

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

**Magfizikai folyamatok intenzív  
lézertérben**

Kis Dániel Péter

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Budapest, 2013

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. Az intenzív lézertérbeli belső konverzió elméletének alapjai</b>	<b>7</b>
2.1. A belső konverzió . . . . .	7
2.1.1. A belső konverzió kvantumelektrodinamikai leírása . .	10
2.2. Lézertér hatása az elektron-atommag rendszerre . . . . .	11
2.2.1. A rendszer Hamilton-operátora . . . . .	11
2.2.2. Koherens állapotok és a transzformált Hamilton-operátor	12
2.2.3. A Henneberger transzformáció . . . . .	15
2.3. A belső konverzió leírása lézerterekben . . . . .	16
<b>3. Lézerrel indukált belső konverzió</b>	<b>18</b>
3.1. Elektron-atommag-lézer kölcsönhatás $S$ -mátrix eleme . . . . .	19
3.1.1. Az $S$ -mátrix definiálása . . . . .	19
3.1.2. Az $S$ -mátrixelem kifejtése . . . . .	22
3.1.3. Az $S$ -mátrixelem meghatározása . . . . .	25
3.2. Átmeneti valószínűség és a belső konverziós együttható . . . .	29
3.3. A lézerimpulzus alakfüggvénye és az elektronállapotok . . . .	34
3.3.1. Gauss-típusú alakfüggvény . . . . .	34
3.3.2. Kezdeti és végállapotú elektron-hullámfüggvények . . .	37
3.4. Numerikus analízis: $^{99m}\text{Tc}$ izomér indukált belső konverziója .	40
3.5. Belső konverziós együtthatók számítása . . . . .	44
3.6. Az eredmények összefoglalása . . . . .	48

---

<b>4. A fotonukleáris effektus elméleti alapjai</b>	<b>49</b>
4.1. A fotonukleáris effektus, vagyis a $(\gamma, n)$ és $(\gamma, p)$ magreakciók	49
4.2. Lézertérbeli folyamatok mértékinvariáns leírása . . . . .	51
4.2.1. Mértéktranszformációk és a kölcsönhatási operátorok .	52
4.2.2. Mértékinvariáns mennyiségek, konzisztens leírás . . . . .	56
4.3. Nukleonglóriás (halo-) atommagok . . . . .	58
4.4. A ${}^8\text{B}(\gamma, p){}^7\text{Be}$ magreakció lézertérben . . . . .	59
<b>5. Fotonukleáris effektus intenzív lézertérben</b>	<b>61</b>
5.1. A vizsgált alapfolyamat . . . . .	61
5.2. A mértékinvariáns $S$ -mátrixelem kifejtése . . . . .	63
5.3. A mértékinvariáns hatáskeresztmetszet . . . . .	70
5.3.1. Véletlen polarizációjú $\gamma$ -foton esete . . . . .	72
5.3.2. Speciális eset I: a $\gamma$ -polarizáció $\vec{\epsilon} = \vec{e}_2$ . . . . .	76
5.3.3. Speciális eset II: a $\gamma$ -polarizáció $\vec{\epsilon} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ . . . . .	76
5.4. Numerikus eredmények . . . . .	77
5.5. Küszöb környéki fotonukleáris reakció . . . . .	82
5.5.1. A mértékinvariáns hatáskeresztmetszet a küszöb kör- nyékén . . . . .	82
5.5.2. Numerikus eredmények . . . . .	86
5.6. Konklúziók a lézertérbeli fotonukleáris effektussal kapcsolatban	89
<b>6. A disszertációhoz kapcsolódó tézisek</b>	<b>91</b>
<b>7. Köszönetnyilvánítás</b>	<b>95</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Az első lézer kifejlesztése óta eltelt közel fél évszázadban a koherens fényforrások fejlődése rohamos ütemben haladt előre. A lézerek intenzitásának növekedtével mind kísérleti, mind elméleti oldalról komoly érdeklődés alakult ki az ehhez fűződő nemlineáris optika és a nemlineáris spektroszkópia irányába. Az előbb említett folyamatok azonban feltételezik, hogy a kölcsönhatás ideje alatt az anyagi közeg állapota nem változik meg. Ha az intenzitás átlépi az  $I_{krit} \geq 5 \cdot 10^{16} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$  kritikus értéket, akkor a koherens sugárzási tér elektromos térerőssége meghaladja a H-atom Bohr-sugaránál érvényes térerősséget. Ekkora intenzitásoknál az anyag elveszti atomi struktúráját, és részben vagy teljesen plazma állapotba kerül. Ekkor alapvetően kétfajta, jellegében eltérő folyamattípus a jellemző: egyrészt olyan folyamatok játszódnak le, amelyeknél a plazma kollektív tulajdonságai a meghatározók (ezek a nemlineáris optika tárgykörébe tartoznak, mint például önfókuszálás, plazmarezgéseken történő indukált szórások), másrészt az olyan jelenségek, amelyek a töltött, szabad részecskék egyedi tulajdonságaival vannak kapcsolatban (például nemlineáris Compton-szórás, nemlineáris fotoeffektus, Möller-szórás).

A napjainkban zajló extrém nagy intenzitású lézerek fejlesztésének egyik fontos projektje az Európai Unió által kezdeményezett ELI (Extreme Light Infrastructure) program [1], amelynek többek között Magyarország is az egyik fő résztvevője. E program keretén belül fő célkitűzés a lézerfizikai jelenségek és az extrém nagy intenzitású lézer-anyag kölcsönhatások kísérleti tanulmányozása. A valós kísérleti lehetőségek ilyen mértékű közelsége adja az

aktualitását az egyébként jelentős múlttal rendelkező lézer és anyag kölcsönhatás elméleti vizsgálatának, a vizsgált témakörök elmélyítésének, kiterjesztésének és továbbfejlesztésének. E témakörbe tartozik az intenzív koherens elektromágneses (lézer) tér atommagfolyamatokat befolyásoló hatása.

Az intenzív elektromágneses tér és anyag kölcsönhatásának elméleti vizsgálatából már viszonylag hamar kiderült, hogy az atommaggal való közvetlen kölcsönhatás elhanyagolhatóan kicsi [2], a lézertér jelenléte lényegesen nem befolyásolja az atommagok radioaktív bomlásait. Így a lézertér az atommagnak az atomi elektronokkal történő kölcsönhatása révén, az elektronokra gyakorolt hatásán keresztül okozhat számottevő magfizikai effektust. Ezért az elméleti érdeklődés az atommag-elektron rendszer egy speciális elektromágneses átmenetének, a belső konverzióknak a lézertér által történt módosulására irányult. A belső konverzió esetében az atommag a gerjesztési energiáját közvetlenül egy atomi elektronnak adja át. A külső elektromágneses térrel az elektron-atommag kölcsönhatást megváltoztatva közvetett módon az atommag elektromágneses átmeneteit lehet módosítani. Különösen azok az esetek érdekesek, amelyekben a mag átmeneti energiája kisebb, mint az adott héjon lévő elektron kötési energiája, vagyis amikor a lézertérmentes esetben a folyamat energetikailag tiltott, mert ekkor a tényleges átmenet csak egy vagy több lézerfoton elnyelésével tud megvalósulni. Tehát lézer nélkül ezek a reakciócsatornák zártak, a lézertérben energetikailag pedig megengedetté válhatnak, vagyis így elvben a lézertérrel az atommag bomlási állandója megváltoztatható. Egy másik érdekes témakör a lézer által módosított fotonukleáris effektus, amely az ELI-ben tervezett extrém nagy intenzitású lézer fejlesztése kapcsán válhat kísérletileg is aktuálissá. A fotonukleáris effektus során egy  $\gamma$ -foton teljes energiáját az atommag egy kötött nukleonjának adja át, amely így szabad állapotba kerül. Amennyiben ez a reakció lézertér jelenlétében megy végbe, akkor ez a nemlineáris fotoeffektus egy speciális esetének tekinthető, amely hasonló az atomfizikából ismert lézer-asszisztált röntgenabszorpcióhoz. A lézer által módosított fotonukleáris effektus pedig már a lézer és az atommag közvetlen kölcsönhatásának következménye.

A disszertációban az előbbieken említett két jelenségkör, a belső konverzió és a fotonukleáris effektus intenzív lézertérben nem-rezonáns módon le-

zajló folyamatait vizsgálom. Az utóbbi megszorítás azt jelenti, hogy a gamma-és a lézerfoton energiája illetve ezek tetszőleges kombinációinak egyike sem egyezik meg két atomi vagy magnívó energiakülönbségével. A jelenségek leírását nem-relativisztikus, időfüggő perturbációs számítással végeztem félklasszikus közelítésben, vagyis az anyagi rendszereket (források) (atommag, nukleonok, elektron) kvantummechanikailag kezeltem, de az elektromágneses sugárzás leírására klasszikus tereket használtam.

A disszertáció tematikailag két fő részre bontható: az első részben (2. és 3. fejezetek) a lézerrel indukált belső konverzióról, a második részben pedig (4. és 5. fejezetek) a lézertérrel módosított fotonukleáris effektusról lesz szó. A második fejezetben a belső konverzió és az intenzív lézertérbeli belső konverzió megértéséhez nélkülözhetetlen elméleti alapokat (2.1.-2.2. szakaszok) továbbá az ebben a témakörben elért eddigi eredményeket (2.3. szakasz) mutatom be. Külön hangsúlyt helyezek a lézertér-elektron-atommag csatolt rendszer kvantummechanikai leírására, kiemelve a Henneberger-traszformációval elérhető speciális kölcsönhatási Hamilton-operátorok célszerűségét.

A harmadik fejezetben egy impulzus-lézertérben lezajló belső konverziós folyamat leírásával kapcsolatos kutatásaim eredményeit mutatom be. Első lépésként meghatározom ennek a folyamatnak az elektromos multipól átmenetek esetében érvényes  $S$ -mátrixelemét (3.1. szakasz), majd ebből származtatom a folyamat átmeneti valószínűségét. Mivel gyakorlati szempontból ez nem a legjellemzőbb paraméter, ezért az átmeneti valószínűségből meghatározom a belső konverziós együtthatót. Mindkét mennyiséget – az átmeneti valószínűséget és a belső konverziós együtthatót is – a lézertér impulzusalakja és az elektron-hullámfüggvények tekintetében általánosan adom meg (3.2. szakasz). Ezután a konkrét numerikus analízis érdekében modellrögzítést végzek, amely során a lézer impulzusalakját Gauss-típusú burkolóval írom le, míg a végállapotú elektron-hullámfüggvényének nem-relativisztikus Coulomb-állapotokat választok (3.3. szakasz). Az immáron explicit alakban megadott belső konverziós együtthatót több izomér esetében a lézertér nélkül tiltott belső konverziós átmenetekre numerikusan is meghatározom, valamint a  $^{99m}\text{Tc}$  izomér  $2p_{3/2}$  átmenetére paraméterérzékenység-vizsgálatot végzek, ezzel is körüljárva a lézerimpulzusnak a kérdéses folyamatra gyakorolt hatá-

sát (3.4.-3.5. szakaszok).

A negyedik fejezetben egy új témakört, nevezetesen a fotonukleáris effektust, illetve ennek a lézertérben megvalósuló folyamatát tekintem át. Először magát a fotonukleáris effektust mint magreakciót mutatom be, érintőlegesen egy-két példán keresztül ismertetve az ebben a témakörben (lézertér nélkül) elért kísérleti és elméleti eredményeket (4.1. szakasz). Külön hangsúlyt helyezek a sugárzási tér és az anyag kölcsönhatásának leírásában megjelenő mértékinvariancia problémakörére, ennek kapcsán bemutatom az  $rE$  és  $pA$  mértékekben való számolás egyenértékűségét, majd megadom a mértéktranszformációk szempontjából invariáns (fizikai) és nem invariáns (nem-fizikai) mennyiségeket (4.2 szakasz). Kitérek továbbá a halo-atommagok speciális tulajdonságaira és egyszerű elméleti leírásukra (4.3. szakasz), ami a következő fejezetben alkalmazott számítások megértéséhez fontos. A fejezet végén pedig röviden vázolom egy, a lézertérben végbemenő fotonukleáris effektus elméleti leírásával foglalkozó, a nemzetközi irodalomban megjelent cikkel kapcsolatos bíráló észrevételeimet, miszerint a számítások során a cikkben több hibát is elkövettek, többek között mértékinvarianciát sértő  $S$ -mátrixelemet határoztak meg (4.4. szakasz).

Az ötödik fejezetben a fotonukleáris effektus mértékinvariáns leírásával kapcsolatos eredményeimet mutatom be. A proton kibocsátásával járó fotonukleáris effektus alapfolyamatának ismertetése után a mértékinvarianciát, valamint a kimenő proton és a vég-mag közti Coulomb-kölcsönhatást is figyelembe véve meghatározom a  $pA$  mértékben és a hosszú hullámú (LWA) közelítésben a folyamat  $S$ -mátrixelemét (5.1.-5.2. szakaszok). Az  $S$ -mátrixelemből kiszámítom a magreakció differenciális és totális hatáskeresztmetszetét a  $\gamma$ -nyaláb több különböző polarizációs állapotára. A  ${}^8\text{B}(\gamma, p){}^7\text{Be}$  magreakciót numerikusan is vizsgálom (5.3. szakasz). Ezt követően (5.4. alfejezetben) a lézertérbeli fotonukleáris effektus küszöb környéki jellegzetességeivel foglalkozom, és bemutatom a lézertér különböző paramétereinek a reakcióra gyakorolt hatását.

A disszertáció hatodik, záró fejezetében tézispontokba szedve felsorolom az elért új tudományos eredményeimet.

## 2. fejezet

# Az intenzív lézertérbeli belső konverzió elméletének alapjai

Ebben a fejezetben első lépésben áttekintem a belső konverzió jelenségét. Ezt követően a nemzetközi irodalomban közölt eredmények alapján röviden bemutatom, hogy az intenzív, koherens elektromágneses tér hogyan befolyásolja a belső konverziós folyamatot.

### 2.1. A belső konverzió

Az atommagok gerjesztett állapotai között léteznek speciális, hosszú élettartamú ún. izomér állapotok is, amelyek élettartamának nagyságrendje általában a mikroszekundum – hónap tartományba esik. A gerjesztett állapotban lévő atommagok energialeadással alapállapotba vagy alacsonyabb energiájú gerjesztett állapotba kerülnek. E folyamat legegyszerűbb formája a gammafoton-emisszió, ezt nevezzük  $\gamma$ -bomlásnak. Az izomér állapotok azonban más úton is elbomolhatnak. A fotonemisszió mellett létezik egy másik, ezzel versengő folyamat is, ahol a leadott energiát az atommag az őt körülvevő kötött állapotban lévő elektronok valamelyikének közvetlenül adja át, ennek hatására a kötött elektron szabad állapotba kerül. A kimenő elektron mozgási energiája az atommag leadott és a kezdeti állapotban lévő elektron kötési energiájának különbségével egyenlő. Ezt a speciális folyamatot belső



konverzióknak nevezzük. A belső konverzió küszöbfolyamat, azaz ha a bomlás során felszabaduló energia kisebb, mint az adott héjon lévő elektronok kötési energiája, akkor a folyamat nem megy végbe, azaz tiltott átmenetről beszélünk. Fontos megemlíteni, hogy a belső konverzió a gammafoton-emissziótól független, azzal versengő folyamat. A belső konverzió esetében nem jelenik meg valós, hanem csak virtuális  $\gamma$ -foton! Mindezek figyelembevételével egy atommag izomér állapotának bomlási valószínűségét Taylor és Mott javaslatára a következő formában lehet megadni [3]:

$$T_{\beta\alpha} = T_{\beta\alpha}^{\gamma} + T_{\beta\alpha}^{\text{IC}} = (1 + \alpha) T_{\beta\alpha}^{\gamma}, \quad (2.1)$$

ahol  $T_{\beta\alpha}^{\gamma}$  a  $\gamma$ -bomlás, a  $T_{\beta\alpha}^{\text{IC}}$  a belső konverzió időegységre jutó teljes átmeneti valószínűsége. A jobb oldalon bevezetett együttható definíciója

$$\alpha = \frac{T_{\beta\alpha}^{\text{IC}}}{T_{\beta\alpha}^{\gamma}}, \quad (2.2)$$

elnevezése pedig belső konverziós együttható [3]. Mivel a fenti kifejezésben  $T_{\beta\alpha}^{\text{IC}}$  a belső konverzió teljes időegységre jutó átmeneti valószínűsége, tehát az  $\alpha$  együttható tartalmazza az összes lehetséges atomi elektronnal történő átmenet járulékát. Ezek független csatornák, ami miatt  $\alpha$  a lehetséges atomi pályákhoz tartozó belső konverziós együtthatók összege:

$$\alpha = \alpha^K + \alpha^L + \alpha^M + \dots \quad (2.3)$$

Itt K, L és M az egyes elektronhéjak röntgen-abszorpciónál szokásos jelölése és  $\alpha^K$ ,  $\alpha^L$  és  $\alpha^M$  a megfelelő héjakhoz tartozó belső konverziós együttható. Az egyes főkvantumszámokhoz tartozó együtthatók az impulzusmomentum-megmaradást kielégítő kvantumszámokra való összegzést tartalmazzák.

A (2.1) összefüggésben szereplő  $\gamma$ -bomláshoz tartozó, időegységre vonatkoztatott átmeneti valószínűség szemi-klasszikus közelítésben a következő:

$$T_{\beta\alpha}^{\gamma} = \sum_{l,m} T_{\beta\alpha,l,m}^{\gamma,E}, \quad (2.4)$$

ahol  $T_{\beta\alpha,l,m}^{\gamma,E}$  az  $l, m$  rendű elektromos multipólus átmenetre vonatkozó ráta, amelyet az alábbi módon írhatunk fel [3]:

$$T_{\beta\alpha,l,m}^{\gamma,E} = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2 \hbar} (k_{\beta\alpha})^{2l+1} |Q_{\beta\alpha}(l, m)|^2. \quad (2.5)$$

A megjelenő  $Q_{\beta\alpha}(l, m)$  az  $l, m$  rendű elektromos multipólmomentum mátrix-eleme:

$$Q_{\beta\alpha}(l, m) \equiv \langle \beta | M(E; l, m) | \alpha \rangle = \sum_{n=1}^Z \int er_j^l Y_{lm}^*(\theta_j, \phi_j) \Psi_\beta^* \Psi_\alpha d^3r, \quad (2.6)$$

ahol  $Z$  a rendszám,  $e$  a proton elektromos töltése,  $(r_j, \theta_j, \phi_j)$  a magban lévő  $j$ -edik nukleon gömbi koordinátái, ennek megfelelően  $d^3r = d^3r_1 \dots d^3r_Z$ .  $\Psi_\alpha$  a mag kezdeti-,  $\Psi_\beta$  pedig a mag végállapotbeli hullámfüggvényei, amelyek a perturbációmentes mag-Hamilton-operátor sajátfüggvényei. E hullámfüggvényeknek a gömbfüggvényekkel való kifejtései eredményezik az  $M_\alpha$  kezdeti magmágneses kvantumszám megjelenését, viszont ez az adott folyamatban közvetlenül nem ismert, ezért a (2.5)-ben a megfelelő kezdeti állapotban az  $M_\alpha$ -ra átlagolni kell. Továbbá az átmenet mágneses kvantumszáma  $m$  sem ismert, ezért  $m$ -re összegezni kell. Az átlagolás és összegzés végett praktikus bevezetni az ún. redukált mátrixelemet, amely e műveleteket már tartalmazza [4]:

$$B(E l; I_\alpha \rightarrow I_\beta) = \frac{1}{2I_\alpha + 1} \sum_{M_\alpha, m} |\langle \beta | M(E; l, m) | \alpha \rangle|^2. \quad (2.7)$$

A redukált mátrixelem segítségével az  $l$ -ed rendű elektromos időegységre jutó átmeneti valószínűség a következő alakot ölti:

$$T_{\beta\alpha, l}^{\gamma, E} = \frac{8\pi(l+1)}{l[(2l+1)!!]^2 \hbar} (k_{\beta\alpha})^{2l+1} B(E l; I_\alpha \rightarrow I_\beta), \quad (2.8)$$

ahol  $k_{\beta\alpha} = (E_\alpha - E_\beta) / (\hbar c)$  az átmenet hullámszáma,  $E_\alpha$  és  $E_\beta$  a mag kezdeti- és a végállapotbeli energiája. Csak az olyan  $T_{\beta\alpha, l}^{\gamma, E}$ -k különböznek nullától, amelyekben a megjelenő impulzusmomentum kvantumszámok kielégítik az impulzusmomentumokra vonatkozó háromszögszabályt:

$$|I_\alpha - I_\beta| \leq l \leq I_\alpha + I_\beta. \quad (2.9)$$

Továbbiakban a belső konverziós együttható számolásához szükséges  $T_{\beta\alpha}^{\text{IC}}$  meghatározásával foglalkozunk.

### 2.1.1. A belső konverzió kvantumelektrodinamikai leírása

A belső konverziós folyamat időegységre jutó átmeneti valószínűsége,  $T_{\beta\alpha}^{\text{IC}}$  korrekt és általános leírása a kvantumelektrodinamika alapján történik. A belső konverzióban az atommag egy virtuális foton cseréje révén adja át gerjesztett állapotának energiáját a konverziós elektronnak. Az ezt a folyamatot is leíró teljes Hamilton-operátor

$$H = H_{nuc} + H_e + H_\gamma + H_{int} \quad (2.10)$$

alakú. A megjelenő  $H_{nuc}$  a nukleonok közti kölcsönhatást is tartalmazó mag-Hamilton-operátor, a  $H_\gamma$  a kvantált elektromágneses teret írja le, az elektron relativisztikus Dirac-operátora pedig

$$H_e = c\vec{\alpha}\vec{p} + mc^2\beta + V(R), \quad (2.11)$$

ahol  $\vec{\alpha}$  és  $\beta$  a Dirac-mátrixok,  $V(R)$  a pontszerűnek vett atommag Coulomb-potenciálja. A kölcsönhatás operátora a szokásos minimális áram-áram csatolással definiálható:

$$H_{int} = - \int j^\mu(\vec{r}) A_\mu(\vec{r}) d^3r, \quad (2.12)$$

ahol  $j^\mu$  az elektron négyes-áram sűrűsége,  $A_\mu$  az atommag által létrehozott négyes-vektorpotenciál, az  $\vec{r}$  koordináta pedig az elektron helyvektora. Az  $A$ -nukleonos gerjesztett állapot belső konverziós  $S$ -mátrix eleme a (2.12) Hamilton-operátorral a standard módon számolható.

Amennyiben azzal a közelítéssel élünk, hogy az atommag pontszerű objektum (ez kis  $A$  tömegszám esetében jól alkalmazható közelítés), akkor az  $S$ -mátrixelemben az atommag, ill. az elektron koordinátáira vonatkozó integrálok szeparálhatók. Az izomér magok jelentős részének azonban nagy a tömegszáma, ebben az esetben az elektronállapotot az atommag töltés- és áramsűrűségének kiterjedtsége befolyásolja, ami a belső konverziós folyamatra is hatással van [6].

## 2.2. Lézertér hatása az elektron-atommag rendszerre

Ebben az alfejezetben röviden összefoglalom a lézertérnek a kötött elektron-atommag kölcsönhatásra gyakorolt hatását. Utána a lézertérrel módosított belső konverzióra vonatkozóan eddig elért eredményeket ismertetem.

### 2.2.1. A rendszer Hamilton-operátora

Tekintsünk egy  $A$  tömegszámú és  $Z$  rendszámú atomot. A koherens elektromágneses térrel (lézerrel) csatolt nukleon-elektron rendszer teljes Hamilton-operátora az alábbi alakba írható:

$$H = H_0 + H_I, \quad (2.13)$$

ahol  $H_0$  a rendszert alkotó részecskék szabad Hamilton-operátorai:

$$H_0 = H_R + H_e + H_n. \quad (2.14)$$

Itt az egyes tagok rendre az elektromágneses (foton-) teret, az elektront és a nukleonokat írják le:

$$H_R = \sum_{\vec{k}, \mu} \hbar \omega_{\vec{k}, \mu} \left( a_{\vec{k}, \mu}^+ a_{\vec{k}, \mu} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.15)$$

$$H_e = c\vec{p}\vec{\alpha} + \beta m_e c^2, \quad (2.16)$$

$$H_n = \sum_{N=1}^A (c\vec{p}_N \vec{\alpha}_N + M_N c^2 \beta) + \sum_{N \neq N'}^A U(\vec{x}_N - \vec{x}_{N'}). \quad (2.17)$$

A (2.15) összefüggésben  $\omega_{\vec{k}, \mu}$  a  $\vec{k}$  hullámszámvektorú,  $\mu$  módusindexű foton körfrekvenciája,  $a_{\vec{k}, \mu}^+$  és  $a_{\vec{k}, \mu}$  az adott kvantumszámokkal jellemzett fotonkeltő-, ill. eltüntető operátorai.  $H_e$  az elektron és  $H_n$  első szummája az atommagot alkotó nukleonok szabad, Dirac-féle, relativisztikus Hamilton-operátorai,  $H_n$  második szummája pedig a nukleonok közti magerőket leíró párkölcsönhatásokból származik. (Ez a tag a belső konverziós folyamat szempontjából irreleváns.) A modellben általában elég csak egy elektront figyelembe venni.

Ez azért engedhető meg, mert a belső konverziós folyamatban csak egyetlen kötött elektron vesz részt. A többi elektronnak csupán árnyékoló hatása van az atommag-elektron rendszerre nézve. Ezt az ún. effektív rendszámmal fogom figyelembe venni (ld. később). A szabad Hamilton-operátorokban a még nem említett tagok jelölése az irodalomban szokásos, az összefüggések pedig a rendszer tömegközépponti rendszerében érvényesek, amely most speciálisan jó közelítéssel egybeesik az atommag tömegközéppontjához rögzített koordináta-rendszerrel.

A folyamat kölcsönhatási Hamilton-operátora  $H_I = H_{Ie} + H_{In}$ , ahol  $H_{Ie}$  az elektron-lézertér,  $H_{In}$  pedig az atommag-lézertér kölcsönhatást írja le, amelyek az alábbi módon definiálhatók:

$$H_{Ie} = q_e \phi_q(\vec{x}) - q_e \vec{\alpha} \vec{A}_q(\vec{x}), \quad (2.18)$$

$$H_{In} = \sum_{N=1}^A \left( q_N \phi_q(\vec{x}_N) - q_N \vec{\alpha}_N \vec{A}_q(\vec{x}_N) \right). \quad (2.19)$$

$q_e = -e$  a kiszemelt elektron elektromos töltése,  $q_N$  az  $N$ -ik nukleon effektív töltése,  $\phi_q$  és  $\vec{A}_q$  pedig a kvantált elektromágneses tér skalár-, illetve vektorpotenciálja. A következő szakaszban az itt bemutatott kölcsönhatásnak egy speciális képből történő értelmezését mutatom be.

### 2.2.2. Koherens állapotok és a transzformált Hamilton-operátor

Az (2.14) által definiált Hamilton-operátorral jellemzett rendszer állapota a szabad rendszert alkotó  $H_R$ ,  $H_e$  és  $H_n$  operátorok sajátállapotainak direkt szorzataként állítható elő. Ebből következően az állapottérben megjelenik a lézertér sajátállapota is. A lézertér koherens elektromágneses tér, amely az adott módust jellemző fotoneltüntető operátor  $a_j |\lambda_j\rangle = \lambda_j |\lambda_j\rangle$  sajátértékegyenletét kielégítő  $|\lambda_j\rangle$  sajátállapotaival írható le. Itt  $j$  a fotont jellemző módusindexek összefoglaló jelölése (hullámszám, polarizáció). Továbbiakban az egyszerűség kedvéért egy módus esetére szorítkozunk ( $|\psi_{las}\rangle \equiv |\lambda_j\rangle$ ), de a módszer tetszőleges számú módusra általánosítható [7], [8] és [9].

Rendszerünket most transzformáljuk a

$$T_j(t) = \exp(\lambda_j^* e^{i\omega_j t} a_j - \lambda_j e^{-i\omega_j t} a_j^+) \quad (2.20)$$

operátorral, amely nem tesz mást, mint a koherens állapotot a  $t = 0$  időpillanatban vákuum állapotba viszi, azaz  $T_j(0) |\psi_{las}\rangle = |0\rangle$ . A (2.14) szabad Hamilton-operátor a fenti transzformációra nézve invariáns. A (2.18) és (2.19) kölcsönhatási Hamilton-operátorok viszont a transzformáció után a következő alakba mennek át:

$$H_{Ie}^T = q_e \phi_q(\vec{x}) - q_e \vec{\alpha}_q \vec{A}_q(\vec{x}) - q_e \vec{\alpha}_{cl} \vec{A}_{cl}(\lambda_j, \vec{x}), \quad (2.21)$$

$$H_{In}^T = \sum_{N=1}^A \left( q_N \phi_q(\vec{x}_N) - q_N \vec{\alpha}_N \vec{A}_q(\vec{x}_N) - q_N \vec{\alpha}_N \vec{A}_{cl}(\lambda_j, \vec{x}_N) \right), \quad (2.22)$$

ahol  $\vec{A}_{cl}(\lambda_j, \vec{x}, t)$  a transzformáció miatt megjelenő klasszikus vektorpotenciál

$$\vec{A}_{cl}(\lambda_j, \vec{x}, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_j L^3}} (\lambda_j \vec{\epsilon}_j e^{ik_\mu x^\mu} + \lambda_j^* \vec{\epsilon}_j e^{-ik_\mu x^\mu}). \quad (2.23)$$

Itt (és a későbbiekben)  $k_\mu x^\mu = \vec{k}_j \vec{x} - \omega_j t$ ,  $\vec{k}_j$  és  $\vec{\epsilon}_j$  a  $j$ -ik módus hullámszám-, illetve polarizáció-vektora (a felső nyíllal rendelkező betű minden esetben 3 komponensű vektort jelöl és  $x^\mu \in [ct, \vec{x}]$ ),  $L^3$  pedig az elektromágneses tér normálási térfogata. Látható, hogy a kölcsönhatási Hamilton-operátorokban a transzformáció után, a lézertér miatt egy, a koherens állapot  $\lambda_j$  sajátértékével meghatározott, klasszikus elektromágneses tér vektorpotenciálja jelenik meg.

Az állapot transzformáltja könnyen meghatározható, hiszen a  $T$  operátor csak a koherens állapotokra hat, mégpedig úgy, hogy az adott módusú állapotot a vákuum-állapotba viszi át. Végeredményben azt kapjuk, hogy a transzformált állapot  $(|\psi\rangle^T)$  nem tartalmazza a lézertér:

$$|\psi\rangle = |\psi_{el}\rangle \otimes |\psi_N\rangle \otimes |\psi_{las}\rangle \rightarrow |\psi\rangle^T = |\psi_{el}\rangle \otimes |\psi_N\rangle \otimes |0_{las}\rangle, \quad (2.24)$$

ahol  $|0_{las}\rangle$  a kvantált elektromágneses tér vákuum állapota. Ezzel elimináltuk a koherens állapotokat. Az eliminálás a  $t = 0$  időpillanatban igaz, viszont a rendszerben nincs olyan kölcsönhatás, amely a lézertérre képes a vákuumból

”visszahozni”, ezért az elimináció minden  $t > 0$  időpontban is megmarad. Egyúttal a kölcsönhatási Hamilton-operátorokban megjelennek olyan új tagok, amelyek a részecskéknek a lézertérnek megfelelő klasszikus vektorpotenciállal vett kölcsönhatását írják le.

A lézerek esetében a fény karakterisztikus hullámhossza több nagyságrenddel nagyobb, mint az atom és az atommag mérete, ezért alkalmazható a dipól közelítés, ami lényegében annyit jelent, hogy a (2.23) kifejezésben az  $\vec{x} = \vec{0}$  helyettesítést alkalmazhatjuk. A nem-relativisztikus határesetet a klasszikus vektorpotenciállal leírt dipól kölcsönhatásra alkalmazva, az alábbi közelítő formula adódik:

$$q_e \vec{\alpha} \vec{A}_{cl}(\lambda_j, \vec{x}, t) \simeq q_e \frac{\vec{p}}{m_e c^2} \vec{A}_{cl}^{dip}(\lambda_j, t) - \frac{q_e^2}{2m_e c^2} \left( \vec{A}_{cl}^{dip}(\lambda_j, t) \right)^2, \quad (2.25)$$

ahol  $\vec{A}_{cl}^{dip}(\lambda_j, t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_j L^3}} \vec{\epsilon}_j \cos(\omega_j t)$ . A kifejtésben láthatóan megjelent egy új tag, amely a vektorpotenciált kvadratikus rendben tartalmazza. Kimutatható, hogy dipól közelítés esetén a kvadratikus tag a Schrödinger-egyenletből az

$$U = \exp\left(-\frac{i q_e^2}{2\hbar m_e c^2} \int \left( \vec{A}_{cl}^{dip} \right)^2 dt\right) \quad (2.26)$$

unitér transzformációval eltüntethető.

Összefoglalva: az alkalmazott (2.20) transzformáció következtében, nem-relativisztikus, dipól közelítésben a kölcsönhatási operátorok az alábbi módon változtak meg:

$$H_{Ie}^T = H_{Ie} - \frac{q_e}{m_e c} \vec{p}_e \vec{A}_{cl}^{dip}(\lambda_j, t), \quad (2.27)$$

$$H_{In}^T = H_{In} - \sum_N \frac{q_N}{m_N c} \vec{p}_N \vec{A}_{cl}^{dip}(\lambda_j, t). \quad (2.28)$$

Egyúttal a külső lézertérbeli atommag-elektron rendszer állapotvektorából eltűnt a lézertér leíró koherens állapot. Ebben a képben a lézertér jelenlétére csak az elektromágneses tér és a részecskék kölcsönhatási Hamilton-operátorában megjelenő külső klasszikus vektorpotenciál utal. A kölcsönhatás leírásának eme módja már elegendő lehetne a probléma megoldására, ám jelen esetben célszerű még egy lépéssel tovább menni, és egy újabb unitér transzformációval átalakítani az elektron-atommag rendszer Hamilton-operátorát. Erről a lépésről szól a következő szakasz.

### 2.2.3. A Henneberger transzformáció

Ebben az alfejezetben röviden ismertetem az ún. Henneberger-transzformációt [10]. Vezessünk be az alábbi unitér operátort:

$$B = \prod_i \exp \left( \frac{i}{\hbar} \frac{q_i \vec{D}_i}{m_i} \vec{Z}(t) \right), \quad (2.29)$$

ahol

$$\vec{Z}(t) = -\frac{1}{c} \int^t \vec{A}_{cl}^{dip}(t') dt', \quad (2.30)$$

valamint az  $i$  index végigfut a protonokon és a vizsgált elektronon. Kimutatható, hogy a  $j$ -dik részecske helyoperátorának és a helyoperátort tartalmazó függvény operátorának transzformáltja [11]:

$$\vec{x}_j^B = B \vec{x}_j B^+ = \vec{x}_j + \frac{q_j}{m_j} \vec{Z}, \quad (2.31)$$

valamint

$$B f(\vec{x}_j) B^+ = f(\vec{x}_j^B). \quad (2.32)$$

Most az előzőekben  $T$ -vel már transzformált rendszerünket az újonnan bevezetett  $B$  operátorral ismét transzformáljuk. Kimutatható ([9], [11], [12] és [13]), hogy a transzformált Schrödinger-egyenlet a következő egyszerű alakra hozható:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle^B = (H_0 + H_I^B) |\psi\rangle^B, \quad (2.33)$$

ahol

$$H_I^B = q_e \phi_q(\vec{x}^B) - q_e \vec{\alpha}_q \vec{A}_q(\vec{x}^B) + \sum_{N=1}^Z \left( q_N \phi_q(\vec{x}_N^B) - q_N \vec{\alpha}_N \vec{A}_q(\vec{x}_N^B) \right). \quad (2.34)$$

A felső  $B$  index az állapot, illetve az operátor transzformáltjára utal. Nyomatékosítjuk, hogy a transzformált Schrödinger-egyenletben megjelenő  $H_0$  azonos a transzformáció előttivel.

A Henneberger-transzformáció következménye tehát, hogy a külső lézertérteret reprezentáló klasszikus vektorpotenciált tartalmazó kölcsönhatási operátor eltűnt a Hamilton-operátorból, viszont cserébe a nukleonok és az elektron hely-koordinátája mellett megjelent egy oszcilláló tag. Az oszcilláló tag



frekvenciája a lézer frekvenciájával azonos, az amplitúdó pedig fordítottan arányos a részecske tömegével. Ez utóbbi következménye, hogy az elektron "oszcillációja" mellett elhanyagolható a protonok rezgési amplitúdója, mivel  $m_p \gg \kappa$ , ahol  $m_p$  és  $\kappa$  a proton, illetve az elektron nyugalmi tömege. Ezt az eltérést erősíti az a tény, hogy a protonok a lézerteret az elektronfelhő árnyékolása mellett érzik. Éppen ezért alkalmazhatjuk (2.34)-ben az  $\vec{x}_N^B \approx \vec{x}_N$  közelítést.

### 2.3. A belső konverzió leírása lézerterekben

Az előző szakaszokban ismertetett fizikai módszerek után néhány pontban röviden összefoglalom az irodalomban fellelhető atommag-lézer csatolt folyamatokra vonatkozó eredményeket. Már régen ismeretes, hogy az atommag és a lézer közti direkt kölcsönhatást az atomok elektronfelhője erősen leárnyékolja [14]. Az atommagok alacsony energiás elektromágneses átmeneteinek esetében sikerült kimutatni [15], hogy a belső konverzió rátája csökken, ha a lézerrel a külső héjről eltávolítanak egy olyan elektront, amely a teljes belső konverziós együtthatóhoz járulékot szolgáltatott. Később Becker és munkatársai felismerték [2], hogy a direkt atommag-lézer kölcsönhatás nem okoz mérhető változást a közvetlen  $\gamma$ -bomlási rátában. Mindezek az eredmények arra vezettek, hogy lézer-atommag csatolt folyamatok közül a belső konverzióra [16] és az elektron-híd folyamatokra [17] terelődjön a figyelem.

A [16] cikkek szerzői a lézerrel módosított belső konverzió leírására nem-relativisztikus modellt alkalmaztak, a folyamat időegységre jutó átmeneti valószínűségét időfüggő perturbációs számítással számították ki. A végállapotú elektron leírására – 2.2.2 eredményeinek megfelelően – egy klasszikus elektromágneses síkhullám, illetve egy síkhullám és Coulomb-tér együttes jelenlétekor szabad töltött részecskére érvényes időfüggő Schrödinger-egyenlet megoldásokat az ún. Volkov és Coulomb-Volkov hullámfüggvényeket használtak [8]. Mivel a kezdeti elektronállapot általában erősen kötött (így első rendben a lézertér által nem befolyásolt) ezért leírására hidrogénszerű állapotfüggvényt használtak. A számítások egyrészt rávilágítottak arra, hogy a lézertér jelenlétében egyrészt  $N\hbar\omega$  energiával ( $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) megvál-

tozik a szabad elektron kinetikus energiája, ami úgy interpretálható, hogy az elektron látszólag állandóan felvesz és lead fotonokat a lézertérrel történő kölcsönhatás révén. Másrészt a lézer miatt megjelenő ponderomotoros potenciál miatt több energia szükséges a kötött állapotból való kilépéshez. Az átmeneti valószínűségekre kapott eredmények azt mutatják, hogy a küszöb környéki folyamatok a legérdekesebbek. Ekkor, ha a lézertér jelenléte nélkül a magátmenet energiája nem elegendő az adott pályán lévő elektron kötött állapotából való kiszabadításához, vagyis ez a csatorna a folyamat szempontjából tiltott, akkor az intenzív koherens elektromágneses tér ezt a csatornát képes "megnyitni". Azt is kimutatták, hogy az olyan speciális küszöbfolyamatoknál, ahol a lézertér nélkül éppen megengedett az átmenet, a lézertér jelenlétében az intenzitás növekedtével nullad rendben tiltottá válik a folyamat. Ennek az a magyarázata, hogy a lézertér miatt megjelenő ponderomotoros potenciál az intenzitás növekedtével is nő, így a kilépéshez már több energia szükséges, mint a lézertér nélkül. A szükséges energiahiányt az elektron csak egy vagy több lézerfoton elnyelésével képes kompenzálni. A másik fontos eredmény, hogy az  $N$ -fotonos belső konverziós együttható a fotonszám növekedtével csökken, ezért – ha energetikailag nem tiltott a folyamat – akkor az  $N = 1$  eset a domináns. A '90-es évek végén született cikk [18] az elektron-atommag-lézer kombinált folyamatokkal kapcsolatban addig született eredményeket foglalja össze.

2002-ben publikáltak egy, a Henneberger-transzformáción alapuló általános modellt az elektron-atommag-lézer csatolt folyamatok leírására [12]. Ebben a lézertér leírására síkhullámot tételeztek fel (folytonos üzemi lézer). A modellt több izomér állapot belső konverziós folyamatára alkalmazták, a numerikus vizsgálatot az  $N$ -fotonos folyamatokra is kiterjesztették. Az eredmények összhangban voltak a már felismert jellegzetességekkel. (Az eredményeket részleteiben a [9] dolgozat is tartalmazza.)

## 3. fejezet

# Lézerrel indukált belső konverzió

Az utóbbi években a lézer technológiában elért ugrásszerű fejlődés azt eredményezte, hogy az erős UV és a gyenge röntgen tartományban hamarosan elérhetővé válnak a néhány ciklusú, fs, as impulzushosszú, extrém nagy intenzitású lézer impulzusok és az ezeken alapuló új mérési módszerek [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27]. Ezzel a technológiával úgy tűnik, hogy az elektron-atommag-lézer csatolt folyamatok kísérleti vizsgálata is megkezdődhet. Erre vonatkozólag jó példa a bevezetőben már említett ELI program (Extreme Light Infrastructure) [1], amely keretén belül Csehországban, Magyarországon és Romániában kerül megvalósításra a szuper lézer három prototípusa. Az itt elérni kívánt intenzitások ( $I > 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$ ) már nagyon ígéretesnek mutatkoznak a magfizikai folyamatok vizsgálatára is [28]. Ez a fejlődés késztetett arra, hogy a lézertérbeli belső konverziót síkhullám esetén leíró elméletet [12] a rövid impulzusú sugárzási tér esetére is kidolgozzam.

Az előző fejezetben bemutattam a lézer jelenlétében bekövetkező belső konverziós folyamat alapvető sajátosságait. A vázolt eredményeket részleteiben tartalmazó munkák a lézertér síkhullámként kezelték, amely közelítés a lézertérnek a belső konverziós folyamatra gyakorolt hatást lényegében sok szempontból kielégítően feltárja. Munkám során ennek a modellnek a véges ideig tartó lézertér (impulzus lézer) okozta változás leírására alkalmas általá-

nosítását dolgoztam ki [29], [30] (az eredmények egy részéből diplomamunka is készült [31]). Végeredményekben meghatározom a néhány ciklusú impulzus lézer jelenlétében végbemenő elektron-atommag-lézer csatolt folyamatok átmeneti valószínűségét és ennek segítségével a belső konverzió szempontjából fontos belső konverziós együtthatót. Az általános formalizmus leírása után konkrét példákra vonatkozóan bemutatok numerikus eredményeket is. Elsőként a  $^{99m}\text{Tc}$  izomér esetében a  $2p_{3/2}$  héjról lézer jelenléte nélkül energetikailag tiltott, tehát csak a lézer jelenlétekor megvalósuló  $2p_{3/2}$  elektron belső konverziójára adom meg a lézer-indukált belső konverziós együtthatót, illetve erre a folyamatra érzékenység-vizsgálatot végzek a lézertér paramétereinek függvényében (impulzushossz, fázistolás, csúcsintenzitás). Ezek után további izomerek ( $^{107m}\text{Ag}$  ( $K$  héj,  $E3$ , 25, 47 keV),  $^{90m}\text{Nb}$  ( $L_2$  héj,  $M2 + E3$ , 2, 3 keV),  $^{183m}\text{W}$  ( $M_5$  héj,  $E2$ , 1, 79 keV),  $^{183m2}\text{W}$  ( $N_1$  héj,  $E1$ , 548 eV),  $^{188m}\text{Re}$  ( $M_2$  héj,  $M3 + E4$ , 2, 63 keV) és  $^{235m}\text{U}$  ( $O_4$  és az  $O_5$  héjak,  $E3$ , 73, 5 eV)) lézertér nélkül tiltott átmeneteire vonatkozó IC együtthatókra adok numerikus értékeket.

### 3.1. Elektron-atommag-lézer kölcsönhatás $S$ -mátrix eleme

#### 3.1.1. Az $S$ -mátrix definiálása

A 2.2.3 alfejezetben megmutattam, hogy az atommag-elektron rendszer kölcsönhatása lézertérben úgy módosul, hogy az elektron-atommag kölcsönhatást leíró operátor argumentumában az  $\vec{x}$  elektron-koordináták helyére azok

$$\vec{x}_B = \vec{x} - \frac{e}{\kappa} \vec{Z}(t) \quad (3.1)$$

Henneberger-transzformáltját [10],[11] kell írni, ahol  $\kappa$  az elektron nyugalmi tömege és  $e$  az elemi töltés. A  $\vec{Z}(t)$  vektor a lézertér leíró klasszikus vektorpotenciált ( $\vec{A}_{cl}(t)$ ) tartalmazó időfüggő vektor:

$$\vec{Z}(t) = -\frac{1}{c} \int^t \vec{A}_{cl}(t') dt', \quad (3.2)$$

ahol  $c$  a vákuumbeli fénysebesség.

A munkánk kiindulópontjával szolgáló [12] dolgozatban a lézertérbeli belső konverzió leírására síkhullámot vettek és dipól közelítést alkalmaztak, vagyis  $\vec{A}_{cl}(t)$  alábbi alakját

$$\vec{A}_{cl}(t) = \vec{\varepsilon} A_0 \cos(\omega_0 t) \quad (3.3)$$

használták, amely megfelel a végtelen impulzushosszú burkolóval, és  $\omega_0$  körfrekvenciájú vivőhullámmal leírt koherens elektromágneses térnek. Ebben a munkában a véges  $\tau$  impulzushosszú lézertér okozta változást vizsgálom, amelynek az elektromos terét a következőképpen paramétereztem [32]:

$$\vec{E}(k_0 x_0) = E_0 \vec{\varepsilon} h(k_0 x_0 / T) \cos(k_0 x_0 + \phi), \quad (3.4)$$

ahol  $\vec{\varepsilon}$  a polarizációs egységvektor, a  $h(k_0 x_0 / T)$  a vivőhullám formafüggvénye (burkológörbéje),  $T = \omega_0 \tau$  az impulzushossz dimenziótlanított paramétere,  $k_0 = \omega_0 / c$ ,  $x_0 = ct$  és  $\phi$  a vivőhullám burkolóhoz viszonyított fázistolása. A klasszikus elektrodinamikából ismert, hogy sugárzási tér esetében az elektromos térerősség a vektorpotenciál időderiváltjaként állítható elő. Ezt és a (3.2) összefüggést felhasználva belátható, hogy a  $\vec{Z}(t)$  függvény idő szerinti második deriváltja az elektromos térerősséget adja meg, vagyis

$$\vec{E}(k_0 x_0) = c \frac{d^2 \vec{Z}(k_0 x_0)}{dx_0^2}. \quad (3.5)$$

Ennek megfelelően a  $\vec{Z}$  függvény formailag hasonló alakra hozható, mint a (3.4) képlet szerint az elektromos térerősség vektora, azaz

$$\vec{Z}(k_0 x_0) = Z_0 \vec{\varepsilon} f(k_0 x_0, T) \cos(k_0 x_0 + \phi), \quad (3.6)$$

ahol  $Z_0 = E_0 / \omega_0^2$ ,  $f(k_0 x_0, T)$  a lézerimpulzus alakfüggvénye, amely a  $h(k_0 x_0, T)$  függvényből származtatható. Erre a későbbiekben részletesen kitérek.

A Henneberger-transzformáció a véges impulzushosszú lézertérben

$$\vec{x}_B = \vec{x} + \xi \vec{\varepsilon} \quad (3.7)$$

alakú, ahol

$$\xi(k_0 x_0, \phi) = \xi_0 f(k_0 x_0, T) \cos(k_0 x_0 + \phi) \quad (3.8)$$

és

$$\xi_0 = -\frac{e}{\kappa} Z_0. \quad (3.9)$$

A következőkben rátérek a belső konverziós folyamat  $S$ -mátrixának meghatározására. Az  $S$ -mátrixot a kovariáns perturbációszámítás elsőrendű közelítésében a következő kifejezés adja meg [33]:

$$\hat{S} = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int d^4x J_\mu(x) A^\mu(x), \quad (3.10)$$

ahol  $H_I(t)$  a kölcsönhatási Hamilton-operátor, amely tartalmazza a  $J_\mu(x)$  4-es elektron-áramsűrűséget és a mag által keltett  $A^\mu(x)$  4-es vektorpotenciált. Az utóbbit az atommag nukleonjainak  $j^\mu(y_N)$  4-es áramsűrűségével a következő alakban lehet meghatározni [33]:

$$A^\mu(x) = \sum_N \int d^4y_N D_F(x - y_N) j^\mu(y_N), \quad (3.11)$$

ahol

$$D_F(x - y_N) = \frac{-1}{4\pi^3} \int \frac{e^{-iq(x-y_N)}}{q^2 + i\varepsilon} d^4q \quad (3.12)$$

az elektromágneses tér kauzális (Feynman) Green-függvénye [34]. Az  $N$  indexre való összegzés a mag nukleonjaira való összegzést jelenti. A fenti képletek a lézermentes esetre vonatkoznak. (Megjegyzés: két négyes-vektor  $a_\mu b^\mu = a_0 b^0 - \vec{a} \vec{b}$  szorzatára az  $a_\mu b^\mu \equiv ab$  jelölést vezetem be.)

A Henneberger-transzformációt alkalmazva a lézertér jelenlétét úgy lehet figyelembe venni, hogy az elektron térkoordinátái helyett azok (3.1) szerinti transzformáltjait kell a megfelelő képletekbe helyettesíteni. Amikor (3.12)-ben az  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_B$  helyettesítést alkalmazom, akkor a kauzális (Feynman) Green-függvénynek a lézertérbeli alakja a következő lesz:

$$D_F(x' - y_N) = \frac{-1}{4\pi^3} \int e^{i[\xi(k_0 x_0, \phi)] \vec{\varepsilon} \cdot \vec{q}} \frac{e^{-iq(x-y_N)}}{q^2 + i\varepsilon} d^4q. \quad (3.13)$$

Az itt előforduló négyesvektorok:  $q^\mu = \{q_0, \vec{q}\}$  a négyes-hullámszám vektor;  $x^\mu$  jelöli a Henneberger-transzformált elektron négyes-koordinátákat; ( $x^\mu = \{x_0, \vec{x}_B\}$ ) és  $y_N^\mu = \{y_0, \vec{y}_N\}$  jelöli az atommag egy nukleonjának 4-es koordinátáját.

Az  $S$ -mátrix segítségével, a megfelelő kezdeti és végállapotok közti  $S$ -mátrixelem kifejtésével meg lehet határozni az átmeneti amplitúdót. A kezdeti állapot a kötött elektron  $|1\rangle$  és a gerjesztett magállapot  $|\alpha\rangle$  direkt szorzata:  $|i\rangle = |1\rangle \otimes |\alpha\rangle$ , míg a végállapot a szabad elektron  $|2\rangle$  és a mag végállapot (sokszor alapállapot)  $|\beta\rangle$  direkt szorzata:  $|f\rangle = |2\rangle \otimes |\beta\rangle$ . Az átmeneti amplitúdó így

$$S_{fi} = \langle f|\hat{S}|i\rangle = \frac{-i}{\hbar c} \sum_N \int \int d^4 y_N d^4 x J_\mu^{21}(x) D(x' - y_N) j_{\beta\alpha}^\mu(y_N). \quad (3.14)$$

Itt szembetűnik, hogy csak az elektron térkoordinátáját transzformálom, a protonokét nem. Erről már a 2.2.3 szakaszban ejtettem néhány szót. Emlékeztetőül megismétlem, hogy a (3.1) összefüggésben a transzformáció paramétere fordítottan arányos a részecske tömegével. Mivel a proton tömege nagyjából 1840-szer nagyobb, mint az elektron tömege, ennek a járuléka elhanyagolhatóan kicsi, így a proton koordinátájában fellépő oszcilláció amplitúdóját elhanyagolhatónak tekintem.

A (3.14)-ban megjelenő  $J_\mu^{21}(x)$  az elektron átmeneti áramsűrűsége az  $1 \rightarrow 2$  átmenetben, a  $j_{\beta\alpha}^\mu(y_N)$  az  $N$ -edik nukleon átmeneti áramsűrűsége az  $\alpha \rightarrow \beta$  átmenetben. Az átmeneti áramok standard leírása a kovariáns formalizmusban

$$J_\mu^{21}(x) = J_\mu^{21}(\vec{x}) e^{ik_{21}x_0}, \quad (3.15)$$

ahol  $J_\mu^{21}(\vec{x}) = e_e \bar{\psi}_2(\vec{x}) \gamma_\mu \psi_1(\vec{x})$ , illetve

$$j_{\beta\alpha}^\mu(y_N) = e^{ik_{\beta\alpha}y_0} j_{\beta\alpha}^\mu(\vec{y}_N). \quad (3.16)$$

A  $\gamma^\mu$  a Dirac-féle  $\gamma$ -mátrixokat jelöli,  $\psi_2$  és  $\psi_1$  a megfelelő  $E_2$ , illetve  $E_1$  energiasajátértékekhez tartozó elektron bispinor hullámfüggvények, amelyek a belső konverziós folyamatban megfelelnek az elektron kezdeti és végállapotának,  $k_{21} = (E_2 - E_1)/(\hbar c)$ , ill.  $k_{\beta\alpha} = (E_\beta - E_\alpha)/(\hbar c)$ , ahol  $E_\beta$  és  $E_\alpha$  a kezdeti és végállapotú atommag állapotok energiasajátértékei.

### 3.1.2. Az $S$ -mátrixelem kifejtése

Ha egy fizikai rendszer a  $t_1$  időpillanatban az  $|i\rangle$  állapotban van, majd a  $t_2$  időpillanatban  $|f\rangle$  állapotba kerül, akkor a két állapot közti átmeneti

amplitúdót a  $c_{fi} = \langle f(t_2)|i(t_1)\rangle$  kifejezés határozza meg. Ha a kölcsönhatás okozta átmenetet a  $t \rightarrow \pm\infty$  határesetben írjuk le, akkor megkapjuk az átmenethez rendelhető  $S$ -mátrixelemet:  $\lim_{t_1, t_2 \rightarrow \infty} c_{fi}(-t_1, t_2) = S_{fi}$ .

A lézertérbeli belső konverzió esetében az  $S$ -mátrixelem a (3.14) szerint [34]:

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar c} \sum_N \int dx_0 \int d^3x \int d^4y_N J_\mu^{21}(x) D_F(x' - y_N) j_{\beta\alpha}^\mu(y_N). \quad (3.17)$$

Az integrálási határok minden esetben  $\pm\infty$ , ezért a továbbiakban a jelölések egyszerűsítése érdekében ezeket az integrálási határokat nem írom ki. Célom a fenti kifejezés olyan formában történő megadása, amely tükrözi a lézertérnek az átmeneti amplitúdóra és az átmeneti valószínűsége gyakorolt hatását. Ehhez első lépésben át kell alakítani a fenti képletet úgy, hogy az integrálokat ki lehessen számolni. A  $D_F$  lézertér módosított Green-függvény (3.13) kifejtésében szerepel egy, a lézertér paramétereit tartalmazó exponenciális faktor, amely a következőképpen írható át [3]:

$$e^{i\vec{\varepsilon}\vec{q}} = e^{i\xi q u} = \sum_n i^n (2n+1) P_n(u) j_n(q\xi), \quad (3.18)$$

ahol  $u = \cos(\vartheta_q)$ ,  $\vartheta_q$  az  $\vec{\varepsilon}$  polarizáció vektor és a  $\vec{q}$  hullámszám vektor által bezárt szög,  $P_n$  az  $n$ -ed rendű Legendre-polinom,  $j_n$  az  $n$ -ed rendű elsőfajú szférikus Bessel-függvény. Ezek után a Green-függvény másik exponenciális függvénye is szeparálható a tér- és idő-komponensektől függő tényezőkre:

$$e^{-iq(x-y_N)} = e^{-iq_0(x_0-y_{N0})} e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}. \quad (3.19)$$

Az előbbi szeparáció az átmeneti áramokban is megtehető, ahogy ez az elektronra és a nukleonokra vonatkozó (3.15), illetve (3.16) összefüggésekben látható. Amennyiben az eddig elvégzett szeparációkat visszaírom a mátrixelemet megadó összefüggésbe, a következő adódik:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{i}{\hbar c} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \sum_N \sum_n i^n (2n+1) \int dx_0 e^{i(k_{21})x_0} \times \\ &\times \int d^3x \int d^3y_N \int dy_{N0} \int dq^3 \int dq_0 J_\mu^{21}(\vec{x}) P_n(u) j_n(q\xi) \times \\ &\times \frac{e^{i(q_0+k_{\beta\alpha})y_{N0}} e^{-iq_0x_0}}{q_0^2 - (\vec{q})^2 + i\varepsilon} e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y}_N)} j_{\beta\alpha}^\mu(\vec{y}_N). \end{aligned} \quad (3.20)$$



A kapott formulában az egyes integrálási műveletek már külön-külön elvégezhetők. Mivel az  $y_{N0}$  változó csak egy exponenciális faktorban szerepel, ezért kézenfekvő az  $e$  szerinti integrálással kezdeni. Az eredmény

$$\int dy_{N0} e^{i(q_0 + k_{\beta\alpha})y_{N0}} = 2\pi\delta(q_0 + k_{\beta\alpha}). \quad (3.21)$$

A  $q_0$  változó szerinti integrál is könnyen elvégezhető, hiszen a Dirac-delta miatt az integrandusban csak egy  $q_0 \rightarrow -k_{\beta\alpha}$  helyettesítést kell végrehajtani:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{i}{\hbar c} \frac{4\pi}{(2\pi)^4} \sum_N \sum_n i^n (2n+1) \int x_0 e^{i(k_{21} + k_{\beta\alpha})x_0} \times \\ &\times \int d^3x \int d^3y_N \int dq^3 J_\mu^{21}(\vec{x}) P_n(u) j_n(q\xi) \times \\ &\times \frac{e^{i\vec{q}(\vec{x} - \vec{y}_N)}}{k_{\beta\alpha}^2 - \vec{q}^2 + i\varepsilon} j_{\beta\alpha}^\mu(\vec{y}_N). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Formálisan úgy tűnik, hogy az  $x_0$  szerinti integrálás is elvégezhető, ez azonban közvetlenül nem lehetséges, mivel a lézertértől függő  $\xi(x_0)$  paraméter is függ  $x_0$ -tól. A továbblépéshez újabb azonosságot kell alkalmazni. Ehhez fejtsük ki a térkoordinátákat tartalmazó síkhullám komponensét a gömbfüggvények szerint [3]:

$$\begin{aligned} e^{i\vec{q}(\vec{x} - \vec{y}_N)} &= (4\pi)^2 \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(qx) Y_{\ell m}^*(\hat{q}) Y_{\ell m}(\hat{x}) \right] \times \\ &\times \left[ \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L i^L j_L(qy_N) Y_{LM}^*(\hat{q}) Y_{LM}(\hat{y}_N) \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

ahol  $\hat{q}$  a  $\vec{q}$  vektor irányába mutató egységvektor térszögére utal,  $\hat{x}$  és  $\hat{y}_N$  szintén a megfelelő vektorok irányába mutató egységvektorok (elektron, ill. nukleon) térszög koordinátákra utalnak. Látható, hogy a (3.23) kifejtésben mindkét szorzatkomponens tartalmazza a  $\hat{q}$  szerinti gömbfüggvényt, ezért ezt célszerű kifejezni az asszociált Legendre-polinomokkal [3]:

$$Y_{\ell m}(\hat{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}} P_\ell^m(u) e^{im\phi_q}, \quad (3.24)$$

ahol továbbra is  $u = \cos(\vartheta_q)$ . Az átalakítások után a keresett mátrixelem a következő alakra rendezhető:

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar c} \sum_N \sum_n \int dx_0 e^{i(k_{21} + k_{\beta\alpha})x_0} \times \\ \times \int d^3x \int d^3y_N J_\mu^{21}(\vec{x}) j_{\beta\alpha}^\mu(\vec{y}_N) V_n(\vec{x}, \vec{y}_N; \xi(x_0)), \quad (3.25)$$

ahol

$$V_n(\vec{x}, \vec{y}_N; \xi(x_0)) = 8i^n (2n+1) \sum_{\ell, m} \sum_{L, M} Y_{\ell m}(\hat{x}) Y_{LM}^*(\hat{y}_N) N_{\ell L m M} \times \\ \times \int d^3q \frac{P_n(u) j_n(q\xi)}{\vec{k}_{\beta\alpha}^2 - \vec{q}^2 + i\epsilon} \frac{i^\ell (-i)^L}{2\pi} j_\ell(qx) j_L(qy_N) P_\ell^m(u) P_L^M(u) e^{-i(m-M)\phi_q}, \quad (3.26)$$

amelyben

$$N_{\ell L m M} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2(\ell+m)!}} \sqrt{\frac{(2L+1)(L-M)!}{2(L+M)!}}. \quad (3.27)$$

Az  $S$ -mátrixelem most kapott kifejezéséből közvetlenül leolvasható, hogy a rövid impulzust leíró tag ( $j_n(q\xi)$ ) tulajdonképpen az  $n$ -fotonnal végbemenő folyamatnak felel meg, és nem integrálható ki a megmaradó exponenciális faktoral együtt az  $x_0$  szerint, mint egy energia szerinti Dirac-delta. Ez a lépés a síkhullámmal leírt lézertér esetén megtehető [12]. Tulajdonképpen innentől kezdve válik ténylegesen szét a síkhullámmal történő számítás a rövid impulzusú lézer esetétől.

### 3.1.3. Az $S$ -mátrixelem meghatározása

A továbbiakban olyan – a lézertér nélkül – energetikailag tiltott belső konverziós átmeneteket vizsgálunk, amelyekben az energiahiany  $\Delta E = E_{\alpha\beta} - |E_1|$  ( $\Delta E < 0$ ) kicsi, azaz pontosabban mondva az energiahiany és az impulzuslézer  $\omega_0$  körfrekvenciája között fennáll, hogy  $\omega_0 \sim |\Delta E|/\hbar$ . Ezeket a folyamatokat küszöb környéki átmeneteknek nevezik.

Az előző szakasz végén bevezettem egy  $V_n$  mennyiséget, amelyben a lézertér közvetlenül leíró változók szerepelnek. A következőkben ezt alakítom

tovább.  $V_n$ -ben szerepel a hullámszámra való integrálás, amit praktikus gömbi koordinátákra átírni:  $d^3q = -q^2 dq du d\phi_q$ , ahol  $u = \cos \vartheta_q$ , és a negatív előjel  $du$  miatt jelenik meg.  $V_n$ -nek a (3.26) összefüggésében a  $\phi_q$  változó csak mint egy fázisfaktor szerepel, így az erre vonatkozó integrál

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(m-M)\phi_q} d\phi_q = 2\pi \delta_{mM}, \quad (3.28)$$

ahol  $\delta_{mM}$  a Kronecker-delta. A Kronecker-delta segítségével (3.26)-ben az  $m$  indexre való összegzés elvégezhető. Némi átrendezés után a

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{\ell, L, M} (-8) i^\ell (-i)^L Y_{lM}(\hat{x}) Y_{LM}^*(\hat{y}_N) \\ &\times \int_{-1}^1 \varphi_{\ell, L, M}^n(u) du \int_0^\infty I_n(q) dq \end{aligned} \quad (3.29)$$

kifejezésre jutok, ahol az újonnan bevezetett mennyiség:

$$\varphi_{\ell, L, M}^n(u) = N_{\ell LM} i^n (2n+1) P_n(u) P_\ell^M(u) P_L^M(u), \quad (3.30)$$

ahol

$$N_{\ell LM} = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-M)!}{2(\ell+M)!}} \sqrt{\frac{(2L+1)(L-M)!}{2(L+M)!}}. \quad (3.31)$$

A fentiekben  $P_n$  a Legendre-polinom,  $P_\ell^M$  és  $P_L^M$  az asszociált Legendre-polinomok,

$$I_n(q) = \frac{j_n(\xi q) j_\ell(qx) j_L(qy_N) q^2}{\bar{k}_{\alpha\beta}^2 - \bar{q}^2 + i\varepsilon}, \quad (3.32)$$

ahol  $j_n$ ,  $j_\ell$  és  $j_L$  elsőfajú szférikus Bessel-függvények, amelyek rendje  $n$ ,  $\ell$  és  $L$ .

A  $P_n(u) P_\ell^M(u) P_L^M(u)$  kifejezés a Legendre-polinomok  $u$  szerinti hatvány-soraként is előállítható [35]. A  $\varphi_{\ell, L, M}^n(u)$  páros függvény, amennyiben az  $n + \ell + L$  összeg is páros. Ebben az esetben az  $u$  szerinti integrálási tartárt elég a szimmetrikus tartomány feléig kijelölni, azaz  $\int_{-1}^1 du = 2 \int_0^1 du$ . Ha azonban az  $n + \ell + L$  összeg páratlan, akkor az integrandus is páratlan (antiszimmetrikus az integrálási tartományon), ekkor szimmetriaokok miatt  $\int_{-1}^1 P_n P_\ell^M P_L^M du = 0$ , ami az átmeneti mátrixelem eltűnését is maga után vonja, vagyis  $S_{fi} = 0$ . A leírtak alapján a lézer asszisztált belső konverzióra

vonatkozólag egy kiválasztási szabályt lehet megfogalmazni, amely szerint a továbbiakban elég az olyan eseteket vizsgálni, ahol  $\ell + L + n = \text{páros}$ . E feltétel miatt a (3.32)-gyel adott  $I_n(q)$  is páros függvénye  $q$ -nak és ezért a  $q$  szerinti  $\int_0^\infty dq$  integrálás helyettesíthető a  $1/2 \int_{-\infty}^\infty dq$  integrálással. A  $\xi + y_N \ll x$  közelítéssel (pontoszerű mag) a  $q$  szerinti integrálás a reziduuum-tétel segítségével elvégezhető. (Az  $I_n(q)$  függvénynek két elsőrendű pólusa van.) [12] Az integrálás eredménye

$$\int_0^\infty I_n(q) dq = \frac{\pi}{2} i k_{\alpha\beta} j_n(-\xi k_{\alpha\beta}) j_L(k_{\alpha\beta} y_N) h_\ell^{(1)}(k_{\alpha\beta} x), \quad (3.33)$$

ahol  $h_\ell^{(1)}(k_{\alpha\beta} x)$  az elsőfajú,  $\ell$ -ed rendű szférikus Hankel-függvény, valamint  $k_{\alpha\beta} = -k_{\beta\alpha}$ . A  $j_L(k_{\alpha\beta} y_N)$  szférikus Bessel-függvény argumentumában teljesül a  $k_{\alpha\beta} y_N \ll 1$  közelítés, hiszen  $y_N$  a magsugár mérettatormányán belül változik ( $\sim 10^{-15}$  m), az átmeneti hullámszám a magnívók közti energia-különbségből eredően  $k_{\alpha\beta} < 10^{13} \text{ m}^{-1}$  nagyságrendbe esik. Ekkor viszont  $j_L(k_{\alpha\beta} y_N)$ -re alkalmazható a kis argumentumú közelítés [36], amely szerint

$$j_L(k_{\alpha\beta} y_N) \simeq \frac{(k_{\alpha\beta} y_N)^L}{(2L + 1)!!}. \quad (3.34)$$

Ezt a formulát az  $I_n$  kifejezésébe helyettesítve  $V_n$ -re a következő adódik:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\pi}{2} i k_{\alpha\beta} \sum_{\ell, L, M} (-8) i^\ell (-i)^L Y_{\ell M}(\hat{x}) Y_{LM}^*(\hat{y}_N) \\ &\times \frac{(k_{\alpha\beta} y_N)^L}{(2L + 1)!!} h_\ell^{(1)}(k_{\alpha\beta} x) Q_{\ell, L, M}^n j_n(-\xi k_{\alpha\beta}), \end{aligned} \quad (3.35)$$

ahol

$$Q_{\ell, L, M}^n = \int_{-1}^1 \varphi_{\ell, L, M}^n(u) du. \quad (3.36)$$

A továbbiakban az atommag belső konverzióval megvalósuló lézertérbeli elektromágneses átmenetei közül csak az elektromos multipól-átmeneteket tárgyalom. (Az  $L$ -ed rendű elektromos multipól-átmenet jelölése  $EL$ .) A mágneses átmenettel (jelölése  $ML$ ) járó folyamatok számítása bonyolultabb áram-áram csatolásokat tartalmaz, viszont ezek nem adnak a folyamat lényegi természetéről több információt, mint az elektromos átmenetek. Sőt, az

átmenetek erőssége szempontjából általánosan elmondható, hogy az  $EL$  folyamat nagyságrendje  $M(L-1)$  nagyságrendjébe esik [3], tehát az elektromos multipól-folyamatok erősebbek, mint az azonos rendű mágneses átmenetek.

Az elektromos multipól-átmenetek meghatározásához az  $S$ -mátrixelem (3.25) összefüggésében szereplő átmeneti négyes-áramsűrűségeket kell felírni. Az eddigi metrikakonvenció mellett a skalárszorzat

$$J_\mu^{21}(\vec{x})j_{\beta\alpha}^\mu(\vec{y}_N) = e \cdot e_N \left[ \rho^{21}(\vec{x})\rho_{\beta\alpha}(\vec{y}_N) - \vec{J}^{21}(\vec{x})\vec{j}_{\beta\alpha}(\vec{y}_N) \right], \quad (3.37)$$

ahol a  $\rho^{21}$ ,  $\vec{J}^{21}(\vec{x})$  és  $\rho_{\beta\alpha}$ ,  $\vec{j}_{\beta\alpha}(\vec{y}_N)$  rendre a konverziós elektron és az atommag  $N$ -edik nukleonjának átmeneti sűrűsége és átmeneti hármas árama,  $e$  az elektron töltése,  $e_N$  az  $N$ -edik nukleon töltése. Mint említettem, az áram-áram kölcsönhatásokat most nem vizsgálom, ezért az átmeneti mátrixelemben csak a (3.37) kifejtés első tagját veszem figyelembe, így a mátrixelem

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar c} \sum_N \sum_n e \cdot e_N \int dx_0 e^{i(k_{21}+k_{\beta\alpha})x_0} \times \\ \times \int d^3x \int d^3y_N \rho^{21}(\vec{x})\rho_{\beta\alpha}(\vec{y}_N) V_n(\vec{x}, \vec{y}_N; \xi(x_0)). \quad (3.38)$$

Itt  $V_n$  helyére a (3.35) összefüggést helyettesítve az  $S$ -mátrixelem a következő szeparált integrálokat tartalmazó alakot ölti:

$$S_{fi} = -\frac{ie}{\hbar c} 4\pi i \sum_n \sum_{\ell LM} i^\ell (-i)^L Q_{\ell,L,M}^n \int dx_0 e^{i(k_{21}+k_{\beta\alpha})x_0} j_n(-\xi k_{\alpha\beta}) \times \\ \times \int d^3x \rho^{21}(\vec{x}) Y_{\ell M}(\hat{x}) h_\ell^{(1)}(k_{\beta\alpha}x) \frac{k_{\alpha\beta}^{L+1}}{(2L+1)!!} \times \\ \times \sum_N \int d^3y_N e_N y_N^L \rho_{\beta\alpha}(\vec{y}_N) Y_{LM}^*(\hat{y}_N). \quad (3.39)$$

Az  $y_N$  koordinátákra vonatkozó integrálban megjelenik az elektromos multipól-momentum operátor  $\mathcal{M}(EL, M) = \sum_N e_N y_N^L Y_{LM}(\hat{y}_N)$ , amelynek az átmeneti sűrűséggel szorzott teljes térre vonatkozó integrálja adja az

$$\langle I_i, M_i | \mathcal{M}^*(EL, M) | I_f, M_f \rangle \quad (3.40)$$

elektromos multipól mátrixelemet:

$$\langle I_i, M_i | \mathcal{M}^*(EL, M) | I_f, M_f \rangle = \sum_N \int d^3y_N e_N y_N^L \rho_{\beta\alpha}(\vec{y}_N) Y_{LM}^*(\hat{y}_N), \quad (3.41)$$

ahol  $I_i$  és  $I_f$  illetve  $M_i$  és  $M_f$  a magspinek, illetve a mágneses kvantum-számok az atommag kezdeti és végállapotában. A gyakorlatban a multipól-momentum mátrixeleme helyett az ún. redukált mátrixelemet alkalmazzák. A két mennyiség között a következő összefüggés áll fenn [4]:

$$\begin{aligned} \langle I_i, M_i | \mathcal{M}(EL, M) | I_f, M_f \rangle = \\ (-1)^{I_i - M_i} \langle I_i | \mathcal{M}(EL) | I_f \rangle \begin{pmatrix} I_i & L & I_f \\ -M_i & M & M_f \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

ahol  $\langle I_i | \mathcal{M}(EL) | I_f \rangle$  az  $\mathcal{M}(EL, M)$  operátor redukált mátrixeleme, a zárójeles objektum pedig az ún. Wigner-féle  $3j$ -szimbólum, amely az impulzusmomentum összegzéseknél jelenik meg, és amely a Clebsch-Gordan együtthatóhoz hasonlatos mennyiség [37]. Az  $S$ -mátrixelem további átalakítása már nem célravezető.

Összefoglalva az eredményeket, a lézerrel indukált belső konverzió  $EL$  átmeneteire vonatkozó  $S$ -mátrixelemét olyan alakban sikerült meghatároznom, amely szeparáltan, szorzatalakban tartalmazza az atommaggal kapcsolatos redukált mátrixelemet, az elektronállapotokat magába foglaló tényezőt és a lézertér paramétereitől függő időintegrált. A következő alfejezetben az átmeneti valószínűséggel és a belső konverziós együtthatóval foglalkozom.

## 3.2. Átmeneti valószínűség és a belső konverziós együttható

Az átmeneti valószínűséget úgy kaphatjuk meg, hogy képezzük az  $S$ -mátrixelem abszolútértékének négyzetét. Általában a folyamat kezdeti és végállapotai nem egyértelműen határozottak, ezért a legtöbb esetben a lehetséges kezdeti állapotokra átlagolunk, viszont a lehetséges végállapotokra összegzünk. Tehát az átmeneti valószínűséget a következő kifejezéssel lehet megadni:

$$P_{\alpha\beta,12} = \sum_f \langle |S_{fi}|^2 \rangle_i, \quad (3.43)$$

ahol  $\sum_f$  a lehetséges végállapotokra történő az összegzést,  $\langle \rangle_i$  pedig a kezdeti állapotokra történő az átlagolást jelenti.

Első lépésként végezzük el (3.39) négyzetreemelését:

$$\begin{aligned}
|S_{fi}|^2 &= \frac{16\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^2} \sum_{\ell LM} \sum_{\ell' L' M'} |G_{\ell, L, M}| |G_{\ell', L', M'}| \times \\
&\times \frac{k_{\alpha\beta}^{L+1} k_{\alpha\beta}^{L'+1}}{(2L+1)!!(2L'+1)!!} \left| \int d^3x \rho^{21}(\vec{x}) Y_{\ell M}(\hat{x}) h_{\ell}^{(1)}(k_{\beta\alpha} x) \right| \times \\
&\times \left| \int d^3x \rho^{21}(\vec{x}) Y_{\ell' M'}(\hat{x}) h_{\ell'}^{(1)}(k_{\beta\alpha} x) \right| \times \\
&\times |\langle I_f | \mathcal{M}^*(EL) | I_i \rangle| |\langle I_i | \mathcal{M}(EL') | I_f \rangle| \times \\
&\times \begin{pmatrix} I_i & L & I_f \\ -M_i & M & M_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i & L' & I_f \\ -M_i & M' & M_f \end{pmatrix}, \tag{3.44}
\end{aligned}$$

ahol

$$G_{\ell, L, M} = \sum_n Q_{\ell, L, M}^n \int dx_0 e^{i(k_{21} + k_{\beta\alpha})x_0} j_n(-\xi k_{\alpha\beta}). \tag{3.45}$$

Mint említettem, a kapott kifejezést az atommag-elektron rendszer kezdeti állapotaira átlagolni és végállapotaira összegezni kell. Először az atommag állapotokra végzem el a számításokat. Ez azt jelenti, hogy átlagolni és összegezni kell az  $M_i$ , illetve  $M_f$  mágneses kvantumszámok szerint, amelyek a (3.44) utolsó sorában jelennek meg.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} \begin{pmatrix} I_i & L & I_f \\ -M_i & M & M_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i & L' & I_f \\ -M_i & M' & M_f \end{pmatrix} = \\
= \frac{1}{2I_i + 1} \sqrt{\frac{1}{2L+1} \frac{1}{2L'+1}} \delta_{L'L} \delta_{M'M}, \tag{3.46}
\end{aligned}$$

ahol kihasználtam a Wigner-3j szimbólumok addíciós tulajdonságát [37]. Az így megjelenő Kronecker-delták segítségével (3.44)-ben elvégezhetjük az  $L'$  és az  $M'$  indexekre vonatkozó összegzést. A végeredmény

$$\begin{aligned}
\sum_{M_f} \langle |S_{fi}|^2 \rangle_{M_i} &= \frac{16\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^2} \sum_{\ell' LM} |G_{\ell, L, M}| |G_{\ell', L, M}| \frac{k_{\alpha\beta}^{2L+2}}{(2L+1)[(2L+1)!!]^2} \times \\
&\times B(EL, I_i \rightarrow I_f) \left| \int d^3x \rho^{21}(\vec{x}) Y_{\ell M}(\hat{x}) h_{\ell}^{(1)}(k_{\beta\alpha} x) \right| \times \\
&\times \left| \int d^3x \rho^{21}(\vec{x}) Y_{\ell' M}(\hat{x}) h_{\ell'}^{(1)}(k_{\beta\alpha} x) \right|, \tag{3.47}
\end{aligned}$$

ahol bevezettem az irodalomból ismert

$$B(EL, I_i \rightarrow I_f) = \frac{|\langle I_i \| \mathcal{M}(EL) \| I_f \rangle|^2}{(2I_i + 1)} \quad (3.48)$$

redukált átmeneti valószínűséget [4]. Ezek után az elektronállapotokra is el kell végeznünk az előbbiekben vázolt műveleteket. Egyrészt ez a magokhoz hasonlóan az elektron  $m_i$  és  $m_f$  kezdeti- és végállapotú mágneses kvantumszámaira vonatkozó átlagolást, illetve összegzést jelenti, másrészt mivel a végállapotban szabad elektron keletkezik, ebben az esetben még összegezni kell a lehetséges végállapotú  $\vec{K}_2$  hullámszámok szerint is. Az összegzésnél a szokásos módon áttérek a  $\vec{K}_2$  vektor komponensei szerinti integrálásra. A kijelölt műveletek elvégzéséhez az elektron átmeneti sűrűséget kell meghatározni. Mint a fejezet elején említettem, küszöb környéki folyamatokat vizsgálok, tehát a belső konverzió során keletkező elektron mozgási energiája biztosan kisebb lesz, mint annak nyugalmi energiája. Ha ez a feltétel teljesül, az elektron leírására nem-relativisztikus hullámfüggvények alkalmazhatók. Az egyszerűség kedvéért az elektront most spin nélküli részecskeként kezelem, ezért a spinállapotokra való összegzés és átlagolás nem jelenik meg a számításokban.

Nem-relativisztikus esetben az átmeneti sűrűség a következő skalárfüggvénnyel írható le:

$$\rho^{21} = \Psi_2^*(\vec{x}) \Psi_1(\vec{x}), \quad (3.49)$$

ahol  $\Psi_2(\vec{x})$  a szabad (vég) állapotbeli, míg  $\Psi_1(\vec{x})$  a kezdeti (kötött) állapotú elektron hullámfüggvénye. Az atommag centrális potenciáljában mozgó elektronok hullámfüggvényét érdemes gömbi koordináta-rendszerben felírni:

$$\Psi_2(\vec{x}) = R_{\ell_f}(x) Y_{\ell_f m_f}(\hat{x}), \quad (3.50)$$

$$\Psi_1(\vec{x}) = R_{n_i \ell_i}(x) Y_{\ell_i m_i}(\hat{x}). \quad (3.51)$$

$R_{\ell_f}(x)$  és  $R_{n_i \ell_i}(x)$  rendre az  $\ell_f$  impulzusmomentumú kimenő elektron és  $\ell_i$  impulzusmomentumú kezdeti kötött elektron nem-relativisztikus radiális hullámfüggvényei. A (3.47) képlet elektron-koordinátákra vonatkozó integráljait (3.50) és (3.51) behelyettesítésével a változók szerint szeparálva

$$\left| \int d\hat{x} Y_{\ell_f m_f}^* Y_{\ell_f m_f} Y_{\ell_i m_i} \right| \left| \int d\hat{x} Y_{\ell_f m_f}^* Y_{\ell_f m_f} Y_{\ell_i m_i} \right| \times$$



$$\times \left| \int dx x^2 R_{\ell_f}^* R_{n_i \ell_i} h_{\ell}^{(1)}(k_{\beta \alpha x}) \right| \left| \int dx x^2 R_{\ell_f}^* R_{n_i \ell_i} h_{\ell'}^{(1)}(k_{\beta \alpha x}) \right|. \quad (3.52)$$

A gömbfüggvények addíciós tételét és ortogonalitási tulajdonságait kihasználva a szögre vonatkozó integrálok:

$$\begin{aligned} & \left| \int d\hat{x} Y_{\ell_f m_f}^* Y_{\ell M} Y_{\ell_i m_i} \right| \left| \int d\hat{x} Y_{\ell_f m_f}^* Y_{\ell' M} Y_{\ell_i m_i} \right| = \\ & = \frac{(2\ell_i + 1)(2\ell_f + 1)}{4\pi} \sqrt{(2\ell + 1)(2\ell' + 1)} \begin{pmatrix} \ell_f & \ell & \ell_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \ell_f & \ell' & \ell_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_f & \ell & \ell_i \\ -m_f & M & m_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_f & \ell' & \ell_i \\ -m_f & M & m_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Az elektron mágneses kvantumszámait csak a Wigner-3j szimbólumokban jelennek meg, így az összegzés és átlagolás csak ezekre az objektumokra korlátozódik. Ismét használva a Wigner-3j szimbólumokra vonatkozó tételeket:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\ell_i + 1} \sum_{m_i} \sum_{m_f} \begin{pmatrix} \ell_f & \ell & \ell_i \\ -m_f & M & m_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_f & \ell' & \ell_i \\ -m_f & M & m_i \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{2\ell_i + 1} \frac{1}{2\ell + 1} \delta_{\ell' \ell}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Végeredményben az  $m_f$ -re való összegzés és  $m_i$ -re való átlagolás után a szögváltozóra vonatkozó integrál helyett megjelenő Kronecker-delta miatt a (3.47) kifejezésben az  $\ell'$  indexre való összegzés is elvégezhető:

$$\begin{aligned} \sum_{M_f, m_f} \langle |S_{f_i}|^2 \rangle_{M_i, m_i} & = \frac{16\pi^2 e^2}{\hbar^2 c^2} \sum_{\ell L M} |G_{\ell, L, M}|^2 \frac{k_{\alpha \beta}^{2L+2} (2\ell_f + 1)}{4\pi (2L + 1) [(2L + 1)!!]^2} \times \\ & \times B(EL, I_i \rightarrow I_f) \begin{pmatrix} \ell_f & \ell & \ell_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \left| R_{\ell}^{f_i} \right|^2, \end{aligned} \quad (3.55)$$

ahol

$$R_{\ell}^{f_i} = \int_0^{\infty} R_{\ell_f}(r) h_{\ell}^{(1)}(k_{\alpha \beta} r) R_{n_i \ell_i}(r) r^2 dr \quad (3.56)$$

az elektron radiális hullámfüggvényeit tartalmazó integrál.

Az átmeneti valószínűség végső alakja akkor jelenik meg, amikor a (3.55) kifejezést még összegezem a kimenő elektron lehetséges állapotaira. Mielőtt

ezt megtenném, tekintsük a (3.55) formulát. Észrevehető, hogy az átmeneti valószínűség a különböző  $L$  és  $\ell$  indexű folyamatok összegeként áll elő, más szavakkal a teljes IC folyamat az összes megengedett  $L$  és  $\ell$  kvantumszámú elemi átmenetek összegeként írható le. Ezért praktikus bevezetni az  $L$  multipolaritású (elektromos) belső konverziós átmenet  $\ell$  parciális hullámában történő átmeneti valószínűségét  $[P_{\alpha\beta,12}]_{\ell,L}$ -et, amely a (3.55) alapján

$$[P_{\alpha\beta,12}]_{\ell,L} = \frac{4\pi\alpha_f}{\hbar c} B(EL, I_i \rightarrow I_f) k_{\alpha\beta}^{2L+2} D_{\ell,L} \times \int \sum_M |G_{\ell,L,M}(\varepsilon_2)|^2 |R_\ell^{fi}|^2 \frac{K_2^2 dK_2 d\hat{K}_2}{(2\pi)^3}. \quad (3.57)$$

Itt  $K_2$  a kimenő elektron  $\vec{K}_2$  hullámszám vektorának abszolút értéke,  $\hat{K}_2$  pedig az irányvektor térszöge,  $\alpha_f = e^2/(\hbar c)$  a finomszerkezeti állandó, továbbá bevezettem a

$$D_{\ell,L} = \frac{(2\ell_f + 1)}{(2L + 1)[(2L + 1)!!]^2} \begin{pmatrix} \ell_i & \ell & \ell_f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad (3.58)$$

egyszerűsítő jelölést, valamint a  $K_2$ -től való függés miatt a kimenő elektron kinetikus energiájával, mint változóval újradefiniáltam  $G_{\ell,L,M}$ -et:

$$G_{\ell,L,M}(\varepsilon_2) = \sum_n Q_{\ell,L,M}^n \int_{-\infty}^{\infty} j_n[k_{\alpha\beta}\xi(x_0)] e^{i(\varepsilon_2 - \Delta)x_0} dx_0, \quad (3.59)$$

ahol  $\Delta = \Delta E/(\hbar c)$ ,  $\Delta E = E_\alpha - E_\beta + E_1$ , és  $\varepsilon_2 = E_2/(\hbar c)$ , amelyben  $E_2$  a kimenő elektron kinetikus energiája.

Az átmeneti valószínűség önmagában a belső konverzió szempontjából nem túl informatív, ezért a (2.2) képlet mintájára bevezetem a rövid impulzusú lézerrel indukált  $L$  multipolaritású elektromágnes belső konverziós átmenet  $\ell$  parciális hullámában történő átmenetéhez tartozó átlagos belső konverziós együtthatót:

$$\alpha_{\ell,L} = \frac{[P_{\alpha\beta,12}]_{\ell,L}}{\tau_{ir} T_\gamma}, \quad (3.60)$$

ahol  $\tau_{ir}$  a besugárzási idő (meghatározása a 3.4-ben történik) és

$$T_\gamma = \frac{8\pi(L+1)k_{\alpha\beta}^{2L+1}}{L((2L+1)!!)^2\hbar} B(EL, I_i \rightarrow I_f) \quad (3.61)$$

az  $L$  multipolaritású elektromos  $\gamma$ -átmenet rátája [4]. Az eddigi eredmények alapján a kötött-szabad elektronnal végbemenő elektromos belső konverzió  $\alpha_{\ell,L}$  együtthatója a (3.57), a (3.60) és a (3.61) összefüggések felhasználásával a következő általános formulával írható le:

$$\alpha_{\ell,L} = \frac{\alpha_f k_{\alpha\beta}}{2c\tau_{ir}} C_{\ell,L} \int \sum_M |G_{\ell,L,M}(\varepsilon_2)|^2 |R_\ell^{fi}|^2 \frac{K_2^2 dK_2 d\hat{K}_2}{(2\pi)^3}, \quad (3.62)$$

ahol

$$C_{\ell,L} = \frac{(2\ell_f + 1)L}{(2L + 1)(L + 1)} \begin{pmatrix} \ell_f & \ell & \ell_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (3.63)$$

és  $k_{\alpha\beta} = (E_\alpha - E_\beta)/\hbar c$ .

### 3.3. A lézerimpulzus alakfüggvénye és az elektronállapotok

Az előző alfejezetben levezetett (3.62) összefüggés a belső konverziós együtthatót az elektronállapotok és a lézerimpulzus vivőhulláma tekintetében modellfüggetlenül írja le. A valós esetekre való alkalmazhatóság és a numerikus analízis feltétele, hogy  $\alpha_{\ell,L}$ -nek explicit alakja legyen, ami modellválasztást igényel. Ebben az alfejezetben ismertetem a választott modelleket.

#### 3.3.1. Gauss-típusú alakfüggvény

A (3.62)-ben megjelenő  $G_{\ell,L,M}(\varepsilon_2)$  függvény az egyetlen tényező, amely a  $\xi$  változón keresztül függ a külső koherens elektromágneses tér paramétereitől, különösen a csúcs-intenzitástól ( $I$ ).  $\xi$  egy szférikus elsőfajú Bessel-függvény argumentumában jelenik meg:  $j_n(k_{\alpha\beta}\xi)$ . A továbbiakban olyan folyamatokat vizsgálok, ahol a  $\xi k_{\alpha\beta} \ll 1$  feltétel érvényes, ezért a következő kis argumentumú közelítés alkalmazható [36]:

$$j_n(k_{\alpha\beta}\xi) \approx \frac{(k_{\alpha\beta})^n \xi^n}{(2n + 1)!!}. \quad (3.64)$$

Ez a feltétel a lézer intenzitására vonatkozólag jelent felső korlátot. Amennyiben a magátmenet energiája az  $E_{\alpha\beta} = E_\alpha - E_\beta \sim 10$  keV tartományba esik,

vagy ennél kisebb, akkor a  $\xi k_{\alpha\beta} \ll 1$  feltételből – némi átrendezés után – a csúcshintenzitásra az  $I \ll 10^{22} \text{ Wcm}^{-2}$  feltételt kapjuk. Ennek a közelítésnek az az előnye, hogy ebben az esetben  $G_{\ell,L,M}(\varepsilon_2)$ -ben a  $\xi$  függvény egy hatványa jelenik meg, és ez jelentősen megkönnyíti a továbbiakban szükséges numerikus munkát.

A  $\xi$  függvényt (3.8) definiálja, az ebben megjelenő formafüggvény alakjára pedig Gauss-típusú függvényt választottam, ezzel:

$$\xi(k_0x_0, \phi) = \xi_0 e^{-\left(\frac{k_0x_0}{T}\right)^2} \cos(k_0x_0 + \phi). \quad (3.65)$$

Az irodalomban sokszor  $\cosh^{-1}(k_0x_0/T)$  formafüggvényt használnak [38], [32] de belátható, hogy a  $\vec{Z}$  deriváltjaiból előállított  $\vec{A}$  vektorpotenciál és  $\vec{E}$  elektromos térerősség vektor a két formafüggvény esetében nagyon hasonló. A Gauss-típusú elektromos térerősség azonos paraméterek mellett meredekebben változik és a szélessége keskenyebb, mint a  $\cosh^{-1}(k_0x_0/T)$  esetében. A Gauss-függvény előnye, hogy matematikailag könnyebben kezelhető, mint a hiperbolikus függvények.

Az alakfüggvény megválasztása után meg lehet határozni  $G_{\ell,L,M}(\varepsilon_2)$  konkrét alakját. A (3.59) definícióból kiderül, hogy egy olyan végtelen összeget kell meghatározni, amelynek tagjai a fent leírtak értelmében a  $\xi^n$  hatványok Fourier-transzformáltjait tartalmazzák. Viszont a  $k_{\alpha\beta}\xi \ll 1$  feltétel miatt ezt elég csak a legalacsonyabb nullától különböző rendben figyelembe venni. Ez a megállapítás jelentősen leegyszerűsíti a számításokat. Az  $n = 0$  eset triviális, ekkor a  $Q_{\ell,L,m}^0$  csak akkor nem nulla, ha az  $\ell + L = \text{páros}$  feltétel teljesül (ezt a Legendre-polinomok biztosítják), a Fourier-transzformáció a nullad-rendű polinomra:

$$Q_{\ell,L,M}^0 \int e^{i(\varepsilon_2 - \Delta)x_0} dx_0 = Q_{\ell,L,M}^0 2\pi\delta(\varepsilon_2 - \Delta). \quad (3.66)$$

Ez megfelel a lézermentes esetnek. Már említettem, hogy csak olyan folyamatokat vizsgálólok, ahol a belső konverzió – a lézer jelenléte nélkül – energetikailag tiltott. Ezzel összhangban van a kapott eredmény, hiszen az impulzusmomentum megmaradását biztosító  $Q_{\ell,L,m}^0$  nem nulla értéke mellett az energiamegmaradást leíró Dirac-delta miatt  $G_{\ell,L,M}(\varepsilon_2)$  nulla lesz, ami maga után vonja a teljes átmenetet leíró belső konverziós együttható nulla voltát is.

A lézertér szempontjából az első releváns eset  $n = 1$ , ekkor ugyanis a lézer már "be van kapcsolva", így a lézer nélkül tiltott folyamat módosulhat.  $Q_{\ell,L,M}^1$ -ről tudjuk, hogy csak akkor nem nulla, ha  $\ell + L = \text{páratlan}$ . A későbbi számítások miatt  $G_{\ell,L,M}^1(\varepsilon_2)$ -t célszerű a következő alakra hozni:

$$G_{\ell,L,M} = \frac{1}{3} k_{\alpha\beta} \xi_0 Q_{\ell,L,M}^1 \frac{T}{k_0} G(\varepsilon_2, T, \phi, \Delta, k_0), \quad (3.67)$$

ahol

$$G(\varepsilon_2, T, \phi, \Delta, k_0) = 3 \frac{k_0}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{k_0 x_0}{T}\right)^2} \cos(k_0 x_0 + \phi) e^{i(\varepsilon_2 - \Delta)x_0} dx_0. \quad (3.68)$$

A továbbiakban a fenti integrált határozom meg. Ehhez első lépésben alkalmazni kell a  $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$  addíciós tételt, valamint az Euler-formulát, amellyel a  $k_0 x_0$  argumentumú trigonometrikus függvényeket fejtem ki:

$$G(\varepsilon_2, T, \phi, \Delta, k_0) = A(\varepsilon_2, T, \phi, \Delta, k_0) \cos(\phi) + B(\varepsilon_2, T, \phi, \Delta, k_0) \sin(\phi), \quad (3.69)$$

ahol

$$\begin{aligned} A(\varepsilon_2, T, \phi, \Delta, k_0) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{k_0 x_0}{T}\right)^2} e^{i(k_2 - \Delta + k_0)x_0} dx_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{k_0 x_0}{T}\right)^2} e^{i(k_2 - \Delta - k_0)x_0} dx_0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

és

$$\begin{aligned} B(\varepsilon_2, T, \phi, \Delta, k_0) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{k_0 x_0}{T}\right)^2} e^{i(k_2 - \Delta + k_0)x_0} dx_0 - \\ &- \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{k_0 x_0}{T}\right)^2} e^{i(k_2 - \Delta - k_0)x_0} dx_0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Vegyük észre, hogy itt egy Gauss-függvény Fourier-transzformációjáról van szó:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{k_0 x_0}{T}\right)^2} e^{i(k_2 - \Delta \pm k_0)x_0} dx_0 = \sqrt{\frac{T^2 \pi}{k_0^2}} e^{-\frac{(k_2 - \Delta \pm k_0)^2 T^2}{4k_0^2}}. \quad (3.72)$$

Ezek után a (3.69) összefüggésbe visszahelyettesítve az integrálás utáni  $A$  és  $B$  függvényeket, majd az Euler-képlettel a  $\phi$  függést exponenciális fázissá alakítva, az eredmény

$$G(\beta, T, \phi, \delta) = \frac{\pi^{1/2}}{2} \left[ e^{-i\phi} e^{-\left(\frac{(\beta+\delta-1)T}{2}\right)^2} + e^{i\phi} e^{-\left(\frac{(\beta+\delta+1)T}{2}\right)^2} \right], \quad (3.73)$$

ahol  $\beta = \varepsilon_2/k_0$  és  $\delta = |\Delta|/k_0$  dimenziótlan paraméterek. A (3.67) formulában az impulzuszmomentum megmaradásért felelős  $G_{\ell,L,M}$  tagot szeparáltam, így az  $\alpha_{\ell,L}$  együttható (3.62) összefüggésében az  $M$  kvantumszámra vonatkozó összegzés egyszerűen felírható:

$$S_{\ell,L}^1 = \sum_M |Q_{\ell,L,M}^1|^2. \quad (3.74)$$

Az előzőekben bemutattam, hogy a küszöb folyamatban a kölcsönhatásnak az egy fotonos ( $n = 1$ ) járuléka a domináns, amely az impulzuszmomentumokra az  $\ell + L = \text{pratlan feltételt}$  vonja maga után. Ezek alapján a bevezetett  $S_{\ell,L}^1$  értékeit numerikusan is meg lehet határozni, amelyek a nem nulla esetekben a következők:  $S_{2,3}^1 = 9$  és  $S_{4,3}^1 = 12$ . Tehát a lézertértől függő tényezőt meghatároztam. A továbbiakban az elektronállapotokról lesz szó.

### 3.3.2. Kezdeti és végállapotú elektron-hullámfüggvények

A (3.62) képletben a (3.56) összefüggéssel definiált  $R_l^{fi}$  integrál tartalmazza az elektron kezdeti és végállapotú hullámfüggvényének radiális komponenseit. A küszöb környéki belső konverzióban – mint már említettem – kis energiájú elektronok keletkeznek, ezért nem-relativisztikus hullámfüggvényekkel dolgozom, valamint az elektronokat spin nélküli részecskének tekintem. Ezzel a folyamat lényegi megértésében nem követek el nagy hibát. Természetesen a pontosabb analízis megköveteli a spin figyelembevételét is. A kezdeti kötött elektron leírására hidrogén-típusú megoldást alkalmazok, amelyet a következő általános, dimenziótlan alakban lehet megadni [37]:

$$R_{n\ell}(\rho) = -\sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{[(n+\ell)!]^3 2n}} \left(\frac{2Z}{n}\right)^{3/2} \left(\frac{2Z\rho}{n}\right)^\ell e^{-\frac{Z\rho}{n}} L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Z\rho}{n}\right), \quad (3.75)$$

ahol  $n$  a főkvantumszám,  $\ell$  a pályamomentum,  $Z$  a rendszám,  $L_{n+\ell}^{2\ell+1}(x)$  az asszociált Laguerre-polinom,  $\rho = r/a_0$  dimenziótlan hosszegység,  $a_0 = \hbar/(\kappa c\alpha)$  a Bohr-sugár. A későbbiek kedvéért érdemes a dimenziótlan változóról a dimenziós változóra áttérni. Ekkor a radiális hullámfüggvény

$$R_{n\ell}(r) = -\sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{[(n+\ell)!]^3 2n}} \left(\frac{2Z}{na_0}\right)^{\frac{3}{2}+\ell} r^\ell e^{-\frac{\kappa e^2 Z}{n\hbar^2} r} L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2Z}{na_0} r\right). \quad (3.76)$$

A végállapotú elektron leírására a Coulomb-térben mozgó folytonos spektrumú nem-relativisztikus spin nélküli részecskének a  $\vec{K}_2$  hullámszám vektorhoz tartozó hullámfüggvényét alkalmazom [37]:

$$\varphi_{\vec{K}_2}(\vec{r}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{K_2} \sum_{\ell, m} Y_{\ell m}(\hat{r}) R_{K_2 \ell}(r) Y_{\ell m}^*(\hat{K}_2), \quad (3.77)$$

amelyből az  $Y_{\ell m}(\hat{r})$ -hoz tartozó radiális rész

$$R_{\ell_f}(r) = (2\pi)^{3/2} R_{K_2 \ell_f}(r) \frac{Y_{\ell_f m_f}^*(\hat{K}_2)}{K_2} \quad (3.78)$$

leolvasható, ahol  $K_2$  a kimenő szabad elektron hullámszám-vektorának nagysága,  $\hat{K}_2$  a hullámszám irányvektorának térszöge,  $R_{K_2 \ell_f}(r)$  a hullámszámra normált Coulomb-függvény [37]. Az utóbbi a következő normálási feltételt elégíti ki:

$$\int R_{K_2 \ell}(r) R_{K'_2 \ell}(r) r^2 dr = \delta(K_2 - K'_2). \quad (3.79)$$

Bár az  $R_{\ell_f}$  radiális kifejezés még tartalmaz egy gömbfüggvényt szögváltozóval, de ez nem a helyvektor, hanem a hullámszám-vektor irányszögétől függ. Az  $Y_{\ell_f m_f}^*(\hat{K}_2)$  gömbfüggvények ortonormáltsága, a (3.62)-ben lévő négyzetre emelés és  $d\hat{K}_2$  szerinti integrálás miatt az így kapott járulékok egyet eredményeznek.

A  $K_2$  hullámszámra normált Coulomb-függvények alacsony energiás határesetben ( $K_2 \rightarrow 0$ ) – amely megfelel a küszöb folyamat energiafeltételének – közelíthetők a kis argumentumú kifejtésükkel [39], azaz

$$R_{K_2 \ell_f}(r) = \sqrt{\frac{4\pi K_2}{r}} J_{2\ell_f+1} \left( \sqrt{\frac{8Zr}{a_0}} \right), \quad (3.80)$$

ahol  $J_{2\ell_f+1} \left( \sqrt{\frac{8Zr}{a_0}} \right)$  első fajú Bessel-függvény. Az  $\alpha_{\ell, L}$  együtthatóban a  $K_2$  változóra kell integrálni, ezért célszerű e változó szerint szeparálni a (3.56) kifejezést. Alkalmazva a (3.80) szerinti közelítést a radiális integrálra a következőt kapom:

$$\left| R_{\ell}^{fi}(K_2) \right|^2 = \frac{32\pi^4 a_0^2}{K_2} \left| \tilde{R}_{\ell}^{fi} \right|^2, \quad (3.81)$$

ahol

$$\tilde{R}_\ell^{fi} = Z^{-5/2} \int \tilde{R}_{n_i \ell_i}(x) J_{2\ell_f+1}(\sqrt{8x}) x^{3/2} h_\ell\left(\frac{k_{\alpha\beta} a_0 x}{Z}\right) dx \quad (3.82)$$

a  $K_2$  változótól független függvény. Itt gyakorlati okokból visszatértem a dimenziótlan  $x$  változóra, így  $\tilde{R}_{n_i \ell_i}(x) = a_0^{3/2} R_{n_i \ell_i}(x)$ , ahol  $x = Zr/a_0$ , és  $h_\ell$  a szférikus Hankel-függvény.

A fentiekkel a lézerimpulzus és az elektronállapotok definiálásával a belső konverziós folyamat modelljeit rögzítettem. Az eddig meghatározott formulákkal az  $\alpha_{\ell,L}$  együtthatót a lézertér és az energiaviszonyok szempontjából releváns paramétereket tartalmazó komponensek szorzataként lehet felírni. Alkalmazzuk a  $\xi_0 = [4\pi\alpha_f \hbar / (\kappa^2 c^4 k_0^4)]^{1/2} I^{1/2}$  formulát a (3.67) képletben, ahol  $I$  jelöli a lézerimpulzus csúcsintenzitását, majd némi egyszerű rendezés után a lézerimpulzussal indukált kötött-szabad belső konverziós koefficiens az

$$\alpha_{\ell,L} = \alpha_{\ell,L,0}^{pulse} \delta^4 \frac{\tau}{\tau_{ir}} \psi(\phi, T, \delta) I \quad (3.83)$$

összefüggés írja le, ahol

$$\alpha_{\ell,L,0}^{pulse} = AC_{\ell,L} S_{\ell,L}^1 \left| \tilde{R}_\ell^{fi} \right|^2, \quad (3.84)$$

amelyben a konstans faktor

$$A = \frac{2\pi\alpha_f^2 a_0^2 k_{\alpha\beta}^3}{9\kappa c^3 |\Delta|^4}, \quad (3.85)$$

és

$$\psi(\phi, T, \delta) = T \int_0^\infty |G(\beta, T, \phi, \delta)|^2 d\beta. \quad (3.86)$$

Összefoglalva az eddigi eredményeket elmondható, hogy sikerült meghatároznom az  $L$ -multipolaritású (elektromos)  $\ell$ -ed rendű belső konverziós koefficiens küszöbátmenetre vonatkozó alakját nem-relativisztikus közelítésben, Gauss-típusú impulzusalak mellett. A következő fejezetben az általános összefüggés numerikus vizsgálatát mutatom be a  $^{99m}\text{Tc}$  izomér példáján keresztül.



### 3.4. Numerikus analízis: $^{99m}\text{Tc}$ izomér indukált belső konverziója

A  $^{99m}\text{Tc}$  izomér állapotának felezési ideje  $\tau_\alpha = 6,01$  h, átmeneti energiája  $E_{\alpha\beta} = 2,1726$  keV, amelyet  $E3$  elektromos multipólátmenettel ad le, miközben a  $^{99}\text{Tc}$  egy igen rövid felezési idejű ( $\tau_\beta = 0,19$  ns),  $E_\beta = 140,511$  keV energiájú gerjesztett állapotba kerül [40]. A izomér átmenethez tartozó teljes – lézer nélküli – belső konverziós koefficiens  $\alpha_{tot} \simeq 1,6 \times 10^7$  [41]. A lézertérbeli folyamatokat vizsgáló kutatók  $^{99m}\text{Tc}$  felé irányuló figyelme azért alakult ki, mert az említett  $E_{\alpha\beta}$  átmeneti energia kisebb, mint a  $K$  és az  $L$  héjakon lévő elektronok kötési energiája, ezért a természetes belső konverzió szempontjából ezek a csatornák tiltottak. A lézertér bekapcsolásával, annak módosító hatásának eredményeképpen – megfelelő fotonenergia és lézerintenzitás esetén – ezek a csatornák is megnyithatók a belső konverzió számára, amely így a bomlási állandó megváltozását eredményezi. Az ilyen folyamatokra vonatkozó legújabb számítások numerikus eredményeit tartalmazza a [12] dolgozat. A  $^{99m}\text{Tc}$  izomérnek az izomérek világában közepesen nagy számító felezési ideje, a 6 óra kísérleti szempontból is előnyös, így van esély – természetesen a szükséges technológia birtokában – kísérletileg is igazolni az elméleti számításokat.

A [12] cikkben a síkhullámmal leírt lézerrel (a mi terminológiánkban ez megfelel a végtelen impulzushosszú lézernek) indukált belső konverzió numerikus eredményei azt mutatták, hogy a  $2p_{3/2}$  konverziós elektronnal végbe menő, lézerindukált folyamat az elérhető paraméterű források esetében meglehetősen valószínűvé válik, ezért a továbbiakban először én is ezt az esetet fogom vizsgálni.

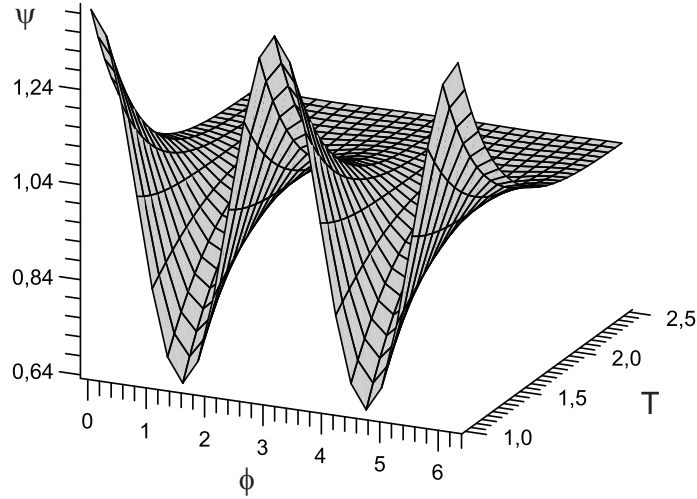
A kérdéses  $2p_{3/2}$  héjon az elektron energiája (a kötési energia  $(-1)$ -szerese)  $E_1 = -2676,9$  eV. Ennek alapján és az izomér állapot átmeneti energiájából meghatározható, hogy a folyamat energiahánya  $|\Delta E| = 504,3$  eV. A küszöb körüli átmenet szempontjából célszerű a vivőhullám körfrekvenciáját úgy megválasztani, hogy  $\omega_0 \sim |\Delta E|/\hbar$  legyen. A kezdeti kötött elektron radiális hullámfüggvényében szerepel a  $Z$  rendszám, viszont a pontosabb számí-

tások érdekében nem lehet figyelmen kívül hagyni a többi elektron árnyékoló hatását. Ennek érdekében az elektronállapot képleteiben a  $Z$  rendszám helyett az effektív rendszámot  $Z_{eff} = n\sqrt{|E_1|/Ry}$  használom, amely a jelen esetben  $Z_{eff} = 28,054$ -nak adódik [12]. Itt  $Ry$  a Rydberg-energia,  $n$  az adott pálya főkvantumszáma, azaz  $n = 2$ .

A (3.83) formulával numerikusan kiszámítottam a  $^{99m}\text{Tc}$  izomér  $2p_{3/2}$  elektronnal végbemenő belső konverziós  $\alpha_{\ell,L}$  együtthatóját. Az  $\alpha_{\ell,L,0}^{pulse}$  tényező nem tartalmaz a lézerrel kapcsolatos paramétereket, ezért ezt direkt lézerspecifikáció nélkül is ki lehet számítani. Az impulzusmomentum-megmaradás alapján a lehetséges  $L$  és  $\ell$  párok:  $(\ell = 2, L = 3)$  és  $(\ell = 4, L = 3)$ . A két eset közül az utóbbiban  $\alpha_{4,3,0}^{pulse} = 1,21 \times 10^{-11} \text{ W}^{-1}\text{cm}^2$ , ami nagyjából hét nagyságrenddel nagyobb, mint az első esetben, vagyis ennek megfelelően az összes lehetséges  $\ell$  és  $L$  értékre az  $\alpha_{4,3,0}^{pulse}$  ad számottevő értéket. Más szavakkal az összes  $\alpha_{\ell,L}$  közül  $\alpha_{4,3}$  a domináns. A tényleges  $\alpha_{\ell,L}$  együtthatót értelemszerűen  $\alpha_{\ell,L}^{pulse}$ ,  $I$  és a többi lézerparaméter függő mennyiség szorzata fogja megadni. A továbbiakban a lézerindukált  $\alpha_{\ell,L}$ -nek lézer paraméterektől való függését mutatom be.

Az  $\alpha_{4,3}$  lézerindukált belső konverziós együtthatónak  $\phi$  fázistolástól és  $T$  dimenziótlan impulzushossztól való függését a 3.1. ábra szemlélteti, ahol a  $\psi(\phi, T, \delta = 1)$  függvényt ábrázoltam a releváns paraméterértékek mellett ( $k_0 = |\Delta|$  mivel  $\delta = 1$ ). Az ábráról leolvasható, hogy az  $\alpha_{4,3}$  együtthatónak (amely (3.83) miatt értelemszerűen arányos  $\psi$ -vel) igen erős a  $\phi$  fázisfüggése, amikor az impulzushossz  $T = 1$ . Ez a hatás  $T$  növekedtével erősen csökken, míg  $T \simeq 2$  környékén teljesen eltűnik. Érdekes eredmény, hogy az impulzushossz csökkenésével  $\phi = 0, \pi, 2\pi$  esetén  $\alpha_{4,3}$  szignifikánsan nő, ezzel együtt az átmenet valószínűsége is. Kálmán és Nagy vizsgálták az elektron szempontjából sokban hasonló ultrarövid impulzushosszú lézerrel indukált sokfotonos ionizációt [38]. E számításban a fent említett jelenség csak kisebb mértékben jelentkezett.

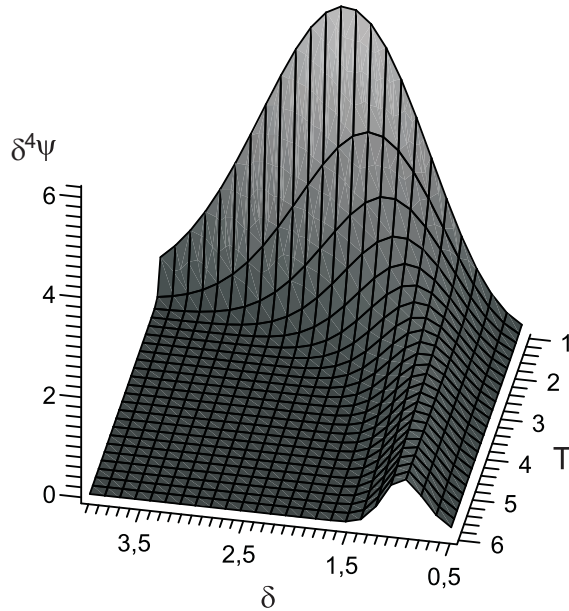
A síkhullámú lézerrel asszisztált belső konverzió küszöb környéki határesetében a numerikus vizsgálatok azt mutatták, hogy ha a  $k_0 \geq |\Delta|$  feltétel teljesül, akkor a kezdetben tiltott csatornák megnyílnak ( $K$  és  $L$  konverziós elektronok), viszont ha ez a feltétel nem teljesül, akkor az átmenet tiltott



3.1. ábra.  $\psi(\phi, T)$  függvénynek a vivőhullám fázisától ( $\phi$ ) ( $-2\pi \leq \phi \leq 0$ ) és a dimenziótlan impulzushossztól ( $T$ ) való függése az  $n = 1$  fotonos folyamatban  $\delta = 1$  paraméterezés mellett.  $T = \omega_0\tau$ ,  $\omega_0 = ck_0$  a vivőfrekvencia és  $\tau$  az impulzushossz,  $\delta = |\Delta|/k_0$ .  $\hbar c |\Delta|$  az energiahiany nagysága

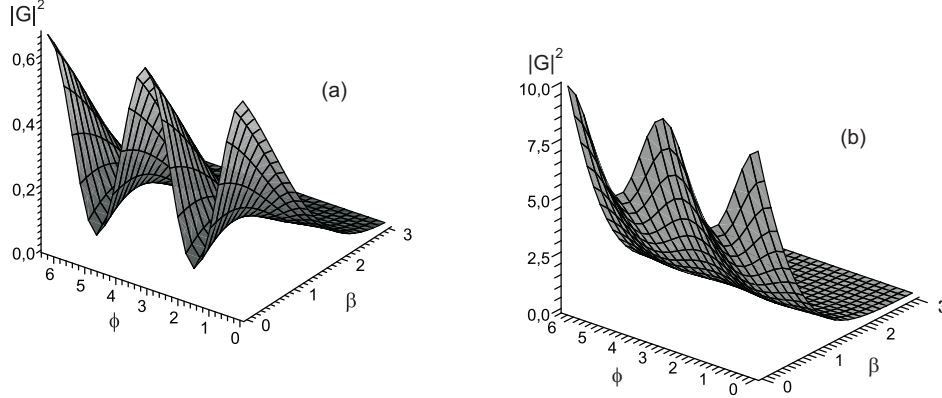
marad. Ezzel szemben az általam vizsgált rövid impulzusok esetében, amikor az impulzus szélessége közel azonos, mint az impulzus körfrekvenciája, akkor a  $k_0 < |\Delta|$  esetben is megvalósul a belső konverzió. Ezt a jelenséget mutatom be a 3.2. ábrán, ahol a  $\delta^4\psi$  függvény  $\delta$  ( $\delta = |\Delta|/k_0$ ) és  $T$ -függését ábrázoltam a  $\phi = n\pi$  paraméter mellett (ebben az esetben a legerősebb a impulzus-hatás, ahogy ez a 3.1. ábrán látható). Ehhez hasonló effektusok nem egyedülállóak a fizikában. Ha például az atommagok Coulomb-gerjesztéseit tekintjük, akkor megfigyelhető, hogy a gerjesztés annál több nívót érint, minél kisebb a gerjesztés időbeli szélessége (impulzushossza). Ennek oka a jelanalízisből ismert hatás, amely szerint az időben rövid jel a frekvenciatérben széles tartomány-  
nak felel meg. Erre extrém példa az időben Dirac-delta jel, amely frekvenciatérben síkhullám (fehér zaj). Amikor a síkhullám határeset felé haladunk

( $T \rightarrow \infty$ ), ennek megfelelően a  $\delta^4\psi$  függvény Dirac-delta szerűen rásimul a  $\delta = 1$ -nél felvett értékre. Ennek oka, hogy a modell a küszöb környéki folyamatot írja le, ahol a kimenő impulzus nullához tart, tehát a lézer által közölt energia szinte csak az elektron kötésének felbontására fordítódik. Ez is igazolja, hogy a  $T \rightarrow \infty$  esetben kvalitatíve visszakaptam a [12]-ben közölt eredményt.



3.2. ábra. A  $\delta^4\psi$  ábrázolva a  $\delta$  ( $k_0 = |\Delta|/\delta$ ) és a  $T$  függvényében, a fázistolás nagysága  $\phi = n\pi$ .  $T = \omega_0\tau$ ,  $\omega_0 = ck_0$  a vivőfrekvencia,  $\tau$  a impulzushossz,  $\hbar c|\Delta|$  az energiahány nagysága

A 3.3. ábrán a  $|G(\beta, \phi)|^2$  függvénynek a  $\beta$  dimenziótlan kimenő energiától ( $\varepsilon_2 = \beta k_0$ ) és  $\phi$  fázistól való függését mutatom be. Mindkét ábrán az impulzushosszt  $T = 1$ -nek választottam, mivel az előző vizsgálatok alapján ebben az esetben a legerősebb az impulzushatás, (a) esetben  $\delta = 0,8$ , (b) esetben  $\delta = 2,4$ . Látható, hogy a  $|G(\beta, \phi)|^2$  függvénynek maximuma van a  $\beta = 0$  és  $\phi = n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) értékeknél.



3.3. ábra. A  $|G(\beta, \phi)|^2$  mennyiség  $\varepsilon_2 = \beta k_0$  és  $\phi$  függvényében ábrázolva  $T = 1$  esetén.  $\varepsilon_2 = E_2/\hbar c$ , ahol  $E_2$  a kilépő elektron energiája.  $T = \omega_0 \tau$ ,  $\omega_0 = ck_0$  a vivőfrekvencia és  $\tau$  a impulzushossz,  $\delta = |\Delta|/k_0$ .  $\hbar c |\Delta|$  az energiahiány nagysága. (a)  $\delta = 0,8$  (b)  $\delta = 2,4$

Már utaltam rá, hogy a 3.2. ábráról extrapolálható a síkhullám határesettel való kvalitatív egyezés. Most elvégzem a numerikus összehasonlítást is.  $\alpha_{4,3}$  síkhullám határesetben a  $k_0 \geq |\Delta|$  feltétel mellett a következő

$$\alpha_{4,3}^{pw} = \frac{\pi}{2} \alpha_{4,3,0}^{pulse} \delta^4 I. \quad (3.87)$$

A küszöbfolyamatban ( $k_0 = |\Delta|$ ) numerikusan ez  $\alpha_{4,3}^{pw} = 1,91 \times 10^{-11} I$  [42]. A  $\lim_{T \rightarrow \infty} \alpha_{4,3}$  (3.83) és a  $\alpha_{4,3}^{pw}$  (3.87) hányadosából meghatározható, hogy

$$\frac{\tau}{\tau_{ir}} \lim_{T \rightarrow \infty} \psi(\phi, T, \delta = 1) = \frac{\pi}{2}, \quad (3.88)$$

amelyből a besugárzási időre  $\tau_{ir} = 0,627\tau$  adódik.

### 3.5. Belső konverziós együtthatók számítása

Ez előző alfejezetben a  $^{99m}\text{Tc}$  izomér atommag lézerrel indukált belső konverziós együtthatójának numerikus vizsgálatát mutattam be. Ezen belül a folyamatnak a lézertér különböző paramétereivel szembeni érzékenységét

is megvizsgáltam. Ebben a szakaszban a  $^{99m}\text{Tc}$  mintájára több izomér esetében is kiszámítom az ultrarövid impulzusú lézerrel indukált optimális belső konverziós együtthatót. Ennek fő motivációja, hogy minél több akár kísérleti szempontból is érdemleges folyamatot mutassak be.

Az elmúlt két évtizedben több olyan publikáció jelent meg, amelyekben a kísérlet szempontjából releváns lézerrel indukált belső konverziót vizsgáltak numerikusan [16], [12]. [12]-ben kimutatták, hogy az indukált belső konverzióban az egy lézerfotonos folyamat a meghatározó, amely összhangban van az általam kapottakkal. A továbbiakban a teljesség igénye nélkül kiválogatott atommagokra végzett számítások eredményeit mutatom be.

A küszöb környéki, energetikailag tiltott csatornákat tartalmazó izomérek közül az alábbiakat fogom vizsgálni:

- $^{107m}\text{Ag}$  ( $K$  héj,  $E3$ , 25, 47 keV),
- $^{90m}\text{Nb}$  ( $L_2$  héj,  $M2 + E3$ , 2, 3 keV),
- $^{183m1}\text{W}$  ( $M_5$  héj,  $E2$ , 1, 79 keV),
- $^{183m2}\text{W}$  ( $N_1$  héj,  $E1$ , 548 eV),
- $^{188m}\text{Re}$  ( $M_2$  héj,  $M3 + E4$ , 2, 63 keV),
- $^{235m}\text{U}$  ( $O_4$  és  $O_5$  héjak,  $E3$ , 73, 5 eV).

Az izomérek utáni zárójelben az első tag a lézertér nélkül tiltott folyamat konverziós elektronhéja, itt értelem szerűen csak azokat az állapotokat veszem figyelembe, amelyek a küszöbfolyamatban relevánsak. A második tag a magátmenet multipolaritása, amelyek közül én csak az elektromos  $EL$  átmenetekkel foglalkozom, az utolsó tag az átmenetben felszabaduló energia. Az izomérek válogatása természetesen nem a véletlennek köszönhető. Látható, hogy a belső konverzió átmeneti energiája a 73 eV és a 25, 5 keV tartomány közé esik, ez a tartomány az elektronhéjak kötési energiájának nagyságrendjébe esik, így ezeknél vannak energetikailag tiltott konverziós csatornák. A számításba vehető energiahiány 17 eV és 68 eV közé esik, ami kulcsfontosságú, hiszen ez az érték határozza meg a lézer vivőhullámának körfrekvenciáját, amely ennek megfelelően az UV tartományba esik.

A lézer-asszisztált IC folyamatok leírására minden előbb említett esetben a Henneberger képből kapott modellt alkalmazom. Felmerülhet a kérdés, hogy mindegyik belső konverziós átmenetre érvényes-e ez a megközelítés. A Henneberger-transzformáció a dipólközelítésen alapul. Az alagúteffektussal végbemenő erős elektromágneses térbeli ionizáció vizsgálata [44] kimutatta, hogy a dipólközelítés alkalmazhatóságának feltétele nem minden esetben teljesül az említett elméletben és a nagy intenzitású elektromágneses terek esetén. Ez a felismerés a lézer csúcshintenzitásának szempontjából korlátot jelent. Ez a korlát viszont nagyobb, mint a modell érvényességére vonatkozó  $\xi k_{\alpha\beta} \ll 1$  feltételből  $E_\alpha - E_\beta \simeq 10$  keV esetén a csúcshintenzításra kapott  $I \ll 10^{22}$  Wcm<sup>-2</sup> feltétel. Tehát a dipól-közelítés az általunk vizsgált esetekben érvényes.

A lézer indukált belső konverziós együtthatót a kötött-szabad elektron átmenetre kapott  $\alpha_{\ell,L}$  (3.83) kifejezés alapján számolom. Emlékeztetőül

$$\alpha_{\ell,L} = \alpha_{\ell,L,0}^{pulse} \delta^4 \frac{\tau}{\tau_{ir}} \psi(\phi, T, \delta) I, \quad (3.89)$$

ahol  $\delta = |\Delta|/k_0$ ,  $\Delta = \Delta E/(\hbar c)$ .  $\Delta E$  a természetes folyamat energiahianyja, azaz  $\Delta E = E_\alpha - E_\beta + E_1$ ,  $E_\alpha$  és  $E_\beta$  rendre a mag kezdeti és a végállapot energiájának sajátértéke,  $E_1$  a kezdeti kötött elektron energiája. A küszöb környéki határesetben  $\omega_0 \sim |\Delta E|/\hbar$ .  $\psi$  integrandusában a Gauss-impulzusalakra jellemző  $G(\beta, T, \phi, \delta)$  függvény szerepel, lásd a (3.73) összefüggést.

A numerikus eredményeket a 3.1. táblázatban foglaltam össze. A táblázatban feltüntetett atompályák energiája, ill. a magátmenetek multipolaritása és energiája [40]-ból, míg a lézermentes esetre vonatkozó  $\alpha_{tot}$  együtthatók [45] és [46] munkákból származnak. A táblázatban az utolsó előtti oszlop az általam számolt  $\Sigma_l \alpha_{\ell,L,0}^{pulse}$  az impulzusmomentum kiválasztási szabály által megengedett, de lézertér nélkül energetikailag tiltott átmenetekre vonatkozó indukált belső konverziós együttható első tényezője szerepel összegezve a megengedett  $\ell$  kvantumszámokra. Az ebben az oszlopban szereplő tagok bármelyikét megszorozva az  $I$  lézerintenzitással megkapható, hogy a lézer hatására nagyságrendileg mekkora plusz növekmény kapható az  $\alpha_{tot}$  belső konverziós együttható mellett. A pontos értékhez természetesen ki kell számolni az adott lézere jellemző  $\psi(\phi, T, \delta) \tau/\tau_{ir}$  értéket is. Egy konkrét

példát nézve, tekintsük a  $^{183\text{m}1}\text{W}$  izomért. Ha képezzük az  $\alpha_{tot}/\Sigma_l\alpha_{l,L,0}^{pulse}$  hányadost, akkor  $\psi(\phi, T, \delta)\tau/\tau_{ir} = 1$  feltételezése mellett megkapjuk azt az intenzitásértéket, amelynek esetében a lézer által bekapcsolt belső konverziós átmenti csatornák a teljes belső konverziós együtthatót a duplájára növelik. Ebben a példában ez az intenzitásérték  $I = 1,67 \times 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$ . A kapott eredmény teljesíti a modell érvényességét korlátozó csúcsintenzitás-feltételt ( $I \ll 10^{22} \text{ Wcm}^{-2}$ ). A táblázat többi értékére vonatkozó hasonló számítások azt adják eredményül, hogy a csúcsintenzitás korlátja alatt az elérhető indukált belső konverziós együttható az  $\alpha_{tot}$  értékének 10% – 100% tartományába esik.

Izomr	$\hbar\omega_{\alpha\beta}$ (keV)	$EL/shell$	$E_B$ (keV)	$-\Delta E$ (eV)	$\Sigma_l\alpha_{l,L,0}^{pulse}$ ( $\text{cm}^2/\text{W}$ )	$\alpha_{tot}$
$^{105\text{m}}\text{Ag}$	25,47	$E3/K$	25,514	44	$2,6 \times 10^{-16}$	$3,6 \times 10^4(a)$
$^{90\text{m}}\text{Nb}$	2,3	$E3/L_2$	2,368	68	$1,2 \times 10^{-13}$	$1,1 \times 10^{10}(b)$
$^{183\text{m}1}\text{W}$	1,79	$E2/M_5$	1,807	17	$3,9 \times 10^{-13}$	$6,5 \times 10^7(b)$
$^{183\text{m}2}\text{W}$	0,548	$E1/N_1$	0,595	47	$6,9 \times 10^{-18}$	2240(b)
$^{188\text{m}}\text{Re}$	2,63	$E4/M_2$	2,682	52	$3,4 \times 10^{-16}$	$1,1 \times 10^{15}(b)$
$^{235\text{m}}\text{U}$	0,0768	$E3/O_5$	0,096	20	0,038	$3,7 \times 10^{20}(b)$
$^{235\text{m}}\text{U}$	0,0768	$E3/O_4$	0,103	26	0,02	$3,7 \times 10^{20}(b)$

3.1. táblázat. A  $\Sigma_l\alpha_{l,L,0}^{pulse}$  számított értékei ( $\text{cm}^2/\text{W}$  egységekben). A táblázat második oszlopa a magátmenet energiáját tartalmazza ( $\hbar\omega_{\alpha\beta}$ ), a harmadik oszlopban az elektromos átmenet rendje és a folyamatban résztvevő elektron héj indexe szerepel, majd az elektron adott héjhoz tartozó kötési energiája ( $E_B$ ) jelenik meg [40], ezt követően a belső konverzióhoz szükséges energiahiány ( $\Delta E = \hbar\omega_{\alpha\beta} - E_B$ ), és az utolsó oszlopban a lézermentes eset teljes belső konverziós együtthatója ( $\alpha_{tot}$ ) [45] (a) [46] (b) szerepel



### 3.6. Az eredmények összefoglalása

Az ultrarövid lézerimpulzussal indukált belső konverziós folyamat leírásában elért eredményeim az alábbiak:

1. Meghatároztam az intenzív impulzuslézerbeli elektron-atommag kölcsönhatás segítségével a kötött-szabad elektronátmenettel járó intenzív lézerimpulzusbeli belső konverziós folyamat általános  $S$ -mátrixelemét.
2. Az  $S$ -mátrixelem alapján megadtam a nem-relativisztikus elektromos multipól-átmeneteket ( $EL$ ) leíró belső konverziós együtthatót Gauss-típusú impulzusalakra.
3. Meghatároztam a lézer nélkül tiltott belső konverziós csatornák lézerrel indukált belső konverziós (IC) együtthatójának vezető tagját a  $^{99m}\text{Tc}$  izomér esetében.
4. Megvizsgáltam a belső konverziós folyamat lézer- és egyéb paramétereiktől ( $\hbar c\Delta$  energiahiány,  $\phi$  fázistolás,  $T$  impulzushossz) való függését. A numerikus vizsgálatból kiderült, hogy a lézerburkoló vivőhullámának  $\phi$  fázistolása számottevő a folyamat szempontjából. Ha a fázistolás  $\phi = \frac{n\pi}{2}$ , akkor az impulzushatás maximális, míg minimális, amikor  $\phi = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}$ . Az indukált belső konverziós együttható drasztikusan megnő abban az esetben, amikor az impulzushossz reciproka azonos a vivőhullám körfrekvenciájával ( $\tau^{-1} = \omega_0$ ), és a vivőhullám energiája kisebb, mint az elektron-atommag folyamat energiahiánya ( $\hbar c k_0 < \hbar c\Delta$ ). Ez a jelenség a lézer síkhullám határeseténél jelentősebb növekményt jelent. A  $T$  dimenziótlan impulzushossz  $T \rightarrow \infty$  határesetében visszakaptam a [12] síkhullám esetére számolt  $^{99m}\text{Tc}$  belső konverziós együtthatójának numerikus értékét.
5. Numerikusan vizsgáltam az alábbi izomérek lézer nélkül tiltott indukált belső konverziós együtthatóját:  $^{107m}\text{Ag}$ ,  $^{90m}\text{Nb}$ ,  $^{183m1}\text{W}$ ,  $^{183m2}\text{W}$ ,  $^{188m}\text{Re}$ ,  $^{235m}\text{U}$ .

## 4. fejezet

# A fotonukleáris effektus elméleti alapjai

Ezzel a fejezettel kezdődően az előzőekhez képest egy új jelenség – a *fotonukleáris effektus* – lézertérben végbemenő sajátosságait mutatom be. Jelen fejezet tárgya az alapfolyamat elméleti hátterének összefoglalása és a lézertérbeli (mag)reakciók általános jellemzőinek (különösen a mértékinvariancia problémakörének) ismertetése. Az ezt követő fejezetben a saját eredményeimet részletezem.

### 4.1. A fotonukleáris effektus, vagyis a $(\gamma, n)$ és $(\gamma, p)$ magreakciók

A természetben jól ismertek azok a magreakciók, amelyek neutron vagy proton elnyelése mellett  $\gamma$ -foton emissziójával járnak, standard magfizikai jelöléssel kifejezve ezek az  $(n, \gamma)$ , ill.  $(p, \gamma)$  reakciók. A kvantummechanikai folyamatokra érvényes a reciprocitási-tétel [48], amelynek értelmében a reakciók inverz folyamatai is végbemehetnek. Ennek matematikai megnyilvánulása az  $S$ -mátrix unitér tulajdonsága. Mindezt figyelembe véve elmondható, hogy  $\gamma$ -fotonokkal bombázva egy atommagot, abból megfelelő feltételek mellett szabad nukleonok (neutronok, protonok) kelthetők. Az ilyen folyamatok standard jelölése  $(\gamma, n)$  ill.  $(\gamma, p)$ . Összefoglaló nevük: fotonukleáris effektus.

A fotonukleáris effektus témakörében a  $(\gamma, n)$  reakciók voltak az elsőként vizsgált folyamatok. A  $(\gamma, n)$  reakció egy tipikus példája a deuteron fotodezintegrációja, a  ${}^2\text{H}(\gamma, n){}^1\text{H}$  folyamat. A deuteron az egyik leggyengébben kötött atommag, kötési energiája  $E_b = 2,22$  MeV, és csak alapállapotban létezik. Amennyiben a foton energiája nagyobb, mint a neutron kötési energiája, akkor megtörténhet a neutronemisszió, amely jelen esetben a két nukleonból álló atommag szétesését jelenti. Természetesen nagyobb tömegszámú atommagoknál is végbemegy a reakció, így az igen nagy tömegszámú magok esetében is, mint pl. az  ${}^{238}\text{U}(\gamma, n){}^{237}\text{U}$  reakció, amely hatáskeresztmetszetének maximuma hozzávetőleg 10 MeV  $\gamma$ -energia környékén található. Ebben az esetben, valamint a többi nagy tömegszámú atommaggal végzett mérés analíziséből kiderült, hogy a kilökött neutronok eloszlása a  $90^\circ$ -os szórási szög  $\theta$ -ban szimmetrikus eloszlású [49] ( $\theta$  a nyaláb és a kirepülő neutron iránya közti szög). Ez azt jelenti, hogy a  $(\gamma, n)$  magreakció a közbenső magmodellnek megfelelően megy végbe.

Az előzőekkel ellentétben a  $(\gamma, p)$  reakciókban a kirepülő proton eloszlása nem mutat  $\theta = 90^\circ$ -nál  $\theta$ -ban szimmetriát, a tipikus repülési irányt a  $\gamma$ -foton energiája és polarizációja határozza meg. Ebből az is következik, hogy nagy tömegszámú targetmagok esetében a protonemisszióval járó fotonukleáris reakció inkább direkt magreakciónak tekinthető. A bejövő  $\gamma$ -foton energiája ekkor nem oszlik meg a targetmagot alkotó nukleonok között, hanem közvetlenül egy kiszemelt protonnak adódik át. Nagy energiájú ( $> 40$  MeV) fotonok elnyelésekor a kilépő proton tipikusan előre szóródik. A  $(\gamma, p)$  reakció az előzővel ellentétben már leírható egyrészecske modellekkel, természetesen a választott atommag szerkezeti tulajdonságaitól függően választott állapotfüggvényekkel és Hamilton-operátorokkal.

A fotonukleáris effektus első elméleti leírása az 1950-es években történt, amely jellemzően a  $(\gamma, n)$  reakciókra vonatkozott. Ezért eleinte protonemisszió esetében is általában elhanyagolták a maradványmag és a proton közti Coulomb-kölcsönhatást. A [50] cikk szerzői  $A = 68$  és  $A = 184$  atommagokra végeztek független-részecske számításokat, a nukleon-hullámfüggvényeket derékszögű potenciál esetére vonatkozó Fermi-gáz modell alapján adták meg, azzal kiegészítve, hogy figyelembe vettek Pauli-párkorrelációs faktort is. A számítási

eredmények összhangban voltak a mérési eredményekkel, Cu esetében elektromos dipól-rezonanciákat találtak 18 MeV energián, míg Ta esetében 12 MeV energián. A számításokat Levinger [51] harmonikus-oszcillátor potenciál mellett újra elvégezte, de immár több izotópra vonatkozólag (köztük zárt héjú atommagokra is). A számítások ismét a mérésekkel konzisztens eredményeket szolgáltatottak. A szerző azt találta, hogy a neutron-proton párkölsönhatás figyelembevétele kisebb növekményt eredményez az integrált hatáskeresztmetszetben, amely növekmény a különbözőképpen leírt párpotenciáloktól (Yukawa és Gauss típus) és a magsugártól függetlenül is jelentkezett.

A problémát kísérletileg is tanulmányozták. Többek között A. S. Penfold és E. L. Garwin [52] közölték az oxigén, szén és réz atommagokon végzett fotonukleáris effektusra vonatkozó kísérleti eredményeiket. A kísérlet során nagy-energiájú (19 – 60 MeV) szinkrotron sugárzást alkalmaztak, amely az atommagon történő rugalmatlan szórás következtében nukleonemissziót vált ki. Kimutatták, hogy – egyéb kísérletekkel összhangban [53], [54] – az oxigén esetében a folyamatért főleg egy óriásrezonancia a felelős. A szénre vonatkozó hatáskeresztmetszet ezzel szemben nem írható le egy egyszeres óriásrezonanciával, mivel ekkor a mag finomszerkezete is befolyásolja a folyamatot.

A jelenség kísérleti vizsgálatának eredményeit hosszasan lehetne részletezni, a dolgozatom szűk értelemben vett tárgyához azonban érdemben nem járulna hozzá. Ezért a továbbiakban csak az általam végzett munkához szorosán kapcsolódó elméleti háttérrel ismertetem.

## 4.2. Lézertérbeli folyamatok mértékinvariáns leírása

A 60-as és 70-es években a kvantumoptika egyik sarkalatos problémáját a sugárzási tér és anyag kölcsönhatásának mértékinvariáns leírása jelentette. A probléma abból fakadt, hogy a különböző, leggyakrabban használt kölcsönhatási Hamilton-operátorokkal ( $-e\vec{E}\vec{r}$ , valamint  $-(e/m)\vec{p}\vec{A} + e^2/(2m)\vec{A}^2$ ) végzett perturbációs számítás látszólag különböző eredményre vezetett, pedig kimutatható, hogy ez a kétfajta Hamilton-operátor az elektromágneses poten-

ciálok különböző mértékben megjelenő alakjainak feleltethető meg. Ezért a mértékinvariancia miatt a kétfajta leírásnak azonos végeredményt kellene adnia. A probléma teljes körű tisztázása a 80-as évek végére megtörtént [55], [56] amely magyar nyelven is részletesen olvasható a [57] értekezésben, illetve [8] D. függelékében. Ebben a szakaszban a mértékinvariancia problémaköréből a teljesség igénye nélkül, csak a továbbiak megértéséhez feltétlenül szükséges fogalmakat és eredményeket ismertetem.

### 4.2.1. Mértéktranszformációk és a kölcsönhatási operátorok

A Maxwell-egyenletek az elektromos ( $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ) és mágneses ( $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ) térerősség-vektorok tér- és időbeli leírását egyértelműen meghatározzák. Az  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  és a  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  térerősség-vektorok azonban az  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  vektorpotenciál és a  $\phi(\vec{r}, t)$  skalárpotenciál segítségével az

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{c\partial t}\vec{A}(\vec{r}, t), \quad (4.1)$$

illetve

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (4.2)$$

összefüggésekkel határozhatók meg. A Maxwell-egyenletek invariánsak egy speciális lokális transzformációval szemben. Ha vesszük a potenciálok

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \nabla\chi(\vec{r}, t), \quad (4.3)$$

$$\phi(\vec{r}, t) \rightarrow \phi'(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{c\partial t}\chi(\vec{r}, t) \quad (4.4)$$

szerinti transzformáltját, ahol  $\chi(\vec{r}, t)$  tetszőleges függvény, akkor az általuk meghatározott  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  és  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  térerősségek és a Maxwell-egyenletek változatlanok maradnak. Ezt a tulajdonságot mértékinvarianciának nevezik. Ebből következik, hogy a skalár- és vektorpotenciálok egy tetszőleges  $\chi(\vec{r}, t)$  skalárfüggvény erejéig határozatlanok maradnak. Ez a mértékszabadság. E miatt célszerű bevezetni az  $\vec{A}^g(\vec{r}, t)$ ,  $\phi^g(\vec{r}, t)$  jelölést, ahol  $g$  index a mértékválasztásra utal (ettől kezdve a továbbiakban is). A klasszikus fizikában az elektrodinamika mozgásegyenleteiben a térerősség-vektorok szerepelnek, így a dinamikai leírás érzéketlen marad a potenciálok transzformációira nézve.

A kvantumelméletben a klasszikus fizikával ellentétben a térerősségek helyett a potenciálok jelennek meg az időfejlődést leíró Schrödinger-egyenletben:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^g(\vec{r}, t) = \left( \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}^g(\vec{r}, t) \right)^2 + e\phi^g(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \right) \Psi^g(\vec{r}, t), \quad (4.5)$$

ahol a  $V(\vec{r})$  a külső elektromágneses tértől független potenciál (pl. az atommag Coulomb-tere, vagy a magpotenciál). Látható, hogy a jobb oldalon lévő Hamilton-operátor egyes komponensei és az állapotfüggvény is mértékfüggő mennyiségek. Érdekes a Hamilton-operátort szeparálni szabad és kölcsönhatási komponensekre, amivel a (4.5) egyenlet az

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^g(\vec{r}, t) = [H_0 + H_I^g(\vec{r}, t)] \Psi^g(\vec{r}, t) \quad (4.6)$$

alakban írható, ahol

$$H_0 = \frac{(\vec{p})^2}{2m} + V(\vec{r}), \quad (4.7)$$

$$H_I^g = -\frac{e}{mc} \vec{A}^g \vec{p} - \frac{e}{2mc} [\vec{p}, \vec{A}^g] + \frac{e^2}{2m} (\vec{A}^g)^2 + e\phi^g. \quad (4.8)$$

A  $H_0$  szabad Hamilton-operátor mértékfüggetlen, de a  $H_I^g$  kölcsönhatási operátor mértékfüggő.

Egy kvantummechanikai rendszer időfejlődése nem függhet attól, hogy milyen mérték szerint írjuk le, ezért a (4.6) egyenletnek mértékinvariánsnak kell lennie, vagyis alakja nem változhat a transzformáció során. Ez viszont csak akkor teljesül, ha egy  $g \rightarrow G$  transzformáció során a potenciálok  $(\vec{A}^g, \phi^g) \rightarrow (\vec{A}^G, \phi^G)$  transzformációja mellett az állapotfüggvény is transzformálódik egy speciálisan választott unitér operátor segítségével az alábbi módon:

$$\Psi^g(\vec{r}, t) \rightarrow \Psi^G(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t) \Psi^g(\vec{r}, t) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi(\vec{r}, t)} \Psi^g(\vec{r}, t), \quad (4.9)$$

ahol  $\chi(\vec{r}, t)$  a (4.4) transzformációban már bemutatott mértéktranszformációt generáló skalárfüggvény. Ezek alapján egy tetszőleges mértéktranszformáció során, mind a kölcsönhatási Hamilton-operátort, mind pedig az állapotfüggvényeket a mértéktranszformációnak megfelelően transzformálni kell. A következőkben a sugárzási tér leírására használt két speciális mértéket mutatok be, amelyek segítségével ismertetem a mértékinvariáns leírás részleteit.

### Sugárzási mérték ( $R$ -mérték vagy $pA$ -mérték)

A (4.6) képlettel felírt Schrödinger-egyenletet praktikus olyan potenciálokkal felírni, amelyek kielégítik a

$$\vec{\nabla} \vec{A}^g = 0 \quad (4.10)$$

Coulomb-mértékfeltételt. Ebben az esetben a vektorpotenciál és az impulzus operátora felcserélhető, vagyis

$$[\vec{p}, \vec{A}^g] = 0. \quad (4.11)$$

Ennek következménye, hogy a (4.8) kölcsönhatási operátor leegyszerűsödik. További egyszerűsítés érhető el azáltal, hogy a külső elektromágneses térnek a vizsgált tartományon belül nincsenek forrásai, ezért található olyan Coulomb-mérték, amelyben a skalárpotenciál eltűnik, azaz  $\phi^g(\vec{r}, t) = 0$ . E mértékválasztást sugárzási mértéknek ( $R$ -mérték) nevezik. Összefoglalva, a  $g = R$  mértékbeli kölcsönhatási operátor alakja

$$H_I^R(\vec{r}, t) = -\frac{e}{mc} \vec{A}^R(\vec{r}, t) \vec{p} + \frac{e^2}{2m} \left( \vec{A}^R(\vec{r}, t) \right)^2. \quad (4.12)$$

Az általam vizsgált folyamatokban (atommag-lézer csatolt kölcsönhatás) a kölcsönható objektumok mérete jóval kisebb, mint a sugárzási tér karakterisztikus hullámhossza, ezért általában használható a dipól-közelítés (erre még kitérek az 5.1 alfejezet végén), amely  $R$ -mértékben az ún. hosszú hullámú közelítésnek (a továbbiakban LWA) felel meg. Ekkor a helyfüggés elhanyagolható a vektorpotenciálban:  $\vec{A}^R(\vec{r} = 0, t) = \vec{A}(t)$ , amivel a (4.12) kölcsönhatási operátor tisztán időfüggővé válik:

$$H_I^R(t) = -\frac{e}{mc} \vec{A}(t) \vec{p} + \frac{e^2}{2m} \left( \vec{A}(t) \right)^2. \quad (4.13)$$

Az  $\left( \vec{A}(t) \right)^2$  tag nem okoz átmenetet a rendszer állapotai között, ezért egy alkalmasan választott unitér transzformációval eliminálható. Végeredményként az  $R$ -mértékben, az LWA közelítés mellett érvényes Schrödinger-egyenlet alakja az alábbi:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^R(\vec{r}, t) = [H_0 + H_I^R(t)] \Psi^R(\vec{r}, t), \quad (4.14)$$

ahol

$$H_I^R(t) = -\frac{e}{mc}\vec{A}(t)\vec{p}. \quad (4.15)$$

### Elektromos dipól-mérték ( $E$ -mérték vagy $rE$ -mérték)

A sugárzási térrel való kölcsönhatás leírásának egy másik módja az elektromos dipól-mértékben megfogalmazott kölcsönhatási Hamilton-operátor használata. Ezt Göppert-Mayer vezette be, ezért az irodalomban szokás Göppert-Mayer mértéknek is nevezni. Az előző szakaszokból tudvalevő, hogy a Schrödinger-egyenlet mértékinvariáns, ezért ezt most kihasználva az  $rE$ -mértékbeli Hamilton operátort és Schrödinger-egyenletet most az  $R$ -mértékben érvényes mennyiségek mértéktranszformációjából vezetem be. Az  $R \rightarrow E$  mértéktranszformációt a  $\chi(\vec{r}, t)$  skalárfüggvény következő speciális alakja generálja:

$$\chi(\vec{r}, t) = -\vec{A}(t)\vec{r}. \quad (4.16)$$

A (4.4) mértéktranszformációnak a (4.14) egyenletre gyakorolt hatását részleteiben nem tárgyalom. Némi egyszerű levezetés után a következő eredmények adódnak:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi^E(\vec{r}, t) = [H_0 + H_I^E(t)]\Psi^E(\vec{r}, t), \quad (4.17)$$

a kölcsönhatási Hamilton operátor

$$H_I^E(t) = -e\vec{E}(t)\vec{r} \quad (4.18)$$

és

$$\Psi^E(\vec{r}, t) = T(\vec{r}, t)\Psi^R(\vec{r}, t) = e^{-\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}(t)\vec{r}}\Psi^R(\vec{r}, t). \quad (4.19)$$

A kapott dipól-mértékben érvényes egyenlet a mértékinvariancia alapján teljesen egyenértékű az  $R$ -mértékben kapott Schrödinger-egyenlet (4.14) szerinti alakjával. Itt fontos megjegyezni, hogy mindez akkor érvényes, amikor a vektorpotenciál helyfüggetlen, vagyis az LWA közelítésben, amely ilyen értelemben az elektromos dipólközelítéssel ekvivalens. Ennek következménye, hogy a sugárzási térrel való kölcsönhatás leírható (4.15) vagy (4.18) szerinti



kölcsönhatási Hamilton-operátorokkal, mert a két leírás egyenértékű [59]. Figyelembe kell azonban venni, hogy a két leírás állapotfüggvénye (4.19) szerint változik meg.

A kétféle Hamilton operátor egyenértékűsége azt is jelenti, hogy ha létezne pl. a (4.14) Schrödinger-egyenletnek  $\Psi^R(\vec{r}, t)$  egzakt megoldása, és az ebből kapott valószínűségi sűrűség  $|\Psi^R(\vec{r}, t)|^2$ , akkor minden mértékben ugyanezt a  $|\Psi^R(\vec{r}, t)|^2$  valószínűség sűrűséget kellene megkapnunk, így az  $E$ -mértékben is  $|\Psi^E(\vec{r}, t)|^2 = |\Psi^R(\vec{r}, t)|^2$ -nek kell lennie. A probléma abból ered, hogy az egzakt megoldás nem létezik, átmeneti amplitúdókat számolunk, amelyek meghatározásához időfüggő perturbációszámítást kell végezni. Ebben az esetben viszont figyelembe kell venni, hogy a két leírás állapotfüggvénye (4.19) szerint változik. Csak ennek segítségével tudjuk teljesíteni azt a fontos, és nyilvánvaló követelményt, hogy az átmeneti amplitúdó (avagy az  $S$ -mátrixelem) mértékinvariáns maradjon.

### 4.2.2. Mértékinvariáns mennyiségek, konzisztens leírás

A kvantumelméletben a fizikai mennyiségeket önadjungált operátorok reprezentálják, ezek közül azonban nem mindegyik érzéketlen (invariáns) a mértéktranszformációval szemben. Itt le kell szögezni, hogy csak azokat a mennyiségeket szabad valódi fizikai mennyiségeknek tekinteni, amelyek mértékinvariánsak. Legyen  $O^g$  egy fizikai mennyiséget leíró operátor  $g$ -mértékbeli alakja, azaz  $O^g = O(\vec{A}^g, \phi^g)$ .  $O^g$  akkor tekinthető valódi fizikai mennyiségnek, ha a potenciálok (4.4) képlet szerinti transzformációjával előállított  $O^{g'} = O(\vec{A}^{g'}, \phi^{g'})$  alakja azonos a mértéktranszformáció előtti  $O^g = O(\vec{A}^g, \phi^g)$  operátor unitér transzformáltjával, vagyis ha igaz, hogy

$$O^{g'} = T O^g T^+, \quad (4.20)$$

ahol

$$T = e^{\frac{ie}{\hbar c} \chi} \quad (4.21)$$

az állapotfüggvényt is transzformáló unitér operátor. Kimutatható, hogy a valódi fizikai mennyiségek sajátértékei – amint az elvárjuk – minden mérték-

ben azonosak [57]. Az alábbiakban felsorolok néhány fontos példát a valódi fizikai mennyiségekre:

- helyoperátor:  $\vec{r}$ ;
- kinetikus impulzus:  $\vec{\pi}^g = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}^g$ ;
- pillanatnyi energia:  

$$\varepsilon^g = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}^g \right)^2 + V(\vec{r});$$
- valamint egy speciális operátor [a (4.5) egyenlet alapján]:  

$$F^g = e\Phi^g - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

A felsoroltakkal ellentétben viszont a (4.6) egyenletben felírt  $H_0$  szabad ill.  $H$  teljes Hamilton-operátorok, valamint a  $\vec{p} = -i\hbar\nabla$  kanonikus impulzusoperátor önmagukban nem mértékinvariánsak.

Az  $\varepsilon^g$  pillanatnyi energiaoperátor mértékinvariáns, tehát sajátértékei minden mérték szerint azonosak, sőt LWA közelítésben az  $\varepsilon^g$  sajátértékei időfüggetlenek. Belátható (lásd pl. [57]), hogy ebben az esetben az  $R$ -mértékből az elektromos dipólmértékbe vivő transzformáció az  $\varepsilon^g$  operátort  $H_0$ -ba viszi, tehát  $\varepsilon^E = H_0$ . Ennek megfelelően a pillanatnyi energiaoperátor  $R$ -mértékbeli  $\Phi_n$  sajátállapotai és az  $E$ -mértékbeli  $\varphi_n$  sajátállapotai – amelyek tehát a  $H_0$  Hamilton-operátor sajátállapotai – között a

$$\Phi_n = e^{\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}(t)\vec{r}}\varphi_n \quad (4.22)$$

mértéktranszformáció teremt kapcsolatot. Ennek a figyelmen kívül hagyása problémát okoz a perturbációs számításban. Az is kimutatható, hogy az átmeneti amplitúdók számításakor mindkét mértékben a  $-e\vec{E}(t)\vec{r}$  operátormátrixelemeit kell kiszámítanunk [57], [8].

### 4.3. Nukleonglóriás (halo-) atommagok

A magyar terminológia szerinti nukleonglóriás atommagok az angol nyelvben "halo nuclei" néven ismertek, nevükben is utalva speciális szerkezetükre. Ezek az atommagok viszonylag távol esnek az  $N-Z$  térképen jelölt stabilitási sávtól, így az ilyen atommagok legkülső nukleonja(i) gyengén kötött(ek), aminek következtében a térbeli kiterjedés megnőhet. Ezt a térben szétterülő, kis sűrűségű nukleont vagy nukleonpárt nukleonudvarnak, glóriának vagy halonak nevezik. A többi nukleon által alkotott nagysűrűségű rendszer a szokásos terminológiában magtörzs néven ismert. A neutronban gazdag könnyű atommagok, azaz a neutron glória + magtörzs szerkezetű rendszerek leírására egyszerű közelítő modellt alkotott Hansen és Johnson [60]. Az általuk vizsgált atommag a  $^{11}\text{Li}$  izotóp volt, amely lényegében úgy képzelhető el, mint a  $^9\text{Li}$  magtörzs és a hozzá lazán kötött 2 neutronból álló kétrészecske rendszer. E megközelítés mentén analógia ismerhető fel a deuteron és halo-atommag nagy léptékű szerkezete között, így első lépésben alkalmazható rá a deuteron leírására már kidolgozott modell. Eredményül azt kapták, hogy a kétrészecske rendszer hullámfüggvénye a jól ismert

$$\psi(r) = A(\rho_0) \frac{e^{-r/\rho_0}}{r} \quad (4.23)$$

Yukawa-típusú függvény, ahol

$$\rho_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu S}} \quad (4.24)$$

a halo-rendszer térbeli kiterjedését jellemző távolságparaméter, amelyben  $\mu$  a redukált tömeg,  $S$  a kétnukleon-szeparációs energia.  $A(\rho_0)$  egy helyfüggetlen paraméter. A számítások arra az eredményre vezettek, hogy a távolságparaméter  $\rho_0 \sim 8,2$  fm, amely összemérhető a nehéz magok méretével. A pontosabb mérési eredmények kimutatták, hogy a  $^{11}\text{Li}$  kiterjedése a nála sokkal több nukleonból álló  $^{48}\text{Ca}$  mérettatormányába esik [61]. Ez az egyszerű modell nem csak a neutronglóriás atommagokra, hanem a protontöbblettel rendelkező kis tömegszámú protonudvaros atommagokra (pl.:  $^8\text{B}$ ,  $^{17}\text{Ne}$ ) is alkalmazható [62]. Ezek a magok természetesen nagyon instabilak, ami a törzs

és a halo közti Coulomb-taszítás következménye. A halo atommagok szerkezetéről és reakcióikról részletes összefoglaló olvasható Suzuki, Lovas és Varga munkájában [63].

#### 4.4. A ${}^8\text{B}(\gamma, p){}^7\text{Be}$ magreakció lézertérben

A lézertérben lezajló magreakciók elméleti vizsgálatával ez idáig nem nagyon foglalkoztak, mert – amint azt már az 1.3. alfejezetben kifejtettem – kimutatták [2], hogy a direkt atommag-lézer kölcsönhatás nem okoz mérhető változást a gerjesztett magok bomlási rátájában. E kijelentés viszont nem vonatkozik általánosan a magreakciókra is. Napjainkban azonban olyan irányú fejlesztési tervek látnak napvilágot, amelyek nagy energiájú, ultra nagy intenzitású koherens elektromágneses sugárzás keltésére alkalmas berendezések megvalósítását tűzték ki célul. Ilyen projekt pl. a bevezetőben már említett ELI.

E törekvések miatt reneszánszát éli a nagy intenzitású lézertérbeli folyamatok – így a magfolyamatok – vizsgálata. Ennek kapcsán jelent meg 2012-ben a fotonukleáris effektus lézertérbeli vizsgálatát tartalmazó munka [64]. A cikk szerzői e szakasz címében leírt konkrét folyamat lézertérbeli sajátosságait vizsgálták, a módosított folyamat  $S$ -mátrixelemét cirkulárisan poláros lézertérben és a hosszúhullámú közelítésében (LWA) határozták meg, de sajnos úgy tűnik, hogy a számítások során több hibát is vétettek.

Az első szembetűnő hiba a cirkulárisan poláros sugárzási tér paraméterezése, ahol sajnos nem sajtóhiba történt [65]. A másik probléma már elvi jellegű. A cikkben az  $S$ -mátrixelem kifejtéséhez használt kezdeti és végállapotbeli proton hullámfüggvények kifejtése nem azonos mértékben történt. A kölcsönhatást a szerzők  $pA$ -mértékben végezték, ezzel összhangban a végállapot leírására a  $pA$ -mértékben meghatározott Volkov-állapotot alkalmazták (a cikk (10) képlete). Kezdeti állapotként azonban az  $rE$ -mértékben meghatározott hullámfüggvényt használnak (a cikk (8)-as képlete). A mértékinvariáns számoláshoz az  $S$ -mátrixelemben a hullámfüggvényeket minden esetben azonos mértékben kell felírni, ezért a cikk (8)-as képletén egy  $rE \rightarrow pA$  mértéktranszformációt kellett volna végrehajtani. Továbbá az  $S$ -mátrixelemben

nem a helyes,  $pA$  mérték esetében is használandó  $-e\vec{E}(t)\vec{r}$  operátort, hanem helyette (4.12) egy közelítő alakját (a cikk (5) képlete) alkalmazzák. Tehát a [64] cikk szerzői a számolások során több ponton is sértik a mértékinvariancia feltételét. Utolsó megjegyzés: a kimenő proton és a vég-mag között elhanyagolták a Coulomb-taszítást. Ez az elhanyagolás nagy energiájú folyamatok esetében kis hibát okoz, de ebben az esetben – amint azt látni fogjuk – ez a faktor sem jelentéktelen.

## 5. fejezet

# Fotonukleáris effektus intenzív lézertérben

A lézertérbeli fotonukleáris effektus elméleti leírásával kapcsolatban az előző fejezet záró szakaszában ismertetett kifogásaim miatt a [64]-ben bemutatott számítást átdolgoztam: figyelembe vettem a mértékinvarianciát, valamint a vég-mag és a kimenő proton közötti Coulomb-taszítás hátráltató hatását. Az általam alkalmazott modell az intenzív sugárzási térben lezajló Röntgen-abszorpció folyamatának analógiájára épül [58]. E számolás részleteinek és eredményeinek bemutatása mellett a fejezet végén a folyamat küszöb környéki érdekességeire is részletesen kitérek.

### 5.1. A vizsgált alapfolyamat

Amint azt az elméleti bevezetőben is említettem, a fotonukleáris effektus során egy  $\gamma$ -foton kiüti a kötött rendszerből a targetmag egy nukleonját, amely így szabad állapotba kerül, tehát a nukleon szempontjából ez egy kötött-szabad átmenetet jelent. E folyamatok közül a [64]-ben közölteknek megfelelően csak a protonkibocsátással járó reakciókra fókuszálok és azt vizsgálom, hogy milyen az intenzív lézertér hatása erre a folyamatra. Intenzív lézertér jelenlétében a reakció szimbolikusan az alábbi reakcióegyenlettel írható

le:

$$\omega_\gamma + n\omega_0 + {}_{Z+1}^{A+1}Y \rightarrow {}_Z^A X + {}_1^1 p, \quad (5.1)$$

ahol  ${}_{Z+1}^{A+1}Y$  target-mag ( $A + 1$  a tömegszám,  $Z + 1$  a rendszám). Az  $A$  tömegszámú és  $Z$  rendszámú  ${}_Z^A X$  vég-mag Coulomb-terében mozog a kilökött proton. Az  $\omega_\gamma$  körfrekvencia szimbolikusan a folyamat során abszorbeálódott  $\gamma$ -fotont jelöli, miközben a reakcióban résztvevő lézerfotonokat az  $n\omega_0$  komponens jelzi, ahol  $n$  a lézerfotonok száma,  $\omega_0$  a lézer körfrekvenciája. Az  $n < 0$  és  $n > 0$  esetek rendre megfelelnek az  $|n|$  db lézerfoton reakció során történő elnyelésének, illetve emissziójának.  ${}_1^1 p$  a reakcióban emittált szabad proton. A tényleges numerikus analízist a  ${}^8\text{B}$  izotóp lézertérbeli fotonukleáris effektusán keresztül végzem el, amelynek a reakcióegyenlete

$$\omega_\gamma + n\omega_0 + {}_5^8\text{B} \rightarrow {}_4^7\text{Be} + {}_1^1 p. \quad (5.2)$$

Az izotópválasztás nem véletlenszerű, hiszen a  ${}^8\text{B}$  egy tipikus halo-atommag, amelyben a 3 protonból és 3 neutronból álló magtörzset a 2 proton, mint "glória veszi körbe". A haloban lévő protonok a Hansen és Johnson féle modellnek megfelelően gyengébben kötöttek, mint a törzs nukleonjai, így leírásukra alkalmazható a

$$\phi_0(\vec{r}) = (2\pi)^{-1} \frac{\beta^{3/2} e^{-\beta r}}{\beta r} \quad (5.3)$$

Yukawa-típusú hullámfüggvény, ahol  $\beta = \nu\sqrt{2mE_b}/\hbar$ ,  $m$  a proton nyugalmi tömege és  $-E_b$  a kezdeti energia, a  $b$  index a kötési energiára utal. E paraméterek az aktuális atommag esetében [64]-nek megfelelően  $E_b = 0,137$  MeV és  $\nu = 1,84$ . A reakció leírásánál feltételeztem ([64]-gyel összhangban), hogy a vég-mag visszalökődése elhanyagolható. Ez a közelítés egy nukleon emissziójánál tipikusan az  $A \gg 1$  esetben érvényes. Mivel a kérdéses esetben a tömegszám  $A = 7$ , ez a feltétel sajnos korlátozottan érvényes. Mivel a visszalökődést Dadi és Müller is elhanyagolta [64], ezért az eredmények összehasonlítása végezt én is élek ezzel a közelítéssel.

A számolást a  $pA$  mértékben végeztem. Az elektromágneses (lézer) teret hosszúhullámú közelítésben (LWA) írtam le, és cirkulárisan polarizált monokromatikus hullámnak tételeztem fel, melynek vektorpotenciálja

$$\vec{A}_L(t) = A_0[\cos(\omega_0 t)\vec{e}_1 - \sin(\omega_0 t)\vec{e}_2], \quad (5.4)$$

ahol  $\vec{e}_1$  és  $\vec{e}_2$  ortogonális egységvektorok,  $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ . A referencia cikknek megfelelően ezek az egységvektorok a Descartes-rendszerben érvényes egységvektorokkal kifejezve:  $\vec{e}_x = \vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_y = \vec{e}_2$  és  $\vec{e}_z = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ , ahol  $\vec{e}_z$  megfelel az intenzív lézertér terjedési irányának. A vektorpotenciálból a lézer elektromos térerősségvektorának amplitúdóját a szokásos módon származtatva  $E_0 = \omega_0 A_0 / c$ .

Fontos megemlítenem, hogy az LWA közelítés nagy lézerintenzitások esetére nem általános érvényű. Az LWA alkalmazhatóságának lézerintenzitástól és lézere energiától való függését Reiss [44] vizsgálta és kimutatta, hogy a [64]-ben használt  $\hbar\omega_0 \sim 2$  keV fotonenergia és az ehhez tartozó  $I \leq 10^{24}$  Wcm<sup>-2</sup> lézerintenzitások, valamint az általam választott  $\hbar\omega_0 = 2$  eV és a hozzá tartozó  $I \leq 10^{20}$  Wcm<sup>-2</sup> intenzitásértékek mellett az LWA, azaz  $rE$ -mértékben értelmezve – a dipól-közelítés érvényes marad.

A kölcsönhatásban résztvevő  $\gamma$ -fotont is a minimális csatolás elvével összhangban (a  $pA$  mértékben) vektorpotenciállal írtam le, ennek az LWA közelítésben érvényes alakja

$$\vec{A}_\gamma = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_\gamma}} \vec{\varepsilon} \exp(-i\omega_\gamma t), \quad (5.5)$$

ahol  $\hbar\omega_\gamma$  a  $\gamma$ -foton energiája, míg  $\vec{\varepsilon}$  a polarizációs egységvektora,  $V$  a normálási térfogat.

## 5.2. A mértékinvariáns $S$ -mátrixelem kifejtése

Kimutatható ([8], [55], [57] és [58]), hogy egy  $m$  tömegű és  $e$  elektromos töltésű részecskének az elektromágneses kölcsönhatáshoz tartozó  $S$ -mátrix-eleme mind a  $pA$  mind pedig az  $rE$  mértékekben a  $-e\vec{r} \cdot \vec{E}$  kölcsönhatási operátor mátrixeleméből határozható meg. Az  $S$ -mátrixelem kezdeti és végállapot hullámfüggvényeit a pillanatnyi energiaoperátor

$$\varepsilon^g = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}^g \right)^2 + V(r) \quad (5.6)$$



sajátfüggvényei szolgáltatják (mint azt már a (4.2.2) szakaszban említettem, ez mértékinvariáns mennyiség). A  $g$  index a különböző mértékeket indexeli. Ne felejtsük el, hogy a mértékinvariáns operátoroknak csak a sajátértékei mértékinvariánsak, a sajátfüggvények alakja mértékfüggő. A leírtaknak megfelelően a mértékinvariáns  $S$ -mátrixelemet a következőképpen lehet felírni:

$$S_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int dt \int d^3r \psi_f^* \left( -e\vec{r} \cdot \vec{E}(t) \right) \psi_i, \quad (5.7)$$

ahol  $\psi_i$  és a  $\psi_f$  a töltött részecske (pl. a jelen esetben a proton) kezdeti és végállapotban alkalmazott sajátfüggvényei (természetesen ugyanabban a mértékben kifejezve), és  $\hbar$  a redukált Planck-állandó.

Az általam vizsgált – az intenzív elektromágneses tér jelenlétében végbemenő – folyamatot azért praktikus  $pA$ -mértékben leírni (hasonlóan a [64] cikkhez), mert a kimenő (végállapot) proton hullámfüggvényének közelítő alakja e szerint a mérték szerint ismert (lásd később). Ekkor a probléma viszont abból adódik, hogy a kezdeti állapot hullámfüggvényét  $rE$ -mértékben szokás megadni, amely

$$\psi_i^E = \phi_0(\vec{r}) e^{i\frac{E_b}{\hbar}t} \quad (5.8)$$

alakú, ahol  $\phi_0(\vec{r})$  a kötött proton stacioner hullámfüggvénye ( $E_b$  a proton szeparációs energiája), vagyis az  $rE$ -mértékben felírt pillanatnyi energiaoperátor

$$\varepsilon^E = \frac{1}{2m} (\vec{p})^2 + V_N(r) + V_{iC}(r) \quad (5.9)$$

sajátfüggvénye. Az  $\varepsilon^E$  operátorban megjelenő  $V_N(r)$  a magpotenciál, míg a  $V_{iC}(r)$  a kezdeti állapotban lévő proton által érzékelt Coulomb-potenciál, az  $E$  index az  $rE$ -mértékre utal. A kezdeti állapot hullámfüggvényét, összhangban a mértékinvarianciával, a  $pA$ -mértékben érvényes alakjával kell megadni, ez a lépés a 4.2.2 szakasznak megfelelő mértéktranszformációval tehető meg:

$$\psi_i = e^{i\frac{e\vec{r} \cdot \vec{A}}{\hbar c}} \phi_0(\vec{r}) e^{i\frac{E_b}{\hbar}t}. \quad (5.10)$$

Az  $\exp\left(i\frac{e\vec{r} \cdot \vec{A}}{\hbar c}\right)$  szorzófaktor tehát a mértéktranszformáció következménye, amelyben az  $\vec{A}$  vektorpotenciál a lézer és a  $\gamma$ -foton vektorpotenciálok összege:  $\vec{A} = \vec{A}_L(t) + \vec{A}_\gamma$ .

Azt is feltételeztem továbbá, hogy a kezdeti atommagnak nincs olyan gerjesztett állapota, amely rezonálna az alkalmazott  $\gamma$ -sugárzással.

A végállapoti proton hullámfüggvény leírásánál ([64]-hez hasonlóan) – amint azt a deuteron fotodezintegráció hatáskeresztmetszet számolásánál is általában teszik – elhanyagoltam a magpotenciál jelenlétét. Ennek megfelelően az  $R$ -mértékben felírt pillanatnyi energiaoperátor

$$\varepsilon^R = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}_L(t) \right)^2 + V_C(r), \quad (5.11)$$

ahol  $V_C(r)$  a vég-mag Coulomb-potenciálja. Az elektromágneses síkhullám + Coulomb-potenciál probléma időfüggő Schrödinger-egyenletének közelítő megoldásai a  $pA$  mértékben ismertek [66], [67]. Nem-relativisztikus esetben ezek a Coulomb–Volkov-hullámfüggvények:

$$\psi_{\vec{Q}}(\vec{r}, t) = V^{-1/2} e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \chi(\vec{Q}, \vec{r}) \exp\left(-i\widehat{E}t/\hbar\right) f(t), \quad (5.12)$$

ahol  $\vec{Q}$  a kimenő proton hullámszám-vektora. A megoldás  $V^{-1/2} e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \chi(\vec{Q}, \vec{r})$  része a Coulomb-függvény, amely a taszító Coulomb-potenciálban "szabadon" mozgó (folytonos energia spektrumú) proton hullámfüggvénye,  $V$  a normálási térfogat,  $\vec{r}$  a proton (relatív) koordinátája a vég-maghoz képest. A síkhullámot szorzó függvény a

$$\chi(\vec{Q}, \vec{r}) = e^{-\pi\eta/2} \Gamma(1 + i\eta) {}_1F_1(-i\eta, 1; i[Qr - \vec{Q} \cdot \vec{r}]), \quad (5.13)$$

ahol

$$\eta(Q) = Z\alpha_f \frac{mc}{\hbar Q}, \quad (5.14)$$

a Sommerfeld-paraméter,  $\alpha_f$  a már bevezetett finomszerkezeti állandó. A fenti összefüggések abban a közelítésben igazak, amikor az  $m$  protontömeg jóval kisebb, mint a vég-mag nyugalmi tömege (ennek érvényességéről korábban már tettem említést).  ${}_1F_1$  a konfluens hipergeometrikus függvény,  $\Gamma$  pedig a Gamma-függvény [4].

Az (5.12) Coulomb–Volkov megoldásban a sugárzási tér paramétereit hordozó időfüggvény

$$f(t) = \exp[i\alpha \sin(\omega_0 t + \eta_0)], \quad (5.15)$$

ahol

$$\alpha = \alpha_{\vartheta} \sin(\vartheta) \quad \text{és} \quad \alpha_{\vartheta} = \frac{eE_0Q}{m\omega_0^2}. \quad (5.16)$$

A  $\vartheta$  és  $\eta_0$  szögváltozók a kimenő proton  $\vec{Q}$  hullámszám-vektorához rendelhető polár és azimut szögek, más szavakkal e szögváltozók paraméterezik a kimenő proton repülési irányát.

Az összefüggések jelentősen leegyszerűsíthetők, mivel az általam vizsgált folyamatban a kimenő proton energiája kicsi, ebben az alacsony energiás limitben  $QR \ll 1$ , ahol  $R$  a karakterisztikus méret. Ha ehhez még hozzáveszem az LWA közelítést ( $|\vec{r}| \leq R$ ), akkor

$$\left| \chi(\vec{Q}, \vec{r}) \right|_{\vec{r}=0} = \chi_C(Q) = \sqrt{\frac{2\pi\eta(Q)}{\exp[2\pi\eta(Q)] - 1}}, \quad (5.17)$$

amit a szakirodalomban Coulomb-faktornak neveznek. Egyébként ez a  $\chi_C^2(Q)$  faktor jelenik meg a béta-bomlás spektrumeltolódásában is [3], amikor a Coulomb-kölcsönhatás okozta korrekciót is figyelembe veszik.

Az előbbieken leírt összes közelítést figyelembe véve a végállapotú proton leíró nem-relativisztikus Coulomb–Volkov megoldás LWA közelítésben az alábbi alakot ölti:

$$\psi_{\vec{Q},LWA}(\vec{r}, t) = \chi_C(Q) V^{-1/2} e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} \exp\left(-i\hat{E}t/\hbar\right) f(t), \quad (5.18)$$

ahol  $\hat{E} = \hbar^2 Q^2/(2m) + U_p$  a kimenő proton lézertérbeli energiája. Itt megjelenő  $U_p = e^2 E_0^2/(2m\omega_0^2)$  az ún. ponderomotoros energia.

Felmerülhet az a kérdés, hogy a Coulomb–Volkov állapot ténylegesen alkalmazható-e az adott probléma leírására. Cavalier [68] szerint az intenzív sugárzási térben és Coulomb-potenciálban mozgó proton hullámfüggvénye abban az esetben közelíthető jól a Coulomb–Volkov állapottal, amikor a

$$|\hbar\vec{q}| \gg \left| \frac{e}{c} \vec{A}_L(t) \right| \quad (5.19)$$

feltétel teljesül a  $\vec{q}$  proton hullámszám és az  $\vec{A}$  lézertér vektorpotenciálja között ([68] A.4 formula). Harmonikus tér esetében ( $\vec{A}_L(t) = \vec{\epsilon} A_0 \cos(\omega_0 t)$ ) ez az alábbi feltételre vezet:

$$\frac{eE_0}{\omega_0 \sqrt{2m\varepsilon(q)}} \ll 1, \quad (5.20)$$

ahol  $E_0 = A_0 \frac{\omega_0}{c}$ , és  $\varepsilon(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$  a proton mozgási energiája. Négyzetre emelés és átrendezés után az energiafeltétel a következő képlet szerint adható meg:

$$\frac{E_0^2 e^2}{2m\omega_0^2} \ll \varepsilon(q) \cong \Delta. \quad (5.21)$$

Itt  $\Delta = \hbar\omega_\gamma - E_b$  az "elhangolást" jelöli. Cirkulárisan poláris fény esetében az elektromos térerősség maximuma és az intenzitás között az  $I = \frac{c}{4\pi} E_0^2$  összefüggés teremt kapcsolatot, amellyel a feltétel végleges alakja a következő:

$$\frac{\hbar\alpha_f}{2\pi mc^2} \lambda^2 I \ll \varepsilon(q) \cong \Delta, \quad (5.22)$$

ahol felhasználtam, hogy  $\omega_0 = 2\pi \frac{c}{\lambda}$ . Az (5.22) képlettel numerikusan ellenőrizhető, valóban jogos-e az általam vizsgált esetekben a Coulomb–Volkov állapot használata. Az számítások eredményeit az 5.1 táblázatban foglaltam össze. Látható, hogy mindkét általam vizsgált esetben jogos a Coulomb–Volkov állapot alkalmazása. Az említett cikk mellett a '90-es években F. Ehlotzky általánosan vizsgálta a lézertér jelenléte miatt megjelenő Coulomb-korrektciókat mind a szórásban, mind az ionizációban [69]. E cikk szerint a kérdéses közelítés érvényességének két esete van. Az egyik feltétele:  $\hbar\omega_0 \ll |E|$ , ahol  $E$  a potenciálban és sugárzási térben mozgó részecske energiája (a mi esetünkben ez jó közelítéssel a  $\Delta$ ). A táblázatból leolvasható, hogy az általam vizsgált esetekben az így megfogalmazott feltétel is teljesül.

Esetek	$\lambda(\text{cm})$	$I(\text{Wcm}^{-2})$	$a\lambda^2 I(\text{keV})$	$\Delta(\text{keV})$	feltétel
1	$7,51 \times 10^{-5}$	$10^{20}$	2,87	50	Rendben
2	$6,19 \times 10^{-8}$	$10^{24}$	0,0195	50	Rendben

5.1. táblázat. A Coulomb–Volkov állapotok alkalmazhatóságának ellenőrzése; az 1. eset az  $E = 1,65 \text{ eV}$ , a 2. eset az  $E = 2 \text{ keV}$  lézerfoton energiának felel meg

E kis kitérő után most már minden részlet rendelkezésre áll, hogy az (5.7)-ben definiált  $S$ -mátrixelemet konkrétan fel lehessen írni. Ehhez helyettesíteni kell az (5.10), (5.18) kifejezéseket az (5.7) képletbe, majd – alkalmazva az

elektrodinamikából ismert  $\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$  összefüggést – megkapható az adott folyamat mértékinvariáns  $S$ -mátrixeleme:

$$S_{fi} = -\frac{\chi_C(Q)}{\sqrt{V}} \int \exp \left[ i \left( \hat{E} + E_b \right) t / \hbar \right] f^*(t) \frac{\partial}{\partial t} G [\vec{q}(t)] dt, \quad (5.23)$$

ahol

$$G(\vec{q}) = \int \phi_0(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r \quad (5.24)$$

a  $\phi_0(\vec{r})$  kezdeti proton stacioner hullámfüggvényének Fourier-transzformáltja és

$$\vec{q}(t) = \vec{Q} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}. \quad (5.25)$$

Az (5.23) kifejezés közvetlenül is származtatható [58] (27)-es képletéből, ez a kapcsolat a fotonukleáris effektus és a vele fizikailag analóg Röntgen-abszorpció között.

Az  $S$ -mátrixelemben a  $G$  függvény explicit nem függ az időtől, az időfüggés csak a kinetikus impulzusban szereplő  $\vec{A}(t)$  vektorpotenciálon keresztül jelenik meg, ezért alkalmazható a  $\partial_t G = (\partial_q G) \sum_{j=1}^{j=3} (\partial_{A_j} q) (\partial_t A_j)$  azonosság, amellyel

$$\frac{\partial}{\partial t} G = \left( \frac{\partial}{\partial q} G \right) \frac{e}{\hbar q} \left( \vec{Q} \cdot \vec{E} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \cdot \vec{E} \right) \quad (5.26)$$

alakba írható. Az átalakításnál kihasználtam a vektorpotenciál és az elektromos térerősségvektor között fennálló  $\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}$  kapcsolatot, továbbá az  $\vec{E} = \vec{E}_L(t) + \vec{E}_\gamma$  összefüggést.

A továbbiakban részleteiben megvizsgálom az (5.26) kifejezést. Az  $\vec{Q} \cdot \vec{E}_L$  tag a  $\gamma$ -foton nélküli, pusztán a lézer által kiváltott proton emisszióval járó reakciót írja le. Ez azonban a lézerfotonok kis energiája miatt a  $\gamma$ -foton mellett elhanyagolható. Az  $\vec{A} \cdot \vec{E}$  szorzat kifejtése négy tagból áll. Cirkulárisan poláros elektromágneses sugárzás esetében a lézer térerősségét és vektorpotenciálját tartalmazó tag  $\vec{A}_L \cdot \vec{E}_L = 0$ . Az  $\vec{A}_\gamma \cdot \vec{E}_L$  és  $\vec{A}_L \cdot \vec{E}_\gamma$  vegyes tagok esetében elmondható, hogy az arányuk  $\omega_L/\omega_\gamma \ll 1$ . Mindezek alapján  $\vec{Q} \cdot \vec{E} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A} \cdot \vec{E} = \vec{Q} \cdot \vec{E}_\gamma - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}_L \cdot \vec{E}_\gamma$ , ahol  $\vec{E}_\gamma = i\sqrt{2\pi\hbar\omega_\gamma/V}\vec{\varepsilon}\exp(-i\omega_\gamma t)$ . A vezető rendű  $\vec{Q} \cdot \vec{E}_\gamma$  és  $\frac{e}{\hbar c} \vec{A}_L \cdot \vec{E}_\gamma$  tagok relatív erősségét a  $\delta = eA_0/(\hbar cQ)$  paraméter értéke határozza meg. Majd a későbbi numerikus számítások igazolni fogják, most csak előrevetítem, hogy e paraméter értéke  $\delta \simeq 0,05$ , ha

az elhangolás  $\Delta = 50$  keV (lásd később) nagyságrendjébe esik. Ebből következik, hogy jó közelítés, ha a (5.26) képletben csak a legnagyobb  $\vec{Q} \cdot \vec{E}_\gamma$  tag marad meg.

A szorzat másik tényezője  $\partial_q G$ . Ennek a sugárzási tértől való függéséhez a  $\vec{q}(t)$  kinetikus impulzusból az  $\vec{A}_\gamma$  tag elhanyagolható, így  $\vec{q}(t) = \vec{Q} - \frac{e}{\hbar c} \vec{A}_L$ .  $\vec{q}(t)$  oszcillációjának amplitúdója viszont igen kicsi ( $\beta$  értékének pár százaléka), ezért az ebből jövő változás is elhanyagolható.  $\partial_t G$  meghatározásakor alkalmazható a  $q = Q$  helyettesítés. Mindent egybevetve (5.26) vezető tagja a

$$\frac{\partial}{\partial t} G \simeq \left( \frac{e}{\hbar} \frac{\vec{Q} \cdot \vec{E}_\gamma}{q} \frac{\partial G}{\partial q} \right)_{q=Q} \quad (5.27)$$

formulával közelíthető.

Az  $S$ -mátrixelem (5.23) szerinti alakjában az idő szerinti integrálás elvégzéséhez érdemes  $f^*(t)$ -t az

$$e^{-i\alpha \sin(\omega_0 t + \eta_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) e^{-in\omega_0 t} e^{-in\eta_0} \quad (5.28)$$

Jacobi-Anger formula [70] segítségével kifejtteni, ahol  $J_n(\alpha)$  elsőfajú Bessel-függvény. Ezzel az átalakítással az idő szerinti integrálás egy Dirac-delta megjelenését eredményezi. Végeredményül a következő kifejezés írja le az  $S$ -mátrixelemet:

$$S_{fi} = \sum_{n=n_0}^{\infty} S_{fi,n}. \quad (5.29)$$

Itt

$$S_{fi,n} = \frac{2\pi\delta[\omega_n(Q)]i}{V} \chi_C(Q) \left( \frac{\partial}{\partial q} G \right)_{q=Q} \frac{e\sqrt{2\pi\hbar\omega_\gamma}}{\hbar} \xi J_n(\alpha) e^{-in\eta_0}, \quad (5.30)$$

ahol

$$\xi = \vec{Q} \cdot \vec{\varepsilon} / Q, \quad (5.31)$$

valamint

$$\omega_n(Q) = \frac{\hbar Q^2}{2m} + \frac{U_p + E_b}{\hbar} - \omega_\gamma - n\omega_0. \quad (5.32)$$

Az  $S_{fi,n}$  értelemszerűen az  $n$  lézerfotonos parciális átmenti amplitúdót jelöli.

Összefoglalva: meghatároztam a lézertérben végbemenő, protonemisszióval járó fotonukleáris effektus mértékinvariáns  $S$ -mátrixelemét. Ezzel kapcsolatosan érdemes egyrészt megjegyezni, hogy a kapott (5.29) mátrixelem – amint azt később be is mutatom – a kezdeti proton hullámfüggvény konkrét alakjától függetlenül, különböző modellek esetén ugyanaz maradhat. Másrészt a lézertér paraméterei csak az energiamegmaradást biztosító Dirac-deltában és az  $\alpha$  paraméterben jelennek meg, amely tulajdonság a numerikus munkát leegyszerűsíti.

### 5.3. A mértékinvariáns hatáskeresztmetszet

Az átmeneti amplitúdót megadó  $S$ -mátrixelemből első lépésben meg kell határozni az átmeneti valószínűséget. Most is, hasonlóan a belső konverzió esetéhez az  $n$  fotonos parciális átmeneti valószínűségek összege fogja megadni a teljes átmeneti valószínűséget. Ez a megközelítés értelemszerűen igaz lesz a hatáskeresztmetszetre is. A parciális átmeneti valószínűséget az  $S_{fi,n}$  négyzete adja meg az alábbiak szerint:

$$|S_{fi,n}|^2 = \frac{(2\pi)^3 \delta^2[\omega_n(Q)]}{V^2} \chi_C^2(Q) \left( \frac{\partial}{\partial q} G \right)_{q=Q}^2 \alpha_f k_\gamma c^2 \xi^2 J_n^2(\alpha), \quad (5.33)$$

ahol kihasználtam a  $k_\gamma c = \omega_\gamma$  összefüggést. A Dirac-delta négyzetének értelmezése alapján ismert, hogy  $\delta^2(x) = \delta_x(0)\delta(x)$ , ezzel

$$|S_{fi,n}|^2 = \frac{(2\pi)^3 \delta_\omega(0) \delta[\omega_n(Q)]}{V^2} \chi_C^2(Q) \left( \frac{\partial}{\partial q} G \right)_{q=Q}^2 \alpha_f k_\gamma c^2 \xi^2 J_n^2(\alpha). \quad (5.34)$$

A parciális ( $n$  fotonos) hatáskeresztmetszet definíciója [64]

$$\sigma_n = \frac{V^2}{cT(2\pi)^3} \int |S_{fi,n}|^2 d^3Q, \quad (5.35)$$

amelyben  $T$  a folyamathoz rendelt karakterisztikus idő. Felhasználva a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T = 2\pi \delta_\omega(0) \quad (5.36)$$

azonosságot, és (5.34)-et (5.35)-be helyettesítve a parciális hatáskeresztmetszetre a

$$\sigma_n = \frac{\alpha_f k_\gamma c}{2\pi} \int \delta[\omega_n(Q)] \chi_C^2(Q) \left( \frac{\partial}{\partial q} G \right)_{q=Q}^2 \xi^2 J_n^2(\alpha) Q^2 dQ d\Omega_Q \quad (5.37)$$

összefüggés adódik, ahol kihasználtam, hogy  $d^3Q = Q^2 dQ d\Omega_Q$ . A  $dQ$  szerinti integrál elvégzéséhez először tekintsük a

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x)|_{x=x_0}}, \quad (5.38)$$

azonosságot, amelyben  $x_0$  a  $g(x) = 0$  egyenlet gyöke. Ezt alkalmazva az integrandusban lévő Dirac-deltára

$$\delta(\omega_n(Q)) = \frac{m}{\hbar Q} \delta(Q - Q_n) \quad (5.39)$$

adódik, ahol  $Q_n = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m [\hbar(\omega_\gamma + n\omega_0) - U_p - E_b]}$ . A  $Q$  szerinti integrál így már egy egyszerű  $Q = Q_n$  helyettesítéssel kapható meg, azaz

$$\sigma_n = Q_n \frac{\alpha_f k_\gamma m c}{2\pi \hbar} \chi_C^2(Q_n) \left( \frac{\partial}{\partial q} G \right)_{q=Q_n}^2 \int \xi^2 J_n^2(\alpha) d\Omega_Q. \quad (5.40)$$

A lézer jelenlétében végbemenő fotonukleáris effektus teljes hatáskeresztmetszete a parciális hatáskeresztmetszetek összegeként állítható elő:

$$\sigma = \sum_{n=n_0}^{\infty} \sigma_n, \quad (5.41)$$

és az ebben szereplő (5.40) összefüggést érdemes az alábbi alakba írni:

$$\sigma_n = \sigma_{n0}(Q_n) |\mu_n|^2, \quad (5.42)$$

amelyben

$$\sigma_{n0}(Q_n) = \chi_C^2(Q_n) \alpha_f \frac{Q_n k_\gamma}{2\pi \lambda_p} \left[ \frac{\partial}{\partial q} G(\vec{q}) \right]_{q=Q_n}^2. \quad (5.43)$$

Itt  $\lambda_p = \hbar/(mc)$  a proton redukált Compton-hullámhossza.

Ezzel tulajdonképpen elértem ahhoz a ponthoz, ahol a továbblépéshez már elkerülhetetlen a proton kezdeti hullámfüggvényének konkrét megadása, hiszen enélkül a  $\partial_q G(\vec{q})$  tényezőt nem lehet meghatározni. [64]-et követve legyen ez az (5.3)-ban már ismertetett Yukawa-típusi hullámfüggvény, amelynek Fourier-transzformáltja

$$G(q) = \frac{\beta^{3/2}}{2\pi\beta} \int \frac{e^{-\beta r}}{r} e^{-i\vec{q}\vec{r}} d^3r = \frac{2\sqrt{2\pi\beta}}{q^2 + \beta^2}. \quad (5.44)$$



Ennek felhasználásával

$$[\partial_q G(q)]_{q=Q_n} = -\frac{4Q_n\sqrt{2\pi\beta}}{[Q_n^2 + \beta^2]^2}, \quad (5.45)$$

ami a  $\sigma_{n0}(Q_n)$ -re az alábbi végeredményt adja:

$$\sigma_{n0}(Q_n) = 16\alpha_f \frac{k_\gamma\beta}{\lambda_p} \chi_C^2(Q_n) \frac{Q_n^3}{[Q_n^2 + \beta^2]^4}. \quad (5.46)$$

Természetesen, mint azt már említettem, az  $n < 0$  és  $n > 0$  esetek most is lézerfoton-emisszióknak és -abszorpcióknak felelnek meg. Az (5.41) képletben az összegzés nem  $-\infty$ -től, hanem  $n_0$ -tól indul. Ennek oka, hogy  $n_0 (< 0)$   $n$  lehető legkisebb olyan értéke, amely még kielégíti a

$$\hbar(\omega_\gamma + n\omega_0) - U_p - E_b > 0 \quad (5.47)$$

energia feltételt ( $|n_0| \simeq (\hbar\omega_\gamma - U_p - E_b)/\hbar\omega_0$ ). Ennél kisebb  $n$  esetében, vagyis  $n < n_0$  esetén nincs átmenet.

(5.42) másik tényezője, amely a lézertér paramétereitől való függést hordozza,

$$|\mu_n|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi^2 J_n^2(\alpha_n) \sin\vartheta d\vartheta d\eta_0, \quad (5.48)$$

ahol

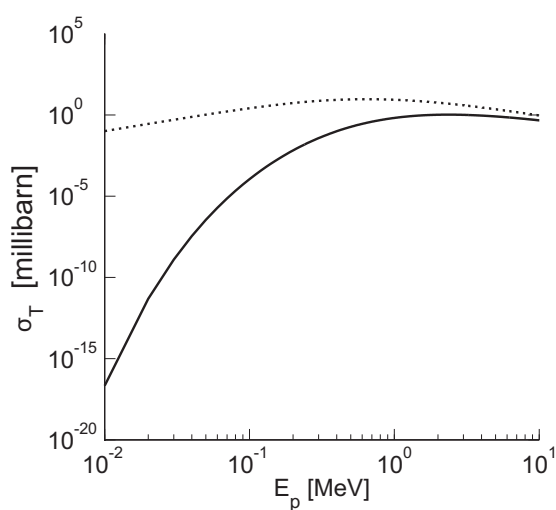
$$\alpha_n = \alpha_{n\vartheta} \sin\vartheta \quad \text{és} \quad \alpha_{n\vartheta} = eE_0Q_n / (m\omega_0^2). \quad (5.49)$$

A parciális hatáskeresztmetszet arányos a  $\chi_C^2(Q_n)$  Coulomb-faktorral, ennek megfelelően értéke erősen csökken  $Q_n$  értékének csökkenésével. Ez a viselkedés természetesen a lézermentes esetre is érvényes. Ezt mutatja az 5.1 ábra.

### 5.3.1. Véletlen polarizációjú $\gamma$ -foton esete

Az (5.42) parciális hatáskeresztmetszet numerikus értékeihez meg kell adni a  $\gamma$ -foton polarizációját. Ennek első eseteként feltételezem, hogy az  $\vec{\varepsilon}$  vektor véletlen irányeloszlású a  $\gamma$ -nyalábban (ez felel meg a természetes esetnek). Ekkor a szögfüggő  $|\mu_n|^2$  mennyiség átlagát kell képezni az alábbiak szerint:

$$\langle |\mu_n|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int |\mu_n|^2 \sin\vartheta d\vartheta d\eta_0, \quad (5.50)$$



5.1. ábra. A folytonos vonal a lézermentes  $\sigma_T = \frac{4\pi}{3}\sigma_{00}$  hatáskeresztmetszet  $E_p = \hbar\omega_\gamma - E_b$  változó szerinti függését mutatja, ahol  $E_p$  a kimenő proton mozgási energiája,  $\hbar\omega_\gamma$  a  $\gamma$ -foton energiája és  $E_b = 0,137$  MeV a kezdeti proton kötési energiája a  ${}^8\text{B}$  izotópban (a  $\sigma_{00}$  definícióját lásd (5.46)). A pontozott vonal a Coulomb-faktor nélküli  $\frac{4\pi}{3}\sigma_{00}/\chi_C^2(Q_0)$  hatáskeresztmetszet változását mutatja

ahol  $\vartheta$  és  $\eta_0$  az  $\vec{\varepsilon}$  vektor irányszögei (polár és azimut szögek). A gömbharmonikus függvények addíciós tétele, és ortonormált tulajdonsága alapján [71] kimutatható, hogy  $\langle \xi^2 \rangle = 1/3$ , amellyel a keresett átlag a

$$\langle |\mu_n|^2 \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{3} J_n^2(\alpha_{n\vartheta} \sin \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\eta_0 \quad (5.51)$$

alakba írható. Így a  $\sigma_n$  parciális hatáskeresztmetszet átlaga

$$\langle \sigma_n \rangle = \sigma_{n0} (Q_n) \langle |\mu_n|^2 \rangle, \quad (5.52)$$

amely már numerikusan analízálható.

(5.51) alapján definiálható a differenciális parciális hatáskeresztmetszet átlaga is:

$$\frac{d\langle \sigma_n \rangle}{d\Omega_Q} = \sigma_{n0} \frac{1}{3} J_n^2(\alpha_{n\vartheta} \sin \vartheta), \quad (5.53)$$

ahol  $d\Omega_Q = \sin \vartheta d\vartheta d\eta_0$ .

Először is leszögezhető, hogy az  $n \neq 0$  esetben a protonemisszió valószínűsége a lézernyalábbal párhuzamos irányban ( $\vartheta = 0$  vagy  $\vartheta = \pi$ ) nulla. Ebben az esetben ugyanis  $\lim_{x \rightarrow 0} J_n(x) = 0$ . Ha azonban  $n = 0$ , akkor  $\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$  és a hatáskeresztmetszet  $\frac{d\langle \sigma_n \rangle}{d\Omega_p} = \sigma_{00} \frac{1}{3}$ .

A továbbiakban az (5.52) képlettel definiált hatáskeresztmetszetet vizsgálom.  $\langle \sigma_n \rangle$  számításánál felhasználtam a  $J_{-n}(x) = J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)$  azonosságot, és az  $\int_0^\pi d\vartheta$  integrálási határt ennek megfelelően átalakítottam a  $2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta$  alakra, majd alkalmaztam az

$$\int_0^{\pi/2} J_n^2[\alpha_{n\vartheta} \sin(\vartheta)] \sin(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\alpha_{n\vartheta}} \sum_{k=0}^{\infty} J_{2n+2k+1}(2\alpha_{n\vartheta}) \quad (5.54)$$

összefüggést [72], valamint a

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2n+2k+1}(2\alpha_{n\vartheta}) = \int_0^{2\alpha_{n\vartheta}} J_{2n}(x') dx' \quad (5.55)$$

azonosságot [73]. Ha az előzőekben bemutatott átalakításokat elvégzem, és alkalmazom az  $x' = 2\alpha_{n\vartheta}x$  és a  $dx' = 2\alpha_{n\vartheta}dx$  változócserét, akkor (5.52) helyett a következő összefüggés adódik:

$$\langle \sigma_n \rangle = \frac{4\pi}{3} \sigma_{n0} \int_0^1 J_{2n}(2\alpha_{n\vartheta}x) dx. \quad (5.56)$$

Gyenge lézertér esetében az  $\int_0^1 J_{2n}(2\alpha_{n\vartheta}x) dx \rightarrow \int_0^1 J_{2n}(0) dx = 0$  minden  $n \neq 0$  esetre ( $\alpha_{n\vartheta} \rightarrow 0$ ), mivel a  $\lim_{x \rightarrow 0} J_{2n}(x) = 0$ . Amikor  $n = 0$ , akkor  $\int_0^1 J_{2n}(2\alpha_{n\vartheta}x) dx \rightarrow \int_0^1 J_0(0) dx = 1$ , mivel  $\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$ . Ezeknek megfelelően az átlagos totális hatáskeresztmetszet  $\langle \sigma \rangle \rightarrow \frac{4\pi}{3}\sigma_{00}$ . Más szavakkal  $\langle \sigma \rangle \rightarrow \sigma_T$ , ahol  $\sigma_T$  a lézermentes eset totális hatáskeresztmetszete véletlen polarizáltságú  $\gamma$ -nyalábra, és  $\sigma_{00} = \frac{3}{4\pi}\sigma_T$ .

Abban az esetben, amikor a küszöbtől távol vagyunk, azaz  $\hbar\omega_\gamma \gg E_b$ , akkor  $Q_n = Q_0$  közelítés érvényes a [64]-ben tárgyalt lézerintenzitás és fotonenergia párokra ( $I = 10^{18} \text{ Wcm}^{-2}$  és  $\hbar\omega_0 = 2 \text{ eV}$ ;  $I = 6,25 \times 10^{21} \text{ Wcm}^{-2}$  és  $\hbar\omega_0 = 100$ , illetve  $200 \text{ eV}$ ; valamint  $I = 4,0 \times 10^{21} \text{ Wcm}^{-2}$ ,  $1 \times 10^{23} \text{ Wcm}^{-2}$  és  $2,5 \times 10^{24} \text{ Wcm}^{-2}$ ,  $\hbar\omega_0 = 2 \text{ keV}$ ). Ekkor a parciális hatáskeresztmetszet formulákban alkalmazható a  $\sigma_{n0} = \sigma_{00} = \frac{3}{4\pi}\sigma_T$  helyettesítés. E közelítések mellett az átlagolt teljes differenciális hatáskeresztmetszetet a

$$\frac{d\langle \sigma \rangle}{d\Omega_Q} = \frac{1}{4\pi}\sigma_T \sum_{n=n_0}^{\infty} J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \quad (5.57)$$

összefüggés írja le. Egy másik következmény, hogy az  $n_0$  konstans általában nagy abszolút értékű negatív szám, ezért az (5.57)-beli szumma jó közelítéssel 1 ( $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n^2(x) = 1$  miatt), tehát

$$\frac{d\langle \sigma \rangle}{d\Omega_Q} \simeq \frac{1}{4\pi}\sigma_T, \quad (5.58)$$

a teljes átlagos hatáskeresztmetszet pedig  $\langle \sigma \rangle \simeq \sigma_T$ , természetesen a már említett intenzitás és fotonenergia párok esetében.

A küszöbtől távol be lehet vezetni az átlagos parciális hatáskeresztmetszet relatív erősségét:

$$\frac{\langle \sigma_n \rangle}{\sigma_T} = \rho_n = \int_0^1 J_{2n}(2\alpha_{0\vartheta}x) dx. \quad (5.59)$$

Ezzel a lézermentes esethez képest lehet (a lézertér hatásáról) kvantitatív információt nyerni.

### 5.3.2. Speciális eset I: a $\gamma$ -polarizáció $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_2$

A most következő két szakaszban a  $\gamma$ -nyaláb kétféle polarizációja esetén határozom meg a differenciális és totális hatáskeresztmetszetet. Az első eset – amelyre utal az indexben megjelenő *pol, 1* – amikor a  $\gamma$ -nyaláb polarizációs vektora a cirkulárisan poláros lézernyaláb polarizációs síkjával párhuzamos, azaz pl.  $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_2$ . Ekkor  $\xi = \vec{Q} \cdot \vec{e}_2 / Q = \sin \vartheta \sin \eta_0$  és

$$|\mu_n|_{pol,1}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \sin^3 \vartheta \sin^2 \eta_0 d\vartheta d\eta_0. \quad (5.60)$$

Ekkor a differenciális hatáskeresztmetszet a

$$\frac{d\sigma_{n,pol,1}}{d\Omega_Q} = \frac{3}{4\pi} \sigma_T J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \sin^2 \vartheta \sin^2 \eta_0 \quad (5.61)$$

formulával adható meg. Ha (5.60)-ben elvégezem az  $\eta_0$  változó szerinti integrálást, akkor

$$|\mu_n|_{pol,1}^2 = \pi \int_0^\pi J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta, \quad (5.62)$$

és az  $n$ -edik csatorna totális parciális hatáskeresztmetszetére

$$\sigma_{n,pol,1} = \frac{3}{4} \sigma_T \int_0^\pi J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \sin^3 \vartheta d\vartheta \quad (5.63)$$

adódik.

### 5.3.3. Speciális eset II: a $\gamma$ -polarizáció $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$

A másik érdekes – indexben *pol, 2*-vel jelölt – eset, amikor a  $\gamma$ -nyaláb polarizációja merőleges a lézertér polarizációs síkjára, tehát  $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ . Ekkor  $\xi = \cos \vartheta$  és

$$|\mu_n|_{pol,2}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\eta_0. \quad (5.64)$$

A differenciális hatáskeresztmetszet pedig ennek megfelelően

$$\frac{d\sigma_{n,pol,2}}{d\Omega_Q} = \frac{3}{4\pi} \sigma_T J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \cos^2 \vartheta. \quad (5.65)$$

Ismét elvégezve a  $\eta_0$  változó szerinti integrált

$$|\mu_n|_{pol,2}^2 = 2\pi \int_0^\pi J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad (5.66)$$

adódik, amelyből az  $n$ -edik csatorna totális parciális hatáskeresztmetszete

$$\sigma_{n,pol,2} = \frac{3}{2} \sigma_T \int_0^\pi J_n^2(\alpha_{0\vartheta} \sin \vartheta) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (5.67)$$

A kétféle polarizációs állapot esetében kapott eredmények alapján  $\sigma_n$  úgy is felírható, mint

$$\sigma_{n,pol,j} = \frac{3}{4\pi} \sigma_T |\mu_n|_{pol,j}^2, \quad (5.68)$$

ahol tehát  $|\mu_n|_{pol,j}^2$  a parciális hatáskeresztmetszetek lézertértől való függését tartalmazza.

Belátható, hogy a kétféle polarizáció esetében a teljes hatáskeresztmetszet ugyanaz, amelyet a  $\sigma_{pol,j} = \sum_{n_0}^\infty \sigma_{n,pol,j}$  végtelen összeg ad meg. Ez az integrálás és összegzés felcserélésével, az (5.57)-beli szumma kiértékelésénél használt  $\sum_{n_0}^\infty J_n^2(x) \simeq 1$  formulával helyettesíthető, és eredményül

$$\sigma_{pol,1} = \sigma_{pol,2} = \sigma_T \quad (5.69)$$

adódik.

A következő fejezetben a numerikus számítások eredményeit mutatom be.

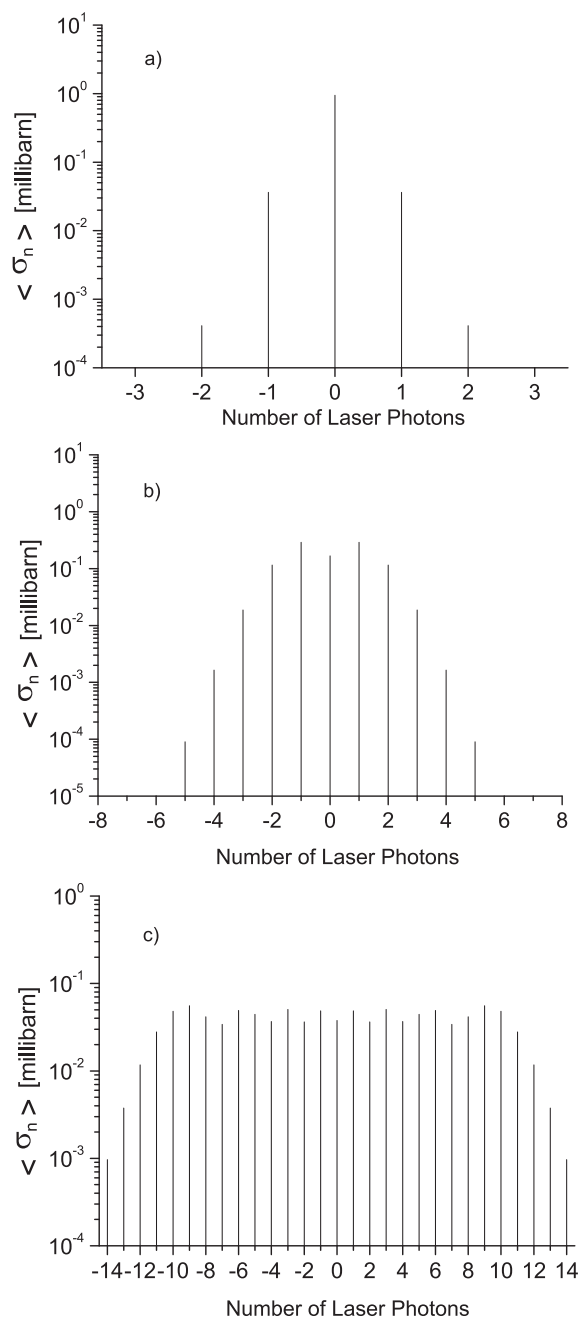
## 5.4. Numerikus eredmények

Elsőként a lézermentes átlagos teljes hatáskeresztmetszetnek ( $\sigma_T = \frac{4\pi}{3} \sigma_{00}$ ) az  $E_p = \hbar\omega_\gamma - E_b$  mennyiségtől való függését vizsgálom meg, ahol  $E_p$  a ki-menő proton mozgási energiája,  $\hbar\omega_\gamma$  a  $\gamma$ -foton energiája,  $E_b = 0,137$  MeV a kezdeti proton kötési energiája a  ${}^8\text{B}$  izotópban [64], [40]. A vég-mag  ${}^7\text{Be}$ , rendszáma  $Z = 4$ . A  $\sigma_T = \frac{4\pi}{3} \sigma_{00}$ -nak  $E_p$  függését lézermentes esetben az 5.1. ábra mutatja (a  $\sigma_{00}$ -t a (5.46) képlet adja meg). Összehasonlításként, pontozott vonással a Coulomb-korrekciónélküli esetet,  $\frac{4\pi}{3} \sigma_{00} / \chi_C^2(Q_0)$ -at is ábrázoltam. Ez a lézermentes eset síkhullám közelítésben. Jól látható, hogy a Coulomb-korrekciónélküli mellőzése az  $E > 10$  MeV  $\gamma$ -energia felett már nem

okoz számottevő eltérést, viszont ez alatt, főleg az alacsony energiás – külső környéki – esetekben nem engedhető meg ez az elhanyagolás.

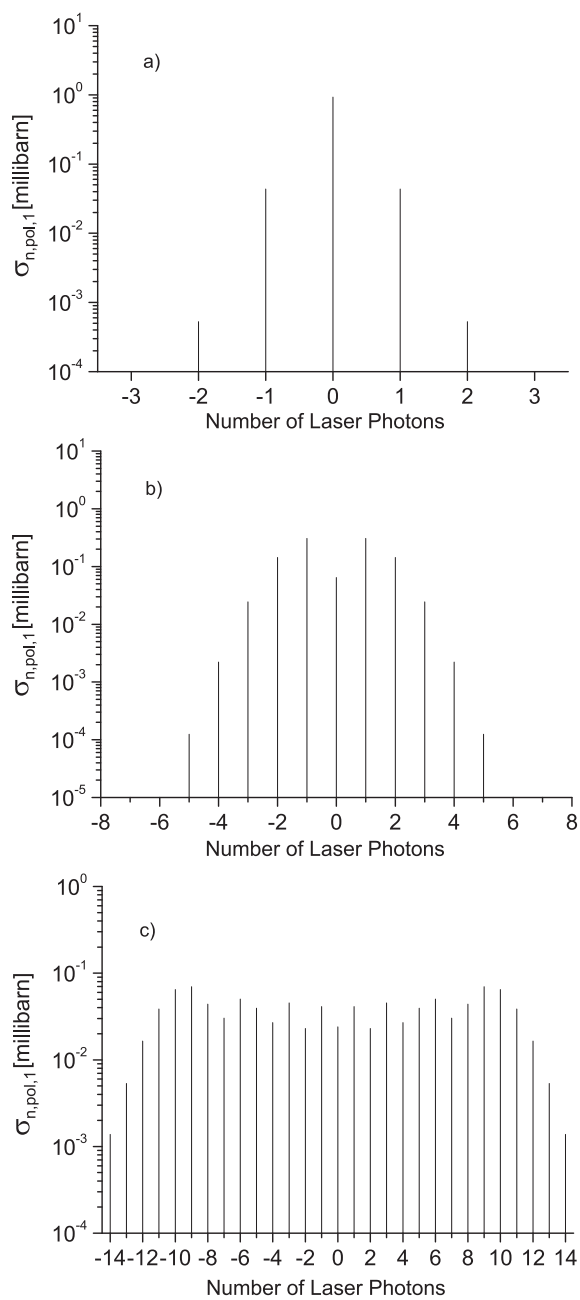
Következő lépésben a  $\langle \sigma_n \rangle = \sigma_T \rho_n$  (a  $\rho_n$  definícióját lásd (5.59)-ban) átlagos parciális hatáskeresztmetszetet számítottam ki numerikusan  $\hbar\omega_0 = 2$  keV lézer fotonenergia mellett, a lézerintenzitások a [64] cikknek megfelelően:  $I = 4,0 \times 10^{21}, 1 \times 10^{23}$  és  $2,5 \times 10^{24}$  Wcm<sup>-2</sup>. Ennek eredményei láthatóak az 5.2. ábrán. Az 5.3 és 5.4. ábra a különböző speciális polarizációs állapotok esetén meghatározott  $\sigma_{n,pol,j}$  parciális hatáskeresztmetszetek számított értékeit tartalmazza. Itt is 2 keV fotonenergia mellett végeztem a számításokat. Az 5.3. ábra a  $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_2$  polarizáció, míg az 5.4. ábra a  $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  polarizáció mellett érvényes.

A lézermentes átlagos teljes hatáskeresztmetszetre a  $\sigma_T = 1,02$  mb eredményt kaptam  $\hbar\omega_\gamma = 3$  MeV  $\gamma$ -energia mellett. Ezzel a  $\gamma$ -energiával számolva a fentiekben leírtak alapján  $\langle \sigma \rangle = \sigma_{pol,1} = \sigma_{pol,2} = \sigma_T = 1,02$  mb, ezzel szemben [64]-ben ugyanezen paraméterekkel számolva a teljes hatáskeresztmetszetre  $\sigma = \sum_n \sigma_n \approx 63,4$  mb adódott numerikusan. Az említett paraméterekkel a lézermentes hatáskeresztmetszetre a síkhullám közelítésben pedig  $\sigma_T/\chi_C^2(Q_0) = 4,11$  mb-t kaptam. Ezek alapján arra a megállapításra jutottam, hogy a [64]-ben számított hatáskeresztmetszet és az én számításaim szerinti érték közti 62,2-szeres eltérés eredete részben a mértékinvariáns számításból (15,4-es faktor), részben a Coulomb-taszítás végállapotra gyakorolt hatásának figyelmen kívül hagyásából származik (ez egy 4,03-as faktor). Az  $E_p \rightarrow 0$  határesetben ez az utóbbi eltérés egyre nyomatékosabban jelentkezik.

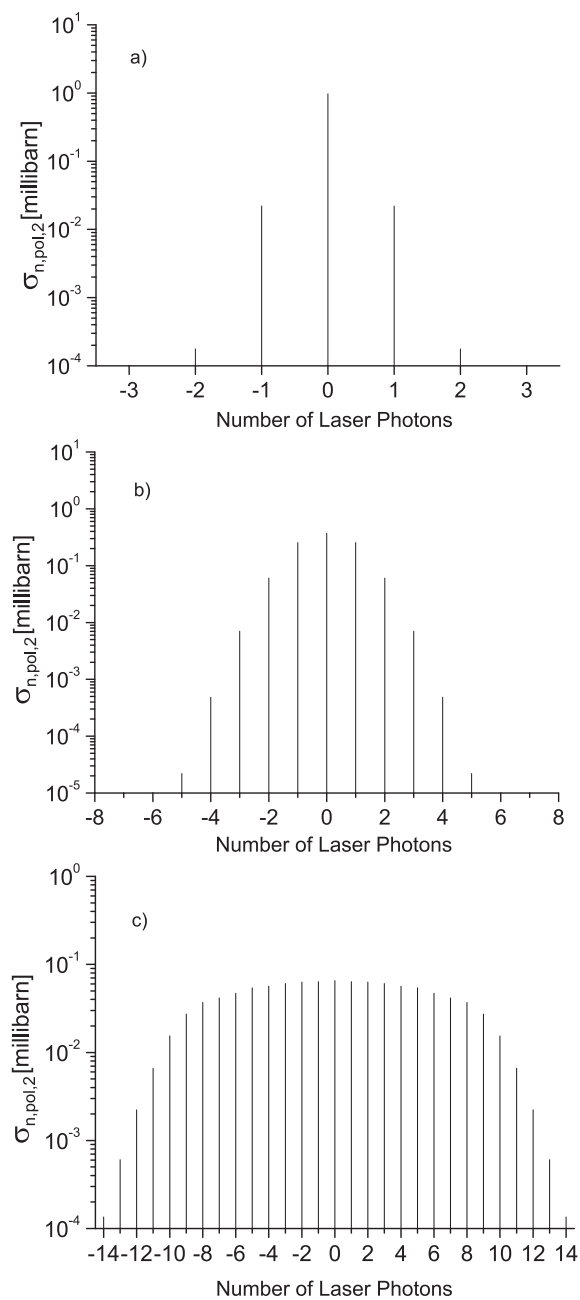


5.2. ábra. A  $\langle \sigma_n \rangle = \sigma_T \rho_n$  átlagos parciális hatáskeresztmetszet értékei különböző csatornában (vö. (5.59) képlet), a [64] cikknek megfelelő intenzitások: (a)  $I = 4,0 \times 10^{21}$  (b)  $1 \times 10^{23}$  és (c)  $2,5 \times 10^{24} \text{ Wcm}^{-2}$ , valamint  $\hbar\omega_0 = 2 \text{ keV}$  fotonenergia mellett. A  $\gamma$ -foton polarizáció vektora véletlenszerű





5.3. ábra. A  $\sigma_{n,pol,1}$  parciális hatáskeresztmetszet értékei a különböző csatornáknakban, a  $\gamma$ -foton polarizációja  $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_2$ . A három különböző eset intenzitás értékei: (a)  $I = 4,0 \times 10^{21}$ ; (b)  $1 \times 10^{23}$  és (c)  $2,5 \times 10^{24} \text{ Wcm}^{-2}$ , a fotonenergia  $\hbar\omega_0 = 2 \text{ keV}$



5.4. ábra. A  $\sigma_{n,pol,2}$  parciális hatáskeresztmetszet értékei a különböző csatornáknakban, a  $\gamma$ -foton polarizációja  $\vec{\varepsilon} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ . A három különböző eset intenzitás értékei: (a)  $I = 4,0 \times 10^{21}$ ; (b)  $1 \times 10^{23}$  és (c)  $2,5 \times 10^{24} \text{ Wcm}^{-2}$ , a fotonenergia  $\hbar\omega_0 = 2 \text{ keV}$ .

## 5.5. Küszöb környéki fotonukleáris reakció

Az előző szakaszban a küszöbtől távol, nagy  $\gamma$ -fotonenergia esetében tárgyaltam a proton emisszióval járó fotonukleáris effektust. E folyamat – amint azt már említettem – a lézertér jelenlétében megvalósuló röntgen-abszorpció folyamatával [58] analóg. A lézertér jelenlétében a röntgen-abszorpció a küszöb környékén érdekes jellegzetességeket mutat [74], [75]. Ezek az eredmények arra sarkalltak, hogy a fotonukleáris effektus küszöb környéki viselkedését is megvizsgáljam.

Az előző szakasz általános eredményeit felhasználva újraszámolom az aktuális hatáskeresztmetszeteket. Ebben az esetben két különböző kezdeti protonállapotot (hullámfüggvényt) is használok, majd numerikus analízissel zárom ezt a szakaszt.

### 5.5.1. A mértékinvariáns hatáskeresztmetszet a küszöb környékén

Az intenzív lézertérbeli mértékinvariáns differenciális hatáskeresztmetszet

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_q} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{d\sigma_n}{d\Omega_q}, \quad (5.70)$$

ahol  $d\Omega_q$  a kimenő proton repülési iránya körüli infinitezimális térszög.  $n_0 < 0$  ismét az a legkisebb  $n$  érték, amely esetében a  $\Delta + n\hbar\omega_0 - U_p > 0$  energiafeltétel teljesül. Itt a bevezetett új paraméter a  $\Delta = \hbar\omega_\gamma - E_b$  elhangolás, amely a küszöbtől való "távolságot" jellemzi.

A parciális differenciális hatáskeresztmetszet az (5.42) képletnek megfelelően

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega_q} = \sigma_{0,n}(Q_n) |\xi|^2 J_n^2(\alpha_{\vartheta n} \sin \vartheta), \quad (5.71)$$

ahol a kimenő proton hullámszáma  $Q_n = \hbar^{-1} \sqrt{2m[\Delta + n\hbar\omega_0 - U_p]}$ , illetve  $\xi = \vec{Q}_n \cdot \vec{\varepsilon}/Q_n$ , ( $\sigma_{0,n}(Q_n)$ -t illetően lásd (5.43)),  $J_n(\alpha_{\vartheta n} \sin \vartheta)$  az elsőfajú Bessel-függvény, a lézertértől függő paraméter  $\alpha_{\vartheta n} = eE_0 Q_n / (m\omega_0^2)$ .

$Q_n$ -t érdemes a következő alakban felírni:

$$Q_n = \frac{\varepsilon_n}{\lambda_p} \sqrt{\frac{2\Delta}{mc^2}} \quad \text{ahol} \quad \varepsilon_n = \sqrt{1 + \frac{n\hbar\omega_0 - U_p}{\Delta}}. \quad (5.72)$$

Az újonnan bevezetett változókkal a  $\chi_C^2$  Coulomb-faktort kifejezve

$$\chi_C^2(\varepsilon_n) = \frac{K_{Cb}}{\varepsilon_n \left[ \exp \left[ \frac{K_{Cb}}{\varepsilon_n} \right] - 1 \right]}, \quad (5.73)$$

ahol  $K_{Cb} = 2\pi Z\alpha_f \sqrt{mc^2/(2\Delta)}$ . Itt  $Z$  a vég-mag rendszámát jelöli. E faktor hatása a küszöb környéki folyamatokra nézve döntő, ahogy erre már az előző szakaszban is rávilágítottam.

A hatáskeresztmetszetek megadásához (5.43)-ben a proton kezdeti állapotfüggvényének  $G(Q)$  Fourier-transzformáltját kell meghatározni. A küszöb környéki folyamat analízisét kétféle kezdeti protonállapottal végzem el. Az egyik eset a már előzőekben is alkalmazott Yukawa-típusú modell. Ekkor a hullámfüggvény

$$\phi_0(\vec{r}) = \frac{\beta_1^{3/2} e^{-\beta_1 r}}{2\pi \beta_1 r}, \quad (5.74)$$

ahol  $\beta_1 = \mu\sqrt{2mE_b}/\hbar$ , a kötési energia  $E_b = 0,137$  MeV [40], és ( $\mu = 1,84$  és  $\beta_1 = 1,495 \times 10^{12}$  cm<sup>-1</sup>) [64]. A másik esetben a független részecske héjmodell  $\nu s_{1/2}$  állapotát használom. Az ennek megfelelő stacioner hullámfüggvény [76]

$$\phi_0(\vec{r}) = N_\nu e_1^{-\rho^2/2} F_1 \left( -\nu, \frac{3}{2}, \rho^2 \right), \quad (5.75)$$

ahol a normálási konstans

$$N_\nu = \frac{\beta_2^{3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu + \frac{3}{2})}{(2\pi\nu!)}}}, \quad (5.76)$$

továbbá  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  a héjmodell főkvantumszáma,  $\Gamma(x)$  a gamma-függvény,  ${}_1F_1(-\nu, \frac{3}{2}, \rho^2)$  a már korábban bemutatott konfluens hipergeometrikus függvény.  $\rho = \beta_2 r$  dimenziótlan távolságparaméter, amelyben  $\beta_2 = \sqrt{m\omega_{Sh}/\hbar}$ ,  $m$  a proton nyugalmi tömege, és  $\omega_{Sh}$  a héjmodell adott állapotának körfrekvenciája. Az utóbbit az  $A$  tömegszámú atommagra közelítőleg a

$$\hbar\omega_{Sh} = 40A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (5.77)$$

képlet adja meg [48], amivel  $\beta_2 = 9.82 \times 10^{12} A^{-1/6}$  cm<sup>-1</sup>.

Yukawa-típusú hullámfüggvényre a Fourier-transzformált deriváltját az (5.45) képlet adja meg, amely a küszöb környéki közelítésben ( $Q_n \ll \beta_1, \beta_2$ )

$$[\partial_q G(g)]_{q=Q_n} = -\frac{4Q_n \sqrt{2\pi\beta_1}}{[Q_n^2 + \beta_1^2]^2} \approx 4\sqrt{2\pi}\beta_1^{-7/2} Q_n \propto \varepsilon_n. \quad (5.78)$$

A héjmodell  $\nu_{s_{1/2}}$  állapotára ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ ) a  $\partial_q G(q)$  függvény meghatározásához alkalmazni kell a konfluens hipergeometrikus függvényekre vonatkozó alábbi azonosságot [77]:

$${}_1F_1\left(-\nu, \frac{3}{2}, \rho^2\right) = \frac{\nu!}{(2\nu+1)!} \left(-\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{2\rho}} H_{2\nu+1}(\sqrt{2\rho}), \quad (5.79)$$

ahol  $H_\nu$  a  $\nu$ -ed rendű Hermite-polinom.  $2\nu + 1$  minden  $\nu$  esetében páratlan, így a Hermite-polinomban csak páratlan kitevőjű tagok szerepelnek. Ez azt eredményezi, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2\rho}} H_{2\nu+1}(\sqrt{2\rho}) = a_\nu (\sqrt{2\rho})^{2\nu} + a_{\nu-1} (\sqrt{2\rho})^{2(\nu-1)} + \dots + a_0 (\sqrt{2\rho})^0, \quad (5.80)$$

amelyben viszont már csak a páros hatványok jelennek meg. Ezekkel az átalakításokkal az (5.75) állapotfüggvény a

$$\phi_0(\vec{r}) = M_\nu e^{-\frac{(\beta_2 r)^2}{2}} [a_\nu (\beta_2 r)^{2\nu} + a_{\nu-1} (\beta_2 r)^{2(\nu-1)} + \dots + a_0] \quad (5.81)$$

alakba írható, ahol  $M_\nu$  egy  $\nu$ -től függő konstans. Ez tartalmazza többek között a  $N_\nu$  normálási faktort és a fenti átalakítások konstansait, a konkrét alakja azonban a továbbiak szempontjából nem lényeges. Az (5.81) állapotfüggvény Fourier-transzformációja tagonként elvégezhető. Egy általános tagja a következő:

$$\mathcal{F}\left[(\beta_2 r)^{2k} e^{-\frac{(\beta_2 r)^2}{2}}\right](Q), \quad (5.82)$$

ahol  $k = 0, 1, \dots, \nu$ , amely a Fourier-transzformáció

$$\mathcal{F}[x^k f(x)](\omega) = i^k \frac{d^k}{d\omega^k} \mathcal{F}[f(x)](\omega) \quad (5.83)$$

és

$$\mathcal{F}\left[e^{-\alpha x^2}\right](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \quad (5.84)$$

összefüggéseit használva kiszámítható. A keresett tag

$$\mathcal{F} \left[ (\beta_2 r)^{2k} e^{-\frac{(\beta_2 r)^2}{2}} \right] (Q) = i^{2k} \sqrt{2\pi} \beta_2^{2k-1} \frac{d^k}{dQ^k} e^{-\frac{Q^2}{2\beta_2^2}}. \quad (5.85)$$

$\partial_Q G(Q)$  az eddig leírtak szerint

$$\partial_Q G(Q) = \sum_{k=0}^{\nu} b_k \frac{d^{2k+1}}{dQ^{2k+1}} e^{-\frac{Q^2}{2\beta_2^2}}, \quad (5.86)$$

ahol a  $b_k$  együttható az adott rendű taghoz tartozó összes konstans tartalmazza. A  $Q \ll \beta_2$  küszöb közeli limesben az (5.86) kifejezés  $\exp[-Q^2/(2\beta_2^2)]$  sorfejtése után a következő egyszerű alakot ölti:

$$[\partial_Q G(Q)]_{Q=Q_n} = \sum_0^{\nu} b_k \frac{d^{2k+1}}{dQ^{2k+1}} e^{-\frac{Q^2}{2\beta_2^2}} \approx \sum_{k=0}^{\nu} b'_k Q_n = Q_n \sum_{k=0}^{\nu} b'_k \propto \varepsilon_n. \quad (5.87)$$

Az eredmény érdekes, hiszen, ha összehasonlítjuk az (5.78) és a most kapott (5.87) összefüggéseket, azt találjuk, hogy a küszöb környéki átmeneteket leíró hatáskeresztmetszet egy konstans faktortól eltekintve azonos a Yukawa-és héjmodell ( $\ell = 0$ ) hullámfüggvényekre. Tehát a differenciális parciális hatáskeresztmetszet

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega_q} = \sigma_0 S_n |\xi|^2 \quad (5.88)$$

alakú, ahol  $\sigma_0$  egy olyan konstans, amely a kétfajta kezdeti állapot esetében eltérő, a többi tényező azonban független a kezdeti állapot választástól, és

$$S_n = \frac{\varepsilon_n^2 J_n^2(\alpha_{\vartheta n} \sin \vartheta)}{\exp(K_{Cb}/\varepsilon_n) - 1}. \quad (5.89)$$

A numerikus vizsgálat előtt a lézermentes eset parciális differenciális hatáskeresztmetszetét is meg kell határozni. Ekkor  $\alpha_{\vartheta n} = 0$ , valamint érvényes, hogy  $\varepsilon_0(U_p = 0) = 1$ ,  $J_0^2(0) = 1$  és  $J_n^2(0) = 0$  a  $n \neq 0$  értékekre. Ezekkel a küszöb környéki lézermentes differenciális hatáskeresztmetszet

$$\frac{d\sigma^{th}}{d\Omega_q} = \sigma_0 S_{th} |\xi|^2, \quad (5.90)$$

ahol  $S_{th} = [\exp(K_{Cb}) - 1]^{-1}$ , és  $\sigma_0$  értelmében ugyanaz mint az előbbieken.

Miután már ismert a folyamat lézermentes és lézerrel asszisztált hatáske-  
resztmetszete, érdemes bevezetni az  $R$  mennyiséget, amely praktikus, mert  
nem függ a proton kezdeti állapotának megválasztásától:

$$R = \sum_{n=n_0}^{\infty} R_n, \quad (5.91)$$

ahol  $R_n = S_n/S_{th}$  a parciális hányad ( tulajdonképpen megfelel (5.88) és  
(5.90) hányadosának), amely a lézertér jelenlétében értelmezett és a lézer-  
mentes esetre vonatkozó differenciális hatáske-  
resztmetszetek hányadosa. Ez a mennyiség tehát nem más, mint a fotonukleáris effektus során a kimenő  
proton egy adott repülési iránya körüli infinitezimális térszögbe történő lé-  
zertérbeli és lézermentes szóródások rátájának aránya. Az  $n$ -edik csatornára  
vonatkoztatva ez

$$R_n = \frac{\exp(K_{Cb}) - 1}{\exp(K_{Cb}/\varepsilon_n) - 1} \varepsilon_n^2 J_n^2(\alpha_{\vartheta n} \sin \vartheta), \quad (5.92)$$

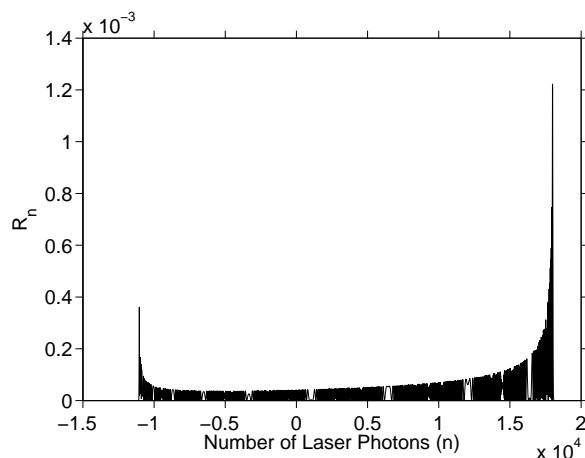
ahol

$$\alpha_{\vartheta n} = \varepsilon_n \hbar c e E_0 (\hbar \omega_0)^{-2} \sqrt{2\Delta / (mc^2)}. \quad (5.93)$$

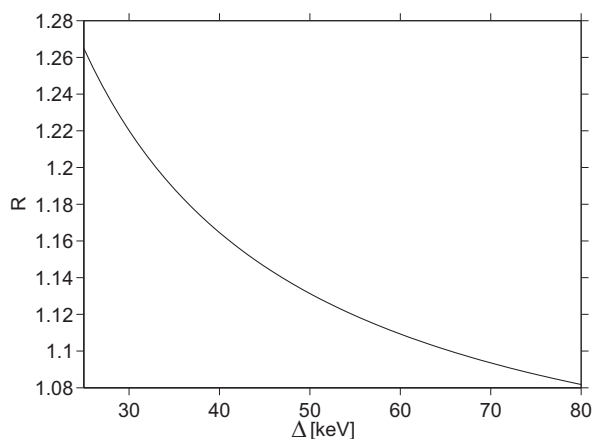
Összefoglalva: az  $R_n$  és  $R$  mennyiségekkel lehetőség nyílik a  $\gamma$ -nyaláb polari-  
zációjától és a kezdeti protont leíró állapotfüggvénytől függetlenül a lézertér  
jelenléte által okozott – lézermentes reakcióhoz képesti – változások jellem-  
zése.

### 5.5.2. Numerikus eredmények

A numerikus számításokat  $\hbar \omega_0 = 1,65$  eV lézerfoton-energia mellett vé-  
geztem. Az első vizsgált esetben a kimenő proton repülési iránya a lézer  
polarizációs síkjának megfelelő irányban történt, azaz  $\vartheta = \pi/2$  ( $\sin \vartheta = 1$ ),  
és a Coulomb-korrekciónban szereplő rendszám – a  ${}^7\text{Be}$  izotóp rendszáma –  
 $Z = 4$ . Az 5.5. ábra mutatja az  $R_n$  függvény  $n$  lézerfoton számtól való füg-  
gését  $\Delta = 50$  keV elhangolás mellett, a lézer intenzitása  $I = 10^{20}$  Wcm $^{-2}$ .  
Az  $R$  intenzitásfüggése  $\Delta = 50$  keV elhangolásnál lineáris és növekvő; az  
 $I = 10^{18}$  Wcm $^{-2}$  intenzitásnál kapott  $R = 1,00$ -ról az  $I = 10^{20}$  Wcm $^{-2}$  inten-  
zitásnál kapott  $R = 1,12$  értékig lineárisan nő. Az 5.6. ábra az  $R(\Delta)$  függést

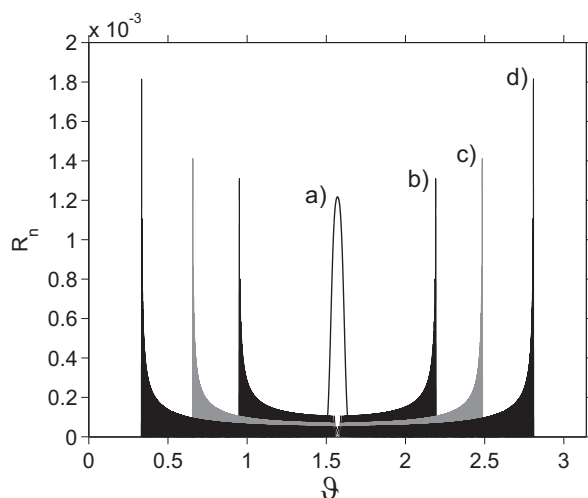


5.5. ábra. Az  $R_n$  (lásd (5.92)) függvény  $n$  csatornaszám függése. Az  $n < 0$  és az  $n > 0$  esetek megfelelnek a folyamat során bekövetkező  $|n|$  lézerfoton emissziójának és abszorpciójának. A remanens mag rendszáma  $Z = 4$ ,  $\Delta = \hbar\omega_\gamma - E_b = 50$  keV a  $\gamma$ -foton energia és a proton szeparációs energia különbsége,  $\vartheta = \pi/2$ , a lézer intenzitása  $I = 10^{20}$  Wcm $^{-2}$  és a lézerfoton energiája  $\hbar\omega_0 = 1,65$  eV

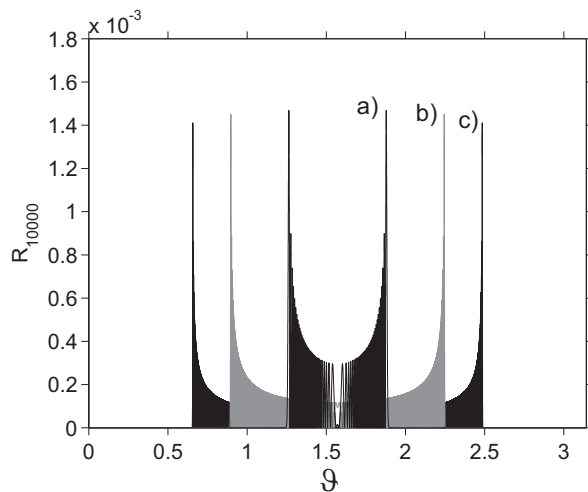


5.6. ábra. Az  $R$  (lásd (5.91)) függvény  $\Delta$  szerinti változása. A paraméterezés:  $\vartheta = \pi/2$ , a remanens mag rendszáma  $Z = 4$ , a lézer intenzitása  $I = 10^{20}$  Wcm $^{-2}$ , a lézerfoton energiája  $\hbar\omega_0 = 1,65$  eV





5.7. ábra. Az  $R_n$  (lásd (5.92) képlet) függvény  $\vartheta$  változó szerinti függése az  $I = 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$  és  $\hbar\omega_0 = 1,65 \text{ eV}$  lézerparaméterek mellett az (a)  $n = 18000$ ; (b)  $n = 14000$ ; (c)  $n = 10000$  és (d)  $n = 5000$  csatornában. A remanens mag rendszáma  $Z = 4$ , az elhangolás  $\Delta = 50 \text{ keV}$



5.8. ábra. Az  $R_n$  (lásd (5.92) képlet) függvény  $\vartheta$  változó szerinti függése az  $n = 10000$  csatornában,  $\hbar\omega_0 = 1,65 \text{ eV}$  lézerfoton energiánál a következő intenzitásértékek mellett: (a)  $I = 4 \cdot 10^{19} \text{ Wcm}^{-2}$ ; (b)  $I = 6 \cdot 10^{19} \text{ Wcm}^{-2}$  és (c)  $I = 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$ . A remanens mag rendszáma  $Z = 4$ , az elhangolás  $\Delta = 50 \text{ keV}$

mutatja  $I = 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$  intenzitásérték mellett. Az 5.7. ábra az  $R_n$  parciális arány  $\vartheta$  szerinti szögfüggését ábrázolja  $I = 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$  állandó intenzitás mellett négy speciális fotonszám esetében: (a)  $n = 18000$ ; (b)  $n = 14000$ ; (c)  $n = 10000$  és (d)  $n = 5000$ . Végül az 5.8. ábra az  $n = 10000$  fotonszámra az  $R_n$  szögfüggését mutatja be három különböző lézerintenzitás esetében, ezek: (a)  $I = 4 \times 10^{19} \text{ Wcm}^{-2}$ ; (b)  $I = 6 \times 10^{19} \text{ Wcm}^{-2}$ ; (c)  $I = 10^{20} \text{ Wcm}^{-2}$ . Ugyanezeket a numerikus számításokat elvégeztem  $Z = 9$  rendszám mellett is, de az eredmények nem adtak számottevő eltérést a  $Z = 4$  esetében kapott értékekhez képest, ezért ezeket külön nem ábrázoltam.

## 5.6. Konklúziók a lézertérbeli fotonukleáris effektussal kapcsolatban

A lézertérben végbemenő protonemisszióval járó fotonukleáris folyamatot a kimenő proton és a vég-mag közti Coulomb-kölcsönhatás figyelembevételével mellett mértékinvariáns módon írtam le a lézertér hosszúhullámú (LWA) közelítésében. Az általános formalizmuson túl a reakció hatáskeresztmetszetét a  ${}^8\text{B} + \hbar\omega_\gamma \rightarrow {}^7\text{Be} + p$  konkrét reakcióra paraméteresen is megadtam, majd a folyamat példáján numerikus vizsgálatot is végeztem. Numerikusan ellenőriztem a [64]-ben végzett számításokat, végeredményül azt kaptam, hogy az általam meghatározott hatáskeresztmetszet 0,0161-szor kisebb, mint a [64]-ben publikált eredmény. A  $\hbar\omega_\gamma = 3 \text{ MeV}$  energiájú  $\gamma$ -fotonnal lezajló reakció esetében a Coulomb-faktor egy nagyjából 1/4-szeres csökkenést eredményez a teljes hatáskeresztmetszetben a síkhullám (Born-) közelítéshez képest. További 0,065-szörös csökkenés jelentkezik a mértékinvariáns számolásból. A lézertér jelenlétének szignifikáns hatása kimutathatóan abban áll, hogy a teljes hatáskeresztmetszet mint parciális hatáskeresztmetszetek összege jelenik meg, amelyek az alapfolyamat során a különböző számú lézerfoton abszorpció és emisszió csatornáit írják le.

A [64]-ben közölt hatáskeresztmetszetnek a lézerfotonok  $n$  számától való függése szimmetrikus az  $n = 0$  értékre. Ez a mi terminológiánk szerint megfelel az  $R = 1$  esetnek. Ezzel szemben az általam meghatározott hatáske-

resztmetszet szignifikáns aszimmetriát mutat az  $n = 0$  értékre (lásd az 5.5. ábrát), amely összhangban van az  $R_n$ -nek az  $\varepsilon_n$ -től (5.92) szerinti függésével.  $\varepsilon_n$  az  $\varepsilon_{-11000} = 0,761$  értéktől az  $\varepsilon_{18000} = 1,240$  értékig nő – a kimenő proton kinetikus energiája  $\varepsilon_n$  növekedésével szintén nő –, amely többek között a Coulomb-faktor növekedését vonja maga után. Jogosan merülhet fel a kérdés, hogy az említett aszimmetria csupán a Coulomb-faktor következménye, vagy esetleg a proton leírására alkalmazott Coulomb-Volkov állapotok Volkov-részből fakadó jelenség. Ennek tisztázásához meg kell határozni  $R_n$  Coulomb-korrekciónélkül érvényes alakját, amelyet az (5.92) összefüggés  $K_{Cb} \rightarrow 0$  határértéke mellett kapott alakja ad meg:

$$R_n \xrightarrow{K_{Cb} \rightarrow 0} R_n^{Cfree} = \varepsilon_n^3 J_n^2(\alpha_{\vartheta n} \sin(\vartheta)). \quad (5.94)$$

A *Cfree* index a Coulomb-mentes esetet jelöli, valamint  $\alpha_{\vartheta n} \sim \varepsilon_n$ . Az eredményről leolvasható, hogy  $R_n^{Cfree}$  szimmetriatulajdonságát  $\varepsilon_n$  határozza meg, amelynek numerikus értékei minden lehetséges  $n$  érték mellett eltérőek. Ebből következik, hogy a Coulomb-mentes eset is aszimmetrikus  $n = 0$  értékre nézve, tehát  $R_n$  aszimmetriája nemcsak a Coulomb-korrekciónak következménye.

Az összegzést az összes csatornára elvégezve az  $R$  értékre  $1 \leq R \leq 1,28$  adódik, amely max. 28%-os növekményt jelent a lézermentes esethez képest. Ez nem tekinthető jelentéktelen változásnak, amit az  $R = 1,28$  esetben az 5.6. ábra mutat.

Összefoglalva elmondható, hogy a lézertérnek a küszöb környéki fotonukleáris effektusra gyakorolt módosító hatása (amely  $R$ -ben és  $R_n$ -ben jelentkezik) enyhén függ a  $\Delta$  elhangolástól és a lézer intenzitásától, a vég-mag  $Z$  rendszámától való függés viszont elhanyagolható. Az 5.8. ábra alapján  $R_n$  szögfüggését erősen befolyásolja a lézer intenzitása. Továbbá  $R_n$ , amely az egyes  $n$  csatornákhöz rendelhető – lézertér okozta – változást méri erősen függ az  $n$  lézerfoton-számtól és a  $\vartheta$  paramétertől. Ez összhangban van a direkt reakciómechanizmus feltételezésével. Az  $R_n$  és  $R$  mennyiségek azonosak a Yukawa-típusú és a héjmodell szerinti  $\nu_{s1/2}$  állapotokra, a hatáskeresztmetszetek pedig csak egy numerikus faktorban térnek el a két különböző típusú kezdeti állapot esetében. Ez a viselkedés azt sejteti, hogy a kezdeti (proton) állapottól általánosságban gyengén függhet a fotonukleáris reakció.

## 6. fejezet

# A disszertációhoz kapcsolódó tézisek

A doktori disszertációban részletesen kifejtett új tudományos eredményeket az alábbi tézispontokban foglalom össze:

1. Intenzív, tetszőleges impulzusalakú lézertér esetén a lézer miatt módosult elektron-atommag kölcsönhatás segítségével meghatároztam a kötött-szabad elektronátmenettel járó belső konverziós folyamat általános  $S$ -mátrixelemét. Gauss-típusú lézerimpulzus-alakot feltételezve az  $S$ -mátrixelemből levezettem az elektromos multipól-átmenethez ( $EL$ ) tartozó nem-relativisztikus belső konverziós együtthatókat.  
Kapcsolódó publikációk: (A), (B).
2. Meghatároztam a lézertér nélkül energetikailag tiltott belső konverziós csatornák néhány ciklusú, Gauss-impulzusú UV lézerrel indukált belső konverziós együtthatóját a  $^{107m}\text{Ag}$ ,  $^{90m}\text{Nb}$ ,  $^{183m1}\text{W}$ ,  $^{181m2}\text{W}$ ,  $^{188m}\text{Re}$ ,  $^{235m}\text{U}$  izomerek esetében. Kapcsolódó publikáció: (B).
3. Megvizsgáltam a  $^{99m}\text{Tc}$  atommag néhány ciklusú, Gauss-impulzusú gyenge röntgen-lézerrel indukált belső konverziós folyamatának a lézer- és egyéb-paraméterektől (a burkolónak az  $\omega_0$  körfrekvenciájú vivőhullámhoz képesti  $\phi$  fázistolásától, a  $\hbar c\Delta$  energiahiányból kapott  $\delta = c\Delta/\omega_0$  mennyiségtől és a  $T = \tau\omega_0$  impulzushossztól) való függését. A folyamat belső

konverziós együtthatójának szempontjából a lézerburkoló és a vivőhullám közötti  $\phi$  fázistolás számottevővé válik amikor az impulzushossz reciproka közel azonos a vivőhullám körfrekvenciájával ( $\tau^{-1} \simeq \omega_0$ ). Ha a fázistolás  $\phi = \frac{n\pi}{2}$ , akkor az impulzushatás maximális, míg ellenben  $\phi = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}$  esetén minimális. A lézer indukált belső konverziós együttható drasztikusan megnő, amikor az impulzushossz reciproka azonossá válik a vivőhullám körfrekvenciájával ( $\tau^{-1} = \omega_0$ ), és amikor a vivőhullám fotonenergiája kisebb, mint a lézermentes elektron-atommag folyamat energiahiánya ( $\hbar\omega_0 < \hbar c\Delta$ ). Ez az impulzushossz függő növekmény a síkhullám határesetben kapott eredményhez képest jelentős. A  $T$  dimenziótlan impulzushossz  $T \rightarrow \infty$  határesetében visszakaptam a  $^{99m}\text{Tc}$  izomér [12] által síkhullám esetben számolt belső konverziós együtthatójának numerikus értékét.

Kapcsolódó publikáció: (A).

4. Hosszúhullámú (LWA) közelítésben, továbbá a kimenő proton és a végmag közti taszító (hátráltató) Coulomb-kölcsönhatás korrekciójának figyelembevételével meghatároztam a lézertérben végbemenő, proton-emisszióval járó fotonukleáris effektus mértékinvariáns  $S$ -mátrixelemét. Ennek segítségével meghatároztam a folyamatra vonatkozó mértékinvariáns differenciális hatáskeresztmetszetet, amelyben – a vizsgált  $^8\text{B}(\gamma, p)^7\text{Be}$  reakciónak megfelelően – a proton kezdeti hullámfüggvényét Yukawa-típusú állapottal írtam le.

Kapcsolódó publikációk: (C), (D).

5. A lézertérben lezajló  $^8\text{B}(\gamma, p)^7\text{Be}$  reakcióra vonatkozó, a [64]-ben közölt numerikus eredményeket a mértékinvariáns modellben újraszámoltam. Polarizálatlan és két különböző polarizációjú  $\gamma$ -nyaláb esetében meghatároztam az  $n$ -edik ( $n$  a fotonszám) csatornára vonatkozó parciális hatáskeresztmetszeteket. Az általam meghatározott teljes hatáskeresztmetszet 0,0161-szer kisebb, mint a [64]-ben publikált eredmény. Az eltérés oka egyrészt a Coulomb-korrekció figyelembevétele (0,25-szörös faktor), másrészt a mértékinvariáns számolás (amely 0,065-szörös csökkenést eredményez). Kapcsolódó publikáció: (D).

6. Megvizsgáltam a lézertérbeli fotonukleáris folyamat küszöb környéki sajátosságait. A vizsgálatok során kiderült, hogy a lézertér módosító hatása azonos mértékű, amennyiben a proton kezdeti állapotának leírása Yukawa-típusú vagy héjmodell  $\nu s_{1/2}$  állapotokkal ( $\nu = 0, 1, \dots$ ) történik. Más szavakkal: az  $R_n$  (a lézertér jelenlétében és a lézermentes esetben kapott differenciális hatáskeresztmetszetek hányadosa) és az  $R$  ( $R = \sum_n R_n$ ) mennyiségek ezen állapotok esetében a kezdeti állapot alakjától függetlennek adódtak ( $n > 0$  a folyamatban elnyelt és  $n < 0$  a kibocsátott fotonszám). Kiderült, hogy a lézertér jelenléte összességében nem elhanyagolható módosítást jelent a lézermentes esethez képest ( $1 \leq R \leq 1,28$ ). Továbbá az  $n$ -edik csatornára vonatkozó, a csatornában történő reakció hatáskeresztmetszetére jellemző  $R_n$  parciális arány az  $n = 0$  értékre aszimmetrikus, ami részben a Coulomb-korrektió, részben pedig a Coulomb–Volkov állapotok hatásának köszönhető. Az  $n$ -edik csatornában a differenciális hatáskeresztmetszet szögfüggését a lézer intenzitása is befolyásolja. Kapcsolódó publikáció: (C).

#### A tézispontokhoz kapcsolódó nemzetközi publikációk:

- (A) **D. Kis**, P. Kálmán, T. Keszthelyi and J. Szívós, *Internal-conversion process in superintense ultrashort x-ray pulses*, Phys. Rev. A **81**, 013421 (2010).
- (B) **D. Kis**, P. Kálmán, and T. Keszthelyi, *Intense few-cycle hard UV-pulse-induced internal conversion processes*, Phys. Rev. A **82**, 025401 (2010).
- (C) P. Kálmán, **D. Kis**, and T. Keszthelyi, *Near threshold laser-modified proton emission in nuclear photoeffect*, Phys. Rev. A **87**, 063415 (2013)
- (D) P. Kálmán, **D. Kis**, and T. Keszthelyi, *Laser-assisted nuclear photoeffect reexamined*, Int. J. Nuclear Energy Science and Technology (2013), megjelenés alatt.

**Egyéb nemzetközi publikációk:**

1. P. Kálmán, T. Keszthelyi, and *D. Kis*, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **44**, 297-302 (2008)
2. P. Kálmán, T. Keszthelyi, and *D. Kis*, Eur. Phys. J. Appl. Phys. **50**, 31101 (2010)

## 7. fejezet

# Köszönetnyilvánítás

Először is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek Kálmán Péternek, aki nélkül e dolgozat nem született volna meg. Az együtt dolgozott közel 5 év alatt mind szakmailag, mind emberileg rengeteg segítséget és támogatást kaptam tőle, amelyek nélkül elvesztem volna az elém kerülő útvesztőkben.

Köszönet illeti Keszthelyi Tamást, aki nélkül a nemzetközi publikációkat nem sikerült volna szép, szabatos formában megalkotnunk. Köszönöm Sükösd Csabának és Szatmáry Zoltánnak, hogy a tanszéki feladataim elvégzésében mindig támogattak, és építő kritikáikkal jobbá tették a munkámat. Valamint köszönettel tartozom a BME NTI minden munkatársának, akik folyamatosan ösztökéltek és támogattak abban, hogy a doktori disszertációval kapcsolatos feladataimat minél hamarabb elvégezzem.

Végül szavakkal nehezen kifejezhető hálával és köszönettel tartozom Szüleimnek és Nagyszüleimnek, akiknek a születésem óta tartó erkölcsi, lelki és anyagi támogatásával és szeretetével megvalósíthattam álmaimat, és azzá az emberré válhattam, aki most vagyok. Külön említést kell tennem Édesanyámról, akinek szerető gondoskodása segített végig eddigi életem nehézségein és tett boldog emberré, azonban sajnos e disszertáció megszületését már nem élhette meg. Zárszóként köszönöm barátnőmnek Cvik Dórának, hogy a dolgozat megalkotásának nehéz fázisaiban mindvégig segítő és megértő társam volt.



# Irodalomjegyzék

- [1] Internet forrás: <http://extreme-light-infrastructure.eu>
- [2] W. Becker, R. R. Schlicher and M.O. Scully, *Phys. Lett. A* **106**, 441 (1984).
- [3] J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1952).
- [4] K. Alder *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **28**, 432 (1956).
- [5] M. E. Rose, *Internal Conversion Theory* (Internal Conversion Processes, szerk.: J. H. Hamilton, Academic, New York, 1966).
- [6] H. C. Pauli, K. Alder, R. M. Steffen, *The Theory of Internal Conversion* (The Electromagnetic Interaction in Nuclear Spectroscopy, szerk.: W. D. Hamilton, North-Holland, Amsterdam, 1975).
- [7] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, *Atom-Photon Interaction* (Wiley, New York, 1992).
- [8] Kálmán Péter és Bükki Tamás, *Elektromágneses sugárzás és anyag kölcsönhatása* (Bevezetés a modern optikába, V. kötet, szerk: Richter Péter, Műegyetemi Kiadó, 2000).
- [9] T. Bükki, *Belső konverziós és elektron-híd folyamatok intenzív lézerterekben* (PhD disszertáció, 2002).
- [10] W. C. Henneberger, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 838 (1968).

- 
- [11] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, *Photons and Atoms* (John Wiley & Sons, New York, 1989).
- [12] P. Kálmán and T. Bükki, Phys. Rev. A **65**, 053414 (2002).
- [13] P. Kálmán and T. Bükki, Can. J. Phys. **80**, 1115 (2002).
- [14] J. I. Gersten and M. H. Mittleman, Phys. Rev. Lett. **48**, 651 (1982).
- [15] G. C. Baldwin and S. A. Wender, Phys. Rev. Lett. **48**, 1461 (1982).
- [16] P. Kálmán and J. Bergou, Phys. Rev. C **34**, 1024 (1986); P. Kálmán Phys. Rev. C **37**, 2676 (1988); Phys. Rev. C **39**, 2452 (1989).
- [17] P. Kálmán, Phys. Rev. A **43**, 2603 (1991); P. Kálmán and T. Keszthelyi, Phys. Rev. A **44**, 4761 (1991).
- [18] S. Matinyan, Phys. Rep. **298**, 199 (1998).
- [19] M. Schnürer *et al.*, Appl. Phys. B **70**, S 227 (2000).
- [20] M. Hentschel *et al.*, Nature **414**, 509 (2001).
- [21] M. Drescher *et al.*, Nature **419**, 803 (2002).
- [22] A. Baltuska *et al.*, Nature **421**, 611 (2003).
- [23] R. Kienberger *et al.*, Nature **427**, 817 (2004).
- [24] G. Sansone *et al.*, Science **314**, 443 (2006).
- [25] J. Seres *et al.*, New J. Phys. **8**, 251 (2006).
- [26] P. B. Corkum and F. Krausz, Nature Physics **3**, 381 (2007).
- [27] F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
- [28] K. W. D. Ledingham, P. McKenna, and R. P. Singhal, Science **300**, 1107-1111 (2003).
- [29] D. Kis, P. Kálmán, T. Keszthelyi and J. Szívós, Phys. Rev. A **81**, 013421 (2010).

- [30] D. Kis, P. Kálmán, and T. Keszthelyi, *Phys. Rev. A* **82**, 025401 (2010).
- [31] J. Szívós, *Belső konverziós folyamat ultrarövid röntgen pulzusokban* (MSc diplomamunka, 2010).
- [32] T. Brabec and F. Krausz, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 545-591 (2000).
- [33] A. I. Akhiezer, A. G. Sitenko, V. K. Tartakovskii, *Nuclear Electrodynamics* (Springer-Verlager, Berlin, Heidelberg, 1994).
- [34] S. S. Schweber, H. A. Bethe and F. de Hoffmann, *Mesons and Fields*, Vol. I. (Row, Peterson and Company, Evanston, Illinois, 1955).
- [35] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1994). Az asszociált Legendrepolinomok kifejtéséhez lásd (8.812).
- [36] M. Abramowitz and I. A. Stegun (editors), *Handbook of Mathematical Functions* (U.S. Government Printing Office, Washington, 1964). A szférikus Bessel-függvények kifejtéséhez lásd (10.1.2).
- [37] I. I. Sobel'man, *Introduction to the Theory of Atomic Spectra* (Pergamon Press, Oxford, 1972).
- [38] P. Kálmán and I. Nagy, *Phys. Rev. A* **77**, 033423 (2008).
- [39] L. D. Landau and E. M. Lifsic, *Elméleti fizika, 3. kötet, Kvantummechanika* (Tankönyvkiadó, Budapest, 1978).
- [40] R. B. Firestone and V. S. Shirley, *Tables of Isotopes*, 8. kiadás (Wiley, New York, 1996).
- [41] B. Zon and F. F. Karpeshin, *Phys. Lett. B* **383**, 367 (1996).
- [42] [12]  $\alpha_{4,3}^{pw} = 1.66 \times 10^{-10} I$  eredménye  $(2l + 1) = 9$ -szer ( $l = 4$ ) nagyobb mint az itt kapott  $\alpha_{4,3}^{pw} = 1.91 \times 10^{-11} I$  eredmény. Ennek az oka a [12]-ben az impulzusmomentum összegzésnél elkövetett hiba. (Lásd (3.63) és [12] (42) egyenletét.).

- [43] Lásd [12] TABLE II..
- [44] H. R. Reiss, Phys. Rev. Lett. **101**, 043002 (2008).
- [45] F. Rösler, *et al.*, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **21** (1978) 91.
- [46] I. M. Band and M. B. Trzhaskovskaya, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **55** (1993) 43.
- [47] G. D. Tsakiris *et al.*, New. J. Phys. **8**, 19 (2005).
- [48] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure* (Benjamin, New York, 1969) 1. kötet
- [49] G. Richter, in *Lehrbuch der Kernphysik*, 2. kötet (Teubner, Leibzig, 1960).
- [50] J. S. Levinger and D. C. Kent, Phys. Rev. **95**, 418 (1954).
- [51] J. S. Levinger, Phys. Rev. **97**, 122 (1955).
- [52] A. S. Penfold and E. L. Garwin, Phys. Rev. **116**, 1 (1959).
- [53] M. M. Wolf and W. E. Stephens, Phys. Rev. **112**, 890 (1958).
- [54] L. D. Cohen and W. E. Stephens, Phys. Rev. Lett. **2**, 263 (1959).
- [55] R. R. Schlicher, W. Becker, J. Bergou, and M. O. Scully, in *Quantum Electrodynamics and Quantum Optics*, szerk.: A. O. Barut (Plenum, New York, 1984), 405. oldal
- [56] W. E. Lamb, Jr., R. R. Schlicher, and M. O. Scully, Phys. Rev. A **36**, 2763-2772 (1987).
- [57] P. Kálmán, *Röntgenabszorpció és belső konverzió intenzív lézerterekben*, kandidátusi értekezés (Budapest, 1990).
- [58] P. Kálmán, Phys. Rev. A **39**, 2428 (1989).
- [59] V. D. Rodriguez and R. O. Barrachina, Eur. Phys. J. D. **64**, 593-599 (2011).

- [60] P. G. Hansen and B. Johnson, *Europhys. Lett.*, **4**, 4, pp. 409-414 (1987).
- [61] T. Fényes, et al., *Atommagfizika 1.*, szerkesztette Fényes Tibor (Debreceni Egyetemi kiadó, Debrecen, 2009).
- [62] M. Fukuda et al., *Nucl. Phys. A* **656**, 209 (1999).
- [63] K. Varga, Y. Suzuki and R. G. Lovas, *Phys. Rev. C* **66**, R1302 (2002).
- [64] A. Dadi and C. Müller, *Phys. Rev. C* **85**, 064604 (2012).
- [65] A  $\sin(\omega_0 t)$  tag előjele [64] (2) egyenletében pozitív. Sajnos ez nem sajtóhiba amint az a (13) és (21) egyenletekből látszik.
- [66] M. Jain and N. Tzoar, *Phys. Rev. A* **18**, 538-545 (1978).
- [67] L. Rosenberg, *Phys. Rev. A* **34**, 4567-4574 (1986).
- [68] P. Cavalier, G. Ferrante and C. Leone, *J. Phys. B: Atom. Molec. Phys.* **13** 4495-4507 (1980)
- [69] F. Ehlotzki, *Optics Communications*, **77**, No. 4, 309 (1990)
- [70] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series and Products* (Nauka, Moscow, 1971), formula 8.511/3.
- [71] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Springer, Berlin-Göttingen-Heidleberg, 1957), A.40-A.42 formulák a 349. oldalon.
- [72] W. N. Bailey, *Quart. J. Math. (Oxford)* **9**, 141 (1938).
- [73] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series and Products* (Nauka, Moscow, 1971), formula 6.511/3.
- [74] P. Kálmán, *Phys. Rev. A* **38**, 5458-5460 (1988).
- [75] P. Kálmán, *Phys. Rev. A* **39**, 3200-3203 (1989).
- [76] J. M. Eisenberg and W. Greiner, *Nuclear Theory, Vol. 1., Nuclear Models* (North-Holland, Amsterdam, 1970).

- 
- [77] M. Abramowitz and I. A. Stegun (szerkesztők), *Handbook of Mathematical Functions* (U.S. Government Printing Office, Washington, 1964).
- [78] M. Pont and M. Gavrila, Phys. Rev. Lett. **65**, 2362 (1990).
- [79] P. C. Stein, A. C. Odian, A. Wattenberg and R. Weinstein, Phys. Rev. **119**, 1 (1960).