Példatár

Válogatás az elmúlt évek zárthelyi feladataiból

v1.0

Készítette: Reiss Tibor

2011. július 29.

Ha bármilyen elírást, elszámolást, stb. találtok a feladatokban, írjatok egy e-mailt a reiss(kukac)reak(pont)bme(pont)hu címre. Köszönöm.

1. feladat - 2009/1.zh/1.

Tekintsük a következő bomlási sort: $^{90}Sr \rightarrow {}^{90}Y \rightarrow {}^{90}Zr$. Mekkora lesz a ^{90}Zr mennyisége mólban $t = 50$ nap után, ha kezdetben $m = 0,01\ g$ ^{90}Sr volt csak a rendszerben?
Adatok: $T_{Sr} = 28,9$ év, $T_{Zr} = 2,67$ nap, $M_{Sr} = 89,9078\ g/mól$, az ^{90}Y magszámának időfüggvénye:

$$N_Y(t) = \frac{\lambda_{Sr}}{\lambda_{Sr} - \lambda_Y}\ N_{0,Sr}\ e^{-\lambda_Y t}\left(1 - e^{-(\lambda_{Sr}-\lambda_Y)t}\right) \tag{1.1}$$

Megoldás:
Jelölés a továbbiakban: Sr - 1, Y - 2, Zr - 3
A stronciumot leíró differenciálegyenlet (keletkezés: nincs, fogyás: radioaktív bomlás miatt):

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \tag{1.2}$$

Kezdeti feltétel: $t = 0$-ban $N_1(t = 0) = N_{1,0}$
A diff. e. megoldása:

$$N_1(t) = N_{1,0}\ e^{-\lambda_1 t} \tag{1.3}$$

Az ittriumot leíró differenciálegyenlet (keletkezés: a stronciumból, fogyás: radioaktív bomlás miatt)

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \tag{1.4}$$

Kezdeti feltétel: $t = 0$-ban $N_2(t = 0) = 0$
Ez egy inhomogén diff. e. Kezdjük a homogén egyenlet, azaz $\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t)$ megoldásával:

$$N_{2,H}(t) = c\ e^{-\lambda_2 t} \tag{1.5}$$

ahol c egy konstans. Az inhomogén egyenlet megoldását megkapjuk például az állandók variálásának módszerével, azaz a c konstanst időtől függővé tesszük. Végeredményben az inhomogén diff. e. megoldását a következő formában keressük: $N_2(t) = c(t)e^{-\lambda_2 t}$. Ezt helyettesítsük vissza a (1.3) egyenletbe (ne felejtsük el, hogy c is függ t-től):

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{-\lambda_2 t} - c(t)(-\lambda_2)e^{-\lambda_2 t} = -\lambda_2 c(t)e^{-\lambda_2 t} + \lambda_1 N_1(t) \tag{1.6}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) e^{\lambda_2 t} \tag{1.7}$$

N_1 helyére a (1.3) egyenletet kell helyettesíteni, tehát:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \lambda_1 N_{1,0} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \tag{1.8}$$

Integráljuk mindkét oldalt 0-tól t-ig:

$$c(t) - c_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1) \tag{1.9}$$

Kihasználva a kezdeti feltételt ($N_2(t = 0) = 0$) kapjuk, hogy $c_0 = 0$. Ezzel:

$$\begin{aligned} N_2(t) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1) e^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \end{aligned} \tag{1.10}$$

amiből néhány átalakítással a (1.1) egyenletet kapjuk.
A cirkóniumot leíró differenciálegyenlet (keletkezés: az ittriumból, fogyás: nincs):

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t) \tag{1.11}$$

Kezdeti feltétel: $t = 0$-ban $N_3(t = 0) = 0$. Az előző diff. e.-be (1.10) egyenletből $N_2(t)$-t behelyettesítve és integrálva 0 és t között kapjuk:

$$\begin{aligned} N_3(t) &= \int_0^t \lambda_2 N_2(t)\, dt \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} \int_0^t (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})\, dt \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{1,0} \left(\frac{e^{-\lambda_1 t} - 1}{-\lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 t} - 1}{-\lambda_2} \right) \\ &= N_{1,0} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \Big(\lambda_1 (e^{-\lambda_2 t} - 1) - \lambda_2 (e^{-\lambda_1 t} - 1) \Big) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Számértékkel:

$$N_{1,0} = \frac{0,01\,\mathrm{g}}{89,9078\,\mathrm{g/mól}} N_A \tag{1.13}$$

$$t = 50\,\mathrm{nap} = 4,32 * 10^6\,\mathrm{s} \tag{1.14}$$

$$\lambda_1 = \frac{ln\, 2}{28,9\,\text{év}} \frac{1\,\text{év}}{3,1536 * 10^7\,\mathrm{s}} = 7,605 * 10^{-10} \frac{1}{s} \tag{1.15}$$

$$\lambda_2 = \frac{ln\,2}{2,67\,\mathrm{nap}}\,\frac{1\,\mathrm{nap}}{86400\,\mathrm{s}} = 3,005 * 10^{-6}\frac{1}{s} \tag{1.16}$$

Az eredmény mólban:

$$n_3(t = 50\,\mathrm{nap}) = \frac{N_3(t = 50\,\mathrm{nap})}{N_A} = 3,367 * 10^{-7}\,\mathrm{mól} \tag{1.17}$$

$$m_3(t = 50\,\mathrm{nap}) = n_3 M_3 \approx 3,03 * 10^{-5}\mathrm{g} \tag{1.18}$$

2. feladat - 2009/1.zh/2.

A csernobili balesetben kikerült radioaktív nuklidok között megtalálható volt a ^{131}I ($T_{1/2} = 8$ nap) és a ^{137}Cs ($T_{1/2} = 30,23$ év). Az üzemelő reaktorban körülbelül ötször annyi ^{137}Cs keletkezett, mint ^{131}I, amikor megtörtént a baleset. Feltéve, hogy a teljes inventár kikerült a környezetbe, mennyi idő elteltével lett a ^{137}Cs aktivitása ötszöröse a ^{131}I aktivitásának? Ez alatt az idő alatt (a kibocsátástól számítva) hányszor több ^{131}I bomlott el összesen, mint ^{137}Cs?

Megoldás:

Jelölés: ^{131}I - 1-es izotóp, ^{137}Cs - 2-es izotóp

$t = 0$ időpontban a kezdeti izotóparány:

$$\frac{N_{1,0}}{N_{2,0}} = \frac{1}{5} \tag{2.1}$$

Az aktivitás az idő függvényében (csak bomlás van):

$$A_i(t) = \lambda_i N_i(t) = \lambda_i N_{i,0} e^{-\lambda_i t} \tag{2.2}$$

Tehát az aktivitások aránya:

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2 N_{2,0} e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_1 N_{1,0} e^{-\lambda_1 t}} = 5 \tag{2.3}$$

Ebből t-t kell kifejezni (felhasználható (2.1)):

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{ln\,2}\,\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\,ln\frac{T_2}{T_1} = 83,498\ \mathrm{nap} \tag{2.4}$$

Az aktivitás definíciója: időegység elbomlott atomok száma. Tehát az aktivitás integrálja megadja az elbomlott atomok számát:

$$\begin{aligned} N_{i,elbomlott}(t) &= \int_0^t A_i(t)\,dt = \int_0^t \lambda_i N_i(t)\,dt = \int_0^t \lambda_i N_{i,0} e^{\lambda_i t} = \\ &= \lambda_i N_{i,0}\left[\frac{e^{-\lambda_i t}}{-\lambda_i}\right]_0^t = N_{i,0}(1-e^{-\lambda_i t}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Természetesen ugyanehhez az eredményhez jutunk, ha kivonjuk a kezdeti atomszámból a megmaradó atomok számát:

$$N_{i,elbomlott}(t) = N_{i,0} - N_i(t) = N_{i,0} - N_{i,0}e^{-\lambda_i t} = N_{i,0}(1-e^{-\lambda_i t}) \tag{2.6}$$

Ezzel a kérdezett mennyiség:

$$\frac{N_{1,0}(1-e^{-\lambda_1 t})}{N_{2,0}(1-e^{-\lambda_2 t})} = \frac{1}{5}\frac{(1-e^{-\lambda_1 t})}{(1-e^{-\lambda_2 t})} = \frac{1}{5}\frac{1-2^{-\frac{t}{T_1}}}{1-2^{-\frac{t}{T_2}}} = 38,202 \tag{2.7}$$

3. feladat - Feladatok1/7.

A csernobili balesetben kikerült radioaktív nuklidok között megtalálható volt a ^{131}I ($T_{1/2} = 8$ nap) és a ^{137}Cs ($T_{1/2} = 30,23$ év). Az üzemelő reaktorban körülbelül ötször annyi ^{137}Cs keletkezett, mint ^{131}I, amikor megtörtént a baleset. Feltéve, hogy a teljes inventár kikerült a környezetbe
(a) melyik izotóp járult hozzá nagyobb mértékben a kibocsátott radioaktív felhő aktivitásához a kibocsátás pillanatában?
(b) a kibocsátás után mennyi idővel lesz a két izotóp aktivitása egyenlő?
(c) A hasadások körülbelül 1%-ában keletkezik ^{131}I, és minden hasadásban 200 MeV energia szabadul fel. A csernobili reaktor teljesítményének (1000 MW) ismeretében határozzuk meg a ^{131}I mennyiségét a reaktor indítása után 24 órával, ha kezdetben nem volt jelen jód!
(d) Mekkora az egyensúlyi koncentráció, ha az aktív zóna térfogata 100 m^3?
Megoldás:
Jelölés: ^{131}I - 1-es izotóp, ^{137}Cs - 2-es izotóp
(a)

$$\frac{A_{1,0}}{A_{2,0}} = \frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_2 N_{2,0}} = \frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{1}{5} = 275,85 \tag{3.1}$$

Tehát a kibocsátás után napokig a ^{131}I aktivitása a meghatározó.
(b)

$$1 = \frac{A_1(t)}{A_2(t)} = \frac{\lambda_1 N_{1,0}e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 N_{2,0}e^{-\lambda_2 t}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{T_2}{T_1}\cdot 2^{(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1})t} \tag{3.2}$$

t-t kifejezve:

$$t = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} log_2 \frac{5T_1}{T_2} = 0,280\,\text{év} = 64,909\,\text{nap} \tag{3.3}$$

(c) A hasadások száma másodpercenként:

$$n_h = \frac{P \cdot 10^6\,\text{W}}{200 \cdot 10^6\,\text{eV} \cdot \frac{1\,\text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{19}\,\text{eV}}} = 8,00 \cdot 10^{19} \frac{1}{s} \tag{3.4}$$

A ^{131}I atomokat leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) + n_h \tag{3.5}$$

A kezdeti feltétel:

$$t = 0\text{-ban } N_{1,0} = 0 \tag{3.6}$$

Ez egy inhomogén differenciálegyenlet. A homogén differenciálegyenlet megoldása:

$$N_{1,H}(t) = c \cdot e^{-\lambda_1 t} \tag{3.7}$$

Az inhomogén differenciálegyenletet az állandók variálásával oldjuk meg:

$$N_1(t) = c(t) \cdot e^{-\lambda_1 t} \tag{3.8}$$

Ezt helyettesítsük vissza a (3.5) egyenletbe:

$$\frac{dc(t)}{dt} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 c(t) e^{-\lambda_1 t} = -\lambda_1 c(t) e^{-\lambda_1 t} + n_h \tag{3.9}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = n_h e^{\lambda_1 t} \tag{3.10}$$

Integráljunk határozottan 0 és t között:

$$c(t) - c(0) = \int_0^t n_h e^{\lambda_1 t} = n_h \left[\frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1} \right] \tag{3.11}$$

ahol c(0)-t majd a kezdeti feltételből kell meghatározni.

$$c(t) = c(0) + \frac{n_h}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - 1) \tag{3.12}$$

Visszahelyettesítve c(t)-t a (3.8) egyenletbe kapjuk:

$$N_1(t) = c(0)e^{-\lambda_1 t} + \frac{n_h}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - 1)e^{-\lambda_1 t} = c(0)e^{-\lambda_1 t} + \frac{n_h}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}) \tag{3.13}$$

t=0-ban a jobb oldal második tagja nulla, ezért a (3.6) egyenlet miatt c(0)=0. Tehát:

$$N_1(t) = \frac{n_h}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}) = 4,583 \cdot 10^{25} \tag{3.14}$$

Végül t helyére 24 órát helyettesítve (mértékegységre ügyelve) kiszámítható a keresett mennyiség:

$$N_1(24\,\text{óra}) = 4,583 \cdot 10^{25} \tag{3.15}$$

(d) A ^{131}I koncentrációja az aktív zónában:

$$cc_1(t) = \frac{N_1(t)}{V} \tag{3.16}$$

$$cc_1(24\,\text{óra}) = \frac{4,583 \cdot 10^{25}}{100 \cdot 10^6 \text{m}^3} = 4,583 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{cm}^3} \tag{3.17}$$

4. feladat - 2009/zh2/3.1

Egy reaktorban besugárzási kísérletet végeznek, mely során 30 mg ^{59}Co mintát 50 mg ^{27}Al fóliába csomagolva sugároznak be 10^{11} 1/cm^{2}s neutronfluxussal. A besugárzás végén a $^{59}Co(n,\gamma)^{60}Co$ (σ_a=30 barn) reakcióban keletkező ^{60}Co aktivitása 2280 Bq, azonban a folyamat során a $^{27}Al(n,\gamma)^{28}Al$ (σ_a=0,233 barn) reakció is lejátszódott, és az így keletkezett ^{28}Al aktivitása olyan nagy, hogy a mintát pihentetni kell. Számítsa ki, mennyi időt kell várni a besugárzás után, hogy az ^{28}Al aktivitása 1 kBq-nél kisebb legyen! Adatok: ^{60}Co felezési ideje 5,2 év; a ^{28}Al felezési ideje 2,24 perc; moláris tömegek: M_Co=59 g/mol, M_Al=27 g/mol; a számítások során vegyük úgy, hogy az alumínium és a kobalt fóliákat azonos neutronfluxus érte.
Megoldás:
A bomlási állandók:

$$\lambda_{Co} = \frac{ln\,2}{T_{Co}} = 4,227 * 10^{-9} \frac{1}{s} \tag{4.1}$$

$$\lambda_{Al} = \frac{ln\,2}{T_{Al}} = 5,157 * 10^{-3} \frac{1}{s} \tag{4.2}$$

Az (n,γ) reakcióval keletkezett izotópok számát leíró egyenlet:

$$N(t) = N_0(t) e^{-\lambda t} + \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \tag{4.3}$$

Most az első tag nulla, mivel a besugárzás előtt nincsenek ilyen izotópok.
A reakciógyakoriságok:

$$R_{Co} = \phi N(^{59}Co)\sigma(^{59}Co) = \phi \frac{m(^{59}Co)}{M(^{59}Co)} N_A \sigma(^{59}Co) = 9,188 * 10^8 \tag{4.4}$$

$$R_{Al} = \phi N(^{27}Al)\sigma(^{27}Al) = \phi \frac{m(^{27}Al)}{M(^{27}Al)} N_A \sigma(^{27}Al) = 2,599 * 10^7 \tag{4.5}$$

Ne felejtsük el, hogy 1 barn = 10^{-24}cm^2!
A Co-aktivitásból (2280 Bq) meghatározható az átalakult Co-atomok száma:

$$N_{Co} = \frac{A_{Co}}{\lambda_{Co}} = 5,394 * 10^{11} \tag{4.6}$$

Felhasználva (4.3), (4.4) és (4.6) egyenleteket kiszámíthatjuk a besugárzási időt:

$$t_{be} = -\frac{1}{\lambda_{Co}} ln \left(1 - \frac{\lambda_{Co} N_{Co}}{R_{Co}}\right) = 587,1\, s \tag{4.7}$$

A reakciógyakoriság és a besugárzási idő ismeretében kiszámítható a ^{28}Al aktivitása a besugárzás után:

$$A_{Al}(t_{be}) = \lambda_{Al} N_{Al}(t_{be}) = \lambda_{Al} \frac{R_{Al}}{\lambda_{Al}} (1 - e^{-\lambda_{Al} t}) = 2,473 * 10^7\, Bq \tag{4.8}$$

Ez az aktivitás a ^{28}Al felezési idejével exponenciálisan csökken:

$$A_{Al}(t_{be} + t_{pihen}) = A_{Al}(t_{be}) e^{-\lambda_{Al} t_{pihen}} \tag{4.9}$$

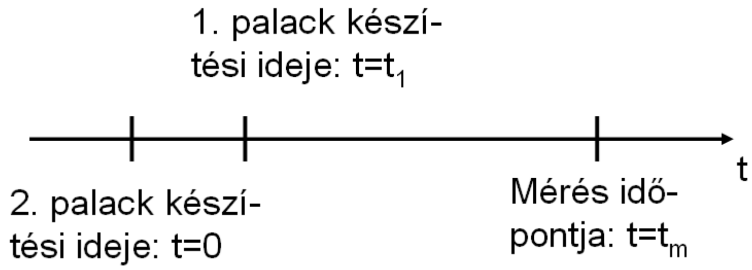
ahol $A_{Al}(t_{be} + t_{pihen}) = 1000\, Bq$.

$$t_{pihen} = -\frac{1}{\lambda_{Al}} ln \frac{A_{Al}(t_{be} + t_{pihen})}{A_{Al}(t_{be})} = 1961,4\, s \tag{4.10}$$

5. feladat - 2010/1.zh/3.2

Két borszakértő egy családi pincészetben talál két penészes, címke és dugónyomat nélküli borosüveget. A szakértők abban egyeznek meg, hogy a fajta és az elkészítés módja ugyanaz, viszont azt nem tudják eldönteni, hogy melyik az idősebb. Ezért egy fizikushoz fordulnak, aki rögtön tudta, hogy a megoldást a borban lévő trícium (^3H) adja meg, mivel az egy

β-bomló izotóp ($T_{1/2}$=12,32 év). Mindkét borból 1 cm^3-nyi mennyiséget folyadék szcintillációs detektorban lemért. Az első palackból vett minta összbeütése 2 óra alatt 32, míg a második palack boré 3 óra alatt 34. Mennyi a korkülönbség a két palack bor között?
Megoldás:
A mérési idő sokkal kisebb, mint a trícium felezési ideje, ezért feltehető, hogy a mérés alatt az aktivitás állandó, azaz az 1. palack aktivitása $A_1 = \frac{32}{2}\frac{1}{h}$, míg a 2.-é $A_2 = \frac{34}{3}\frac{1}{h}$, tehát $A_1 > A_2$. Utóbbiból következik, hogy a 2. palackot hamarabb készítették.



Az aktivitás időbeli alakulása:

$$A_i(t) = A_{i,0}e^{-\lambda t} \tag{5.1}$$

Tehát a mérés pillanatában:

$$\text{2. palack: } A_2(t_m) = A_{2,0}e^{-\lambda t_m} \tag{5.2}$$

$$\text{1. palack: } A_1(t_m) = A_{1,0}e^{-\lambda(t_m - t_1)} \tag{5.3}$$

Természetesen $A_{1,0} = A_{2,0}$, mivel mindkét palack ugyanabból a fajta szőlőből és ugyanazzal az eljárssal készült. Így:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{e^{-\lambda t_m}}{e^{-\lambda(t_m - t_1)}} = e^{-\lambda t_1} \tag{5.4}$$

Ebből a palackozások között eltelt idő:

$$t_1 = -\frac{1}{\lambda} ln\frac{A_2}{A_1} = 6,13 \text{ év} \tag{5.5}$$

6. feladat - 2010/1.zh/3.1

A ^{22}Na izotóp 90,3% valószínűséggel β^+, 9,7% valószínűséggel pedig elektronbefogással (electron capture, EC) bomlik. Írja fel a kétféle bomlási folyamatot (anyamag, leánymag, tömegszám, rendszám), ha tudjuk, hogy a neon, nátrium és magnézium rendszáma rendre 10, 11, 12! Legalább hány gramm ^{22}Na-ra van szükség, ha egy 5*10^{-3} bar-on üzemelő 1 dm^3-es neoncsövet 100 perc alatt szeretnénk megtölteni? A neongáz hőmérséklete legyen 20°C, a ^{22}Na felezési ideje 2,602 év. A bomlási folyamat során hány elektronbefogás történt? A Boltzmann-állandó k_B=1,38*10$^{-23}\frac{J}{K}$.
Megoldás:

$$\beta^+ : p^+ \rightarrow e^+ + n^0 \tag{6.1}$$

$$EC : p^+ + e^- \rightarrow n^0 \tag{6.2}$$

Tehát a bomlási folyamatok ugyanazt a magot eredményezik:

$$^{22}_{11}Narrow\beta^{+22}_{10}Ne \tag{6.3}$$

$$^{22}_{11}Na \xrightarrow{EC} {}^{22}_{10}Ne \tag{6.4}$$

A szükséges Ne-atomok száma az ideális gáztörvényből határozható meg:

$$pV = NkT \tag{6.5}$$

$$N_{Ne} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\text{bar} \cdot 10^5 \frac{Pa}{bar} \cdot 1\text{dm}^3 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{dm^3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot (20 + 273)K} = 1,237 \cdot 10^{20} \tag{6.6}$$

A Na mennyisége t=0-ban legyen N_0.
t idő elteltével a Na fogy az exponenciális bomlás törvényének megfelelően, azaz $N_0 e^{-\lambda t}$ atom marad. Az elbomlott Na atomok száma, ami megegyezik a keletkezett Ne atomok számával tehát:

$$N_{Ne} = N_0(1 - e^{-\lambda t}) = \frac{m_{Na}}{M_{Na}} N_A (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{m_{Na}}{M_{Na}} N_A (1 - 2^{-t/T}) \tag{6.7}$$

Ebből a Na tömegét kell kifejezni:

$$m_{Na} = \frac{M_{Na} N_{Ne}}{N_A} \cdot \frac{1}{1 - 2^{-t/T}} = 89,49\, g \tag{6.8}$$

Az elektronbefogások száma:

$$N_{EC} = 0,097 * N_{Ne} = 1,200 \cdot 10^{19} \tag{6.9}$$

7. feladat - 2009/zh2/3.2

Egy monoenergiás, homogén neutronnyalábot szeretnénk 1%-ra csökkenteni. Milyen vastag védelemre lenne szükségünk, ha ehhez H_2O és D_2O homogén keverékét használnánk, melynek keverési aránya $V_{H_2O}/V_{D_2O} = 2$? Adatok: a nehézvíz sűrűsége 1,1056 g/cm^3; a H, D és O moltömege rendre 1,005 g/mol, 2,0135 g/mol és 15,994 g/mol; a hatáskeresztmetszetek: H: σ_a=0,332 barn, σ_s=20,44 barn; D: σ_a=0,00053 barn, σ_s=3,39 barn; O: σ_a=0,00027 barn, σ_s=3,76 barn.
Megoldás:
A monoenergiás, homogén nyalábgyengülés egyenlete:

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma x} \tag{7.1}$$

ami megadja, hogy x vastagságú, Σ makroszkópikus hatáskeresztmetszettel rendelkező fal mögött mekkora lesz az intenzitás.
Most a totális hatáskeresztmetszetet kell használni, mivel szóródáskor változik a neutron energiája, azaz a monoenergiás nyaláb szempontjából elveszik. A makroszkópikus totális hatáskeresztmetszet kihasználva az egyik additivitási tételt (jelölés: H_2O - 1-es anyag, D_2O - 2-es anyag):

$$\Sigma_t = N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 \tag{7.2}$$

ahol N az atommagsűrűség (mértékegység: 1/cm^3). A hatáskeresztmetszekre vonatkozó második addivitási tétel értelmében ez a következő képpen is írható:

$$\Sigma_t = N_1(2\sigma_H + \sigma_O) + N_2(2\sigma_D + \sigma_O) \tag{7.3}$$

Az atommagsűrűség meghatározásához tekintsünk egy V=V_1+V_2 térfogatú keveréket. Ekkor:

$$N_1 = \frac{m_1}{M_1} N_A \cdot \frac{1}{V} = \frac{V_1\rho_1}{M_1} N_A \cdot \frac{1}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_1 N_A}{M_1} = 2,222 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3} \tag{7.4}$$

Itt kihasználtuk a keverékre vonatkozó térfogatarányt, azaz V_2=V,1/2, tehát:

$$V = V_1 + V_2 = V_1 + \frac{V_1}{2} = \frac{3}{2} V_1 \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{2}{3} \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3} \tag{7.5}$$

Hasonlóan kifejezhető V_2/V is:

$$V = V_1 + V_2 = 2V_2 + V_2 = 3V_2 \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{1}{3} \tag{7.6}$$

Tehát N_2:

$$N_2 = \frac{m_2}{M_2} N_A \cdot \frac{1}{V} = \frac{V_2 \rho_2}{M_2} N_A \cdot \frac{1}{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho_2 N_A}{M_2} = 1,094 \cdot 10^{22} \frac{1}{cm^3} \tag{7.7}$$

Ezzel a totális makroszkópikus hatáskeresztmetszet (ne felejtsük átváltani a barn-t: 1 barn=10^{-24}cm^2):

$$\Sigma_t = 1,12153 \frac{1}{cm} \tag{7.8}$$

És végül a védelem falának vastagsága:

$$x = -\frac{1}{\Sigma_t} ln \frac{I(x)}{I_0} = \frac{1}{\Sigma_t} ln \frac{I_0}{I(x)} = \frac{1}{1,12153 \frac{1}{cm}} ln\, 100 = 4,106\, cm \tag{7.9}$$

8. feladat - Feladatok1/12. és 2007/2.zh/2. és 2008/pótzh1/2.

Azonos számú ^{235}U és ^{238}U magból kiindulva mennyi ideig kell várni ahhoz, hogy a megmaradó ^{238}U atommagok száma a ^{235}U magok számának a 140-szerese legyen? A ^{235}U felezési ideje 7,04·10^7 év, a ^{238}U-é pedig 4.46·10^9 év.
Megoldás:
Jelölés: ^{235}U - 5-ös index, ^{238}U - 8-as index.
Tudjuk, hogy kezdetben a két izotóp atomszáma azonos, azaz:

$$N_{5,0} = N_{8,0} \tag{8.1}$$

A fogyás az exponenciális bomlás törvény szerint történik, természetesen a megfelelő bomlási állandóval, azaz:

$$140 = \frac{N_8(t)}{N_5(t)} = \frac{N_{8,0} e^{-\lambda_8 t}}{N_{5,0} e^{-\lambda_5 t}} = e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t} \tag{8.2}$$

$$t = \frac{1}{\lambda_5 - \lambda_8} ln\, 140 = \frac{1}{\frac{ln\, 2}{T_5} - \frac{ln\, 2}{T_8}} ln\, 140 = \frac{ln\, 140}{ln\, 2} \frac{T_5 T_8}{T_8 - T_5} = 5,1 \cdot 10^8 \text{ év} \tag{8.3}$$

9. feladat - 2007/1.zh/1.

Három sugárforrásunk van, kezdetben (t=0) mindegyik aktivitása 1μCi (1 Ci=3,7·10^{10} Bq). Felezési idejük rendre 1 s, 1 óra és 1 nap.
(a) A t=0 pillanatban hány radioaktív mag van az egyes forrásokban?
(b) Az első másodpercben hány atommag bomlik el az egyes forrásokban?
(c) Az első órában hány atommag bomlik el az egyes forrásokban?
Megoldás:
(a)

$$N_i = \frac{A_i}{\lambda_i} = \frac{A_1 T_1}{ln\,2} \tag{9.1}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 \tag{9.2}$$

$$N_1 = 5,338 \cdot 10^{10};\; N_2 = N_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 1,922 \cdot 10^{14};\; N_3 = N_1 \cdot \frac{T_3}{T_1} = 4,612 \cdot 10^{15} \tag{9.3}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Delta N_i &= \int_0^t A_i(t)\,dt = \int_0^t A_{i,0} e^{-\lambda_i t}\,dt = A_{i,0}\left[\frac{e^{-\lambda_i t}}{-\lambda_i}\right]_0^t \\ &= \frac{A_{i,0}}{\lambda_i}(1-e^{-\lambda_i t}) = \frac{A_{i,0} T_i}{ln\,2}(1-2^{-t/T}) \end{aligned} \tag{9.4}$$

$$\Delta N_1 = 2,669 \cdot 10^1 0;\; \Delta N_2 = 3,700 \cdot 10^{10};\; \Delta N_3 = 3,700 \cdot 10^{10} \tag{9.5}$$

(c)

$$\Delta N_1 \approx N_1;\; \Delta N_2 = \frac{1}{2} N_2 = 9,61 \cdot 10^{13};\; \Delta N_3 = 1,313 \cdot 10^{14} \tag{9.6}$$

10. feladat - 2007/1.zh/2.

Egy ásatáson talált épület fagerendájának korát kell meghatározni. Egy anyagminta ^{14}C tartalmát vizsgálva percenként átlagosan 2,1 bomlást detektálnak. Egy ugyanolyan fajtájú fából frissen vágott, azonos méretű darabban ez az érték 5,3 bomlás percenként. Mennyi az ásatás során talált gerenda kora, ha a ^{14}C felezési ideje 5715 év?
Megoldás:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \tag{10.1}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \cdot ln\frac{A(t)}{A_0} = -\frac{T}{ln\,2} \cdot ln\frac{2,1}{5,3} = 7633,0\,\text{év} \tag{10.2}$$

11. feladat - Feladatok1/2. és 2007/2.zh/1.

A ^{37}Cl atom tömegét tömegdublett módszerrel határozzuk meg. Számítsa ki a keresett értéket az alábbi, 10^{-6} u egységekben adott tömegkülönbségekből:
(a) m(C_2H) - m(^{37}Cl) = 41922,2±0,3
(b) m(C_2D_8) - m($^{37}ClH_3$) = 123436,5±0,1
(c) m($C_3H_6O_2$) - m($^{37}Cl_2$) = 104974,24±0,08
A feladatban számoljon úgy, hogy D=^{2}H, C=^{12}C és O=^{16}O, m(^{1}H)=1,007825 u, m(^{2}H)=2,014102 u, m(^{1}2C)=12,000000 u, m(^{1}6O)=15,994915 u!
Megoldás:
(a) 3C + H - 41922,2·10^{-6} u = Cl = 36,965903 u
(b) 2C + 16H -3H - 123436,5·10^{-6} u = Cl = 36,978289 u
(c) $\frac{1}{2}$(3C + 6H +2O - 104974,24·10^{-6} u) = Cl = 36,965903 u

12. feladat - Feladatok1/8. és 2008/zh1/1.

A ^{232}Th bomlási sorának végén a stabil ^{208}Pb izotóp áll. Egy kődarabban 3,65 g ^{232}Th, illetve 0,75 g ^{208}Pb van.
(a) Határozzuk meg az izotóparány alapján a kődarab korát, ha a ^{232}Th felezési ideje 1,4·10^{10} év!
(b) Ha a kő kellően porózus volna, és minden, a bomlás során keletkező α-részecske ki tudna szökni, és összegyűjtenénk hélumgázként, mennyi standard állapotú (p=1 bar, T=25°C) gázt lehetne nyerni ebből a kődarabból?
(c) Milyen feltételezések mellett igaz az alkalmazott gondolatmenet?
Megoldás:
Az α-, β- és γ-bomlások során az alábbi módon változik a rendszám és a tömegszám (Jelölés: X - anyamag, Y - leánymag, A - tömegszám, Z - rendszám):

$$^A_Z X \xrightarrow{\alpha} {}^{A-4}_{Z-2} Y\text{, mivel az } \alpha\text{-részecske egy } {}^4_2He^{++} \text{ atommag} \tag{12.1}$$

$$^A_Z X \xrightarrow{\beta^-} {}^{A}_{Z+1} Y\text{, mivel } n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}_e \tag{12.2}$$

$$^A_Z X \xrightarrow{\beta^+} {}^{A}_{Z-1} Y\text{, mivel } p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \nu_e \tag{12.3}$$

$$ {}_Z^AX \xrightarrow{EC} {}_{Z-1}^{A}Y, \text{ mivel } p^+ + e^- \to n^0 + \nu_e \tag{12.4} $$

$$ {}_Z^AX \xrightarrow{\gamma} {}_Z^A X \text{azaz a leánymag ugyanaz az izotóp, mint az anyamag} \tag{12.5} $$

(a) Tehát ahhoz, hogy a ^{232}Th-ból ^{208}Pb legyen, $(232-208)/4 = 6$ α-bomlás kell. A Th rendszáma 90, a Pb rendszáma 82. A 6 α-bomlás során a rendszám $6 \cdot 2 = 12$-vel, tehát $90 - 12 = 78$-ra csökken, így ezután még $82 - 78 = 4$ β-bomlás kell. Összességében:

$$ {}_{80}^{232}Th \to \ldots (6\alpha, 4\beta^-) \ldots \to_{80}^{208} Pb \tag{12.6} $$

A részletes bomlási sor megtalálható a következő helyen: `http://hepwww.rl.ac.uk/ukdmc/radioactivity/Th_chain/Th_chain.html` vagy `http://en.wikipedia.org/wiki/Decay_chain` -> "Thorium series". Innen leolvasható (illetve, ha a feladat kiírásban nem szerepel, akkor feltehető), hogy a közbenső magok felezési ideje jóval kisebb, mint a ^{2323}Th felezési ideje, azaz a kormeghatározás szempontjából úgy vehető, mintha a ^{232}Th azonnal ^{208}Pb-má alakul. Így a két izotóp aránya az idő függvényében:

$$ \frac{N_{Th}(t)}{N_{Pb}(t)} = \frac{N_{Th,0}e^{-\lambda_{Th}t}}{N_{Th,0}(1-e^{-\lambda_{Th}t})} = \frac{1}{e^{\lambda_{Th}t}-1} \tag{12.7} $$

Itt kihasználtuk, hogy a ^{208}Pb izotópok mennyisége egyenlő az elbomlott ^{232}Th-éval. Ebből az időt, t-t kell kifejezni:

$$ \begin{aligned} t &= \frac{1}{\lambda_{Th}} \cdot ln\left(\frac{N_{Pb}(t)}{N_{Th}(t)}+1\right) = \frac{1}{\lambda_{Th}} \cdot ln\left(\frac{m_{Pb}(t)M_{Th}}{m_{Th}(t)M_{Pb}}+1\right) \\ &= 4,168 \cdot 10^9 \text{ év} \end{aligned} \tag{12.8} $$

mivel

$$ N_{Th}(t) = \frac{m_{Th}(t)N_A}{M_{Th}} \text{ és } N_{Pb}(t) = \frac{m_{Pb}(t)N_A}{M_{Pb}} \tag{12.9} $$

(b) Bomlásonként 6 α-részecskem, azaz 6 He atom keletkezik. Tehát:

$$ N_{He} = 6 \cdot N_{Pb}(t) = 6 \cdot \frac{m_{Pb}(t)}{M_{Pb}} N_A \tag{12.10} $$

A térfogat:

$$ V = \frac{NkT}{p} = \frac{6m_{Pb}(t)N_AkT}{pM_{Pb}} = 5,338 \cdot 10^{-4}\, m^3 \approx 0,5\, l \tag{12.11} $$

(c) Feltételek:

- Az ólom előtti leányelemek felezési ideje jóval kisebb, mint a vizsgált időtartam és a thórium felezési ideje.

- A keletkezett ólom teljes mennyisége helyben marad, nem migrál.

13. feladat - Feladatok1/10. és 2008/pótzh1/1.

Mi a valószínűsége annak, hogy egy perc alatt a tüdőben egy ^{14}C bomlás történik? A légkör 0,03 térfogat%-a CO_2, a tüdő térfogata 3 liter, a belélegzett levegő 7,5%-a 4 másdoperc alatt cserélődik. Egy ^{14}C atomra 10^{12} ^{12}C atom jut. A ^{14}C felezési ideje 5715 év. p=1 bar, T=25°C.
Megoldás:
Először meg kell határozni, hogy mekkora a ^{12}C egyensúlyi aránya a ^{14}C-hez képest a tüdőben. Tegyük fel, hogy a be- és kilégzés folyamatos, ekkor 4 s alatt $3\,l \cdot 0,075 = 0,225\,l$ friss és ugyanennyi elhasznált levegő jut, illetve hagyja el a tüdőt. Az ezt leíró differenciálegyenlet (jelölés: t. - tüdőben lévő levegő, f. - friss levegő, x - ^{12}C és ^{14}C aránya):

$$\frac{dN_{^{14}C}}{dt} = -\lambda N_{CO_2}(3,0\,l)x_{t.} + \frac{N_{CO_2}(0,225\,l)x_{f.}}{4\,s} - \frac{N_{CO_2}(0,225\,l)x_{t.}}{4\,s} \tag{13.1}$$

Az első tag a tüdőben lévő bomlások számát írja le, a második a belélegzett levegővel bejutó ^{14}C atomok számát, a harmadik pedig a kilélegzett levegőben eltávozó ^{14}C atomok számát. Egyensúlyban nem változik a ^{14}C atomok száma, tehát a (13.1) egyenlet egyenlő nullával. Ebből az egyensúlyi állapotra vonatkozó tüdőben lévő ^{14}C/^{12}C arány:

$$x_{t.,eq.} = \frac{\frac{N_{CO_2}(0,225\,l)x_{f.}}{4\,s}}{\lambda N_{CO_2}(3,0\,l) + \frac{N_{CO_2}(0,225\,l)}{4\,s}} = \frac{1}{10^{12}} \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{0,075} \cdot \lambda + 1} \approx \frac{1}{10^{12}} \tag{13.2}$$

Mivel a felezési idő nagyon nagy, ezért csak a 8. tizedesjegyben van eltérés. Ezzel az 1 perc alatt elbomló ^{14}C atomok száma:

$$\Delta N = \lambda N_{CO_2}(3\,l) \cdot \frac{1}{10^{12}} \cdot 60\,s = 8,420 \cdot 10^{-4} \tag{13.3}$$

mivel

$$N_{CO_2}(3\,l) = \frac{pV}{kT} = \frac{10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \cdot 0,03 \cdot 10^{-2}}{1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{K} \cdot 298\,\mathrm{K}} = 3,648 \cdot 10^{18} \tag{13.4}$$

Azaz a^{14}C-től származó dózis elhanyagolható.

14. feladat - Feladatok1/11. és 2008/zh1/2.

Egy 10 méter hosszú cső egyik végén egy rövid, 10^8 neutront tartalmazó neutronimpulzust lövünk be, ami a cső másik oldalán egy céltárgyba csapódik. A neutronnyaláb sebessége 2200 m/s. A csövön való áthaladás ideje alatt hány neutron bomlik el, ha a szabad neutron felezési ideje 10,7 perc?
Megoldás:
A neutronok tartózkodási ideje a csőben (l - a cső hossza, v - a neutron sebessége):

$$\Delta t = \frac{l}{v} \tag{14.1}$$

Az elbomló neutronok száma:

$$\Delta N = N_0(1 - e^{-\lambda \Delta t}) = N_0(1 - 2^{-\Delta t/T}) = N_0(1 - 2^{-l/vT}) = 4,91 \cdot 10^2 \tag{14.2}$$

15. feladat - 2006/pótzh/1,2.

A szilícium-dioxid (SiO_2) sűrűsége 2,65 g/cm^3. A Si móltömege 28,08 g/mol, az oxigéné 16 g/mol. A Si totális mikroszkópikus hatáskeresztmetszete 2,36 barn, az oxigéné 6 barn.
a) Számítsd ki a totális makroszkópikus hatáskeresztmetszetet!
b) Milyen vastagságú SiO_2 réteg szükséges ahhoz, hogy egy, a rétegen áthaladó neutronnyaláb intenzitását az eredeti 1%-ra csökkentsük?
Megoldás:
a)

$$\Sigma_t = \sum_i N_i \sigma_{i,t} = N_{Si}\sigma_{Si,t} + N_O + \sigma_{O,t} \tag{15.1}$$

Az atommagkoncentrációkat a sűrűségből lehet meghatározni (figyelem: egy SiO_2 molekulában 2 O-atom van):

$$M_{SiO_2} = M_{Si} + 2M_O = 60,08\, g/mol \tag{15.2}$$

$$N_{Si} = \frac{\rho_{SiO_2}}{M_{SiO_2}} N_A = 2,646 \cdot 10^{22}\, \frac{1}{cm^3} \tag{15.3}$$

$$N_O = 2 \cdot \frac{\rho_{SiO_2}}{M_{SiO_2}} N_A = 5,293 \cdot 10^{22}\, \frac{1}{cm^3} \tag{15.4}$$

$$\Sigma_t = 0,380\, \frac{1}{cm}, \text{ mivel } 1\, barn = 10^{-24}\, cm^2 \tag{15.5}$$

b) A nyalábgyengülés egyenlete:

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma_t x} \tag{15.6}$$

Ebből x-re vagyunk kiváncsiak:

$$x = -\frac{1}{\Sigma_t} ln \frac{I(x)}{I_0} = -\frac{1}{0,380\frac{1}{cm}} ln\, 0,01 = 12,119\, cm \tag{15.7}$$

16. feladat - 2006/pótzh/3.

Egy reaktorban besugárzási kísérletet terveznek. A neutrontér vizsgálatára a minták mellett ^{197}Au-t is a zónába helyeznek. Viszont a kísérlet utáni kiértékelés miatt a besugárzandó arany mennyiségét meg kell becsülni, mert az aktivitás mérésekor fellépő hibák elkerülése érdekében a mért beütést ajánlatos 160 beütés/s alatt tartani. Becsülje meg a mérés alatt maximálisan a zónába helyezhető arany tömegét, ha a besugárzás 1 percig tart, Φ = 2,5·10^9 1/cm^{2}s neutronfluxusnak megfelelő teljesítményen és a besugárzás után maximum 1 napig pihentethető a minta. A lejátszódó magreakció ^{197}Au(n,γ)^{198}Au, a ^{198}Au felezési ideje T = 2,69 nap. A ^{197}Au izotóp aránya a természetes aranyban 100%. A reakció hatáskeresztmetszete 99,2 barn.
Megoldás:
Az állandó neutronfluxus melletti aktviációt leíró differenciálegyenlet (jelölés:l - leánymag, a - anyamag):

$$\frac{dN_l}{dt} = -\lambda_l N_l + N_a \Phi \sigma_a \tag{16.1}$$

A legtöbb esetben az anyamag egy stabil izotóp, továbbá elhanyagolható mennyiség alakul át belőle, azaz (16.1)-ben a jobboldal második tagja állandó, nem függ t-től. A homogén egyenlet megoldása (c egy konstans):

$$N_{l,H}(t) = c \cdot e^{-\lambda_l t} \tag{16.2}$$

Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszeréval keressük meg, azaz $c \equiv c(t)$. Így visszahelyettesítve (16.2)-t (16.1)-be (kevesebb írás érdekében $N_a \Phi \sigma_a \equiv R$):

$$\frac{dc(t)}{dt} e^{-\lambda_l t} - \lambda_l c(t) e^{-\lambda_l t} = -\lambda_l c(t) e^{-\lambda_l t} + R \tag{16.3}$$

Egyszerűsítés után:

$$\frac{dc(t)}{dt} = Re^{\lambda_l t} \tag{16.4}$$

Integráljunk határozottan 0-tól t_{be}-ig (a besugárzás időtartama):

$$c(t_{be}) - c(0) = \int_0^{t_{be}} Re^{\lambda_l t} dt = R\left[\frac{e^{\lambda_l t}}{\lambda_l}\right]_0^{t_{be}} = \frac{R}{\lambda_l}(e^{\lambda_l t_{be}} - 1) \tag{16.5}$$

Tehát az inhomogén (16.1) megoldása:

$$N_l(t_{be}) = \left(c(0) + \frac{R}{\lambda_l}(e^{\lambda_l t_{be}} - 1)\right) e^{-\lambda_l t_{be}} = c(0)e^{-\lambda_l t_{be}} + \frac{R}{\lambda_l}(1 - e^{-\lambda_l t_{be}}) \tag{16.6}$$

A c(0) konstanst a t=0 kezdeti feltételből határozzuk meg: $N_l(t = 0) = N_{l,0}$ és mivel (16.6) jobboldalán t=0-nál a 2. tag nulla, ezért $c(0) = N_{l,0}$. Tehát:

$$N_l(t_{be}) = N_{l,0}e^{-\lambda_l t_{be}} + \frac{R}{\lambda_l}(1 - e^{-\lambda_l t_{be}}) \tag{16.7}$$

Jelen esetben $N_{l,0} = 0$, mivel kezdetben nincs jelen ^{198}Au. Másrészről a besugárzás után a mintát pihentetjük, azaz t_p ideig bomlanak benne a ^{198}Au atomok. Továbbá a pihentetési idő után a beütés (azaz az aktivitás) $\lambda_l N_l(t_{be}) \leq 160\,\frac{1}{s}$, és $\lambda_l = \frac{ln\,2}{T_l}$. Végül, a ^{197}Au atommagkoncentráció a tömegből:

$$N_a = \frac{m_a N_A}{M_a} \tag{16.8}$$

Mindent összevetve kapjuk:

$$\lambda_l N_l(t_{be} + t_p) = \frac{ln\,2}{T_l} \cdot \frac{m_a N_A \Phi \sigma_a T_l}{ln\,2 \cdot M_a}\left(1 - e^{-\lambda_l tbe}\right) e^{-\lambda_l t_p} \leq 160\,\frac{1}{s} \tag{16.9}$$

Ebből a reaktorba helyezhető minta maximális tömege:

$$m_a \leq 160\,\frac{1}{s} \cdot \frac{M_a}{N_A \Phi \sigma_a} 2^{t_p/T_l} \frac{1}{1 - 2^{-t_{be}/T_l}} = 1,532 \cdot 10^{-3} g \tag{16.10}$$

17. feladat - 2006/pótzh/4.

A reaktorból érkező termikus neutronnyalábot bórsavas oldatot (víz+sav) tartalmazó vékony falú tartállyal akarjuk gyengíteni. A tartály vastagsága d = 0,2 m, felülete A = 5 m^2. A célunk az, hogy a merőlegesen érkező,

homogénnek tekinthető nyaláb a fal túloldalán 99,5%-kal gyengüljön. Hány gramm bórsavra van ehhez szükség? Adatok: A bórsav moláris tömege 61,83 g/mol, sűrűsége 1,4 g/cm^3, képlete H_3BO_3. A ^{10}B neutronbefogási hatáskeresztmetszete 3839 barn, a természetes bórban a ^{10}B előfordulási gyakorisága 19,9%.
Megoldás:
Jelölés: bórsav - b, víz - v.
A feladat szövegében nem szerepel, ezért tegyük fel, hogy a bórsav vízben való feloldásakor nem következik be térfogatcsökkenés, illetve -növekedés. Továbbá tegyük fel, hogy az oxigén, hidrogén és a ^{10}B-en kívüli bórizotópok hatáskeresztmetszete elhanyagolható a ^{10}B-hez tartozó érték mellett, azaz a bórsavas oldat totális hatáskeresztmetszete:

$$\Sigma_t = 0,199 \cdot N_b \cdot \sigma(^{10}B) \tag{17.1}$$

ahol a 0,199-es szorzó a ^{10}B előfordulási gyakorisága miatt jelent meg. A fenti képletben N_b az oldatban lévő bórsav atommagkoncentrációja!
A tartály vastagságából és a nyalábgyengüésből meghatározható a totális hatáskeresztmetszet:

$$I(d) = I_0 e^{-\Sigma_t d} \tag{17.2}$$

$$\Sigma_t = -\frac{1}{d} ln \frac{I(d)}{I_0} = 2,649 \cdot 10^1 \frac{1}{m} = 2,649 \cdot 10^{-1} \frac{1}{cm} \tag{17.3}$$

Tehát a megkívánt bórsavkoncentráció:

$$N_b = \frac{\Sigma_t}{0,199 \cdot \sigma(^{10}B)} = 3,467 \cdot 10^{20} \frac{1}{cm^3} \tag{17.4}$$

Az atommagkoncentrációt máshogy is ki tudjuk fejezni:

$$N_b = \frac{m_b}{M_b} N_A \frac{1}{V} \tag{17.5}$$

Ebből a keresett tömeg:

$$m_b = \frac{N_b M_b V}{N_A} = 37,582\, kg \tag{17.6}$$

Ellenőrzés: ha a teljes tartályt ($V = A \cdot d = 1\,\mathrm{m}^3$) bórsavval töltjük ki, akkor ennek tömege 1400 kg.

18. feladat - 2006/pótzh/5.

Az afrikai Gabonban lévő urántelepen a ^{235}U koncentrációja alacsonyabb, mint máshol a Földön. Emellett sok hasadási terméket is találtak. Az általánosan elfogadott magyarázat szerint valamikor régen itt "természetes atomreaktor" működhetett. Akkor még a természetes uránban a ^{235}U koncentrációja 3% volt. A talajvíz moderátorként lassította a neutronokat, és így megteremtődtek a láncreakció feltételei. Amikor a fejlődő hő elforrlata a moderátort, a láncreakció leállt. Visszahűlés után a telepet a talajvíz ismét elöntötte, és a "reaktor" újra beindult. Ilyen módon vált a rendszer önszabályozóvá. Kérdés: Hány évvel ezelőtt lehetett a természetes uránban a ^{235}U koncentrációja 3%? Adatok: a ^{238}U felezési ideje T = 4,5·10^9 év, a ^{235}U felezési ideje T = 7,1·10^{8}év. Jelenleg a természetes uránban található ^{235}U koncentrációja 0,71%.
Megoldás:
Jelölés: 235-ös izotóp - 5, 238-as izotóp - 8.

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_{5,0}e^{-\lambda_5 t}}{N_{8,0}e^{-\lambda_8 t}} \tag{18.1}$$

Ebből t-t kell kifejezni:

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} \cdot \frac{N_{8,0}}{N_{5,0}} = e^{\lambda_8 t - \lambda_5 t} = 2^{t/T_8 - t/T_5} \tag{18.2}$$

$$t = \frac{T_8 T_5}{T_5 - T_8} \cdot ln\left(\frac{N_5(t)N_{8,0}}{N_8(t)N_{5,0}}\right) = \frac{T_8 T_5}{T_5 - T_8} \cdot ln\frac{0,0071}{0,03} = 1,215 \cdot 10^9 \text{ év} \tag{18.3}$$

Természetesen ez egy felső korlát, mivel a láncreakció során a hasadások útján gyorsabban fogyott a ^{235}U.

19 . feladat

A reaktorból érkező termikus neutronnyalábot bórsavas oldatot (víz+bórsav) tartalmazó vékony falú, x=0,3 m vastag tartállyal akarjuk gyengíteni. Milyen nagy térfogatra van szükségünk, ha 40 kg bórsav (H_3BO_3) felhasználásával akarjuk a reaktorból merőlegesen érkező, homogénnek tekinthető nyalábot 80%-kal gyengíteni? A bórsav moláris tömege 61,83 g/mol; sűrűsége 1,4

g/cm^3; a ^{10}B neutronbefogási hatáskeresztmetszete 3839 barn, a természetes bórban a ^{10}B előfordulási gyakorisága 19,9%.
Megoldás:
A nyalábgyengülés egyenletéből kifejezhető a szükséges makroszkópikus hatáskeresztmetszet:

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma x} \Rightarrow \Sigma = -\frac{1}{x} ln \frac{I(x)}{I_0} = 5,365 \frac{1}{m} = 0,05365 \frac{1}{cm} \tag{19.1}$$

A ^{10}B neutronbefogási hatáskeresztmetszete nagyon nagy, ezért a többi izotóp hatáskeresztmetszete elhanyagolható, ezért:

$$\Sigma = N_{^{10}B} \sigma_{^{10}B} \Rightarrow N_{^{10}B} = 1,516 \cdot 10^{19} \frac{1}{cm^3} \tag{19.2}$$

$$N_B = \frac{N_{^{10}B}}{0,199} = 7,618 \cdot 10^{19} \frac{1}{cm^3} \tag{19.3}$$

$$N_B = \frac{m}{M} N_A \cdot \frac{1}{V} \tag{19.4}$$

$$V = \frac{m N_A}{M N_B} = 5,095 \, \mathrm{m}^3 \tag{19.5}$$

20. feladat

Egy reaktorban 0,25 cm^2 felületű, 0,1 mm vastag aranymintát sugároznak be. A termikus neutronok hatására a következő magreakció játszódik le: ^{197}Au(n,γ)^{198}Au. 1 perc besugárzás után, cm^2-enként mennyi ^{198}Au keletkezik? Mennyi időt kell várni a besugárzás után, hogy a minta aktivitása 200 Bq legyen? Adatok: a neutronflusux Φ = 2,5·10^9 1/cm^{2}s, az ^{198}Au felezési ideje T=2,69 nap, a ^{197}Au izotóparánya a természetes aranyban 100%, a reakció hatáskeresztmetszete: 99,2 barn, az arany sűrűsége: 19,38 kg/dm^3.
Megoldás:
A minta mérete kicsi, ezért feltehető, hogy a neutronfluxus a teljes mintában ugyanakkora (azaz az önárnyékolást elhanyagoljuk). Ekkor a reakciógyakoriság (jelölés: S - felület, A - aktivitás):

$$R = N\sigma\Phi = \frac{m}{M} N_A \sigma \Phi = \frac{S d \rho}{M} N_A \sigma \Phi = 3,641 \cdot 10^7 \frac{1}{s} \tag{20.1}$$

Az arany izotóp felezési ideje jóval nagyobb, mint a besugárzás időtartama, így a besugárzás alatti bomlások száma elhanyagolható, tehát a keletkezett

^{198}Au izotópok száma cm^2-enként:

$$n = \frac{N}{S} = \frac{Rt}{S} = 8,738 \cdot 10^9 \, \frac{1}{cm^2} \tag{20.2}$$

A besugárzás utáni aktivitás:

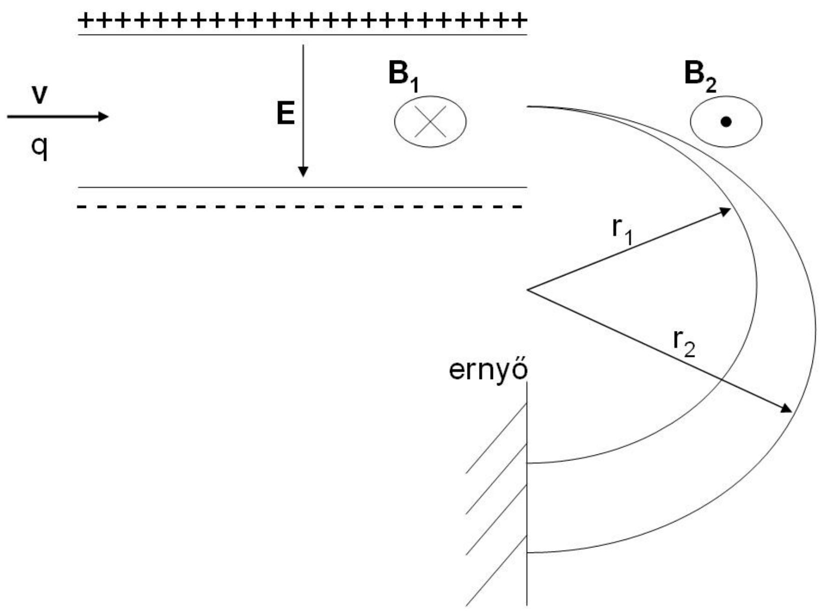
$$A_0 = \lambda N = \frac{ln\,2}{T} Sn = 6,515 \cdot 10^3 \,\mathrm{Bq} \tag{20.3}$$

A bomlástörvényből kiszámítható a szükséges pihentetési idő:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t_p} \Rightarrow t_p = -\frac{1}{\lambda} ln \frac{A(t)}{A_0} = \frac{T}{ln\,2} ln \frac{A_0}{A(t)} = 13,519 \,\mathrm{nap} \tag{20.4}$$

21. feladat - 2009/pótzh/3.1

Mekkora a távolság a tömegspektrométer ernyőn egy félkör megtétele után az egyszeresen ionizált ^{2}3Na és ^24Mg ionok becsapódási helye között? Adatok: Δ = 1,20333u; u=1,66053$\cdot 10^{-27}$ kg; sebességszelektor terei: E_s=1000 N/C, B=0,1 T; eltérítő mágneses tér indukciója: B=0,01 T!
Megoldás:
Egy tömegspektrométer leegysűresített rajza a következő:



Az első egység a sebességszelektor, ami az elektromos és mágneses terek megfelelő elrendezése eredményeképp csak bizonyos sebességű ionokat enged át. Newton törvényei értelmében az egyenes áthaladáshoz szükséges, hogy az erők eredője nulla legyen, azaz:

$$\underline{F}_e + \underline{F}_m = q\underline{E} + q\underline{v} \times \underline{B}_1 \tag{21.1}$$

A merőlegesség miatt meghatározható az ionok sebessége:

$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B} \tag{21.2}$$

Azaz a sebességszelektor függetlenül működik az ionok töltésétől!
A körpályán tartáshoz a centripetális erőt a második mágneses tér biztosítja, a mozgásegyenlet:

$$\underline{F}_{cp} = q\underline{E} + q\underline{v} \times \underline{B}_2 \tag{21.3}$$

Felhasználva a centripetális erő definícióját és a merőlegességet kapjuk:

$$m\frac{v^2}{r} = qvB_2 \tag{21.4}$$

Azaz a pálya sugara:

$$r = \frac{mv}{qB_2} \tag{21.5}$$

A pálya sugara annál nagyobb, minél nagyobb az ion tömege és sebessége, és annál kisebb, minél nagyobb az ion töltése, illetve minél erősebb a mágneses tér.
Egy félkör megtételeke után a keresett távolság:

$$2(r_2 - r_1) = 2\left(\frac{m_1 v}{qB_2} - \frac{m_2 v}{qB_2}\right) = \frac{2v}{qB_2}(m_1 - m_2) = \frac{2\Delta \cdot uv}{qB_2} \tag{21.6}$$

Behelyettesítve a sebességre kapott (21.2) egyenletet kapjuk:

$$2(r_2 - r_1) = \frac{2\Delta \cdot uE}{qB_1B_2} = 0,02498\,\mathrm{m} = 2,498\,\mathrm{cm} \tag{21.7}$$

22. feladat - 2009/pótzh/3.2

Egy borszakértő 150 éves bort vásárolt, de biztos, ami biztos ellenőrzés végett a fizikus barátjával megmérette a bor ^{3}H aktivitását. A mérés

$9{,}6\cdot10^{-7}$ Bq/m^3 aktivitáskoncentrációt adott. Hány évesnek tekinthető a bor a mérés alapján, ha a csapvíz aktivitás-koncentrációja a ^{3}H-ból adódóan 6 Bq/l? Milyen feltételezések mellett fogadható el az eredmény? A trícium felezési ideje: T=12,26 év!
Megoldás:
A palackozás után a borban lévő trícium bomlik, ezért csökken az aktivitáskoncentráció. Ezzel szemben a csapvízben közel állandó a trícium mennyisége, mivel kozmogén radionuklid lévén folyamatosan keletkezik. Az aktivitáskoncentrációra felírva a bomlás-törvényt kifejezhető az idő:

$$c(t) = c_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda} ln\frac{c(t)}{c_0} = \frac{T}{ln\,2}\,ln\,\frac{c_0}{c(t)} = 398,955\,\text{év} \tag{22.1}$$

Azaz a bor majdnem 400 éves. Ez viszont csak akkor igaz, ha 400 évvel ezelőtt ugyanakkora volt (a szőlőt érő esőben és a talajvízben) a természetes trícium-aktivitás mint a most. Például a hidrogénbombák felrobbantásakor megnőtt a trícium aktivitáskoncentrációja az egész világon.

23. feladat - 2009/pótzh/3.1

Az alkimisták régi álma volt, hogy aranyat állítsanak elő más anyagokból. Mára a tudomány megalkotta a hőn áhított „bölcsek kövét”, melynek álneve atomreaktor, így az anyagátalakítás ténylegesen megvalósítható. Ezt kihasználva új bevételi forrás gyanánt az NTI Oktatóreaktorában aranyat szeretnénk előállítani a következőképpen: ^{196}Hg(n,γ)^{197m}Hg (σ_a = 3200 barn, T(^{197m}Hg)=23,8 h) reakció után EC bomlás: ^{197m}Hg+e$^-$ $\rightarrow$ ^{197}Au+ν_e. Mennyi ideig kellene 10^12 1/cm^{2}s átlagos fluxussal besugározni egy 1 kg-os Hg mintát, hogy 1 mg arany keletkezzen? Adatok: a ^{196}Hg a természetes higanyban 0,147%-ban van jelen, a higany sűrűsége 13,53 g/cm^3.
Jelölés: ^{196}Hg - 1, ^{197}Hg - 2, ^{197}Au - 3, k - előfordulási gyakoriság.
1. Megoldás: Mivel a ^{197}Hg mindenképpen átalakul arannyá, ezért elég a higanyt addig besugározni, amíg összesen 1 mg-nyi ^{197}Hg keletkezik (elhanyagolható a moláris tömegbeli különbség). A reakciósebesség:

$$R = N_1\sigma\phi = \frac{m_1}{M_1}N_A k_1\sigma\phi \tag{23.1}$$

1 mg ^{197}Hg megtermeléséhez szükséges idő:

$$N_2 = \frac{m_2}{M_2}N_A = Rt \Rightarrow t = \frac{m_2 M_1}{m_1 M_2}\cdot\frac{1}{k_1\sigma\phi} = 59,05\text{ óra} \tag{23.2}$$

Ebben az esetben viszont végtelen sok ideig kell várni, amíg a ^{197}Hg atomok elbomlanak, mivel a felezési idő véges.
2. Megoldás: A "végtelen" sokáig várás lerövidíthető, ha a besugárzás folyamatos. A ^{197}Hg atomok számát leíró egyenlet:

$$N_2(t) = N_{2,0}e^{-\lambda_2 t} + \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda_2 t}) \tag{23.3}$$

Az első tag nulla, mivel kezdetben nincsenek ilyen atomok.
A ^{198}Au atomok az előbbi atomok bomlásából keletkeznek, az ezt leíró differenciálegyenlet:

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t) \tag{23.4}$$

Figyelem: a ^{197}Hg atomok száma időtől függő - a (23.3) egyenletet kell behelyettesíteni. Behelyettesítés után integráljuk az egyenletet:

$$\begin{aligned} N_3(t) &= \lambda_2 \int_0^t \frac{R}{\lambda_2}(1 - e^{-\lambda_2 t'})dt' = R\left[t - \frac{e^{-\lambda_2 t'}}{-\lambda_2}\right]_0^t \\ &= R\left(t + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \end{aligned} \tag{23.5}$$

Helyettesítsük be a reakciósebességet (23.1)-ből és rendezzük át az egyenletet:

$$\frac{m_3 M_1}{m_1 M_3} \cdot \frac{1}{k_1 \sigma \phi} = t + \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2} \tag{23.6}$$

Ez egy transzcendens egyenlet, numerikusan (próbálgatás vagy számítógép) oldható csak meg. A megoldás:

$$t \approx 90,5 \text{ óra} \tag{23.7}$$

24. feladat - 2009/pótzh/3.2

Egy monoenergiás, homogén neutronnyalábot szeretnénk 1%-ára csökkenteni. Ehhez bórsav (H_3BO_3) vizes oldatát használhatjuk fel. Milyen térfogatarányú ($V_{\text{bórsav}}/V_{\text{víz}}$) oldatot kell készítenünk, ha 1 cm vastag falat kell építenünk? Adatok: a ^{10}B befogási hatáskeresztmetszete 3839 barn, a bórsav moláris tömege 61,83 g/mol, sűrűsége 1,4 g/cm^3, a ^{10}B előfordulási gyakorisága 19,9%.
Megoldás:

Jelölés: bórsav - b, víz - v.
A nyalábgyengülés egyenletéből meghatározható a szükséges makroszkópikus hatáskeresztmetszet:

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma_t x} \Rightarrow \Sigma_t = \frac{1}{x} ln \frac{I_0}{I(x)} = 4,605 \, \frac{1}{cm} \tag{24.1}$$

A ^{10}B-en kívül minden más izotóp befogási hatáskeresztmetszete elhanyagolható. Továbbá a bór atomok száma megegyezik a bórsav molekulák számával, ezért:

$$N_b = \frac{\Sigma_t}{\sigma(^{10}B)k(^{10}B)} = 6,028 \cdot 10^{21} \, \frac{1}{cm^3} \tag{24.2}$$

A molekulasűrűség máshogy is kifejezhető:

$$N_b = \frac{m_b}{M_b} N_A \cdot \frac{1}{V} = \frac{\rho_b V_b N_A}{M_b V} = \frac{\rho_b V_b N_A}{M_b(V_v + V_b)} = \frac{\rho_b N_A}{M_b} \cdot \frac{1}{\frac{V_V}{V_b} + 1} \tag{24.3}$$

Ebből a keresett térfogatarány kifejezhető:

$$\frac{V_b}{V_b} = \frac{1}{\frac{\rho_b N_A}{N_b M_b} - 1} = 0,798 \tag{24.4}$$

Ellenőrzés: Számoljuk ki, hogy mekkora lenne a makroszkópikus hatáskeresztmetszet, ha tiszta bórsavat használnánk!

$$\Sigma_t = \frac{\rho_b N_A k(^{10}B)\sigma(^{10}B)}{M_b} = 10,379 \, \frac{1}{cm} \tag{24.5}$$

25. feladat - 2009/IVzh/2.1

A kozmikus sugárzásból származó neutronok az ^{14}N atommagban a következő magreakciókat válthatja ki:

$$^{14}N + n \rightarrow {}^{14}C + p \quad \text{és} \quad {}^{14}N + n \rightarrow {}^{12}C + {}^3 H \tag{25.1}$$

Az első reakcióban a β-bomló ^{14}C keletkezik (T=5730 év), míg a második reakcióban a szintén β-bomló ^{3}H (T=12,3 év). Mindkét izotóp a víz és a szén körforgása révén lejut a talajba, ill. onnan a növényi és állatvilágba. A széntermelő folyamat gyakorisága 10-szer nagyobb, mint a trícium termelő folyamatoké. (Feltételezzük, hogy csak az említett két reakcióban keletkeznek a kérdéses izotópok).

(a) Írja fel a két izotóp időbeli változását leíró differenciálegyenleteket.
(b) Az izotópok keletkezésének és fogyásának egyensúlya esetében adja meg a Földön lévő kozmikus izotópok aktivitásának és tömegének arányát!
(c) Az egyensúlyi aktivitásarányból kiindulva, ha hirtelen nincs több keletkezés, mennyi idő elteltével lesz az aktivitásarány egyenlő az egyensúlyi magaránnyal?
(d) Ezalatt az idő alatt mennyi volt az izotópok relatív fogyása?
Megoldás:
(a) Legyen a trícium keletkezés sebessége x. Ekkor a differenciálegyenletek:

$$\frac{dN_C(t)}{dt} = -\lambda_C N_C + 10x \quad \text{és} \quad \frac{dN_H(t)}{dt} = -\lambda_H N_H + x \tag{25.2}$$

(b) Egyensúly esetében (25.2)-ben a baloldal nulla, azaz:

$$\lambda_C N_C = 10x \quad \text{és} \quad \lambda_H N_H = x \tag{25.3}$$

Ebből az aktivitások aránya egyensúly esetén:

$$\frac{A_C}{A_H} = \frac{\lambda_C N_C}{\lambda_H N_H} = 10 \tag{25.4}$$

A tömegek aránya:

$$\frac{m_C}{m_H} = \frac{\frac{N_C}{N_A} M_C}{\frac{N_H}{N_A} M_H} = \frac{N_C}{N_H} \cdot \frac{M_C}{M_H} = 10 \cdot \frac{\lambda_H}{\lambda_C} \cdot \frac{M_C}{M_H} = 10 \cdot \frac{T_C}{T_H} \cdot \frac{M_C}{M_H} \cdot 10^{14} \tag{25.5}$$

(c) Az egyensúlyi magarány (25.4)-ből kifejezhető:

$$\frac{N_C}{N_H} = 10 \cdot \frac{\lambda_H}{\lambda_C} = 10 \cdot \frac{T_C}{T_H} \tag{25.6}$$

t=0-ban az aktivitások aránya 10 (25.4) alapján. t idő múlva a bomlás következtében változik a magarány, ezért az aktivitásarány is:

$$\frac{A_C(t)}{A_H(t)} = \frac{A_{C,0} e^{-\lambda_C t}}{A_{H,0} e^{-\lambda_H t}} = 10 \cdot e^{(\lambda_H - \lambda_C)t} \tag{25.7}$$

A feladat kérdése értelmében a t időpillanatban (25.6) és (**??**) jobb oldalao egyenlőek egymással, amiből t meghatározható:

$$t = \frac{1}{\lambda_C - \lambda_H} ln \frac{T_C}{T_H} = \frac{1}{ln\, 2} \cdot \frac{T_C T_H}{T_C - T_H} ln \frac{T_C}{T_H} = 109,258\, \text{év} \tag{25.8}$$

(d) A relatív fogyásokat szintén a bomlástörvány alkalmazásával kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta N_C(t)}{N_{C,0}} &= \frac{N_{C,0} - N_C(t)}{N_{C,0}} = 1 - \frac{N_C(t)}{N_{C,0}} = 1 - \frac{N_{C,0}e^{-\lambda_C t}}{N_{C,0}} \\ &= 1 - e^{-\lambda_C t} = 1 - 2^{-t/T_C = 1,313\%}\end{aligned} \tag{25.9}$$

Hasonlóan tríciumra:

$$\frac{\Delta N_H(t)}{N_{H,0}} = 1 - 2^{-t/T_H} = 99,788\% \tag{25.10}$$

26. feladat - 2009/IVzh2/2.1x

Egy monoenergiás, homogén neutronnyalábot szeretnénk 1%-ára csökkenteni. Milyen vastag védelemre lenne szükségünk, ha ehhez H_2O és D_2O homogén keverékét használnánk, melynek a keverési aránya (V_{H2O}/V_{D2O}=3)? Mekkora a szórási szabad úthossz ebben a keverékben? Ha csak H_2O-t és csak D_2O-t használnánk védelem céljából, melyikből kellene vékonyabb fal? Adatok: nehézvíz sűrűsége 1.1056 g/cm^3; a D és az O moltömege rendre 2,0135 g/mol és 15,9994 g/mol, a H moltömege 1,005 g/mol; hatáskeresztmetszetek D: σ_a=0,00053 barn, σ_s=3,39 barn; H: σ_a=0,332 barn, σ_s=20,44 barn; O: σ_a=0,00027 barn, σ_s=3,76 barn.
Megoldás:
Jelölés: könnyűvíz - k, nehézvíz - n.
A hatáskeresztmetszetek additivitása miatt:

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a \tag{26.1}$$

$$\sigma_k = 2\sigma_H + \sigma_O = 45,304\,\text{barn} \tag{26.2}$$

$$\sigma_n = 2\sigma_D + \sigma_O = 10,541\,\text{barn} \tag{26.3}$$

A keverékben lévő atommagkoncentrációk:

$$\begin{aligned}N_k &= \frac{m_k}{M_k}N_A \cdot \frac{1}{V} = \frac{\rho_k V_k N_A}{M_k V} = \frac{\rho_k N_A}{M_k} \cdot \frac{V_k}{V_k + V_n} \\ &= \frac{\rho_k N_A}{M_k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V_n}{V_k}} = 2,499 \cdot 10^{22}\end{aligned} \tag{26.4}$$

$$N_n = \frac{\rho_n N_A}{M_n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{V_k}{V_n}} = 8,281 \cdot 10^{21} \tag{26.5}$$

A keverék totális makroszkópikus hatáskeresztmetszete:

$$\Sigma_t = N_k\sigma_k + N_n\sigma_n = 1,219\,\frac{1}{cm} \tag{26.6}$$

A nyalábgyengülés egyenletéből meghatározható a szükséges vastagság:

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma_t x} \Rightarrow x = \frac{1}{\Sigma_t}\,ln\frac{I_0}{I(x)} = 3,778\,\mathrm{cm} \tag{26.7}$$

A szórási szabad úthossz:

$$l_s = \frac{1}{\Sigma_s} = \frac{1}{N_k\sigma_{k,s} + N_n\sigma_{n,s}} = 0,831\,\mathrm{cm} \tag{26.8}$$

A (26.2) és (26.3) alapján egyértelmű, hogy a könnyűvíz-fal vastagsága kb. 4-szer lesz kisebb, mint a nehézvíz-falé. A tiszta anyagok makroszkópikus hatáskeresztmetszete:

$$\Sigma_{k,t} = N_k\sigma_k = \frac{\rho_k N_A \sigma_k}{M_k} = 1,509\,\frac{1}{cm} \tag{26.9}$$

$$\tag{26.10}$$

$$\Sigma_{n,t} = N_n\sigma_n = \frac{\rho_n N_A \sigma_n}{M_n} = 0,349\,\frac{1}{cm} \tag{26.11}$$

A falvastagságok (26.7) mintájára:

$$x_k = \frac{1}{\Sigma_{k,t}}\,ln\frac{I_0}{I(x)} = 3,052\,\mathrm{cm} \tag{26.12}$$

$$x_n = \frac{1}{\Sigma_{n,t}}\,ln\frac{I_0}{I(x)} = 13,195\,\mathrm{cm} \tag{26.13}$$

27. feladat - 2007/pótzh2/1.

Egy atomreaktorban kezdetben összesen 2500 g ^{235}U található. Ha a reaktorban az átlagos neutronfluxus (térbeli és időbeli átlaga) $4 \cdot 10^{12}$ n/cm^{2}s, mennyi idő alatt ég ki 5 g 235U? A ^{235}U-ra σ_f=582 barn, σ_c=99 barn.
Megoldás:
A hatáskeresztmetszetek additivitása miatt:

$$\sigma_t = \sigma_f + \sigma_c = 681\,\mathrm{barn} \tag{27.1}$$

A kiégés sebességét a reakciósebesség határozza meg. A fogyás kevesebb, mint 1%, ezért a reakciósebesség időbeli változását elhanyagoljuk. Jelölés: m_1 - összes hasadóanyag, m_2 - kiégetendő hasadóanyag. Ezzel:

$$N_2 = \frac{m_2 N_A}{M} = Rt = N_1 \sigma_t \phi t \tag{27.2}$$

Ebből a szükséges idő kifejezhető:

$$t = \frac{m_2 N_A}{M N_1 \sigma_t \phi} = \frac{m_2 N_A}{M \frac{m_1}{M} N_A \sigma_t \phi} = \frac{m_2}{m_1 \sigma_t \phi} = 8,498\,\text{nap} \tag{27.3}$$

28. feladat - 2008/zh2/1.

Adott egy neutronnyaláb, amelyik 50%-ban tartalmaz gyors (nagy energiájú), 50%-ban pedig termikus (alacsony energiájú) neutronokat. Ezt egy 113-as tömegszámú kadmiumból készült, homogén lemezzel gyengítjük. Mekkorára csökken az összintenzitás egy 2 mm vastag lemezen való áthaladás során, ha a kadmium sűrűsége 8,67 g/cm^3, termikus neutronokra vonatkozó abszorpciós hatáskeresztmetszete 20800 barn, gyors neutronokra vonatkozó hatáskeresztmetszete elhanyagolható?
Megoldás:
A termikus neutronok gyengülése:

$$I_t(x) = I_{t,0} e^{-\Sigma x} = I_{t,0} e^{-N\sigma x} = I_{t,0} e^{-\frac{\rho}{M} N_A \sigma x} = I_{t,0} \cdot 6,752 \cdot 10^{-84} \approx 0 \tag{28.1}$$

Azaz már ez a 2 mm vastag Cd fólia is elnyeli szinte az összes termikus neutront, a fólia utáni nyalábintenzitás 50%-ra csökken (a gyors neutronok akadály nélkül áthaladnak).

29. feladat - 2008/zh2/2.

Egy atomreaktorban termikus neutronokkal egy tiszta ^{59}Co mintát sugárzunk be. A minta felülete 1 cm^2, vastagsága 0,03 cm, a kobalt termikus neutronokra vonatkozó aktivációs hatáskeresztmetszete pedig 30 barn, sűrűsége 8,9 g/cm^3. Két óra besugárzás után kivesszük a reaktorból, és megmérjük az aktivitását, ami 2,5 MBq-nek adódik. Mekkora volt a

besugárzó neutronfluxus, ha a keletkező ^{60}Co felezési ideje 5,2 év?
Megoldás:
Az aktivációt leíró egyenlet:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} + \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \tag{29.1}$$

Kezdetben nincs ^{60}Co, tehát a jobb oldal első tagja nulla. Mindkét oldalt beszorozva λ-val megkapjuk az aktivitást:

$$\lambda N(t) = A(t) = R(1-e^{-\lambda t}) = N_{59}\sigma\phi(1-e^{-\lambda t}) = \frac{\rho V N_A}{M_{59}}\sigma\phi(1-e^{-\lambda t}) \tag{29.2}$$

Ebből a keresett fluxus kifejezhető:

$$\phi = \frac{A(t)M_{59}}{\rho V N_A \sigma(1 - e^{-\lambda t})} = 1,008 \cdot 10^{12}\,\frac{1}{cm^2 s} \tag{29.3}$$

30. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/5.

Számítsa ki a termikus neutronok átlagos szóródási szabad úthosszát nehézvízben! σ_O^s = 4,2 barn; σ_D^s = 5,6 barn; ρ_{D_2O} = 1,1 g/cm^3.
Megoldás:

$$l_s = \frac{1}{\Sigma_s} = 1,968\,\mathrm{cm} \tag{30.1}$$

mivel

$$\Sigma_s = N_{D_2O}\sigma_{D_2O}^s = \frac{\rho_{D_2O}N_A}{M_{D_2O}}(2\sigma_D^s + \sigma_O^s) = 0,5082\,\frac{1}{cm} \tag{30.2}$$

31. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/4.

Egy $^{238}_{92}$U atommag α-bomlást szenved. Becsülje meg a Weizsäcker-féle félempírikus kötési formula alapján, hogy ezt hány β-bomlás fogja követni! Állandók: ϵ_V = 15,728 MeV; ϵ_F = 17,79 MeV; ϵ_C = 0,687 MeV; ϵ_S = 23,178 MeV.
Megoldás:

$$^{238}_{92}U \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}Th \tag{31.1}$$

Az energiaminimum elve alapján a leánymag tovább bomlik, amíg a neutronok és protonok száma megfelelő lesz. A megfelelő arányt a Weizsäcker-formulából tudjuk kiszámolni.

$$E(A,Z) = -\epsilon_V \cdot A + \epsilon_F \cdot A^{2/3} + \epsilon_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \epsilon_S \cdot \frac{(N-Z)^2}{A} \tag{31.2}$$

β-bomlásnál (β^-, β^+) és EC-nél a tömegszám állandó - lásd: (12.2)-(12.4). Tehát adott tömegszám (A) mellett keressük E(A,Z) minimumát a rendszám (Z) függvényében, azaz deriválni kell és a deriváltat a szélsőérték keresés értelmében egyenlővé kell tenni nullával. Először viszont helyettesíteni kell N-t (31.2)-ben, mivel A,N és Z közül csak kettő független:

$$A = N + Z \Rightarrow N = A - Z \tag{31.3}$$

$$E(A,Z) = -\epsilon_V \cdot A + \epsilon_F \cdot A^{2/3} + \epsilon_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \epsilon_S \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} \tag{31.4}$$

Most már deriválhatjuk (31.4)-t Z szerint:

$$\frac{\partial E(A,Z)}{\partial Z} = 0 + 0 + \epsilon_C \cdot \frac{2Z}{A^{1/3}} + \epsilon_S \cdot \frac{-4(A-2Z)}{A} = 0 \tag{31.5}$$

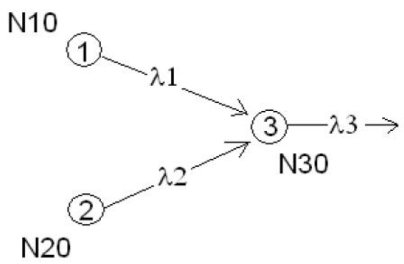
Megoldva az egyenletet kapjuk Z-t:

$$Z = \frac{4\epsilon_S}{\frac{2\epsilon_C}{A^{1/3}} + \frac{8\epsilon_S}{A}} = 91,308 \tag{31.6}$$

Azaz 1 vagy 2 β^--bomlás fogja követni az α-bomlást.
A tényleges bomlási sor megtalálható itt: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Decay_chain%284n%2B2,_Uranium_series%29.PNG`

32. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/9.

A következő ábrán egy bomlási lánc látható. A t=0 időpillanatban az 1., 2. és 3. anyag mennyisége rendre $N_{1,0}$, $N_{2,0}$ és $N_{3,0}$. Határozza meg az anyagmennyiségek időbeli változását leíró $N_1(t)$, $N_2(t)$ és $N_3(t)$ függvényeket!



Megoldás:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \Rightarrow N_1(t) = N_{1,0}e^{-\lambda_1 t} \tag{32.1}$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) \Rightarrow N_2(t) = N_{2,0}e^{-\lambda_2 t} \tag{32.2}$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = -\lambda_3 N_3(t) + \lambda_1 N_1(t) + \lambda_2 N_2(t) \tag{32.3}$$

A homogén egyenlet megoldása:

$$N_3(t)_H = c \cdot e^{-\lambda_1 t} \tag{32.4}$$

Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásával keressük meg.

$$N_3(t)_{IH} = c(t) \cdot e^{-\lambda_1 t} \tag{32.5}$$

Mivel (32.3)-ban a 3. és 4. tag alakja hasonló, csak az egyiket számoljuk végig. Deriváljuk és helyettesítsük vissza (32.3)-ba:

$$\frac{dc(t)}{dt}e^{-\lambda_3 t} - \lambda_3 c(t)e^{-\lambda_3 t} = -\lambda_3 c(t)e^{-\lambda_3 t} + \lambda_1 N_{1,0}e^{-\lambda_1 t} \tag{32.6}$$

Rendezzük az egyenletet, majd integráljunk t szerint:

$$\frac{dc(t)}{dt} = \lambda_1 N_{1,0}e^{(\lambda_3-\lambda_1)t} \tag{32.7}$$

$$\begin{aligned} c(t) - c(0) &= \int_0^t \lambda_1 N_{1,0}e^{(\lambda_3-\lambda_1)t'}dt' = \frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_3-\lambda_1}\left[e^{(\lambda_3-\lambda_1)t'}\right]_0^t \\ &= \frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_3-\lambda_1}(e^{(\lambda_3-\lambda_1)t} - 1) \end{aligned} \tag{32.8}$$

Tehát (hasonló járulékot ad (32.3) jobb oldalának 3. tagja):

$$N_3(t) = \left(\frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_3-\lambda_1}(e^{(\lambda_3-\lambda_1)t} - 1) + \frac{\lambda_2 N_{2,0}}{\lambda_3-\lambda_2}(e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} - 1) + c(0)\right)e^{-\lambda_3 t} \tag{32.9}$$

t=0 időpillanatban $N_3(0)=N_{3,0}$, ezért $c(0)=N_{3,0}$. Végeredményben:

$$N_3(t) = \left(\frac{\lambda_1 N_{1,0}}{\lambda_3-\lambda_1}(e^{(\lambda_3-\lambda_1)t} - 1) + \frac{\lambda_2 N_{2,0}}{\lambda_3-\lambda_2}(e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} - 1) + N_{3,0}\right)e^{-\lambda_3 t} \tag{32.10}$$

33. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/9.

Egy Z rendszámú A tömegszámú elem a db α, b db β^- és c db EC bomlást szenved.- Számítsa kia a keletkezett mag Z_2 rendszámát és A_2 tömegszámát!
Megoldás:
(12.1)-(12.4) alapján:

$$Z_2 = Z - 2 \cdot a + 1 \cdot b - 1 \cdot c \tag{33.1}$$

$$A_2 = A - 4 \cdot a \tag{33.2}$$

34. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/9.

Mennyi egy Σ_a makroszkópikus abszorpciós hatáskeresztmetszettel bíró anyagban a sugárgyengülésre vonatkozó századolási rétegvastagság?
Megoldás:
A sugárgyengülési egyenlet alapján:

$$I(x) = I_0 e{-}\Sigma_a x \tag{34.1}$$

$$x_{1/100} = -\frac{1}{\Sigma_a} ln\frac{1}{100} = \frac{4,605}{\Sigma_a} \tag{34.2}$$

35. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/9.

Mennyi a ${}^{56}_{26}$Fe nukleonjainak átlagos fajlagos kötési energiája MeV-ben?
Megoldás:
Ezt a (31.2) Weizsäcker-formulából tudjuk meghatározni:

$$\begin{aligned}
\frac{E(A,Z)}{A} &= \frac{E(56,26)}{56} = \\
&= -\epsilon_V + \epsilon_F A^{-1/3} + \epsilon_C \frac{Z^2}{A^{4/3}} + \epsilon_S \frac{(A-2Z)^2}{A^2}\Bigg|_{\substack{A=56\\Z=26}} = \\
&= (-15,728 + 4,650 + 2,168 + 0,118)\,\mathrm{MeV} = \\
&= -8,792\,\mathrm{MeV}
\end{aligned} \tag{35.1}$$

36. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/9.

Az NTI Oktatóreaktora 8 órán keresztül 100 kW teljesítményen üzemelt, ami körülbelül 10^{12} n/cm^{2}s termikus fluxusnak felel meg. Számítsa ki, hogy az üzemanyagot tartó kb. m = 5 kg tömegű ^{27}Al szerkezetnek mennyi lesz a γ aktivitása
(a) közvetlenül a leállás pillanatában?
(b) a leállás után 1 órával?
Feltesszük, hogy csak a $^{27}_{13}$Al(n,γ)$^{28}_{13}$Al magreakció megy végbe, melynek hatáskeresztmetszete E = 0,01 eV-nál $\overline{\sigma}$ ≈0,37 barn. $T_{1/2}$(^{28}Al) = 2,24 perc.
Megoldás:
Az aktivációs képlet:

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \tag{36.1}$$

Az első tag most nulla.
(a) Nincs hűtési idő tehát:

$$\begin{aligned} A(\text{leállás}) &= \lambda \cdot N(\text{leállás}) = N\sigma\phi(1 - e^{-\lambda t}) = \\ &= \frac{mN_A\sigma\phi}{M}(1 - 2^{-t/T}) = 4,111 \cdot 10^{13}\,\text{Bq} \end{aligned} \tag{36.2}$$

(b) A leállás után már csak bomlás van, tehát:

$$A(\text{leállás után 1 órával}) = A(\text{leállás}) \cdot e^{-\lambda t} = 3,553 \cdot 10^5\,\text{Bq} \tag{36.3}$$

37. feladat - Kísérleti magfizika zh 2009/zh1/9.

Az Oak Ridge-ben található gázdiffúziós üzemben uránt dúsítanak. A ρ = 1,695·10^{-3} g/cm^3 sűrűségű UF_6 gázt egy V = 10 cm^3 térfogatú α detektorba vezetik, és megmérik az aktivitását, ami A = 680,719 Bq-nek adódik. Mekkora a dúsítás értéke? Adatok: $T_{1/2}$(^{235}U) = 7,038·10^8 év, $T_{1/2}$(^{235}U) = 4,468·10^9 év. A dúsítás számolásához használja a következő képletet:

$$d = \frac{N_{U-235}}{N_{U-235} + N_{U-238}} \tag{37.1}$$

A fluor tömegszáma 19.
Megoldás:

Jelölés: ^{235}U - 5, ^{238}U - 8.
Az UF_6 moláris tömege:

$$M = d \cdot M_5 + (1-d) \cdot M_8 + 6 \cdot M_F \tag{37.2}$$

Tehát az UF_6 molekulák száma (ami egyben egyenlő az U atomok számával) a detektorban:

$$N_{UF_6} = N_U = \frac{\rho V N_A}{M} \tag{37.3}$$

A dúsításra vonatkozó (37.1)képletből kifejezhető N_5 és N_8 az urán atomok száma és a dúsítás függvényében:

$$N_5 = dN_U \qquad \text{és} \qquad N_8 = (1-d)N_U \tag{37.4}$$

Az aktivitás a ^{235}U és a ^{238} atomok α-bomlásából fakad, azaz:

$$A = \lambda_5 N_5 + \lambda_8 N_8 \tag{37.5}$$

Behelyettesítve (37.5)-be a (37.2)-(37.4) egyenleteket kapjuk:

$$A = (\lambda_5 d + \lambda_8(1-d)) \frac{\rho V N_A}{dM_5 + (1-d)M_8 + 6M_F} \tag{37.6}$$

Ebből már a dúsítás (d) kifejezhető:

$$\begin{aligned} d &= \frac{6M_F A + M_8 A - \lambda_8 \rho V N_A}{(\lambda_5 - \lambda_8)\rho V N_A + (M_8 - M_5)A} = \\ &= \frac{6M_F A + M_8 A - \frac{ln\,2}{T_8}\rho V N_A}{ln\,2\,\frac{T_8 - T_5}{T_8 T_5}\rho V N_A + (M_8 - M_5)A} = 0,703 = 70,3\,\% \qquad (37.7) \end{aligned}$$

(37.8)