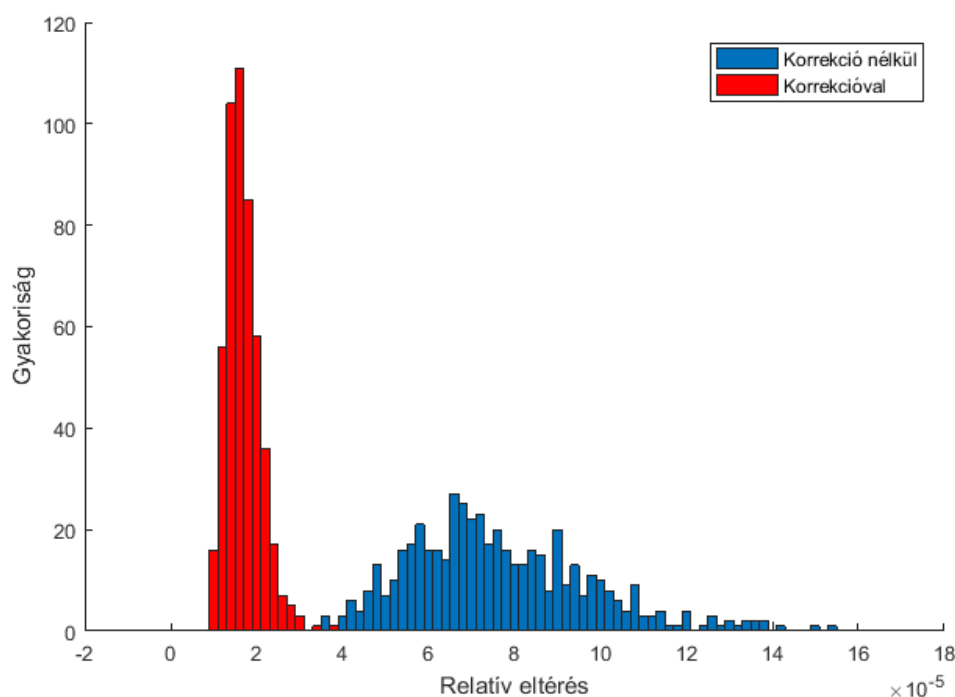
Jobb eredmény érhető el, ha a mért adatokat az első iterációs lépés előtt a k-térben korrigáljuk a mintavételezési eloszlásfüggvénnyel (ezzel korrigálva, hogy a Fourier-tér egyes részeit más-más súllyal vettük figyelembe a mintavételezés során):

$$\hat{k}_{ij} = \frac{k_{ij}}{f_{\text{mintav.ij}}} \quad (5)$$

ahol \hat{k} a korrigált k -tér, k a mért k -tér, $f_{\text{mintav.ij}}$ a mintavételezési eloszlásfüggvény (5. ábra, 1. táblázat). A korrekció hasonló eredményt ad a másik két módszer esetén is.

1. táblázat. Korrekció és korrekció nélkül rekonstruált képek eredeti képtől mért eltéréseinek átlaga és szórása. Megfigyelhető, hogy a korrekció alkalmazásával jelentősen jobb eredményeket kaphatunk.

	Átlag eltérés	Szórás
Korrekció nélkül	$7,62 \cdot 10^{-5}$	$2,11 \cdot 10^{-5}$
Korrekcióval	$1,69 \cdot 10^{-5}$	$3,95 \cdot 10^{-6}$



5. ábra. A mintavételezési eloszlásfüggvénnyel történő korrekció hatása. Ábrázolva a korrekció nélkül, illetve korrekcióval kapott relatív eltéréseket az eredeti képtől megfigyelhető, hogy a korrekcióval kapott képek eltérése kisebb, ezáltal a rekonstrukció jobb eredményt ad.

3.2. POCS módszer

A POCS módszer a **Threshold módszer** módosított változata. A két módszer algoritmus nagyrészt megegyezik, az egyetlen különbség a levágás módjában van (6. ábra).

A módszer neve (POCS - Projection onto convex sets, vetítés konvex halmazokra) arra utal, hogy az egyes iterációk megfeleltethetők két egymás után ható vetítés szorzata-

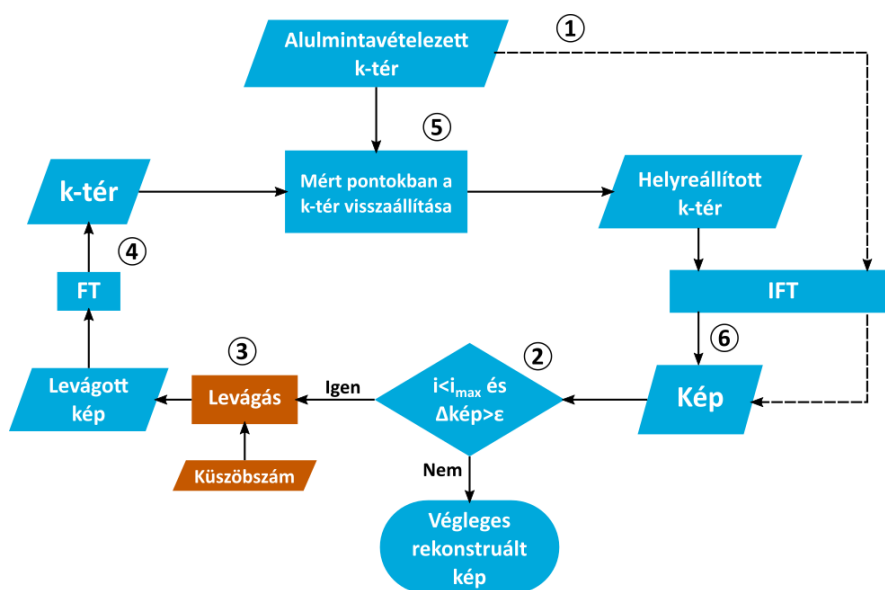
ként. Az első vetítés a transzformált térben vetíti a ritka képek halmazára, míg a másik vetítés a k -térben vetíti a mérési pontokban a mért értékekkel megegyező képek halmazára. Belátható, hogy az említett halmazok konvexek, így a módszer konvergens.

A levágás során a Threshold módszer esetén egy küszöbszintnél nagyobb abszolút értékű pontokat hagytuk meg, a POCS módszer esetén egy küszöbszámot (λ_n) adunk meg. A levágás során a λ_n legnagyobb abszolút értékű képpontot hagyjuk változatlanul (ritkasági transzformáció után), a többi képpont értékét 0-ra állítjuk (x : a képpontok abszolút értékeinek listája abszolút érték szerint csökkenő sorrendbe rendezve):

$$M_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & \text{ha } |M_{ij}| \geq x(\lambda_n) \\ 0, & \text{ha } |M_{ij}| < x(\lambda_n) \end{cases} \quad (6)$$

ahol $x(\lambda_n)$ a λ_n -edik legnagyobb abszolút értékű képpont abszolút értéke.

Az így kapott kép biztosan ritka lesz, a nem nulla képpontok száma legfeljebb λ_n , eltekintve az előző módszerrel, ahol ez jelentősen függött a képpontok értékeinek eloszlásától.



6. ábra. POCS módszer. Az algoritmus nagy részben megegyezik a **Threshold módszer** algoritmusával, eltérés a levágás módjában (3) van. Jelen esetben a korábbi küszöbszint helyett a levágást meghatározó paraméter egy küszöbszám: λ_n . A levágás során az legnagyobb λ_n darab képpontot hagyjuk meg, a többit nullára állítjuk, ezzel a levágás után nem nulla képpontok száma pontosan λ_n lesz.

3.3. Gradiens módszer

A harmadik módszer egy gradiens módszeren alapuló optimalizáció, amely során szükség van egy minimalizálandó függvényre. Ezt a függvényt az alábbi alakban írhatjuk fel vektorokra:

$$f(m) = \|\mathcal{F}_u m - y\|_2^2 + \lambda \|\psi m\|_1, \quad (7)$$

ahol:

m : a rekonstruálandó kép

$\mathcal{F}_u m$: a kép Fourier-transzformáltja a mintavételezett helyeken.

y : mért k -térbeli adat

λ : súlyozó paraméter

ψm : a kép ritkasági transzformáltja

Az f függvény első tagja a mért adat (y) és a rekonstruált kép Fourier-transzformáltjának (a mérési pontokban meghagyva ($\mathcal{F}_u m$)) különbségének Frobenius-normája, vagyis a különbségmátrix elemeinek négyzetösszege. Ez a tag méri az adatkonzisztenciát, vagyis, hogy a rekonstruált kép k -tere mennyire egyezik meg a mért adatokkal.

A második tag a rekonstruált kép ritkasági transzformáltjának (ψm) 1-es normája, amely a transzformált kép képpontjainak abszolút összege. Ez a kép ritkaságáról ad információt.

A gradiens módszerben a [2] cikkben leírtak alapján konjugált gradiens módszert használtam. Ennek oka, hogy a probléma nem lineáris, azonban a nemlineáris konjugált gradiens módszer alkalmas nem lineáris függvények minimalizálására. A módszerben szükség van iránymenti keresésre (line search-re) is az adott irányba történő lépés nagyságának meghatározásához. Mivel az egzakt lépésmagyság meghatározása meglehetősen bonyolult jelen esetben, ezért célszerű egy nem egzakt iránymenti keresés alkalmazása. Erre egy lehetséges választás a cikkben is alkalmazott visszalépő iránymenti keresés (backtracking line search [2], [5]).

A gradiens módszerhez szükség van a vizsgált függvény gradiensére is. Ez szintén megtalálható [2] cikkben:

$$\nabla f(m) = 2\mathcal{F}_u^*(\mathcal{F}_u m - y) + \lambda \psi^* W^{-1} \psi m \quad (8)$$

ahol W diagonális mátrix elemei: $w_i = \sqrt{(\psi m)_i^* (\psi m)_i + \mu}$, ahol μ egy simítófaktor, annak érdekében, hogy létezzen W^{-1} minden m esetén.

Mivel a fenti gradiens 1 dimenziós m képekre alkalmazható, ezért 2 dimenzióban történő felhasználásának érdekében kis mértékben módosítottam. Ennek alapján a gradiens az alábbi módon adható meg:

$$\nabla f(m) = 2\mathcal{F}_u^*(\mathcal{F}_u m - y) + \lambda \psi^* M \quad (9)$$

ahol

$$M_{ij} = \frac{1}{\sqrt{(\psi m)_{ij}^* (\psi m)_{ij} + \mu}} (\psi m)_{ij} \quad (10)$$

Az algoritmus pszeudokódja:

Nemlineáris konjugált gradiens módszer

- 1: $g_0 = -\nabla f$
 - 2: $\Delta m_0 = g_0$
 - 3: $m_0 = 0$
 - 4: **while** $\|\Delta m_k\|_2 > \varepsilon$ and $k < k_{max}$ **do**
 - 5: $g_k = -\nabla f$
 - 6: $\beta_k = \frac{g_k^* g_k}{g_{k-1}^* g_{k-1}} = \frac{\|g_k\|_2^2}{\|g_{k-1}\|_2^2}$
 - 7: $\Delta m_k = g_k + \beta_k \Delta m_{k-1}$
 - 8: $\alpha_k = \arg \min_{\alpha} f(m_k + \alpha \Delta m_k)$
 - 9: $m_{k+1} = m_k + \alpha_k \Delta m_k$
 - 10: $k = k + 1$
-

Az algoritmus során először kiszámoljuk az adott pontban a legmeredekebb irányt (gradiens iránya, g_k), majd a Fletcher–Reeves formula [6] szerint kiszámítjuk a konjugált irány számításához szükséges paramétert (β_k), amely alapján meghatározzuk a konjugált irányt (Δm_k). A következő lépésben megkeressük ezen irány menti minimum (egzaktul f minimuma) eléréséhez szükséges lépés nagyságát (α_k). Végezetül módosítjuk a képet és növeljük a lépésszámot. Mivel az iránymenti keresés nem egzakt, ezért szükség van egy **while** ciklusra is a megfelelő pontosságú eredmény eléréséhez.

A konjugált irányban szükség van a lépés nagyságának meghatározására, a visszalépő iránymenti keresésre, melynek algoritmus a következő:

Backtracking line search ($\gamma \in (0, 1)$, $\tau \in (0, 1)$ rögzített értékek)

```
1:  $\alpha_0 = 1$  ( $\alpha_0 > 0$ )
2:  $i = 0$ 
3: while  $f(m_k + \alpha_i \Delta m_k) \geq f(m_k) + \alpha_i \gamma \operatorname{Re}(g_k^* \Delta m_k)$  do
4:    $\alpha_{i+1} = \tau \alpha_i$ 
5:    $i = i + 1$ 
```

Az algoritmusban α értékét addig csökkentjük, míg az $\alpha \Delta m_k$ nagyságú lépés után f értéke kisebb nem lesz az adott m_k -ban felvett értékénél. Ez a módszer megakadályozza a túl kicsi lépéseket is α_i csökkenése által (visszalépés), azonban a túl nagy lépéseket nem. Az f csökkenéséhez képesti (g_k) túl nagy lépés elkerüléséhez használható az Armijo feltétel ($\alpha_i \gamma \operatorname{Re}(g_k^* \Delta m_k)$), amely megakadályozza a túl nagy lépések alkalmazását, illetve garantálja, hogy f csökkenése legalább f első rendű közelítésének γ -szorosával történjen, ezzel javítva a módszer hatékonyságán (a valós részre azért van szükség, mivel f valós, azonban Δm és g is komplex).

4. Paramétervizsgálat

A vizsgált módszerek mindegyike rendelkezik egy paraméterrel, amely befolyásolja a kapott eredményeket, vagyis a rekonstruált képet. Ezen paraméterek a következők:

- Threshold módszer: küszöbszint (levágási szint)
- POCS módszer: küszöbszám (megtartott pixelek száma)
- Gradiens módszer: súlyozó paraméter (a költségfüggvény két tagját súlyozó paraméter).

Mivel a rekonstrukció függ a paraméterek értékétől ezért dolgozatom egyik fő célja a módszerek paraméterfüggésének vizsgálata, valamint optimális paraméter meghatározása, mely szükséges a rekonstrukciós módszerek eredményeinek további vizsgálatához.

4.1. Képtérben ritka képek vizsgálata

A compressed sensing esetén a legegyszerűbben a képtérben ritka képek vizsgálhatók [7]. Ezen képek (ideális, zajmentes esetben) a képtérben kevés nem nulla pixelt tartalmaznak (zajjal terhelt kép esetén a diagnosztikai szempontból hasznos információ a pixelek kis hányadában található). Képtérben ritka képek esetén nincs szükség ritkasági transzformációra, így a rekonstrukciós módszerek algoritmusai jelentősen egyszerűbbek, ezáltal a paraméterfüggés is könnyebben vizsgálható.

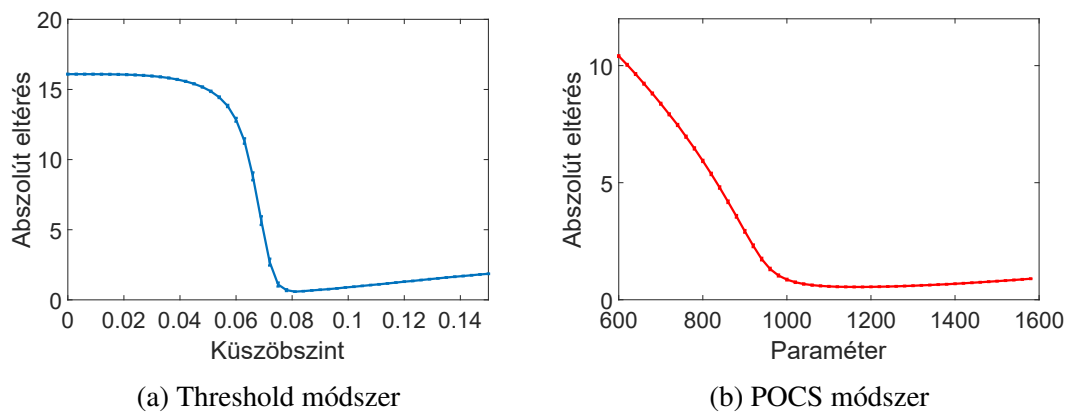
A paraméterek vizsgálatához általam generált, képtérben ritka képeket vizsgáltam. Ezek előre megadott pixelszámmal rendelkeznek. A pixelek kisebb csoportokban helyezkednek el melyek mérete előre meghatározott mérettartományban mozog (példa: 7. ábra). A generált képek előnye a valós, például angiográfiás képekkel szemben, hogy zajmentesek, ismert pixelszámúak, valamint a véletlen generálás miatt nagy számban vizsgálhatók. Dolgozatomban 256×256 méretű képeket vizsgáltam.

A paramétervizsgálat során eltérő ritkaságú képeket vizsgáltam $1/2$, $1/3$ és $1/4$ alulmintavételezési arányok mellett. A képeket alulmintavételezést követően különböző paraméterértékekkel rekonstruálva vizsgáltam az eredeti és a rekonstruált kép eltérésének Frobenius-normáját.



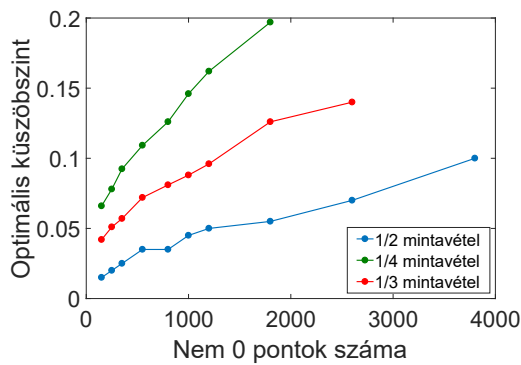
7. ábra. Példa a generált képtérben ritka képről, 500 nem nulla pixellel.

A Threshold és POCS módszerek esetén kapott eltérés paraméterfüggését leíró görbéken megfigyelhető egy minimumpont, amelyhez tartozó paraméterérték esetén a rekonstruált és eredeti képek eltérése minimális (8. ábra). Ezen optimális paraméter ritkaság és mintavételezési arány függését megvizsgálva lineáris függést kapunk (Threshold módszer esetén a meredeksége függ a mintavételezési aránytól, POCS módszernél a meredekség minden esetben 1) (9. ábra).

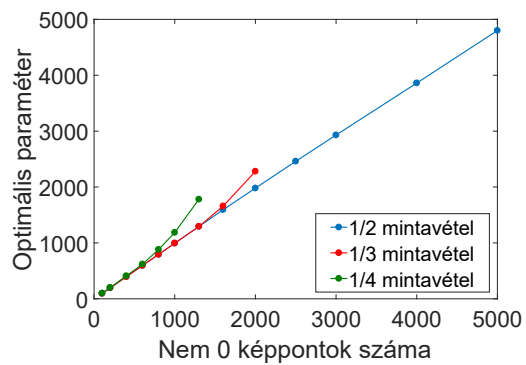


8. ábra. Rekonstruált és eredeti kép abszolút eltérésének paraméterfüggés Threshold és POCS módszerek esetén. Megfigyelhető, hogy mindkét esetben van minimum, illetve a minimumot követően az eltérés a paramétert növelve kis mértékben nő. Ez lehetővé teszi, hogy nagyobb paraméterrel rekonstruáljuk a képet, miközben az eltérés nem változik jelentősen.

Mivel az optimális paraméterérték függ a ritkaságtól, azonban egy compressed sensing mérés esetén a rekonstruálás előtt nincs információnk a kép ritkaságáról, így nem tudunk optimális paramétert megadni. Ebből adódóan célszerű megvizsgálni, hogy rögzített paramétert választva mekkora eltéréseket kapunk eltérő ritkaságok mellett.



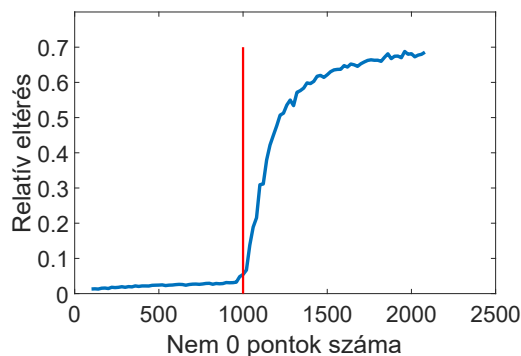
(a) Threshold módszer



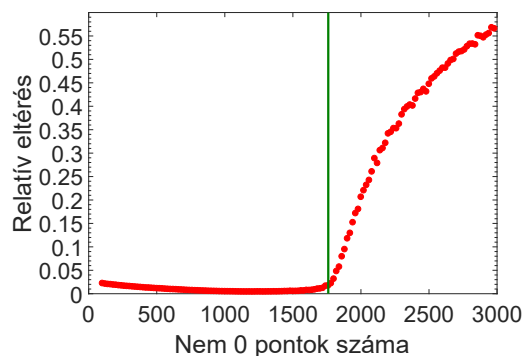
(b) POCS módszer

9. ábra. Optimális paraméter ritkaságfüggése. Megfigyelhető, hogy mindkét módszer esetén a függés lineáris, eltérés a meredekségben van. Threshold módszernél a meredekség függ a mintavételezés arányától, míg POCS módszernél minden esetben 1.

Rögzített r ritkasághoz tartozó paraméterrel rekonstruálva eltérő ritkaságú képeket azt tapasztaljuk, hogy r ritkaságnál kisebb ritkaságú (több nem nulla képpontot tartalmazó) képek esetén az eltérés jelentősen nagyobb, mint az optimális ritkaság (r) esetén, azonban a ritkaságot növelve (a nem nulla képpontok számát csökkentve) az eltérés nagyjából azonos (POCS módszer) vagy kisebb (Threshold módszer), mint r ritkaság esetén (10. ábra). Ennek alapján megfelelően kis ritkasághoz (megfelelően sok nem nulla képponttal rendelkező kép) tartozó paramétert választva ezen paraméter széles ritkaság-tartományon megfelelően alkalmazható.



(a) Threshold módszer:
1000 képpontra optimalizált paraméter

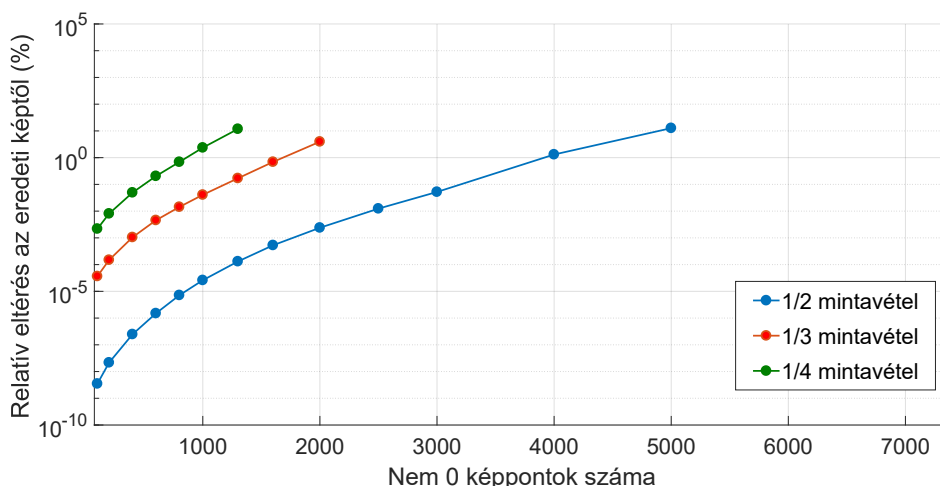


(b) POCS módszer:
1760 képpontra optimalizált paraméter

10. ábra. Rögzített paraméterrel rekonstruálva eltérő ritkaságú képeket jól látható, hogy a relatív eltérés a paraméterhez tartozó pixelszám alatt közel azonos, vagy kisebb, míg felette meredeken nő.

Fontos megjegyezni azonban, hogy a ritkaságot csökkentve az optimális paraméterrel rekonstruálva az eltérés exponenciálisan nő (11. ábra). Ennek alapján meghatározha-

tunk egy küszöböt, ahol még ezen eltérés elfogadható, diagnosztikai szempontból nem befolyásolja a képet, így egy korlátot adva arra, hogy milyen ritkaságú képek rekonstruálhatók ezen módszerekkel. Továbbá képtérben ritka (például angiográfiás) képek ritkasága alapján is választhatunk ritkasági korlátot, amelybe ezen képek beleesnek. Az említett szempontokat figyelembe véve választhatunk egy ritkaságot, amelyen belül a hozzá tartozó paramétert használva elfogadható eredményt kapunk.



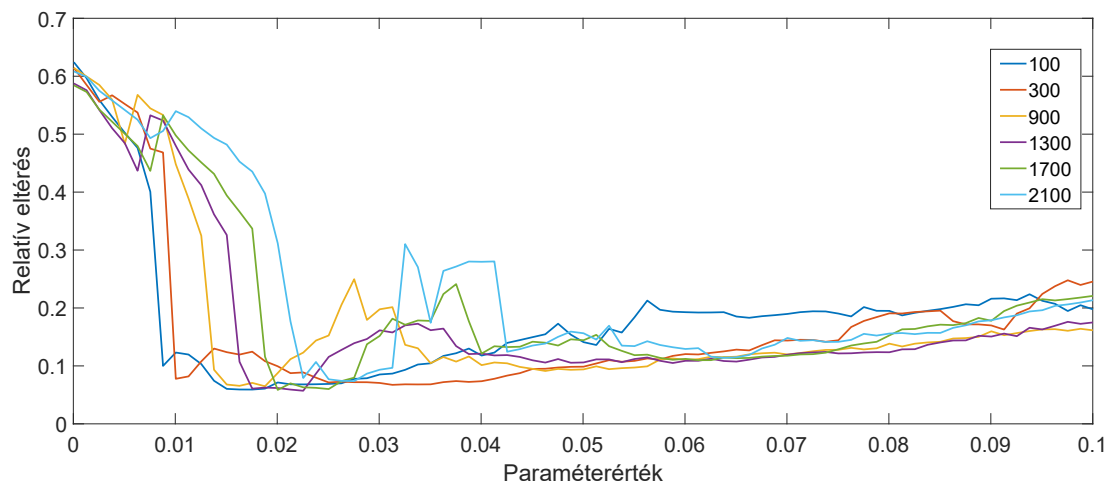
11. ábra. Relatív eltérés ritkaságfüggése optimális paraméter esetén lin-log skálán (POCS módszer). Megfigyelhető, hogy a képpontok számát növelve, nagyjából 800-1000 képpont felett a görbe közel lineáris, vagyis az eltérés exponenciálisan nő.

A kapott eltéréseket képtérben megvizsgálva meghatároztam ritkasági korlátokat, amelyek esetén a rekonstruált és eredeti kép szemmel összehasonlítva közel azonos (megfigyelhető eltérés néhány pixel intenzitásában jelentkezik). Ennek alapján a Threshold módszerre a következő korlátokat határoztam meg:

- 1/2 mintavétel: 2600 ± 600 nem nulla pixel (16%)
- 1/3 mintavétel: 1200 ± 200 nem nulla pixel (7,3%)
- 1/4 mintavétel: 550 ± 150 nem nulla pixel (3,3%)

Az angiográfiás képek ritkasága nagyjából 5 – 10%. Ennek alapján 1/2 és 1/3 arányú mintavételezés jól használható, míg 1/4 mintavételezési aránynál az eltérés várhatóan jelentősen nagyobb lesz.

Gradiens módszer esetén ezzel szemben az eltérés paraméterfüggésében több lokális minimum is megfigyelhető (12. ábra), így az optimális paraméter meghatározása nehe-



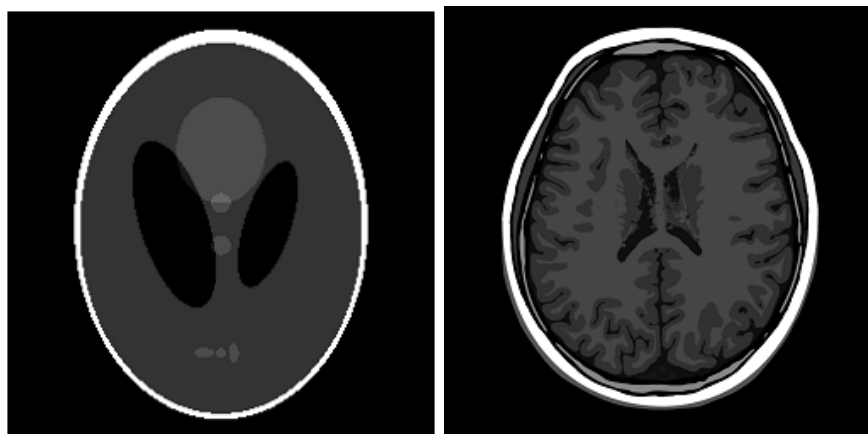
12. ábra. Gradiens módszer. Relatív eltérés paraméterfüggése különböző ritkaságok esetén 1/2 arányú mintavételezés mellett.

zebb. Ennek ellenére becsülhető optimális paraméterérték, amely 1/2 és 1/3 mintavételezési arányoknál széles rikaság-tartományon alkalmazhatók, azonban 1/4 mintavételezés esetén ezen tartományon belül is tapasztalhatók nagy eltérések.

Összefoglalva elmondható, hogy a Threshold és POCS módszerek megfelelő mintavételezési arányokat választva jól alkalmazhatóak, ezzel szemben a Gradiens módszer csak szigorúbb megszorítások mellett ad elfogadható eredményt.

4.2. Wavelet térben ritka fantomok vizsgálata

Képtérben nem ritka képek vizsgálatához két fantomot használtam. Ezen fantomok a Shepp-Logan fantom és egy T1-súlyozott humán MRI mérésből létrehozott, zajmentes digitális fantom (továbbiakban agyfantom) (13. ábra). A fantomok előnye a valós képekkel szemben, hogy nem tartalmaznak zajt, valamint a kevés számú intenzitásérték miatt a rekonstruált képek könnyebben elemezhetők.



(a) Shepp-Logan fantom

(b) Agyfantom

13. ábra. Vizsgált fantomok

A fantomok vizsgálatának azonban vannak hátrányai is. Mivel mindkét fantom kevés intenzitásértéket tartalmaz, ezért ezek numerikus deriválással is ritkává tehetőek. Ez befolyásolhatja az eredményeket, melyek eltérőek lehetnek a valós képeknél kaphatóktól. Továbbá a generált képekkel szemben ezen képekből csak egy-egy darabot vizsgáltam, így az eredmények is bizonytalanabbak. Ezen okok miatt a kapott eredményeket valós MRI felvételek szimulált alulmintavételezésével és rekonstruálásával ellenőriztem.

Fantomok vizsgálata

A paramétervizsgálatot, a fantomok esetén is, a képtérben ritka képekhez hasonlóan végeztem. Mindkét fantomot alulmintavételezés után különböző paraméterekkel rekonstruáltam, majd kiszámítottam a fantom és a rekonstruált kép eltérésének Frobenius-normáját, ezzel megkapva a rekonstrukció paraméterfüggését. Ezt megismételtem 5-5 különböző mintavételezéssel (a mintavételezés sűrűségfüggvénye azonos, az eltérést a véletlen mintavételezés adja), majd az így kapott görbéket átlagoltam. A paramétervizsgálatot mindhárom módszerre elvégeztem $1/2$, $1/3$ és $1/4$ mintavételezési aránnyal.

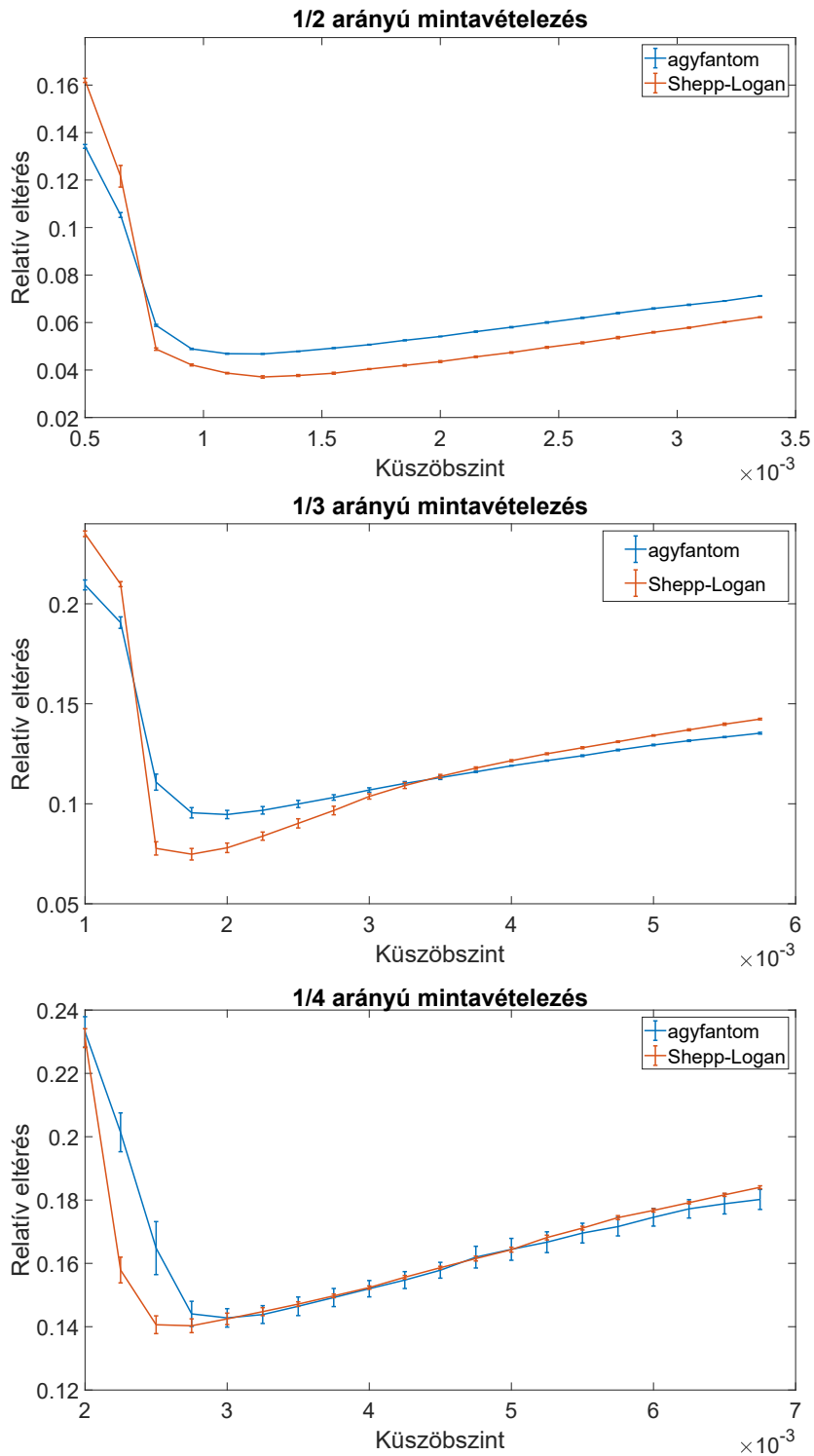
A Threshold és POCS módszerek esetén a kapott görbék a képtérben ritka képeknél kapott eredményekhez hasonlóak (14. és 15. ábra). Mindkét esetben a paraméterfüggést leíró görbék rendelkeznek jól meghatározható minimummal, vagyis optimális paraméterrel.

Megfigyelhető azonban, hogy a két fantom esetén a minimumok kis mértékben eltolódnak: minden esetben a Shepp-Logan fantom minimumhelyéhez tartozó paraméterérték kisebb az agyfantomnál kapott értéknél, továbbá a minimumban vett elérés a Shepp-Logan fantom esetén kisebb. Ennek oka lehet, hogy a Shepp-Logan fantom ritkábbnak tekinthető, mint az agyfantom, mivel nem tartalmaz kis részleteket. Továbbá az agyfantom a generálásából adódóan közelebb áll a valós MRI képekhez, mint a Shepp-Logan fantom.

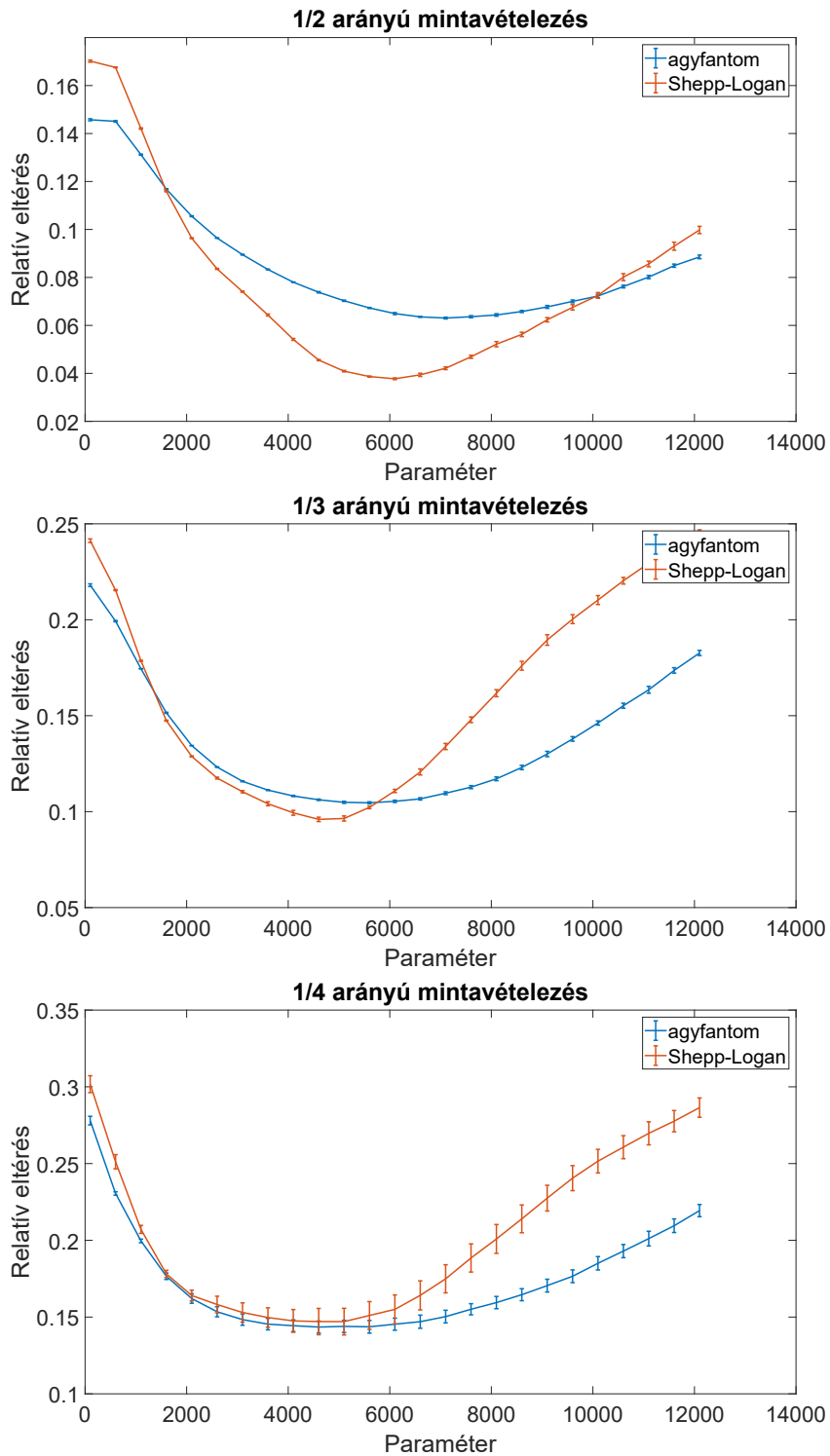
Az előzőekben említett okok miatt az agyfantomnál kapott paraméterértéket használtam a további vizsgálatok során, mivel ezek ritkasága közelebb áll a valós képek ritkaságához. Láthattuk továbbá, hogy a paraméter értékét növelve az eltérés alacsonyabb ritkaságok esetén nem változik jelentősen (most is megfigyelhető, hogy a Shepp-Logan fantomnál kapott eltérés ezen paraméterre kisebb, mint az agyfantomnál).

Gradiens módszer esetén is a képtérben ritka képekhez hasonló eredményt kaptam (16. ábra). Ugyancsak megjelennek a görbéken lokális minimumok, azonban a görbék minimumpontja könnyebben meghatározható, mint a korábban vizsgált esetekben. Megfigyelhető továbbá, hogy a Threshold és POCS módszerektől eltérően a Shepp-Logan és agyfantom esetén kapott görbék közel azonosak. Ebből adódóan ugyancsak a agyfantom esetén kapott optimális paraméterértéket használtam a továbbiakban.

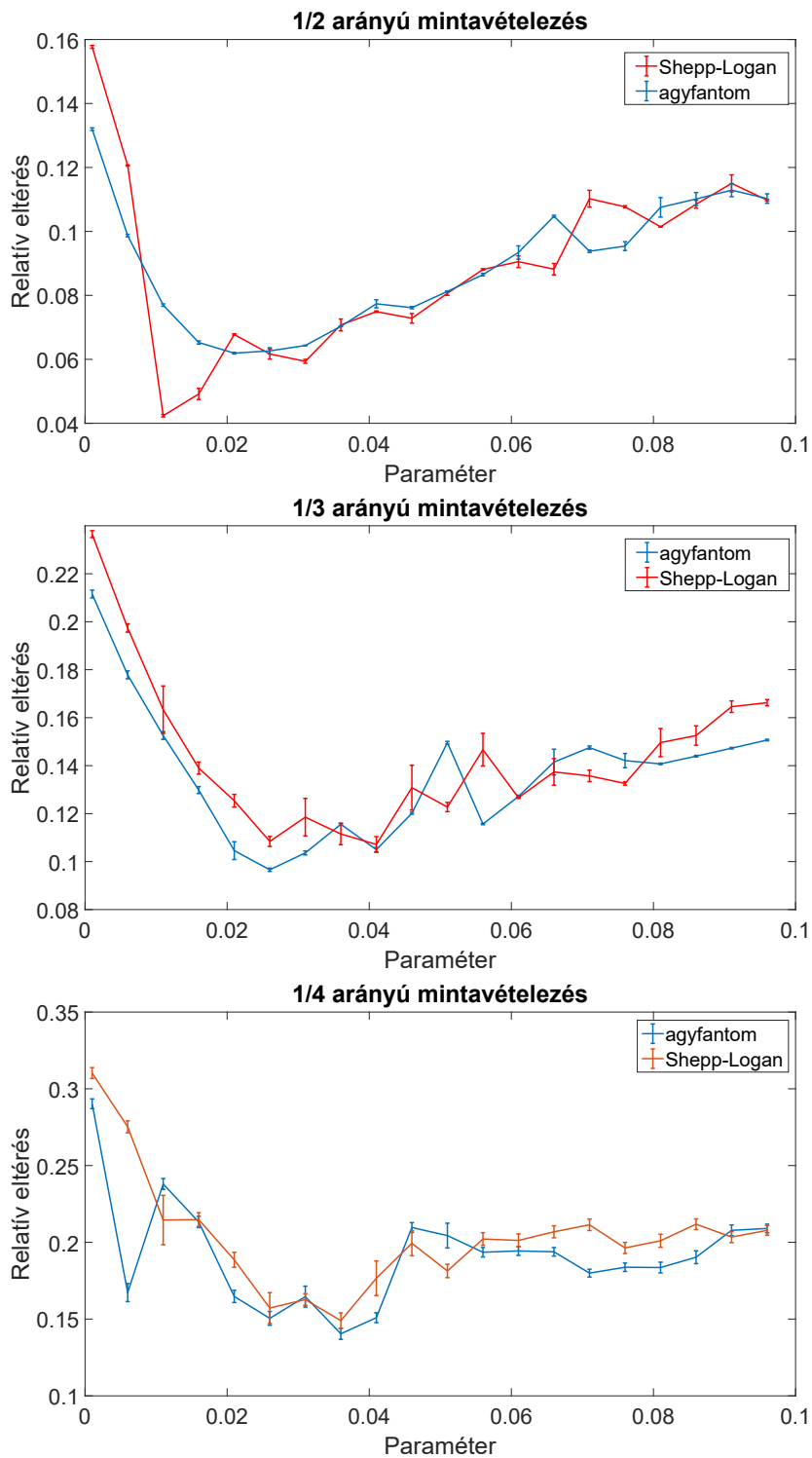
Az optimális paraméter alkalmazásával kapott relatív eltéréseket összefoglalva (17. ábra) megfigyelhető, hogy a Shepp-Logan fantom 1/3-os mintavételezésétől eltekintve az egyes módszerek eredményeiben, illetve az egyes fantomok között nincs szignifikáns különbség, tehát a kapott eredmények nem alkalmasak a vizsgált módszerek összehasonlítására.



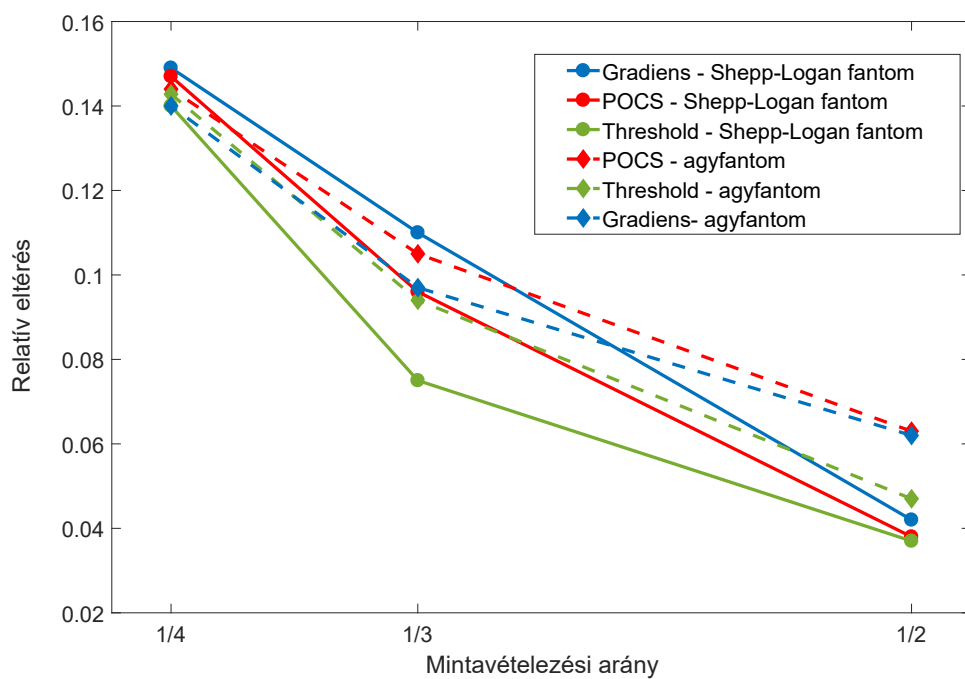
14. ábra. Threshold módszer, relatív eltérés paraméterfüggése Shepp-Logan és agyfantom esetén 5-5 képre átlagolva.



15. ábra. POCS módszer, relatív eltérés paraméterfüggése Shepp-Logan és agyfantom esetén 5-5 képre átlagolva.



16. ábra. Gradiens módszer, relatív eltérés paraméterfüggése Shepp-Logan és agyfantom esetén 5-5 képre átlagolva.



17. ábra. 14., 15. és 16. ábra eredményeinek összefoglalása. Relatív eltérés mintavételezési arány függése az optimális paramétert használva a különböző módszerek és fantomok esetén.

5. Zajerosítés vizsgálata

A paramétervizsgálat során ideális, zajmentes képeket vizsgáltam, a valós, mért képek azonban minden esetben tartalmaznak valamekkora, a mérésből származó zajt. Ebből adódóan fontos megvizsgálni, hogy az egyes módszerek milyen hatással vannak a képeken megjelenő zajra, valamint a zaj miként befolyásolja a rekonstrukciókat. Ennek egyik leíró paramétere lehet a zajerosítés, amely megadja, miként változik a zaj nagysága a rekonstrukció hatására.

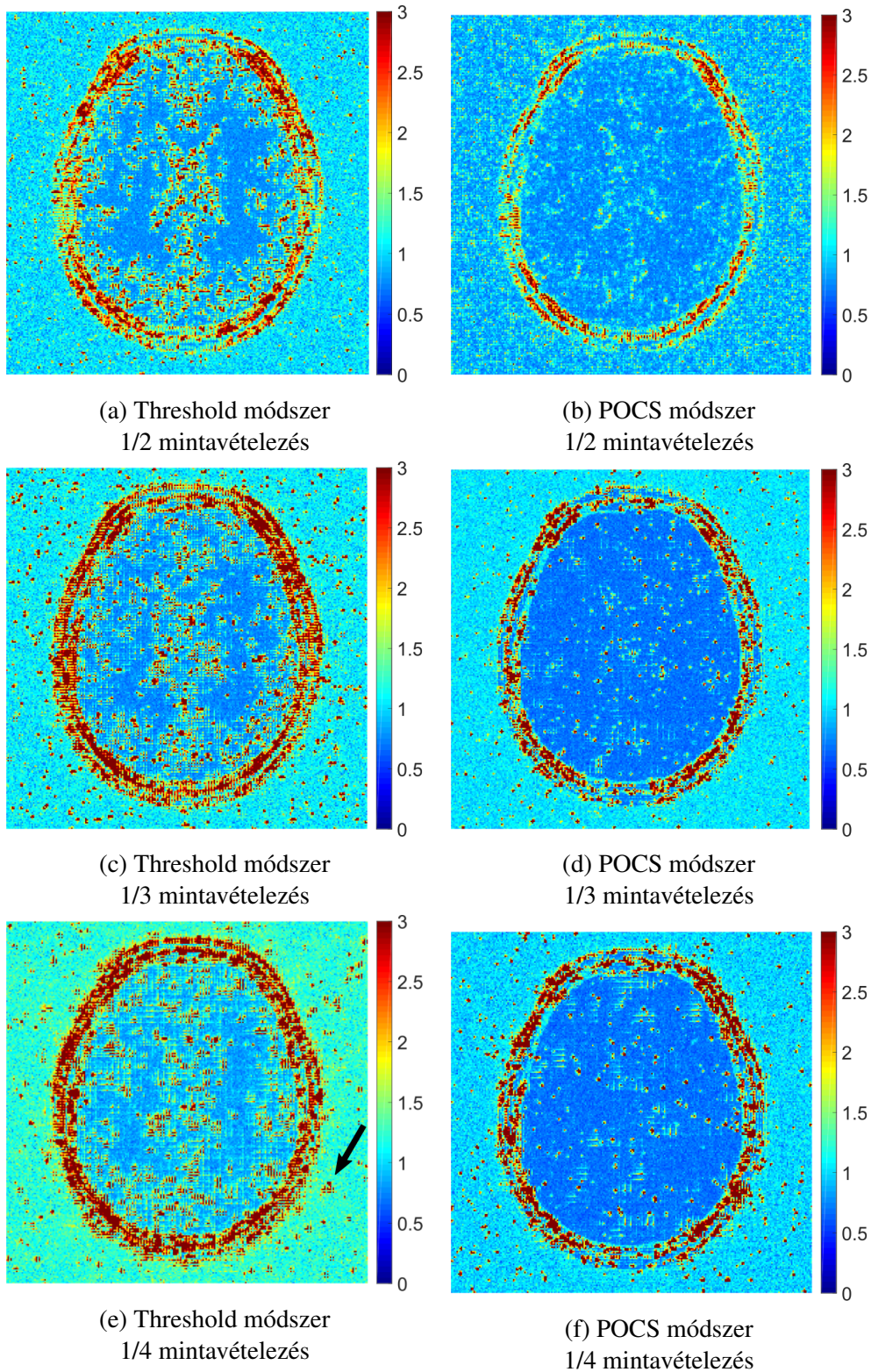
A zajerosítés vizsgálata során 0 várható értékű előre megadott szórású normális eloszlású zajt vizsgáltam, melyet az agyfantom k-teréhez (Fourier-transzformáltjához) adtam hozzá, így az MRI felvételeken megjelenő zajhoz hasonló eredményt kaptam. Továbbá ez a módszer lehetőséget adott a rekonstrukció többszöri megismétlésére azonos paraméterű, de eltérő zaj esetén.

A zaj nagyságát a szórás írja le, így a zajerosítés vizsgálatához ezen szórás ismeretére van szükség. A szórás számításához 100, azonos paraméterű zajjal terhelt fantomot mintavételeztem alul, majd rekonstruáltam. Az eredeti és rekonstruált képek pixelenként vett szórásának arányából kapott zajerosítés térkép elemzésével megvizsgáltam, hogy az egyes rekonstrukciós módszerek, valamint a különböző mintavételezési arányok milyen hatással vannak a képeken megjelenő zajra. A zajerosítés térképek alapján számolható átlagos zajerosítés az egyes módszerek és mintavételezési arányok esetén (2. táblázat).

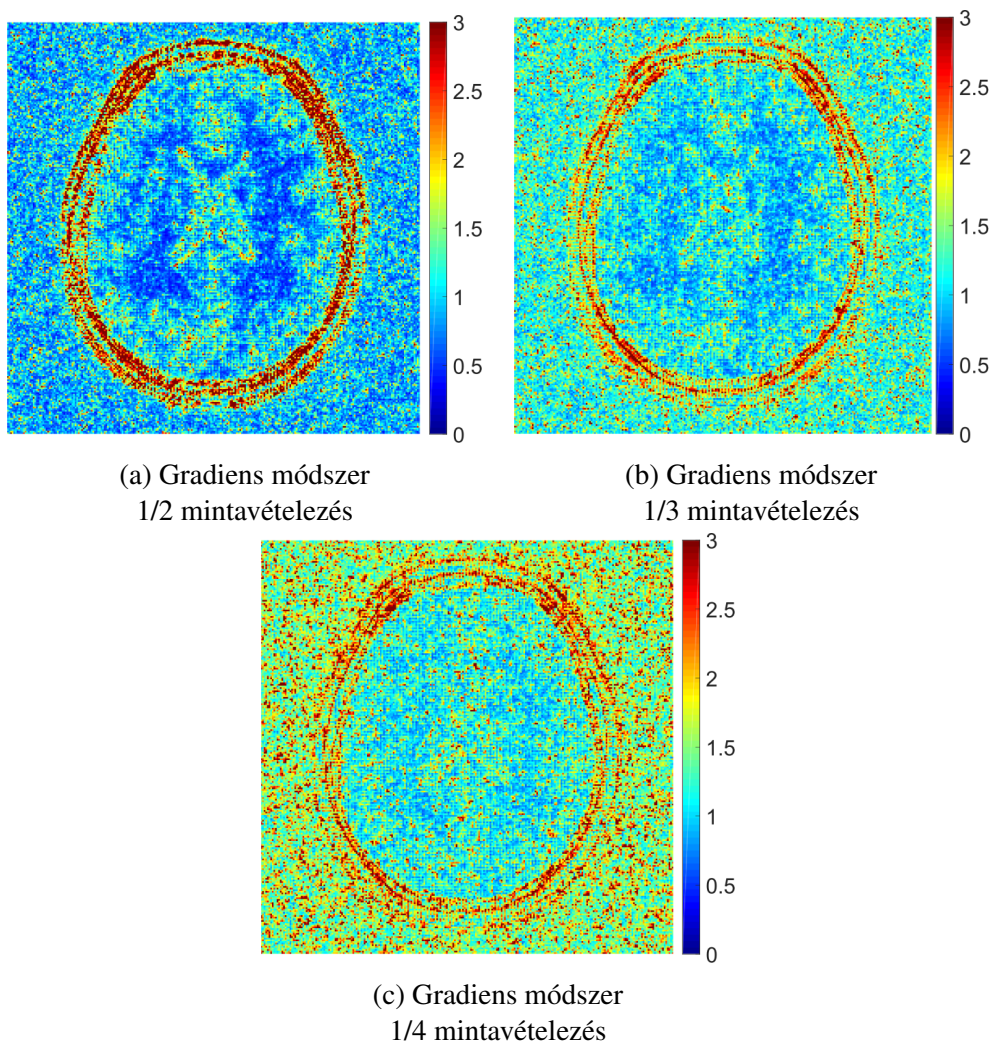
2. táblázat. Átlagos zajerosítés az egyes módszerek esetén. Az egyes értékek megadják, hogy zaj átlagosan hányszorosára nő a rekonstrukciók után.

	1/2	1/3	1/4
Threshold	1,28	1,8	1,78
POCS	1,01	1,16	1,24
Gradiens	1,22	1,33	1,59

A kapott eredményeken megfigyelhető, hogy zajerosítés szempontjából a POCS módszer adja a legjobb eredményeket: 1/2 arányú mintavételezés esetén az átlagos zajerosítés közel 1, vagyis az alulmintavételezés és a rekonstrukció nem növeli a képen megjelenő zajt, továbbá a mintavételezési arányt csökkentve is az átlagos zajerosítés jelentősen kisebb, mint a többi módszer esetén. Látható továbbá, hogy a mintavételezési arány csökkentésével mindhárom módszer esetén a zajerosítés nő, egyetlen kiszoró ponttól eltekintve (a Threshold módszer, 1/3 mintavételezési aránya esetén). Ennek oka valószínűsíthetően a rekonstrukció paraméterének pontatlan beállítása.



18. ábra. Zajerosítás térképek Threshold és POCS módszerekre.



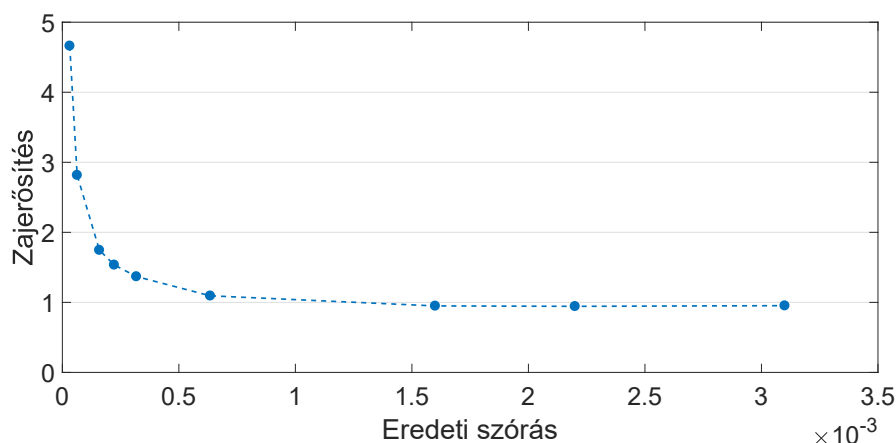
19. ábra. A Gradiens módszer zajerősítés térképei.

A zajerősítésről további információ kapható a zajerősítés térképek vizsgálatával (18. és 19. ábra). Mindhárom módszer esetén közös jellemző, hogy jelentősebb zajerősítés az élek mentén figyelhető meg (a fantom esetén ez a koponya környéke), továbbá a koponyán belül (diagnosztikai szempontból érdekes részen) a zajerősítés jellemzően kisebb, mint a koponya kívüli háttér esetén.

Ezekon kívül különbségek is megfigyelhetők a három vizsgált módszer között. A térképeken is jól látható, hogy zajerősítés szempontjából a legjobb eredményt a POCS módszer esetén kaphatjuk. Látható továbbá, hogy a Threshold módszer esetén alacsony mintavételezési arányra (1/4, 18e ábra) a zajtérképen is megjelennek műtermékek, amelyek a másik két módszernél nem figyelhető meg. A Gradiens módszernél a élek mentén kapott zajerősítés kisebb a többi módszerhez képest, a térképeken kisebb zajerősítés-

ingadozás figyelhető meg, tehát a zaj a kép egészét tekintve egyenletesebben változik mint a többi módszer esetén.

Vizsgálható továbbá, hogyan változik az átlagos zajerősítés a fantomhoz hozzáadott zaj nagyságának függvényében. Ennek vizsgálatához az 1/2 mintavételezési arányt választottam, mivel itt a legalacsonyabb a zajerősítés, ezért jobban ellenőrizhető a zajerősítés változása. A zajerősítés zajnagyság függését leíró görbén (20. ábra, a Threshold és Gradiens módszerek eredményei ehhez nagy mértékben hasonlóak, eltérés az zajerősítés nagyságában jelentkezik) látható, hogy nagy zaj esetén a zajerősítés nem függ a zaj nagyságától, míg kis zaj esetén jelentős növekedés tapasztalható. Ennek oka, hogy az alacsony zaj szórás miatt a képen megmaradó műtermékek (szemmel nem, vagy csak nehezen látható műtermékek) a szórás számolása során jelentősen befolyásolják az eredményeket (ezen a tartományon a zaj szemmel nem látható). Az a tény, hogy a konstans jól mutatja, hogy a rekonstrukciós módszer nem lineáris, mivel lineáris esetben a zajerősítésnek az eredeti zajtól függetlennek kellene lennie.



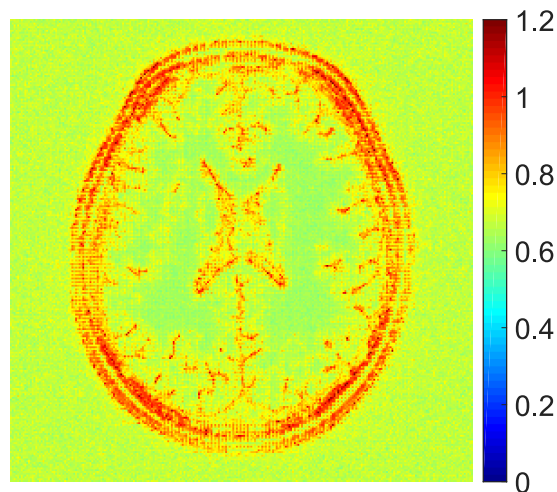
20. ábra. Zajerősítés a zaj nagyságának függvényében POCS módszer és 1/2 mintavételezés esetén.

Teljes mintavételezés és zajcsökkentés

A gradiens módszer lehetőséget ad a teljes (1/1 arányú) mintavételezésre is. A Threshold és POCS módszereknél az adatkonzisztenciát megvalósító lépések során a teljesen mintavételezett k-teret minden lépésben visszaállítjuk, így a módszerek két állapot között ugrálnak. Ezzel szemben a Gradiens módszer alapja egy költségfüggvény minimalizálása, melynek egyik tagja a ritkaságot, másik a mért k-tértől való eltérést méri így

teljes mintavételezés esetén is lehetőség van a minimalizálásra. Mivel wavelet-térben a zaj nem ritka, ezért ez a módszer jól alkalmazható zajcsökkentésre.

A zajerősítés mérhető az korábbiakban leírt módon a teljes mintavételezés esetén is, az így kapott térkép információt szolgáltat a módszer zajcsökkentéséről. A kapott zajerősítés térképen megfigyelhető (21. ábra), hogy a zajerősítés a kép jelentős részén kisebb mint 1, az 1-hez közeli értékek a korábban látottakhoz hasonlóan az élek mentén találhatóak. Látható továbbá, hogy a zajerősítés a koponyán belül nagyjából $0,6 - 0,7$, a koponyán kívüli részen is nagyjából $0,7 - 0,8$, a teljes képre számolt átlagos zajerősítés pedig $0,7$. Ezek alapján jól látható, hogy a módszer a kép jelentős részén a zaj csökkenését eredményezi. Ez lehetőséget ad a compressed sensing utólagos, teljesen mintavételezett képeken történő zajcsökkentésre.



21. ábra. Zajerősítés térkép teljes mintavételezés esetén gradiens módszerrel rekonstruálva.

6. Valós képek vizsgálata

6.1. Paraméterek ellenőrzése 2 dimenziós képeken

A módszerek ellenőrzéséhez megvizsgáltam az eljárásokat valós (mért) képek szimulált alulmintavételezésével is. Ehhez 16 tekercs adatait tartalmazó mért adatsort használtam, amely tekercsenként 192 darab 240×256 méretű szeletet tartalmazott.

A módszerek ellenőrzéséhez kiválasztottam egy szeletet, amelyet kiegészítettem 256×256 méretűre. Fourier transzformálás után minden tekercs k-terét azonos maszkkal (mintavételezendő pontok halmaza) alulmintavételeztem. Ezt követően az egyes tekercseket külön-külön rekonstruáltam, majd a kapott képeket az alábbi módon, négyzetesen összegeztem:

$$\text{rekonstruált kép} = \sqrt{\sum_{i \in \text{tekercs}} |\text{kép}_i|^2} \quad (11)$$

Az eredmények vizsgálatához referenciának a hasonló módon összegezett eredeti adatokat használtam.

POCS módszer

POCS módszer $1/2$ és $1/3$ mintavételezési arányai esetén megvizsgáltam, hogy a paramétervizsgálat során kapott optimális paramétereket használva milyen eredmények adódnak, ezzel ellenőrizve a korábban kapott paramétereket.

$1/2$ mintavételezési arány esetén látható (22. ábra, 1. oszlop), hogy a rekonstruált kép csak kis mértékben tér el az eredeti képtől. A nullával kitöltött (az alulmintavételezett k-tér nem mért pontjainak nullával helyettesítése után alkalmazott inverz-Fourier transzformációval kapott) képet és a POCS módszerrel rekonstruált képeket összehasonlítva az utóbbin több, kisebb részlet is megfigyelhető. Hasonló eredményeket kaptam $1/3$ mintavételezési arány esetén is (22. ábra, 2. oszlop). A nullával kitöltött képpel összehasonlítva a rekonstruált kép élesebb, a képen több részlet vehető ki, azonban az eredeti képhez képest elmosott, homályos.

A kapott eredmények alapján elmondható, hogy a nullával kitöltéshez képest a POCS rekonstrukció jelentős javulást jelent, a rekonstruált képeken több, kisebb részlet is ki-

vehető. Látható azonban, hogy 1/3-os mintavételezés esetén a rekonstruált kép elmosódott, melynek oka az alacsony mintavételezési arány.

Threshold módszer

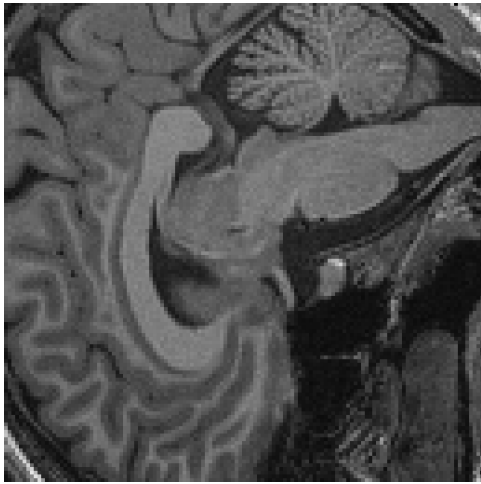
Mivel a fantomok és a mért képek skálázása eltérő, ezért a Threshold módszer esetén a paraméter megfelelően átskálázott értékét használtam. 1/3-os mintavételezés esetén (23. ábra, 1. oszlop), hasonlóan a POCS módszerhez, a rekonstruált képen kis mértékű elmosódás figyelhető meg az eredeti képpel összehasonlítva. A nullával kitöltött képpel összevetve, a POCS módszertől eltérően most kevésbé figyelhető meg a kis részletek megjelenése, ellenben az eredeti kép homogén területeinek homogenitásában jelentős javulás tapasztalható. Az eltérések 1/2 mintavételezés esetén is hasonlóak, azonban nagyságuk kisebb.

Gradiens módszer

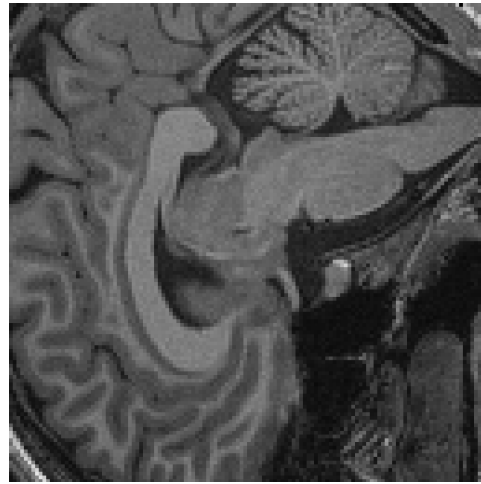
A Threshold módszerhez hasonlóan a Gradiens módszer optimális paramétere is függ a kép skálázásától. A Gradiens módszer esetén azonban nem a paramétert, hanem az alulmintavételezés után kapott képet skáláztam át a fantomok intenzitás-maximumának megfelelően. A kapott eredmények (23. ábra, 2. oszlop) nagy hasonlóságot mutatnak a másik két módszernél kapott eredményekkel. 1/3-os mintavételezési arány esetén a compressed sensinggel és a nullával kitöltött képeket összehasonlítva ugyancsak megfigyelhető, hogy a Gradiens módszerrel rekonstruált képek kevesebb műterméket tartalmaznak, illetve kisebb részletek is kivehetők. Az eredeti képpel összehasonlítva a rekonstruált képen továbbra is megfigyelhető az elmosódás, illetve ebből adódóan a finom részletek és élek hiánya.

Összegzés

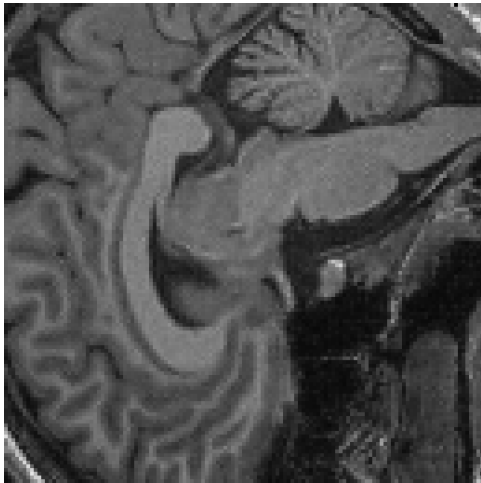
Összefoglalva elmondható, hogy a fantomok vizsgálatával kapott optimális paraméterekkel rekonstruálva a valós képeket – a nullával kitöltéssel összevetve – jobb eredményt kaphatunk. A compressed sensing alkalmazásával mindhárom módszer esetén sikerült csökkenteni a képen megjelenő műtermékeket, ezáltal élesebb, több részletet tartalmazó képet kaptam. A rekonstruált képeken megjelenő részletek szempontjából a legjobb eredmények a POCS módszer esetén kaphatók, míg a képen megjelenő műtermékeket a Gradiens módszerrel sikerült legnagyobb mértékben csökkenteni.



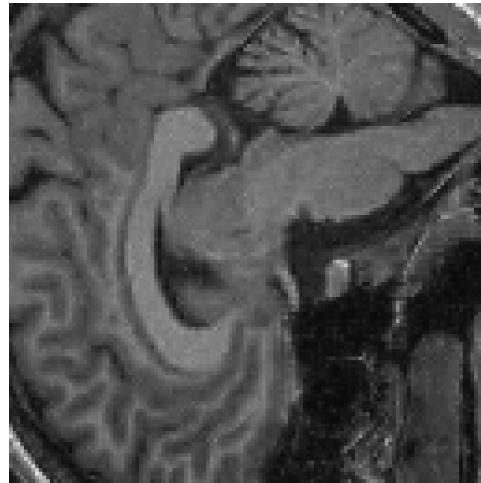
(a) 1/2 mintavételezés
Eredeti kép



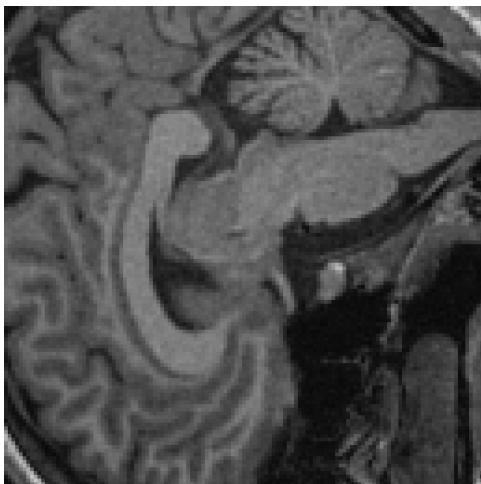
(b) 1/3 mintavételezés
Eredeti kép



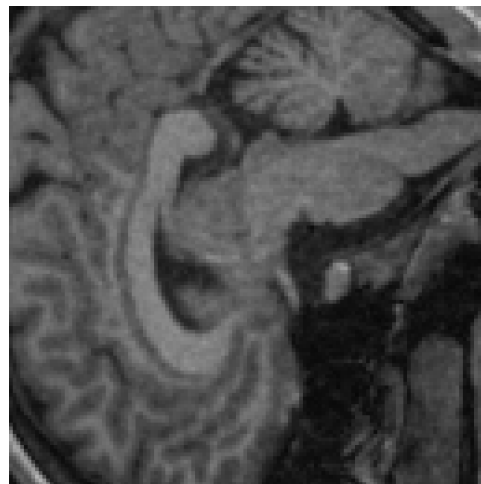
(c) 1/2 mintavételezés
Compressed sensing



(d) 1/3 mintavételezés
Compressed sensing

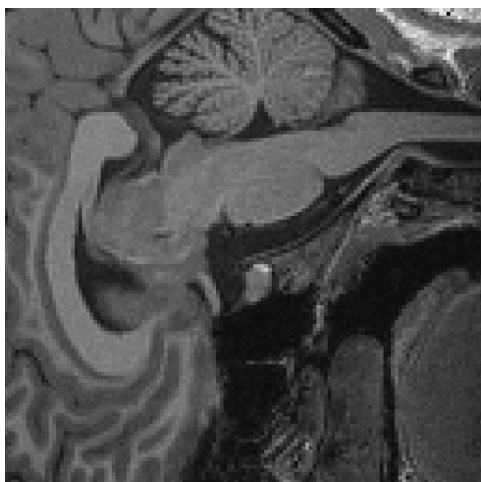


(e) 1/2 mintavételezés
Nullával kitöltött

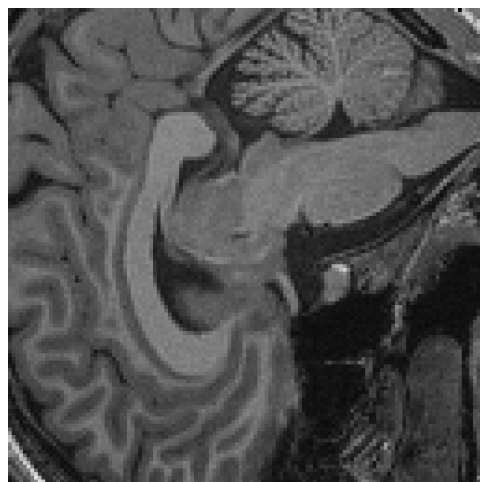


(f) 1/3 mintavételezés
Nullával kitöltött

22. ábra. POCS módszer, a nullával kitöltés és a compressed sensing rekonstrukció összehasonlítása.



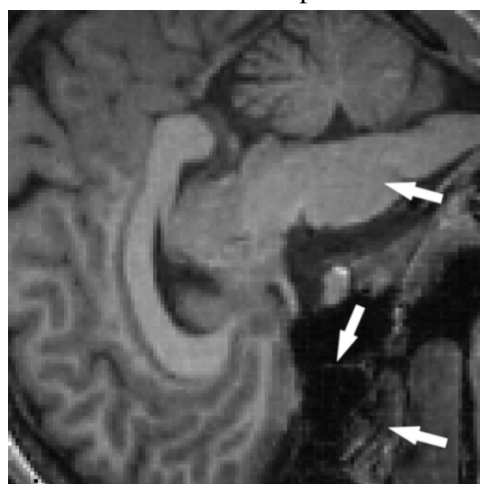
(a) Threshold módszer
Eredeti kép



(b) Gradiens módszer
Eredeti kép



(c) Threshold módszer
Compressed sensing



(d) Gradiens módszer
Compressed sensing



(e) Threshold módszer
Nullával kitöltött

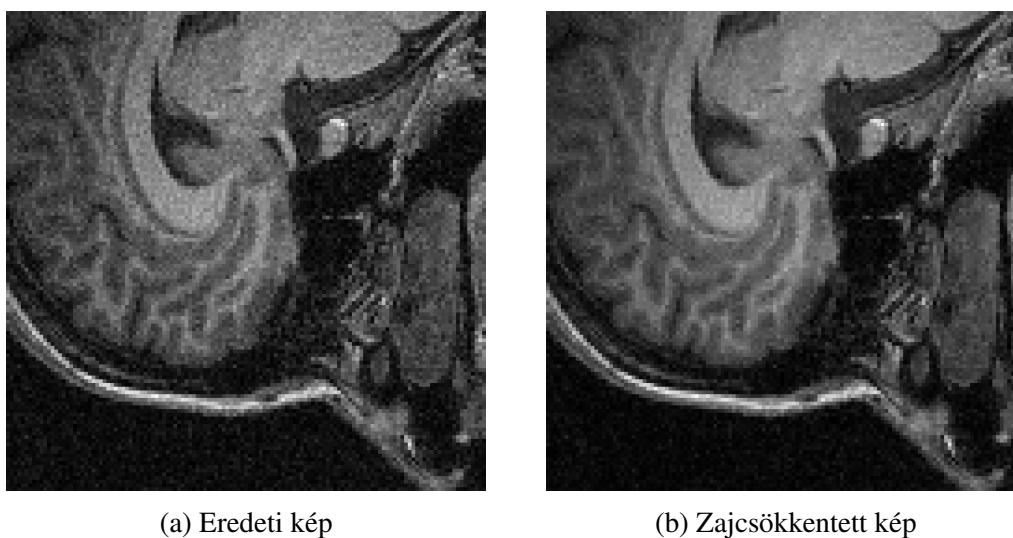


(f) Gradiens módszer
Nullával kitöltött

23. ábra. A nullával kitöltés és a compressed sensing összehasonlítása Threshold és Gradiens módszerek esetén 1/3 mintavételezés mellett.

6.2. Zajcsökkentés

Megvizsgáltam a gradiens módszer teljesen mintavételezett képen történő alkalmazásának zajcsökkentését is. Ehhez egy tekercs képét rekonstruáltam, mivel ennek zaja nagyobb, mint a tekercsek összegeként kapott képnek, ezért a zaj változása jobban megfigyelhető. A kapott eredményeken jól látható (24. ábra), hogy a megjelenő zaj a Gradiens módszer futtatása után jelentősen csökken, míg a kép élesség csak kis mértékben változik.



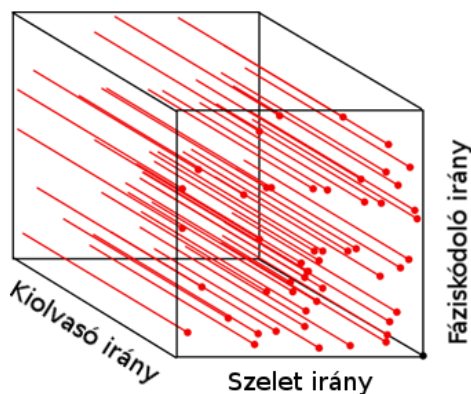
24. ábra. Gradiens módszer alkalmazása teljes mintavételezés mellett.

6.3. Compressed sensing 3 dimenzióban

A 2 dimenziós compressed sensing az MRI mérés folyamatából, illetve a véletlen mintavételezésből adódóan nem jelent jelentős sebességnövekedést, mivel a mintavételezett pontok eloszlása miatt a kiolvasóirányú sorok jelentős részében mintavételeznünk kell, viszont ezen sorokban az egyes k-térbeli pontok kihagyása nem jelent számottevő sebességnövekedést.

A módszer gyorsítása több módon is lehetséges, például a polárkoordinátákban történő mintavételezés. Az eljárás során azonban a descartes és polárkoordináták megfeleltetése miatt a rekonstrukció bonyolultabbá válik. Ennél egyszerűbb lehetőség a 3 dimenziós mérés. A szeleten belüli compressed sensinggel ellentétben nem szeletenként mintavételeznünk és rekonstruálunk, hanem az alulmintavételezést 3 dimenzióban valósítjuk meg. Mivel a kiolvasó irányú sorok teljes mintavételezése nem jelent számottevő idő-

veszteséget, ezért célszerű ezen sorokat teljesen mintavételezni, miközben a másik két irányban (fáziskódoló és szelet irány) a 2 dimenziós compressed sensingnél is használt véletlen maszk alapján mintavételezünk (25. ábra), ezzel csökkentve a mintavételezés idejét.



25. ábra. 3 dimenziós mintavételezés során használt maszk sematikus ábrája

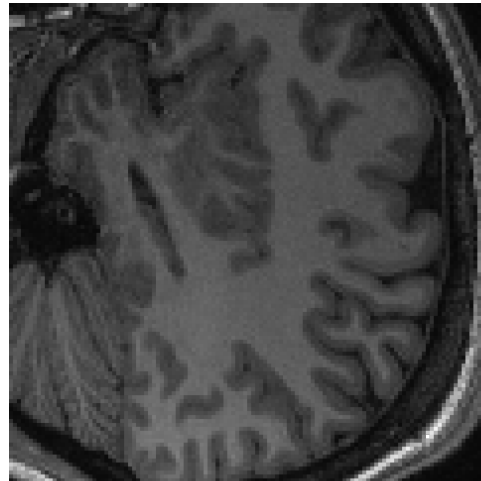
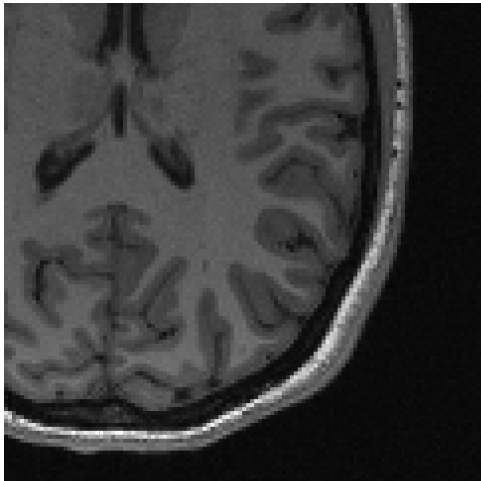
A rekonstrukciók során a három vizsgált módszer 3 dimenziós változatát használtam 1/3 mintavételezési arány mellett.

A korábban használt 3 dimenziós adatokat tekercsenként az említett mintavételezésnek megfelelően alulmintavételeztem, majd rekonstruáltam. Az így kapott 3 dimenziós képeket a 2 dimenzióban alkalmazott módon összegeztem (11. egyenlet). Az kapott képből szeleteket kiválasztva vizsgáltam a nullával kitöltés és a compressed sensing rekonstrukciók közötti eltéréseket.

A kapott 3 dimenziós képből két, eltérő irányú szeletet vizsgáltam, az első szelet a kiolvasó, míg a második a szelet irányra merőleges (26. ábra). Érdeemes megjegyezni, hogy a teljes kiolvasó irányú sormintavételezés miatt a nullával kitöltött képeken megjelenő műtermékek a 2 dimenzióban látottakhoz képest koherensebbek.

Eredmények

A kiolvasó irányra merőleges szelet esetén (27. ábra) megfigyelhető, hogy mindhárom módszert használva a nullával kitöltött képhez képest kisebb részletek is megjelennek, továbbá mindhárom esetben sikerült csökkenteni a zajszerűen megjelenő inkohereus műtermékeket. A rekonstruált képeken azonban, a 2 dimenziós eredményekhez hasonlóan kis mértékű elmosódás figyelhető meg. A részletek láthatósága szempontjából a legjobb eredményeket a POCS módszer biztosítja, míg elmosódás szempontjából a



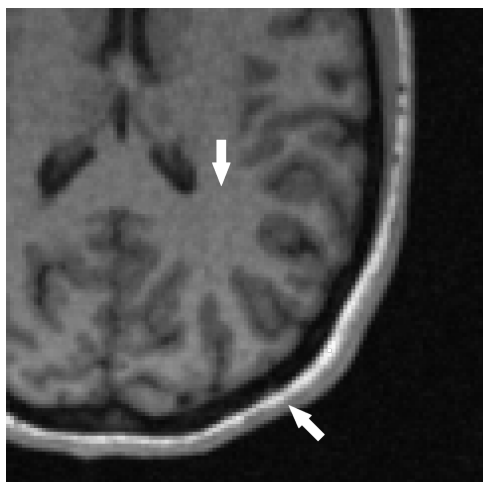
(a) Kiolvasó irányra merőleges szelet (150.) (b) Szelet irányra merőleges szelet (132.)

26. ábra. Eredeti, alulmintavételezés előtti (referencia) szeletek részletei.

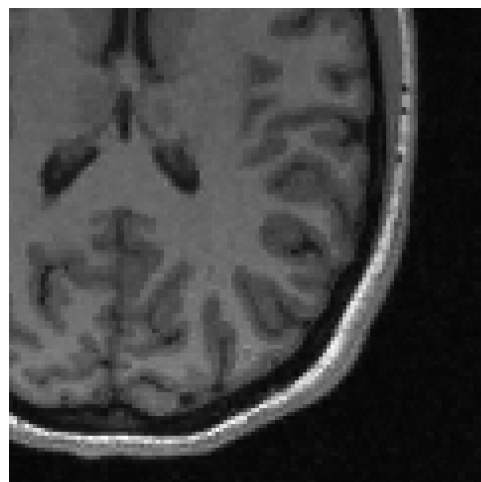
Gradiens és a POCS módszer eredményei hasonlóak, a Threshold módszerhez képest jobbak.

A szelet irányra merőleges szeletet vizsgálva (28. ábra) a nullával kitöltés esetén koherens műtermékek (vonalak) figyelhetők meg (ennek oka a kiolvasó irányú teljes mintavételezés). A compressed sensing rekonstrukciókkal kapott eredményeken ezen műtermékek csökkenése figyelhető meg, továbbá a képek kis mértékben élesebbek a nullával kitöltött képekhez képest. A műtermékek csökkentése szempontjából a módszereket összehasonlítva megfigyelhető, hogy a Threshold és a POCS módszereknél a műtermékek megjelenése jelentősen csökkent, ezzel szemben a Gradiens módszernél továbbra is megfigyelhető. Élesség szempontjából, hasonlóan a kiolvasó irányra merőleges szelethez a legjobb eredmények Gradiens és POCS módszerek esetén kaphatók.

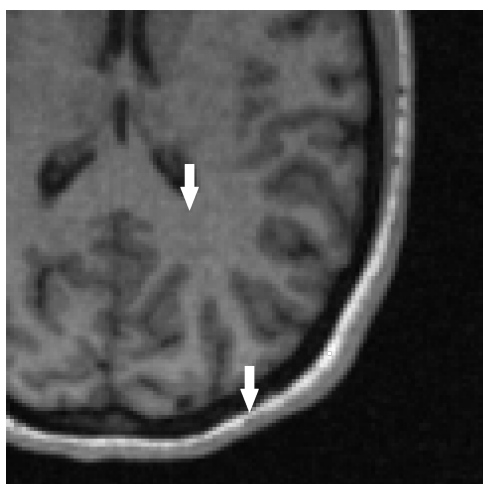
Összegzésképpen elmondható, hogy a nullával kitöltéssel összehasonlítva a compressed sensing rekonstrukciók minden szempontból jobb eredményt adnak. A különböző módszereket összehasonlítva látható, hogy a Gradiens módszert alkalmazva a koherens műtermékeket csak kis mértékben sikerült csökkenteni, viszont a Threshold módszerrel összevetve az elmosódás kisebb mértékű. Minden szempontot figyelembe véve azonban kijelenthető, hogy a legjobb eredmények a POCS módszer esetén kaphatók.



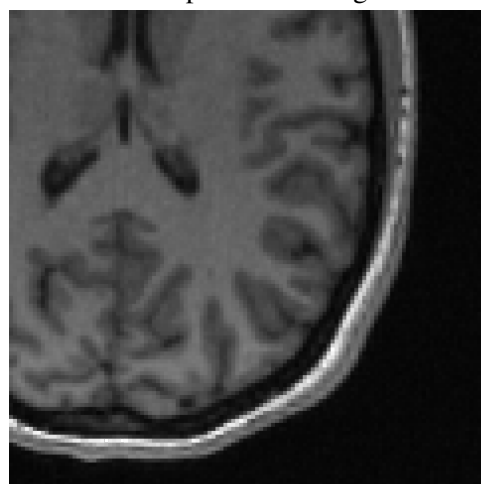
(a) POCS módszer
Nullával kitöltött



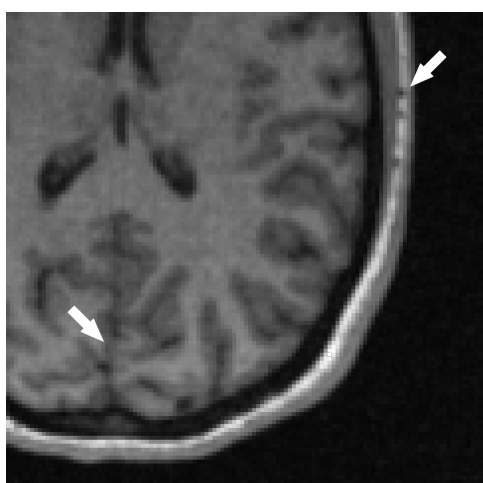
(b) POCS módszer
Compressed sensing



(c) Threshold módszer
Nullával kitöltött



(d) Threshold módszer
Compressed sensing



(e) Gradiens módszer
Nullával kitöltött

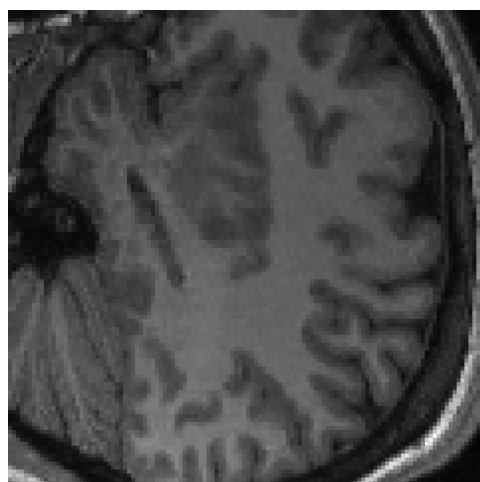


(f) Gradiens módszer
Compressed sensing

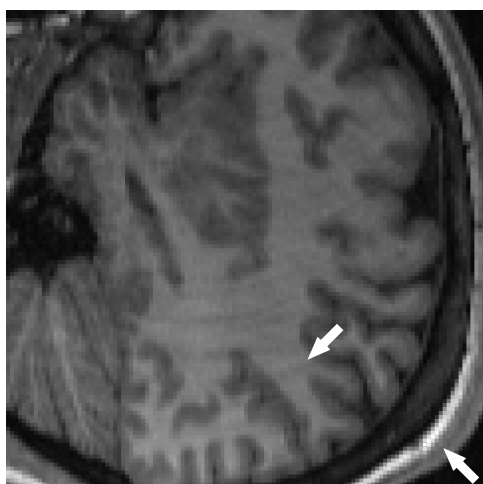
27. ábra. Kiolvasó irányra merőleges szelet nullával kitöltés és compressed sensing rekonstrukciók után. Az 1. oszlop képei közötti eltérést a véletlen mintavételezés okozza.



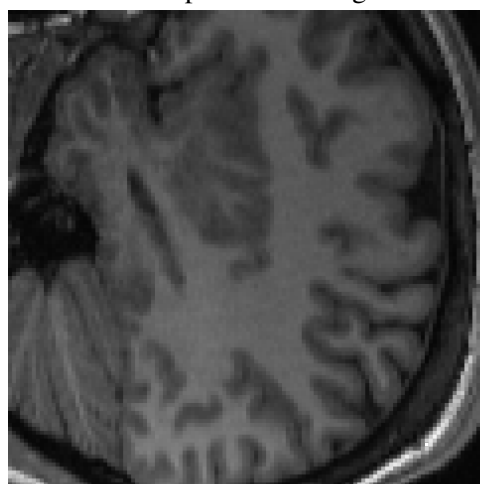
(a) POCS módszer
Nullával kitöltött



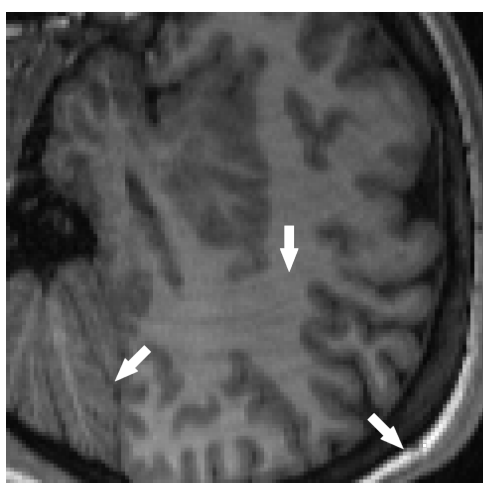
(b) POCS módszer
Compressed sensing



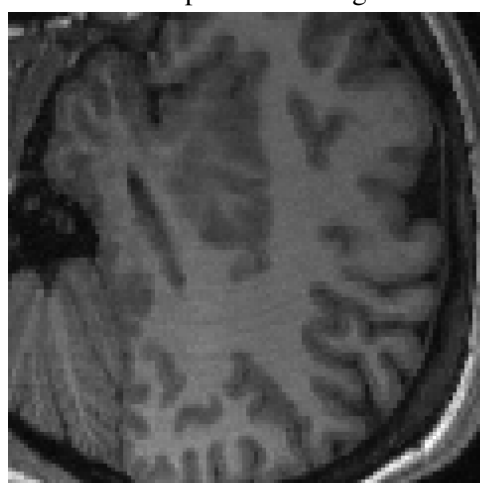
(c) Threshold módszer
Nullával kitöltött



(d) Threshold módszer
Compressed sensing



(e) Gradiens módszer
Nullával kitöltött



(f) Gradiens módszer
Compressed sensing

28. ábra. Szelet irányra merőleges szelet nullával kitöltés és compressed sensing rekonstrukciók után. Az 1. oszlop képei közötti eltérést a véletlen mintavételezés okozza.

7. Konklúzió

Diplomamunkám során sikeresen implementáltam a compressed sensing rekonstrukciós módszer három különböző változatát: a Threshold, POCS és Gradiens módszereket. A módszerek mindegyike függ egy-egy paramétertől, ezért a megfelelő rekonstrukció érdekében megvizsgáltam az egyes módszerek eredményeinek paraméterfüggését. A paramétervizsgálatot képtérben ritka képeken, illetve wavelet térben ritka fantomokon is elvégeztem. A kapott eredmények alapján sikerült megmutatni, hogy mindhárom módszer esetén lehetséges optimális paraméter megadása $1/2$, $1/3$ és $1/4$ mintavételezési arányok mellett.

A wavelet térben ritka fantomok vizsgálata során kapott eredményeket mért képeken ellenőriztem, amelyhez mért 3 dimenziós kép egy szeletét alulmintavételeztem és a korábban meghatározott paraméterekkel rekonstruáltam. A kapott eredményeket az eredeti képpel, illetve a nullával kitöltött képpel (az alulmintavételezett k-tér inverz-Fourier transzformáltjával) összehasonlítva megmutattam, hogy a compressed sensinggel rekonstruált kép a nullával kitöltött képpel összevetve kevesebb műterméket tartalmaz, valamint több, apró részlet is kivehető. Látható azonban, hogy az eredeti képhez képest a compressed sensinggel kapott képek elmosódottabbak.

Mindhárom módszer esetén megvizsgáltam a rekonstrukciók zajerősítését. A kapott eredmények alapján megmutattam, hogy a zajerősítés minden esetben 1-nél nagyobb és a mintavételezési arányt csökkentve folyamatosan nő. A zajerősítés térképeket megvizsgálva látható, hogy az élek mentén figyelhető meg nagy zajerősítés. A többi tartományon az eredeti és a rekonstrukció utáni zaj szórásának arány 1-hez közeli.

A Gradiens módszer lehetőséget ad a teljes ($1/1$ arányú) mintavételezésre, amely mért képek zajcsökkentésére használható. Sikerült meghatározni, hogy a compressed sensing ilyen módon történő alkalmazásával a képen megjelenő zaj 20-30%-al csökkenthető.

Mivel a 2 dimenziós compressed sensing a mérések során nem eredményez jelentős csökkenést a mérés idejében, ezért megvizsgáltam a módszer 3 dimenziós megvalósítását. A 3 dimenziós megvalósítás esetén a mintavételezés elrendezése miatt mérés sebességnövekedése várható. Mivel a 3 dimenziós mintavételezés során teljes kiolvásírányú sorokat mintavételezünk, ezért a nullával kitöltött képeken koherens műtermékek is megjelennek, melyeket mindhárom vizsgált módszerrel sikerült csökkenteni.

Az eredményeket összefoglalva, mind a zajerősítés, mind a műtermékek csökkentése illetve a részletek megjelenése alapján a legjobb eredményeket a POCS módszer esetén kaptam. Látható továbbá, hogy mindhárom módszer esetén a nullával kitöltéssel összehasonlítva a műtermékek és a részletek szempontjából is jobb eredményeket kapunk.

Fontos megjegyezni azonban, hogy a vizsgált módszerek algoritmusainak felépítése miatt a futásidő minden esetben jelentősen nagyobb, mint a nullával kitöltés esetén. A nullával kitöltés során egyetlen inverz-Fourier transzformációra van szükség, míg a Threshold és POCS módszerek esetén minden iterációs lépés során Fourier-transzformációt, wavelet-transzformációt, illetve azok inverzeit kell számítani. A Gradiens módszer futásidejének növekedése azonban ennél is nagyobb, mivel minden iterációs lépésben a gradiens optimalizáció lépésnagyságának kiszámítása során többszöri Fourier- illetve wavelet-transzformált számításra van szükség. Ez az idővesztés azonban az algoritmusok optimalizálásával csökkenthető. Az alulmintavételezés csökkenti a mérés elvégzéséhez szükséges időt, ami a páciens számára kényelmesebb vizsgálatot, illetve jobb mérési eredményeket jelenthet.

Hivatkozások

- [1] Michael Lustig, David L Donoho, Juan M Santos, and John M Pauly. Compressed sensing mri. *IEEE signal processing magazine*, 25(2):72–82, 2008.
- [2] Michael Lustig, David Donoho, and John M Pauly. Sparse mri: The application of compressed sensing for rapid mr imaging. *Magnetic resonance in medicine*, 58(6):1182–1195, 2007.
- [3] E Mark Haacke, Robert W Brown, Michael R Thompson, Ramesh Venkatesan, et al. *Magnetic resonance imaging: physical principles and sequence design*, volume 82. Wiley-liss New York:, 1999.
- [4] A Bernstein Matt, F King Kevin, and XH Zhou. Handbook of mri pulse sequences. *Academic Pr*, pages 2004–9, 2004.
- [5] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [6] Reeves Fletcher and Colin M Reeves. Function minimization by conjugate gradients. *The computer journal*, 7(2):149–154, 1964.
- [7] K. Veitz. Compressed sensing rekonstrukció megvalósítása mri képalkotáshoz. *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, TDK*, 2017.