Diplomamunka

Spontán sértett mértékelméletek extra dimenzióban

Kis Dániel Péter

Témavezető: Dr. Cynolter Gábor
Tudományos Főmunkatárs
ELTE TTK Elméleti Fizikai Tanszék

Konzulens: Dr. Sükösd Csaba
Egyetemi Docens
BME Nukleáris Technika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Budapest, 2006.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezető

Hány dimenziós a világ? Ezt az egyszerű kérdést messze nem egyszerű megválaszolni. Már a XX. század első felében Kaluza és Klein egy extra dimenzió bevezetésével próbálta egyesíteni a gravitációt leíró általános relativitáselméletet és az elektrodinamikát.

A modern fizika fejlődésével úgy tűnik közelebb kerültünk a megoldáshoz. A húrelmélet az egyetlen eddig ismert fundamentális elmélet, amely tartalmazza a gravitáció konzisztens kvantumelméletét. Ehhez viszont 11 dimenziós világ szükséges, amelyből 7 un. *kompakt* dimenzió (kompakt sokaság). Ezzel az elmélet újra előtérbe helyezte az extra dimenziós modelleket. A kompakt dimenziók mérete azonban Planck-nagyságrendű maradt ($r \sim M_{Pl}^{-1}$). A *brane*-ek felfedezésével lehetővé vált a nagy extra dimenziók ($r \sim 1mm$) létezése is (ADD-elmélet), illetve a legújabb elméletekben az extra dimenzió görbült (RS-elmélet) is lehet. Az extra dimenziós modellek létjogosultságát erősíti, hogy a Standard Modell bizonyos problémáinak (pl. hierarchia probléma) megoldásához megfelelő keretet biztosít.

Ebben a dolgozatban ismertetjük a fent említett extra dimenziós elméleteket, kiemelt hangsúlyt fektetve a hierarchia probléma megoldására, valamint bemutatjuk az elektrodinamika $U(1)$, és az elektrogyenge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ spontán sértett mértékelméletek extra dimenziós tárgyalását.

2. fejezet

Matematikai alapok

2.1. Variációs elv

A fizikában általánosan használt módszer a mozgás- vagy téregyenletek meghatározásához a variációs elv (pl. Lagrange-i mechanika, térelmélet, legkisebb hatás elve). Ez az elegáns, és teljesen általános eljárás lehetőséget ad, a fizikában kulcsfontosságú szimmetriák, és a hozzájuk tartozó megmaradó mennyiségek leírására. A szimmetriák ismeretében az egyenletek megoldása nagy mértékben leegyszerűsödik.

A variációs elv lényege, egy adott funkcionál szélsőérték problémájának megoldása. Legyen egy általános funkcionál $I\left[y\right]$ a következő alakban definiálva:

$$I\left[y,y'\right]=\int_b^a F\left(x,y\left(x\right),\frac{dy\left(x\right)}{dx}\right)dx, \tag{2.1}$$

ahol $y'\equiv\frac{dy}{dx}$. Ekkor olyan $y\left(x\right)\in D^2$ függvényt keresünk, melyre az $I\left[y\right]$ integrálfunkcionálnak szélső értéke van. Ennek szükséges és elégséges feltétele a variáció eltünése: $\delta I=0$. Variációszámításnál az $y\left(x\right)$ görbét változtatjuk és vizsgáljuk a funkcionál értékét. Az $I[y,y']$ funkcionál megváltozása kifejezhető a görbék és azok deriváltjainak megváltozásával

$$\delta I\left[y\right]=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx. \tag{2.2}$$

Kihasználva, hogy a variáció és a deriválás felcserélhető: $\delta y'=\frac{d}{dx}\delta y$, elvégezhető az integrálban szereplő második tag parciális integrálása.

$$\delta I\left[y\right]=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b+\int_b^a\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\delta y dx \tag{2.3}$$

De $\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_a^b=0$, mert a görbe végpontjai rögzítettek, nem történik variálás, tehát $\delta y\left(b\right)=\delta y\left(a\right)=0$. A szélsőérték probléma megoldását viszont a $\delta I\left[y\right]=0$ adja, tehát

$$\int_b^a\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\delta y dx=0 \tag{2.4}$$

Ennek viszont minden lehetséges pálya esetén teljesülnie kell. A szélsőérték probléma általános megoldása innen, az Euler-Lagrange egyenlet (egy dimenzióban):

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{2.5}$$

Többdimenziós esetben a funkcionált sokváltozós függvények határozzák meg, n dimenzió esetében:

$$I\left[u\left(x^1...x^n\right)\right]=\int...\int_V F\left(x^1...x^n,u\left(x^1..x^n\right),u_{x^1},...,u_{x^n}\right)dV \tag{2.6}$$

ahol $dV=dx^1..dx^n$ térfogatelem, ∂V a V térfogatot határoló felület, $u_{x^n}\equiv\frac{du}{dx^n}$. Ekkor szintén a $\delta I\left[u\right]=0$ variációs egyenletet kell megoldanunk. A gondolatmenet u.a. mint az egydimenziós esetben, azonban itt, azt kell kihasználnunk, hogy a görbe variációi a vizsgált térfogatot határoló n dimenziós hiperfelületen (bizonyos esetben az a végtelent jelenti) eltünjenek. Azokat az $u\left(x^1...x^n\right)$ függvényeket, melyekre a vizsgált funkcionál extremális, most is az Euler-Lagrange egyenletek adják meg (n dimenzió esetében):

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{x^i}}\right)=0 \tag{2.7}$$

Gyakran előforduló probléma, hogy a variációs feladatot, valamiyen nem triviális peremfeltétel mellett kell megoldani. Ebben az esetben a szélsőérték meghatározásához szintén a $\delta I=0$ egyenletet kell megoldani, azonban most extra feltételek jelennek meg a függvényekre vonatkozóan. Ehhez a (2.3)-nak megfelelő, n dimenzióra vonatkozó egyenletet kell megvizsgálni (Einstein-konvenció mellett):

$$0 = \int_V d^n x \partial_{x^n} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right] + \int_V d^n x \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \partial_{x^n} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\partial_{x^n} y \right)} \right) \right) \delta y \qquad (2.8)$$

A kifejezésben szereplő két tag összegének nullának kell lennie. Fizikailag (a Lagrange-i mechanika miatt) az a jól motivált választás, ha mindkét tag nullával egyenlő, mert így az Euler-Lagrange-egyenlet érvényes marad. Az első tag eltünése pedig megadja a peremfeltételeket (pl. az egyik dimenzió véges mérete következtében a δy variáció nem feltétlenül tűnik el, így a szorzat másik tagja is lehet nulla). Tehát ilyen esetekben a

$$0 = \int_V d^n x \partial_{x_n} \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right] \qquad (2.9)$$

egyenletet megoldása határozza meg a peremfeltételt. A peremfeltételes variációszámítás kiemelt fontosságú szerepet játszik az extra dimenziós elméletek tárgyalásakor.

2.2. Kompakt sokaságok, orbifold

Az extra dimenziós elméletekben sokszor $D = 4 + n$ dimenziós, $\mathcal{M}_4 \times C$ sokaságon dolgozunk, ahol C kompakt sokaság. Az effektív 4D-s modellt úgy kapjuk, hogy a Lagrange-sűrűséget C-re integráljuk:

$$\mathcal{L}^{eff}(x^\mu) = \int_{C^n} d^n y \mathcal{L}(\Phi(x^\mu, y)) \qquad (2.10)$$

Egy C kompakt sokaságot úgy állítunk elő, mint egy M fedőtér G diszkrét csoport szerinti faktorizációját: $C = M/G$. n=1 estén, ha $M = R$ és $G = Z$ eltolás, akkor a kompakt sokaság az S^1 kör. Ennek n dimenziós általánosítása, a toroidális kompaktifikáció ($T^n = R^n/Z^n$).

A kompakt sokaságok egy speciális típusa az *orbifold*. A fizikában az O orbifoldot, mint valamilyen kompakt sokaság véges csoporttal vett faktorizációjának tekintjük: $O = C/H$. A véges csoport gyakran a tükrözés, $H = Z_2$. Fontos megjegyezni, hogy az orbifoldon vannak fixpontok, amelyek fizikailag nagyon fontosak, mert a terek ide lokalizálhatók.

Az orbifold struktúrából következően az y koordinátákat a $\xi_h(y)$ pályákkal azonosítjuk ($y = \xi_h(y)$), ahol ξ_h a $h \in H$ csoportelem egy ábrázolása. Egy pályán belül nem tudunk fizikailag különbséget tenni a pontok között, eltérés csak a különböző pályák között lehetséges, ezért a Lagrange-sűrűségre igaznak kell lennie, hogy:

$$\mathcal{L}(\Phi(x^\mu, y)) = \mathcal{L}(\Phi(x^\mu, \xi_h(y))) \tag{2.11}$$

Ennek az ekvivalenciának a mezőkre vonatkozó szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\Phi(x^\mu, \xi_h(y)) = T_h \Phi(x^\mu, y), \tag{2.12}$$

ahol T_h a Lagrange-sűrűség egy globális vagy lokális szimmetriájának ábrázolása, a Schreck-Schwarz (SS) twist, amely lehetővé teszi a szimmetria sértést orbifoldon (Schreck-Schwarz mechanizmus). Tehát az orbifold hatása a mezőkre, csak egy szimmetria erejéig határozott. A következőkben egy speciális, de általánosan használt orbifoldot mutatunk be.

2.2.1. S^1/Z_2 orbifold

Legyen egy extra dimenzió, egy végtelen egyenes, y paraméterrel, tehát $-\infty < y < \infty$. Ezt a végtelen egyenest transzformáljuk R sugarú S^1 körré (1D-s kompaktifikáció), a következő megfeleltetéssel $\tau : y \to y + 2\pi R$, így τ transzformációval a megfeleltetés után az egyenesből kört kapunk: $R \to S^1 = R/\tau$.

Most az eredeti végtelen egyenesre hattassunk a tükrözés diszkrét szimmetriáját (Z_2), azaz a következő megfeleltetést tesszük: $y \to -y$. Tehát a Z_2 szimmetria hatására a végtelen egyesből félegyenest kapunk: $R \to R^1 = R/Z_2$.

Ha ezt a két transzformációt (τ és Z_2) egyszerre kötjük ki az extra dimenzióra (S^1/Z_2 sokaság), akkor az extra dimenzió fizikailag független pontjai az $y \in [0, \pi R]$ tartományban lesznek. A következőkben az orbifold fizikai mezőkre gyakorolt hatását vizsgáljuk.

Legyen egy $\phi(y)$ skalármező, mely az S^1/Z_2 orbifold tulajdonságai miatt, bizonyos transzformációkkal szemben invariáns, kivéve akkor, ha ott a dinamikát leíró Lagrange-sűrűségnek lokális vagy globális szimmetriája van. Ebben az esetben a megfeleltett pontokban a mezők nem egzaktul egyenlőek, hanem csupán a szimmetria transzformáció erejéig ekvivalensek, mert így kapunk fizikai egyenlőséget. Így az adott eltolás és tükrözés a mező esetében a következő:

$$\tau\left(2\pi R\right)\phi\left(y\right) = T^{-1}\phi\left(y+2\pi R\right) \tag{2.13}$$

$$z\phi\left(y\right) = Z\phi\left(-y\right), \tag{2.14}$$

ahol T és Z a hatás szimmetriáit reprezentáló mátrixok a mezők terében. A mező S^1/Z_2 megfeleltetései után:

$$\phi\left(y+2\pi R\right) = T\phi\left(y\right) \tag{2.15}$$

$$\phi\left(-y\right) = Z\phi\left(y\right). \tag{2.16}$$

A T és Z a hatás szimmetriái, de nem tetszőlegesen választhatóak, mert teljesíteni kell egy konzisztencia feltételt.

Ehhez elsőként válasszunk egy y pontot, amit tükrözünk a 0 körül ($z(0)$), majd toljuk el $2\pi R$-rel. Ekkor a $2\pi R - y$ pontba jutunk. De ezt elvégezhetjük fordítva is, azaz $-2\pi R$-rel eltoljuk majd tükrözzük a 0 körül az y pontot, így is a $2\pi R - y$ pontba jutunk. Tehát igaz a következő egyenlőség:

$$z(0)\tau^{-1}\left(2\pi R\right) = \tau\left(2\pi R\right)z(0) \tag{2.17}$$

Amennyiben ezt a transzformációt a $\phi\left(y\right)$ mezőn végezzük el, figyelembe véve a (2.13) és a (2.14) szabályokat, a T és Z mátrixokra a következő egyenlőséget kapjuk:

$$TZ = ZT^{-1}. \tag{2.18}$$

Amennyiben a fenti egyenlőség teljesül, konzisztens leírást kapunk.

A konzisztencia feltétel egy másik úton is megkapható. Ehhez azt kell vizsgálni, hogy mely transzformációk tekinthetők Z_2 transzformációnak. Mivel maga $z \in Z_2$, ezért $zz = 1$, amiből következik a (2.14) alapján, hogy $Z^2 = 1$. De T nem tükrözés ($T \notin Z_2$), így $T^2 \neq 1$. Viszont T és Z megfelelő kombinálásából már olyan transzformáció készíthető, mely Z_2 tükrözés. Nézzük az $y = \pi R + y'$ pont 0 körüli tükrözését és $2\pi R$-rel való eltolását ($\tau\left(2\pi R\right)z(0)$).

Könnyen belátható, hogy a $\pi R - y'$ pontba jutunk: $\pi R + y' \to \pi R - y'$. Jól látszik, hogy ha a pontot nem a 0 körül, hanem a πR körül tükrözzük, tehát tulajdonképpen eltoljuk az "origót", akkor az $y' \to -y'$ transzformációt kapjuk, ami látszik, hogy Z_2 traszformáció. Tehát mezők esetén $Z' = TZ \in Z_2$, azaz

$$(TZ)^2 = (TZ)\left(ZT^{-1}\right) = 1. \tag{2.19}$$

Ez ekvivalens feltétel az előző részben tárgyalttal, de tőle független úton határoztuk meg (itt nem a 0 körül, hanem a πR körüli tükrözést használtuk ki!).

Ebből a két független gondolatmenetből következik, hogy az S^1/Z_2 szimmetria esetén, csak az $y \in [0, \pi R]$ a fundamentális tartomány.

A későbbiek miatt nézzük meg konkrét példaként, hogy az 5D-s ábeli mértéktér esetén, a mezőkre nézve milyen hatást jelent az S^1/Z_2 orbifold. Más szavakkal, milyen SS-twist marad a Lagrange-sűrűség lokális U(1) szimmetriája miatt:

$$A_M(x,y) = A_M(x, y + 2\pi R) \tag{2.20}$$

$$A_\mu(x,y) = A_\mu(x, -y) \tag{2.21}$$

$$A_5(x,y) = -A_5(x, -y) \tag{2.22}$$

$$\phi(x,y) = \phi(x, y + 2\pi R) \tag{2.23}$$

$$\phi(x,y) = \phi(x, -y) \tag{2.24}$$

A vektormező 5. komponensének (A_5) Z_2 transzformációja láthatóan eltér a többi mező transzformációjától. Ennek az az oka, hogy a skalár-elektrodinamika Lagrange-sűrűsége invariáns kell, hogy legyen a Z_2 transzformációval szemben, tehát a mértékmezőre nézve $F_{MN}F^{MN} = zF_{MN}F^{MN}$. Itt a tükrözés miatt igazán fontos komponensek az 5. koordinátát tartalmazó tagok:

$$F_{5\nu}F^{5\nu} = (\partial_5 A_\nu - \partial_\nu A_5)\left(\partial^5 A^\nu - \partial^\nu A^5\right), \tag{2.25}$$

amire a Z_2 tükrözést hattatva a következőt kapjuk:

$$(-\partial_5 A'_\nu - \partial_\nu A'_5)\left(-\partial^5 A'^\nu - \partial^\nu A'^5\right), \tag{2.26}$$

ami viszont szemmel láthatóan nem egyezik meg az eredeti komponensekkel. Ezért vagy az A_ν-nek vagy az A_5-nek előjelet kell váltania. Ésszerű választásnak tűnik, hogy az A_5 váltson előjelet, hiszen az A_ν megfigyelhető komponens jobb ha érzéketlen az extra dimenzióban való tükrözésre. Így az $A'_5 = -A_5$ előjelváltásával a Lagrange-sűrűség invariáns marad:

$$(-\partial_5 A_\nu + \partial_\nu A_5)\left(-\partial^5 A^\nu + \partial^\nu A^5\right) = F_{\nu 5}F^{\nu 5} = F_{5\nu}F^{5\nu}. \tag{2.27}$$

Ezzel ekvivalens gondolatmenet az is, ha abból indulunk ki, hogy a twist-nek olyannak kell lennie, ami megtartja a Lagrange-sűrűség 5D-s U(1) mértékszimmetriáját. Tehát az

$$A_M(x,y) \to A'_M(x,y) = A_M(x,y) + \partial_M \Theta(x,y) \tag{2.28}$$

érvényes marad. Ennek a struktúrájából azonnal következik, hogy az A_μ-nek nem, míg A_5-nek előjelet kell váltania az $y \to -y$ transzformációra nézve, akkor, ha a skalárt invariánsnak tartjuk. Tehát visszakapjuk a (2.24) relációkat.

Még érdekes kérdés, hogy az 5D-s metrikus tenzor (g_{MN}) komponensei hogyan változnak az S^1/Z_2 orbifold következtében. Ehhez alakítsuk a metrikát:

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & h_{\mu 5} \\ h_{5\nu} & \gamma_{55} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

alakra. Tudjuk, hogy az ívelemnégyzet invariáns Z_2-vel szemben is, azaz $ds^2 = g_{MN}dx^M dx^N = zds^2$. Ebben az esetben is csak azok a komponensek érdekesek, melyekben megjelenik a dx^5 komponens is (nem kvadratikusan!): $h_{\mu 5}dx^\mu dx^5 + h_{5\nu}dx^5 dx^\nu$, erre hattatva a Z_2-t a következőt kapjuk:$-h'_{\mu 5}dx^\mu dx^5 - h'_{5\nu}dx^5 dx^\nu$. De az ívelemnégyzet invariáns, tehát a $h'_{\mu 5} = -h_{\mu 5}$ és $h'_{5\nu} = -h_{5\nu}$.

Tehát az S^1/Z_2 hatása a metrikára:

$$g'_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & -h_{\mu 5} \\ \\ -h_{5\nu} & \gamma_{55} \end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Az S^1-gyel szemben a metrika triviálisan invariáns, mert az ívelemnégyzetben koordináta differenciálok szerepelnek, melyek invariánsak a konstans eltolással szemben: $dx" = \frac{dx"}{dx}dx = \frac{dx+2\pi R}{dx}dx = dx$

3. fejezet

Standard Modell

A mai részecskefizika általánosan elfogadott elmélete a Standard Modell, a QCD és az elektrogyenge (Weinberg-Salam) elmélet összekapcsolásából származó $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ spontán sértett mértékelmélet. A modell a különböző leptonokat és kvarkokat családokba rendezi, amelyekből hármat különböztet meg:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, e_R, u_R, d_R$$
$$\begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \mu_R, c_R, s_R$$
$$\begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}_L, \tau_R, b_R, t_R$$

Ezek a részecskék a Standard Modell szimmetriacsoportjának fundamentális ábrázolásai szerint transzformálódó spinor terekkel írhatók le: a leptonok szín-szinglettek, de $SU(2)$ dublettek ("balkezes") vagy szinglettek ("jobbkezes"), míg a kvarkok színtriplett, de $SU(2)$ szinglett részecskék. Ezen fermionok között a kölcsönhatásokat (erős, gyenge, elektromágneses) a megfelelő mértékcsoport vektorbozonjai közvetítik: nulla tömegű $SU(3)$ gluonok (8 db), tömeges $SU(2)$ $W^\pm$ és Z bozonok, és a tömegtelen $U(1)$ foton. A modellben lévő fermionokat és vektorbozonokat direkt módon felfedezték, 1-hurok szinten százalék pontosságú egyezés a kísérlet és az elmélet között.

Az említett fermionokon és vektorbozonokon kívül a modell tartalmaz még egy, a spontán szimmetriasértésért felelős skalárt, az $SU(2)$ dublett Higgs-bozont. Ennek a létezését azonban még nem sikerült kísérletileg, direkt módon igazolni.

A fermion családok között keveredés lép fel, mivel a kvark tömegmátrix sajátvektorai és a töltött hadronikus áramokban szereplő spinorok különböznek. Ezt a keveredést írja le a Cabbibo-szög (két család esetén) vagy általánosan a Kobayashi-Maskawa mátrix (3 család esetén).

A Standard Modell amellett, hogy a rá jellemző energiaskálán viszonylag nagy pontossággal leírja a részecskefizikai folyamatokat, tartalmaz hiányosságokat is. A következőkben röviden összefoglaljuk az elmélet fontosabb előnyeit és hátrányait. Előnyök:

- 10^{-16} cm-ig leírja a világot
- nincs ízváltó semleges áram (GIM mechanizmus)
- lepton íz megmarad $m_\nu = 0$-ra, $m_\nu \neq 0$ a lepton ízt alig befolyásolja
- CP sértés el van nyomva, barion (B) és lepton (L) szám perturbatívan megmarad, nem perturbatívan a B-L marad meg
- $114,4GeV < M_H$
- mértékcsatolások "közel" találkoznak

Hátrányok:

- túl sok a szabad paraméter, összesen 26, a tömeges neutrínóval együtt (ekkor jobbkezes neutrínó is létezik) (3 csatolás, 2 adat a Higgs-re (VEV (vákuum várhatóérték) és tömeg), kvark és leptontömegek ill. a hozzájuk tartozó Kobayashi-Maskawa mátrix keveredési paraméterei, és az anomália miatt a θ_{QCD})
- a szimmetriacsoport egy direkt szorzat mértékcsoport
- miért és miért ennyi fermioncslád létezik

- CP sértés, nem elegendő a világ barion aszimmetriájának megmagyarázására
- a töltés nem kvantált
- hierarchia probléma

Ezek és a kísérleti eredmények afelé mutatnak, hogy új, a Standard Modellen túli elméleteket keressenek a fizikusok. Így jött létre a GUT (nagy egyesített elmélet), az MSSM (Minimális Szupeszimmetrikus Standard Modell), a technicolor elméletek, valamint újabban az extra dimenziók bevezetése. A Standard Modell kiterjesztése szempontjából a hierarchia probléma kulcsfontosságú, ezért ezt részletesebben is tárgyaljuk.

3.1. Hierarchia probléma

A hierarchia probléma az elemi kölcsönhatások energiaskáláinak nagyságrendi különbségéből ered. A gravitációs kölcsönhatás energiaskálája, melyet a Newton-állandóból számítható Planck-tömeg határoz meg $M_{Pl} = \frac{\hbar c}{G_N}$ ($\hbar = c = 1$ egységrendszerben $\sim 10^{19}$GeV), tizenhét nagyságrenddel nagyobb, mint a Standard Modell részecskéi közt ható kölcsönhatások jellemző energiaskálája ($\sim$1000 GeV). Nem érthető, hogy miért lehet két lényegesen különböző skála egy fundamentális elméletben.

Másrészt a Higgs-részecske jelenlétével a TeV skála nem stabil a hurokkorrekciók miatt. A Higgs önkölcsönhatásából az egy hurok tömegkorrekció Planck-skála nagyságrendű ($\delta M_H^2 \sim \Lambda^2$). A Higgs-részecske tömegének a Standard Modell energiaskáláján kell lennie. Ezért a fagráf szintű, csupasz tömeget 34 jegy pontossággal kell beállítani, hogy 1-hurok szinten a renormált tömeg az elektrogyenge tartományba essen. Ez a finomhangolás nem természetes, és a perturbációszámítás minden rendjében újra meg kell tenni.

Olyan elméletre van szükség, mely megmagyarázza, vagy eltűnteti ezt a finomhangolást, ez viszont túlmutat a Standard Modell keretein.

4. fejezet

Extra dimenziós modellek

Az extra dimenziók bevezetésének gondolata a XX. század első felére vezethető vissza, amikor a relativitás és kvatumelméletnek köszönhetően a fizikai világkép alapjaiban változott meg.

A különböző kölcsönhatásokat leíró elméletek egyesítésének gondolata volt, ami miatt néhány fizikus megpróbálta geometriai úton egyesíteni a gravitáció és az elektrodinamika elméletét. Ez azonban nem járt sikerrel. Majd az erős kölcsönhatás leírására született, de később már önálló területté vált húrelmélet adott új alapot az extra dimenziók bevezetéséhez. A modellben lévő speciális, több dimenziós dinamikai objektumok, a D-brane-ek, felfedezésével lehetővé vált az extra dimenziós modellek újszerű tárgyalása. Ez a nagy ill. a görbült extra dimenziókkal való tárgyalás lehetőségét eredményezte.

A továbbiakban az extra dimenziós modelleket fogjuk bemutatni, kezdve az első un. Kaluza-Klein elmélettel, folytatva a modern ADD-, és a görbült extra dimenziós Randall-Sundrum elmélettel.

4.1. Kaluza-Klein elmélet

Ez volt az első extra dimenziós elmélet (1920), mely a gravitáció és az elektromágneses kölcsönhatás geometriai alapon történő egyesítését célozta meg.

Az elmélet alapfeltevése 1 extra, de kompakt, periodikus dimenzió a meg-lévő 4 dimenzós tér-idő mellé. Ezáltal a koordináták teljes rendszere az 5 dimenzóban: $x^A = (x^\mu, z)$, ahol $\mu = 0, 1, 2, 3$, z pedig a kompakt extra dimenzió koordinátája.

Az 5 dimeziós tér-időben az invariáns ívelemnégyzet a relativitáselméletből ismert módon definiálható:

$$ds^2 = \gamma_{AB} dx^A dx^B, \text{most}: A, B = 0, 1, 2, 3, 5 \tag{4.1}$$

ahol γ_{AB} az ötdimenziós metrikus tenzor, amit a Kaluza-Klein elmélet a következő mátrixszal definiál:

$$\gamma^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\alpha A^\mu \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \\ & -\alpha A^\mu & & & \gamma^{55} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

illetve

$$\gamma_{AB} = \begin{pmatrix} & & \gamma_{55}\alpha A_\mu \\ & g_{\mu\nu} + \gamma_{55}\alpha^2 A_\mu A_\nu & \\ & & \\ \gamma_{55}\alpha A_\mu & & \gamma_{55} \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

ahol A^μ a 4-es vektorpotenciál, $\gamma^{55} = \gamma_{55}^{-1} + \alpha A_\mu A^\mu$, és γ_{55} az un. graviskalár, α pedig konstans. Természetesen, ebben az esetben is érvényes a metrikus tenzorra, hogy $\gamma_{AB}\gamma^{AB} = I$, ahol I az egységtenzor.

Ebben az elméletben a töltött, tömeggel rendelkező részecske, elektromágneses mező jelenlétében megvalósuló mozgása megfeleltethető, a jól megválasztott metrikával leírt 5D-s térben történő, geodetikus pályán való szabad mozgásnak. De az elmélet nem volt igazán elfogadott. Egyrészt azért, mert a γ_{55} gravisakalár egy nulla tömegű skalár részecske, ami gravitációs erősségű kölcsönhatást közvetít, mely nincs összhangban a kozmológiával. Másrészt, mert a nem nulla tömegű elektron esetében a tömeg arányos $\sim 1/R$-rel, és így a magasabb módusoknak $\sim 2/R, \sim 3/R, ...$ is meg kéne jelenniük, azonban ilyet nem láttak. Az extra dimenzió mérete: $R \sim M_{PL}^{-1} \approx (10^{19} GeV)^-1 \approx 10^{-32} cm$.

A következőkben az extra dimenziós elméletet egy konkrét példán keresztül szemléltetjük.

Töltött skalármező 5 dimenzióban

Legyen egy töltött, szabad, tömegtelen, 5 dimenziós skalármező $\phi = \phi(x^\mu, z)$ külső elektromágneses tér nélkül ($A^\mu = 0$), ekkor az 5D-s ("lapos", görbületmentes) metrikus tenzor:

$$\gamma_{AB} = \gamma^{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

A skalármezőt leíró hatásfunkcionál ($S = S[\phi]$), tehát

$$S = \int d^5x\mathcal{L} = \int d^5x\partial_A\phi^+\partial^A\phi \tag{4.5}$$

Olyan ϕ mezőket keresünk, amelyekre $\delta S = 0$. Ehhez a (2.8)-as egyenletet kell megoldanunk, azaz meg kell oldanunk a peremfeltételre vonatkozó első tagot, valamint az Euler-Lagranga egyenletet. Az utóbbi jelen esetben

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_A\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_A\phi)} = 0. \tag{4.6}$$

Ezzel a mozgásegyenletek 5D-ban

$$\partial_A\partial^A\phi^+ = 0 \Rightarrow \partial_A\partial^A\phi = 0 \tag{4.7}$$

Kihasználva, hogy $\partial_A\partial^A = \partial_5\partial^5 + \partial_\mu\partial^\mu = \gamma^{55}\partial_5\partial_5 + \Box = -\partial_5\partial_5 + \Box$, és a megoldást változók szerint szeparálva keressük $\phi = \varphi(x^\mu)\chi(z)$ (ez jól motivált gondolat, hiszen csak 4 dimenziót tapasztalunk, tehát érdemes leválasztani az extra dimenziós komponenst), a mozgásegyenlet a következő alakba írható:

$$(-\partial_5\partial_5 + \Box)\varphi(x^\mu)\chi(z) = 0 \tag{4.8}$$

Ezt a parciális differenciál egyenletet a változók szerint azonos oldalra rendezzük, így

$$\frac{\Box\varphi\left(x^{\mu}\right)}{\varphi\left(x^{\mu}\right)}=\frac{\partial_5\partial_5\chi\left(z\right)}{\chi\left(z\right)}=c^2 \tag{4.9}$$

aminek akkor van megoldása, ha az egyenlet mindkét oldala c^2 konstans mennyiség. Ezen c^2 konstans előjelére vonatkozólag megszorítást jelent az, hogy a 4-es koordinátáktól függő mezőre a helyes Klein-Gordon egyenletet kell visszakapnunk, azaz $\left(\Box+c^2\right)\varphi=0$ (ellenkező esetben instabil megoldásunk lenne, negatív tömegű részecskéket feltételeznénk, amelyek energiája végtelen). Ehhez viszont $c^2<0$ feltétel szükséges. Jól látszik, hogy a c^2 tömegjárulékot jelent a φ mezőre nézve! De, hogy mi is ez a tömegtag, azt az extra dimenziótól függő egyenlet határozza meg,

$$\partial_5\partial_5\chi\left(z\right)=-c^2\chi\left(z\right). \tag{4.10}$$

Ennek az egyenletnek az általános megoldását a következő alakban keressük: $\chi\left(z\right)=Asin\left(cy\right)+Bcos\left(cy\right)$. A megoldáshoz illesztenünk kell a peremfeltételeket is, melyeket a (2.8) egyenlet első tagja határoz meg. Ebben az esetben a peremfeltétel a kompakt extra dimenzió ($0\leq z\leq R$), míg az x^{μ} koordinátákkal jellemzett dimenziók végtelenek. Így világosan látszik, hogy az 5-ös gradiensre vonatkozó térfogatintegrálban, csak az 5. komponensben nem nulla a mező variációja ($\delta\phi$), mert a 4-es koordinátákban érvényes az, hogy a térfogatot határoló hiperfelületen, ami jelen esetben végtelen, valamint az idő kezdeti és végpontjában nem variálunk. Tehát a hatás elv érvényessége miatt teljesülnie kell a

$$\left[\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_5\phi\right)}\delta\phi\right]_0^R=0 \tag{4.11}$$

feltételnek. Ami a Lagrange-sűrűséget ismerve a következő egyenletet jelenti:

$$\gamma^{55}\partial_5\chi|_0^R=0 \tag{4.12}$$

vagy

$$\partial_5\chi|_R-\partial_5\chi|_0=0. \tag{4.13}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása két féle lehet, egyrészt a végpontokon eltünhetnek a deriváltak (Neumann-feltétel), másrész a két derivált a végpontokon megegyezhet.

Az Euler-Lagrange egyenletből származtatott $\chi(z)$ függvényre alkalmazva ezt a két féle megoldást, a c-re vonatkozólag az alábbi összefüggéseket kapjuk:

- $(\partial_5\chi|_0 = \partial_5\chi|_R = 0)$ Neumann-feltétel mellett: $A = 0$, és $sin(Rc) = 0 \Rightarrow c = \pi\frac{n}{R}$, ahol n=0,1,2...
- $(\partial_5\chi|_0 = \partial_5\chi|_R)$ feltétel mellett: $cos^2(Rc)+\frac{B^2}{A^2}sin^2(Rc)-\frac{B}{2A}sin(2Rc) = 1$, ahol ésszerű választás, hogy $A = B$, így $sin(2Rc) = 0 \Rightarrow c = \pi\frac{n}{2R}$, ahol n=0,1,2...

A Kaluza-Klein elméletben periodikus extra dimenziót feltételeztek, ami a fent leírt két megoldásból $c = 2\pi\frac{n}{R}$ esetén teljesül. Végeredményben azt kaptuk, hogy az 5D-s tömegtelen részecske, az extra dimenzió következtében, 4D-ban vizsgálva, már tömeges mezők sorozataként (un. KK - toronyként) jelenik meg. Mégpedig úgy, hogy a tömeg kvantált, és arányos az extra dimenzió méretének inverzével. Az effektív modellekben a nulla (nulla tömegű részecske) és a legkisebb tümegű módus a releváns, mert ezeket azonosítjuk a világunkban eddig megfigyelt részecskékkel.

Végül az 5D-s tömegtelen skalármező a következő alakban írható fel

$$\phi(x^\mu, z) = \sum_n e^{i2\pi\frac{n}{R}z}\varphi(x^\mu), \tag{4.14}$$

ahol $\varphi(x^\mu)$ kielégíti a Klein-Gordon egyenletet, $m_n = m_0+2\pi\frac{n}{R}$ tömeggel (ha van kezdeti tömeg m_0). Ez a Kaluza-Klein móduskifejtés, amelyet a későbbi számítások során minden esetben meg kell határoznunk, hogy az effektív 4D-s modellt kiszámíthassuk.

4.2. Nagy extra dimenziók

Az előző részben egy egyszerű példán keresztül ismertettük, hogy miként kell az extra dimenziós térelméletet kezelni. Most általánosan tárgyaljuk a hierarchia probléma megoldását a lapos ill. a következő fejezetben a görbült extra dimenziós modell esetén [13].

Az extra dimenziók mérete szoros kapcsolatban áll a kölcsönhatások csatolásai ill. a tömegskála kialakulásával. Ugyanis az extra dimenziós elméletben lévő mennyiségeket úgy kell az effektív 4D-s elméleteinkhez illesztenünk, hogy az általunk tapasztalt fizikai valóságot visszakapjuk. Elöször vizsgáljuk meg a gravitációs tömegskálát. A számítások $\hbar = c = 1$ egységrendszerben érvényesek. Az általános indexkonvenció: a görög betük a 4-es indexek, a nagy latin betük az extra dimenzós indexek.

Legyen a teljes, $4+n$ dimenzióban érvényes fundamentális tömegskála M_*, az extra dimenzió mérete r. Az extra dimenzióban az invariáns ívelem a metrikával és a koordinátákkal kifejezeve:

$$ds^2 = g_{MN} dx^M dx^N \tag{4.15}$$

A metrikus tenzor minden esetben (+,-,-,-,...,-). A dimenzióanalízis alapján látható, hogy a metrikus tenzor dimenziótlan mennyiség $[g] = 0$. Ebből következik, hogy a Christoffel-szimbólum dimenziója egy, $[\Gamma] = 1$, mivel ez tartalmaz deriváltat is. A teljes tér geometriáját jellemző görbületi (Ricci) tenzor és skalárgörbület (R) dimenziója kettő, $[R_{MN}] = [R] = 2$. A tömegskála illesztéséhez az Einstein-Hilbert hatást kell felírnunk, mely általánosan $M = 4+n$ dimenzió esetén (n=0,1,2...)

$$S_{4+n} = -M_*^{n+2} \int d^{4+n}x \sqrt{|g^{4+n}|} R^{4+n} \tag{4.16}$$

A fundamentális skála kitevőjét a hatás dimenziótlansága határozza meg. A 4D-s effektív elméletben, tehát abban amit mi tapasztalunk, a tömegskála a Planck-skála M_{PL}

$$S_4 = -M_{PL}^2 \int d^4x \sqrt{|g^4|} R^4 \tag{4.17}$$

Legyen az extra dimenzió kompakt és lapos. Ebben az esetben a teljes metrika felírható, mint egy blokkdiagonális-mátrix, így a determináns szorzat alakba írható, $\sqrt{|g^{(4+n)}|} = r^n \sqrt{|g^{(4)}|}$, ill. a skalárgörbületek megegyeznek, $R^{(4+n)} = R^{(4)}$. A 4D esetén a minimum körüli kis fluktuációk megengedettek a metrikában. Így a teljes Einstein - Hilbert hatás a következő alakban írható fel,

$$-M_*^{n+2} \int d^{4+n}x \sqrt{|g^{|(4+n)|}|} R^{(4+n)} = -M_*^{n+2} \int d\Omega_{(n)} r^n \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)}, \tag{4.18}$$

ahol $d\Omega_{(n)}$ az extra dimenzió hosszának dimenziótlan paramétere. Az $\int d\Omega_{(n)} r^n$ faktor nem más, mint az extra dimenzió teljes "térfogata", ami a toroidális kompaktifikáció miatt $V_{(n)} = (2\pi r)^n$. Összevetve a gravitációs hatásokat megkapjuk a fundamentális és a Planck-skála közti kapcsolatot

$$M_{PL}^2 = M_*^{n+2} (2\pi r)^n \tag{4.19}$$

A továbbiakban a mértékmezők csatolásait vizsgáljuk. A hatás a nem kanonikusan normált mértékmezők esetén, extra dimenzióban

$$S^{(4+n)} = -\int d^{4+n}x \frac{1}{4g_*^2} F_{MN} F^{MN} \sqrt{|g^{(4+n)}|}, \tag{4.20}$$

ahol g_* a fundamentális mérték csatolási állandó. Most is végezzük el a determináns felbontását és az extra dimenzókra való integrálást, így végül

$$S^{(4)} = -\int d^4x \frac{V_{(n)}}{4g_*^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{g^{(4)}}. \tag{4.21}$$

Ahonnan leolvasható, hogy a 4D-s csatolás, hogyan illeszkedik az extra dimenziós elmélethez:

$$\frac{1}{g_{eff}^2} = \frac{V_{(n)}}{g_*^2} \tag{4.22}$$

Fontos észrevenni, hogy az extra dimenziós csatolás az effektív csatolással szemben nem dimenziótlan, $[g_*] = -n/2$, így az elmélet renormálhatósága nem feltétlenül biztosított. Ebből látszik, hogy az extra dimenziós modellek effektív, csak adott energiáig érvényes elméletek.

Előrelépést jelentett az, amikor a húrelméletben felfedeztek speciális dinamikai objektumokat, a brane-eket. A brane-k nem mások, mint a húrok kezdőpontjai és végpontjai által alkotott hiperfelületek, melyekre lokalizálódhatnak a mezők. Ez a gondolat vitte tovább az extra dimenziós elméleteket. Ugyanis így az extra dimenzióban csak a gravitáció él, míg a mezők csak a brane-eken élnek (nagy extra dimenziós elmélet, Arkani-Hamed - Dimopoulos - Dvali elmélet [6]). Így létrejöhetnek a nagy extra dimenziók is, mivel csak a (4.19) illesztési feltétel marad meg.

A hierarchia problémának ez egy geometriai megoldása, $M_* \sim 1TeV$-re. Adott n extra dimenzió esetén, más-más érték adódik r-re, az illesztési feltételből, pl: $n = 2 \Rightarrow r \approx 1mm$. Kozmológiai és asztrofizikai korlátok miatt, az $n \geq 3$ életképes.

4.3. Görbült extra dimenziók, Randall - Sundrum (RS) elmélet

Az eddig leírtakban végig lapos extra dimenziót feltételeztünk és a gravitációs háttértől eltekintettünk. A következőkben olyan elméletet ismertetünk, ahol az extra dimenzió görbült, így a hierarchia probléma megoldása is érdekesebbé válik.

4.3.1. Randall - Sundrum (RS) elmélet

Legyen egy véges, kompaktifikált (S_1/Z_2 orbifold) extra dimenzió, valamint egy nem eltűnő 5D-s bulk (teljes extra dimenziós tartomány) kozmológiai konstans (Λ). Most olyan görbült hátteret keresünk, melyben a brane megtartja statikusságát és laposságát (Minkowski - tér, $\eta_{\mu\nu}$), amellett, hogy teljesül rajta a 4D-s Lorentz - invariancia.

Az alapgondolat az, hogy a bulkban az extra dimenzió mentén, minden pontban a 4D-s alterek a megszokott lapos metrikájú Minkowski-terek, és a metrika csak az 5. koordinátától (y) függ. Az ezen feltételeket kielégítő ansatz a metriára:

$$ds^2 = e^{-A(y)} dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} - dy^2, \tag{4.23}$$

A görbület, az extra dimenzió mentén az $e^{-A(y)}$ függvénytől, ún. warp-faktortól függ. Az első feladat a warp-faktor meghatározása. Ehhez végezzünk a metrikán egy $y \to z = z\,(y)$ koordináta transzformációt, úgy, hogy a warp - faktor jelenjen meg prefaktorként az extra koordináta elött is. Tehát $e^{A/2} dz = dy$. Ezen transzformáció után az (4.23) felírható, mint konform lapos metrika

$$ds^2 = e^{-A(z)} \left(dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} - dz^2 \right) \tag{4.24}$$

Így az eredeti, (4.23)-ben szereplő metrika felírható, mint egy lapos metrika és a warp-faktor szorzata, $g_{MN} = e^{-A(z)} \tilde{g}_{MN}$, ahol $\tilde{g}_{MN} = \eta_{MN}$. Az A függvény meghatározásához az 5D-s Einstein - egyenletet kell megoldanunk, ami a konform metrika mellett megtehető. Ehhez fel kell írni az Einstein - tenzor ($G_{MN} = R_{MN} - \frac{1}{2} g_{MN} R \to \tilde{G}_{MN}$) transzformációját, ha a metrikát egy konform faktorral transzformáljuk ($g_{MN} \to e^{-A} \tilde{g}_{MN}$). Kihasználva, hogy most a

$\tilde{g}_{MN}$ lapos metrikában a kovariáns derivált a parciális deriválttal egyenlő és, hogy a dimenziók száma 5, a következő egyenletekre jutunk:

$$G_{55} = \frac{3}{5} \left(\partial_z A\right)^2 , \tag{4.25}$$

és

$$G_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}\eta_{\mu\nu} \left(-\partial_z^2 A + \frac{1}{2}\partial_z A^2 \right) . \tag{4.26}$$

A továbbiakban ki kell használni a bulk Einstein-egyenletet, $G_{MN} = \kappa^2 T_{MN}$, ahol a hatás dimenziótlansága miatt a Newton-konstans $\kappa^2 = \frac{1}{M_*^3}$. Az 5D-s Einstein-Hilbert hatás a bulk kozmológiai konstanssal:

$$S = -\int d^5x \sqrt{|g|} \left(M_*^3 R + \Lambda \right) , \tag{4.27}$$

amiből a T_{MN} definíció szerint, a hatás kozmológiai konstanst tartalmazó részének metrika szerinti variálásából határozható meg. Tehát az Einstein-egyenlet a

$$G_{MN} = \frac{1}{2M_*^3} \Lambda g_{MN} \tag{4.28}$$

alakban írható. Most ennek az 55 komponesnsét felírva és behelyetteítve az Einstein-tenzorra vonatkozó képletet, a következő differenciálegyenletet kapjuk A-ra

$$\frac{3}{2} \left(\partial_z A\right)^2 = -\frac{1}{2M_*^3} \Lambda e^{-A}. \tag{4.29}$$

Az egyenlet szerkezetéből látszik, hogy A-ra csak akkor kapunk valós megoldást, ha a bulk kozmológiai konstans negatív, $\Lambda < 0$. Ez nagyon fontos eredmény, mert így a bulk anti-de Sitter tér (AdS_5) tér lesz. Az egyenletet megoldva a transzformált koordinátában a warp-faktor

$$e^{-A(z)} = \frac{1}{\left(kz + const\right)^2}, \tag{4.30}$$

ahol $k^2 = -\frac{\Lambda}{12M_*^3}$. Még szükséges egy peremfeltétel, ami jelen esetben az, hogy $y = z = 0$-ra $e^{-A(y)} = 1$. Ezzel a konstans értéke 1. Valamint a megoldásnak invariánsnak kell lennie a $z \to -z$ (Z_2) transzformációra, tehát végül a konform lapos metrikával az ívelem

$$ds^2 = \frac{1}{\left(k|z| + 1\right)^2} \left(dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} - dz^2 \right) . \tag{4.31}$$

Azonban még meg kell oldani a 4D-s komponensekre vonatkozó egyenletet is. Az Einstein-tenzorban, azonban A második deriváltja is szerepel, így a fix pontoknál az $|z|$ miatt Dirac-delta disztribúciók jelennek meg.

$$G_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}\eta_{\mu\nu}\left[\frac{4k^2}{(k|z|+1)^2} - \frac{4k(\delta(z)-\delta(z-z_1))}{k|z|+1}\right] \tag{4.32}$$

ahol z_1 a negatív feszültségű brane. A tenzor első tagja jól megoldja a bulk energia-impulzus tenzort és a kozmológiai konstanst tartalmazó Einstein-egyenletet, azonban a Dirac-delta disztribúciókat tartalmazó tag a brane-ekkel áll szoros kapcsolatban. Hogy ezt kapcsolatot jobban megértsük, fel kell írni a brane hatását, ha a brane energia-sűrűsége V,

$$S = \int d^4xV\sqrt{|g^{ind}|} = \int d^5xV\frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{55}}}\delta(z). \tag{4.33}$$

Ebből az energia-impulzus tenzor a definíciót használva, a konform lapos metrikával felírva

$$T_{\mu\nu}^{tension} = \frac{1}{2}diag(V,-V,-V,-V,0)e^{-A/2}\delta(z). \tag{4.34}$$

Most, hogy ismerjük a brane energia-impulzussűrűség tenzorát és az Einstein-tenzorát, felírhatjuk az Einstein-egyenletet a brane helyén lévő fixpontban:

$$-\frac{3}{2}\eta_{\mu\nu}\left[-\frac{4k(\delta(z)-\delta(z-z_1))}{k|z|+1}\right] = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{2M_*^3}\left[\frac{V_0\delta(z)-V_1\delta(z-z_1)}{k|z|+1}\right], \tag{4.35}$$

amiből leolvasható, hogy a fixpontokon két brane van, azonos, de ellentétes energiasűrűséggel,

$$V_0 = -V_1 = 12kM_*^3. \tag{4.36}$$

Az eredmény az, hogy a 4D-s brane-en az effektív kozmológiai konstans nulla ($\Lambda^{(4)} = 0$), viszont megjelenik egy energiasűrűség (V).

Még érdemes a warp-faktor alakját az eredeti metrikában is meghatározni. Ehhez a vissza kell transzformálni a koordinátákat, $z \to y$. Így a szokásos RS metrika a következő:

$$ds^2 = e^{-2k|y|}dx^\mu dx^\nu\eta_{\mu\nu} - dy^2. \tag{4.37}$$

A hierarchia probléma kérdésének tárgyalásához az anyagi mezőket kell figyelembe venni. Legyen a negatív feszültségű brane-hez lokalizálva a Higgs-mező. A brane indukált metrikája kifejezhető a warp-faktorral (ld. fent), ha az extra dimenzió mérete r: $g_{\mu\nu}^{ind} = e^{-2kr}\eta_{\mu\nu}$. Így a Higgs-mező hatása

$$S^H = \int d^4x e^{-2kr} \left[\eta_{\mu\nu}\partial^\mu H \partial^\nu H - \lambda(H^+H - v^2)^2\right]. \tag{4.38}$$

Látható, hogy a mező nem kanonikusan normált. Ezért a mezőt újra kell definiálni, hogy visszakapjuk a kanonikusan helyes kinetikus tagot. Tehát $\tilde{H} = e^{-kr}H$, így

$$S^H = \int d^4x \left[\eta_{\mu\nu}\partial^\mu \tilde{H} \partial^\nu \tilde{H} - \lambda(\tilde{H}^+\tilde{H} - (e^{-kr}v)^2)^2\right]. \tag{4.39}$$

A kanonikusan normált mező esetében viszont megváltozik a mező vákuum várható értéke és minden dimenziós paraméter (az átskálázás miatt), mégpedig úgy, hogy minél távolabb vagyunk a pozitív brane-től annál kisebb lesz az értéke a negatív tenziójú brane-en, $\tilde{v} = e^{-kr}v$. Ez pedig azt jelenti, hogy az anyagi részecskék tömegskálája is eltolódik, valamint minden energiskála vöröseltolódást szenved távol a pozitív brane-től. A jellemző energiaskála miatt, a pozitív brane a Planck-brane, a negatív brane pedig a TeV brane.

Meg kell még vizsgálni a gravitációs skála viselkedését is ebben a modellben. Ehhez az 5D-s Einstein-Hilbert hatást kell felintegrálni az extra dimenzióra, majd illeszteni kell a 4D-s hatáshoz. Az eredmény

$$M_{PL}^2 = M_*^3 \int_{y=0}^{y=r} e^{-k|y|}dy = \frac{M_*^3}{k}\left(1 - e^{-kr}\right) \tag{4.40}$$

Ennek meghökkentő következménye, hogy a gravitávióś skála szinte nem függ az extra dimenzió nagyságától. Ez lényeges eltérés a nagy extra dimenziós elméletektől.

Ebben a modellben tehát, a nagy extra dimenziókkal szemben, a csatolások és az anyagi mezők vákuum várható értékeinek, és tömegeinek átskálázásával oldódik meg a hierarchia probléma, úgy, hogy a gravitációs skála számottevően nem változik.

A modell érdekessége, hogy a brane-en érzékelhető gravitáció változatlan marad. Az extra dimenzió miatt 4D-ban kialakuló KK - torony nulla módusa lesz a megszokott 4D-s graviton (nulla tömeggel), míg a tömeges módusok hatása elhanyagolható.

$$V(r) = G_N \frac{M_1 M_2}{r} \left(1 + \frac{C}{(kr)^2}\right) \tag{4.41}$$

Tehát a tapasztalt Newton-féle gravitációs potenciál korrekciója elhanyagolhatóan kicsi lesz, mert a $k \sim M_{Pl}$.

5. fejezet

U(1) skalár-elektrodinamika

Ebben a fejezetben egy egyszerű mértékelméleten keresztül ismertetjük a formalizmust, a számítások lépéseit (mértékrögzítés $\rightarrow$ fizikai mezők, mozgás egyenletek és peremfeltételek $\rightarrow$ móduskifejtés, effektív elmélet, fontosabb kölcsönhatások). Ezáltal a bonyolult, nem ábeli $SU(2) \times U(1)$ elektrogyenge elmélet extra dimenziós tárgyalása könnyebben érthetővé válik.

Az extra dimenziós modell struktúrája jelen esetben speciális: az orbifold fixpontjaiban (vagy a peremeken, ha intervallumon dolgozunk) lokalizált Higgs-mezők vannak szimmetriasértő potenciállal. A két Higgs-es konstrukciók megjelennek a MSSM-ben, illetve a lokalizált Higgs-mezőnek kulcsfontosságú szerepe van a hierarchia probléma megoldásában a görbült extra dimenziós modellekben (RS). Mindezek miatt, valamint az általános tárgyalásmód kedvéért választottuk ezt az alapkonstrukciót, amellyel lehetőség nyílik speciális esetek (pl: Higgs-mentes határesetek ($v \rightarrow \infty$)) vizsgálatára.

5.1. Alapmodell, teljes Lagrange-sűrűség

A modellben 4+1 dimenzós, $g_{mn} = diag(+,-,-,-,-)$ metrikájú téridőben (x^μ, y) írjuk le a vizsgált részecskéket. Az extra dimenzió kompaktifikált, S^1/Z_2 orbifold (1 dimenziós toroidális kompaktifikáció "faktorizálva" az $y \rightarrow -y$ tükrözéssel), így az extra dimenziót a $[0, b]$ tartománnyal teljesen le lehet írni.

A bulkban él az U(1) ábeli mértékmező ($A_M(x,y)$, M=0..3,5), míg az extra dimenzió végpontjain lévő 3-brane-ekhez lokalizálódik a két különböző (komplex) Higgs-mező $\left(\Phi_{1,2}(x) = \frac{h_{1,2}(x)+v_{1,2}+i\chi_{1,2}(x)}{\sqrt{2}}\right)$, ahol az 1-es indexű az $y=0$ és a 2-es indexű az $y=b$ helyen lokalizált, a mező vákuum várható értéke: $\langle\Phi_{1,2}\rangle = \frac{v_{1,2}}{\sqrt{2}}$. A teljes 5D-s hatás könnyen felírható:

$$\mathcal{S}(x,y) = \int d^4x \int_0^b dy \mathcal{L}(x,y) \tag{5.1}$$

A Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L}(x,y) = -\frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + \delta(y)\left[(D_\mu\Phi_1)^+D^\mu\Phi_1 - V[\Phi_1]\right] + \tag{5.2}$$

$$+\delta(y-2\pi R)\left[(D_\mu\Phi_2)^+D^\mu\Phi_2 - V[\Phi_2]\right], \tag{5.3}$$

ahol $D_\mu = \partial_\mu - ie_5A_\mu$ lokális, 4D-s U(1) szimmetriát teljesítő kovariáns derivált, e_5 az 5D-s csatolási állandó, mely dimenziója $[e_5] = \left[\sqrt{R}\right]$, $(v'_{1,2})^2 = \frac{|\mu_{1,2}|^2}{2\lambda_{1,2}}$, a szimmetriasértéshez $\mu_{1,2}^2 < 0$ szükséges. A

$$V\left[\Phi_{1,2}\right] = \mu_{1,2}^2\Phi_{1,2}^2 + \lambda_{1,2}\Phi_{1,2}^4 \tag{5.4}$$

a különböző Higgs-mezők szimmetriasértő potenciálja, természetesen eltérő vákuum várhatóértékkel (VEV). Meg kell keresnünk az effektív 4D-s Lagrange-sűrűséget, hiszen az általunk tapasztalt 4D-s világban lévő részecskéket tudjuk megfigyelni.

5.2. Unitér mérték, szabadsági fokok

Első lépésben a valódi fizikai szabadsági fokokat kell megkeresnünk. Ehhez kihasználjuk, hogy a teljes Lagrange-sűrűség (5.3) lokális U(1) mértékinvarianciával rendelkezik, és választunk egy speciális mértéket, az 5D-s unitér mértéket. A mértékrögzítést két lépésben végezzük el, elöször a *bulk*-ban aztán a meghatározott paraméterekkel a *brane*-eken.

5.2.1. *Bulk* mértékrögzítés

A *bulk* Lagrange-sűrűséget írjuk a következő, indexek szerint szeparált alakba:

$$\mathcal{L}^{bulk}(x,y) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_5 A_\mu \partial_5 A^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_5 \partial^\mu A_5 - \partial_\mu A_5 \partial_5 A^\mu \quad (5.5)$$

Az előjelek azért változtak meg, mert a metrika konvenció miatt $A^5 = g^{55}A_5 = -A_5$. A (5.5) invariáns az 5D-s lokális U(1) mértéktranszformációra:

$$A_M(x,y) \to A_M(x,y) + \partial_M \Theta(x,y), \quad (5.6)$$

A célunk olyan mértékrögzítést találni, hogy a *bulk*-ban csak 4 komponensű, Lorentz-invariáns (SO(1,3)) vektormező, vagy esetleg skalármező 4-es deriváltja maradjon, mivel a 4D-s modellben a számunkra fontos komponensek a 4-es vektor jelleget őrző tagok. Az ezen feltételek teljesítő, leggyengébb mértékfeltétel a következő:

$$\mathcal{F}[A_M] = \partial_5 A_5 = 0. \quad (5.7)$$

Ez elérhető mérték, ha a mértéktranszformáció paraméterét

$$\Theta'(x,y) \sim -\int_0^y A_5(x,y')dy' \text{−nek} \quad (5.8)$$

választjuk.

Emellett a mértékrögzítés mellett a megmaradó mértéktranszformációk

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Theta \quad (5.9)$$

$$A_5 \to A'_5 = A_5 + \partial_5 \Theta = \tilde{A}_5(x) \quad (5.10)$$

Ha az A_5-re vonatkozó transzformációt deriváljuk a y szerint (∂_5), akkor a mértékparaméterre, a mértékrögzítést megtartva a következő egyenletet kapjuk:

$$\partial_5 \partial_5 \Theta = 0. \quad (5.11)$$

Ennek az általános megoldása az y-ban lineáris függvény

$$\Theta(x,y) = \Theta_0(x) + \Theta_1(x)y. \quad (5.12)$$

Látható, hogy a mértékrögzítés nem teljes, maradt két szabad paraméter, a $\Theta_0(x)$ és $\Theta_1(x)$.

A *bulk* Lagrange-sűrűségben explicit nem jelenik meg a $\partial_5 A_5$ komponens, viszont, ha a $\partial_\mu A_5 \partial_5 A^\mu$ tagot kétszer parciálisan integráljuk (4-es koordináta és y szerint), akkor már explicit lesz:

$$-\partial_\mu A_5 \partial_5 A^\mu \rightarrow -\partial_5 A_5 \partial_\mu A^\mu + [\partial_\mu A^\mu A_5]_0^b \tag{5.13}$$

Látható, hogy az y szerinti parciális integrál eredményeképpen megjelenik a peremeken egy nem eltűnő tag.

Tehát a speciális 5D-s unitér mértékben, amit a (5.12) határoz meg, a *bulk* Lagrange-sűrűség:

$$\mathcal{L}^{bulk}(x,y) = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_5 A'_\mu \partial_5 A'^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{A}_5 \partial^\mu \tilde{A}_5 + \left[\partial_\mu A^\mu \tilde{A}_5\right]_0^b, \tag{5.14}$$

ahol

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \left(\Theta_0(x) + \Theta_1(x) y\right) \tag{5.15}$$

$$A_5 \rightarrow A'_5 = \tilde{A}_5(x). \tag{5.16}$$

Ebben a tárgyalásban az $\partial_5 A_5$ komponens, mint egy would-be Goldstone bozon jelenik meg, ami speciális módon lesz az A_μ longitudinális komponense. Ezzel az effektív 4D-s modellben, a mértékmezőnek tömeg generálódik. A móduskifejtésnél explicit megjelenik, hogy az A_μ minden egyes módusához egy-egy A_5 longitudinális komponens adódik.

5.2.2. *Brane* mértékrögzítés

Elöször az $y = 0$ helyen lévő *brane*-en lokalizált mezőket vizsgáluk az adott unitért mértékben. A komplex skalármezőt most írjuk fel, mint egy valós mezőt komplex fázissal:

$$\Phi_1(x) = e^{i\frac{\chi_1(x)}{v_1}} \left(\frac{v_1 + h_1(x)}{\sqrt{2}}\right), \tag{5.17}$$

ekkor a VEV: $\langle\Phi_1\rangle = \frac{v_1}{\sqrt{2}}$. A Lagrange-sűrűségből a mértéktranszformáció szempontjából fontos tag a kinetikus komponens, mivel a kovariáns deriválás tartalmazza a mértékmezőt:

$$(\partial_\mu + ie_5 A_\mu(x,0))\,\Phi_1^+\,(\partial^\mu - ie_5 A^\mu(x,0))\,\Phi_1 \tag{5.18}$$

Most hajtsuk végre a mértékmezőn a (6.13) transzformációt, ami a *brane*-re megszorítva

$$A_\mu(x,0) \to A'_\mu(x,0) = A_\mu(x,0) + \partial_\mu \Theta_0(x,0). \tag{5.19}$$

A Θ_1-et tartalmazó tag a nullával való szorzás miatt nem ad járulékot.

Ezt az új mezőt behelyettesítve a kinetikus tagba, valamint a komplex skalármezőt komponenseivel ($h_1(x)$ és $\chi_1(x)$) kifejtve, kiszámíthatjuk a kinetikus komponenst. Mivel unitér mértékben vagyunk, a nem fizikai szabadsági fokokat szeretnénk eltüntetni. Ezért a kinetikus tag kifejtéséből nekünk a would-be Goldstone bozon típusú tagokra kell figyelni. Ezek jelen esetben háromfelől jöhetnek, egyrészt a mértékmező (A^μ) és a komplex fázisban szereplő mező deriváltjának ($\partial_\mu \chi_1$) szorzatából, másrészt a mértékmező kvadratikus tagjából ($A'_\mu A'^\mu$), amikor a mértékmezőt (A^μ) a mértékrögzítő taggal ($\partial_\mu \Theta_0$) szorozzuk, harmadrészt a *bulk*-tag parciális integrálásából ($\partial_\mu \tilde{A}_5 A^\mu$):

$$-(e_5 v_1 \partial_\mu \chi - e_5^2 v_1^2 \partial_\mu \Theta_0 - \partial_\mu \tilde{A}_5) A^\mu \tag{5.20}$$

Ezt a tagot eliminálnunk kell, ezt úgy tehetjük meg, hogy a mértékmezőt szorzó tagot nullává teszük, tehát a mértékrögzítésből maradt szabad paraméter értékét rögzítjük:

$$\Theta_0(x) = \frac{1}{e_5 v_1}\chi_1(x) - \frac{1}{e_5^2 v_1^2}\tilde{A}_5 \tag{5.21}$$

Sikerült egy szabad paramétert rögzíteni, maradt még egy szabadság.

Ezzel a megfeleltetéssel a kinetikus Lagrange leegyszerűsödik, és csak a fizikai mezőket tartalmazza, (kvadratikus rendben):

$$\mathcal{L}_{kin}^{brane1}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 + \frac{e_5^2 v_1^2}{2} A'_\mu(x,0) A'^\mu(x,0) + \frac{1}{2e_5^2 v_1^2}\partial_\mu \tilde{A}_5 \partial^\mu \tilde{A}_5, \tag{5.22}$$

ahol a mértékmező az 1 szabad paraméteres mértékrögzítés mellett:

$$A'_\mu(x,y) = A_\mu(x,y) + \frac{1}{e_5 v_1}\partial_\mu \chi_1 - \frac{1}{e^2 v_1^2}\partial_\mu \tilde{A}_5 + \partial_\mu \Theta_1(x) y. \tag{5.23}$$

A $\tilde{A}_5$ kinetikus tagjait majd a teljes mértékrögzítés után összevonjuk és kanonikusan normáljuk.

Most azt kell megvizsgálni, hogy a már részben rögzített U(1) mértéktranszformáció (5.23), milyen hatással van a másik, $y = b$, helyen lévő *brane*-mezőkre. A 2-es *brane* Lagrange-sűrűség egy indextől eltekintve ugyan olyan alakú, mint a másik *brane*-en lévő mezőé. A skalármezőt itt is exponenciális alakban adjuk meg:

$$\Phi_2(x) = e^{i\frac{\chi_2(x)}{v_2}} \left(\frac{v_2 + h_2(x)}{\sqrt{2}} \right), \tag{5.24}$$

ahol $\langle \Phi_2 \rangle = \frac{v_2}{\sqrt{2}}$. A mértéktranszformáció szempontjából szintén a kinetikus tag a releváns:

$$\left(\partial_\mu + ie_5 A_\mu(x,b)\right) \Phi_2^+ \left(\partial^\mu - ie_5 A^\mu(x,b)\right) \Phi_2. \tag{5.25}$$

A (5.23)-el definiált mértéktranszformáció a 2-es *brane*-re megszorítva, már tartalmazni fogja az A_5 komponens-t és a $\tilde{A}_5(x)$-t is. Mivel a speciális unitér mértékben vagyunk, amikor a kinetikus tagot kifejtjük a skalármezőkkel (h_2 és χ_2) és a transzformált mértékmezővel, a nem fizikai folyamatokat, azaz a mértékmező és skalármező 1-1 csatolásokat el kell tüntetnünk. Ezek a tagok, mint a másik *brane* esetén is három helyről jöhetnek: a mértékmező (A^μ) és a komplex fázisban szereplő mező deriváltjának ($\partial_\mu \chi_2$) szorzatából, másrészt a mértékmező kvadratikus tagjából ($A'_\mu A'^\mu$), amikor a mértékmezőt (A^μ) a mértékrögzítő taggal ($\partial_\mu \Theta$) szorozzuk, harmadrészt a *bulk*-tag parciális integrálásából ($-\partial_\mu \tilde{A}_5 A^\mu$):

$$-\partial_\mu \left[\chi_2 - \frac{v_2}{v_1}\chi_1 + \left(\frac{v_2}{e_5 v_1^2} + \frac{1}{e_5 v_1} \right) \tilde{A}_5 - e_5 v_2 \Theta_1 y \right] A^\mu \tag{5.26}$$

A skalármezők ezen parciális deriváltjainak lineárkombinációja eltüntethető, ha a megmaradt mértékszabadságot (Θ_1) speciálisan választjuk meg:

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{b e_5 v_2} \left(\chi_2 - \frac{v_2}{v_1}\chi_1 + \frac{v_1^2 + v_2^2}{e_5 v_1^2 v_2} \tilde{A}_5 \right) \tag{5.27}$$

Így már meghatároztuk a megmaradó mértékszabadságot. A *brane* kinetikus Lagrange-sűrűségben csak a tényleges fizikai mezők szerepelnek, kvadratikus rendben felírva:

$$\mathcal{L}_{kin}^{brane2} = \frac{1}{2}\partial_\mu h_2(x)\partial^\mu h_2(x) + \frac{e_5^2 v_2^2}{2} A'_\mu(x,b)A'^\mu(x,b) + \tag{5.28}$$

$$+\frac{1}{2e_5^2 v_2^2}\partial_\mu \tilde{A}_5 \partial^\mu \tilde{A}_5. \tag{5.29}$$

Érdemes felírni, hogy mit is jelent a két *brane*-en a speciális módon megválasztott Θ_0 és Θ_1 által leírt mértéktranszformáció:

$$\Theta(x,0) = \frac{1}{e_5 v_1}\chi_1(x) - \frac{1}{e_5^2 v_1^2}\tilde{A}_5 \tag{5.30}$$

$$\Theta(x,b) = \frac{1}{e_5 v_2}\chi_1(x) + \frac{1}{e_5^2 v_2^2}\tilde{A}_5. \tag{5.31}$$

Összefoglalásképpen felírjuk a modell teljes Lagrange-sűrűségét (5.3) unitér mértékben (kvadratikus rendig), úgy, hogy a $\tilde{A}_5(x)$ mező *brane*-ekről és a *bulk*-ból jövő kinetikus tagjait összevonjuk:

$$\mathcal{L}(x,y) = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_5 A'_\mu \partial_5 A'^\mu + \frac{Q^2}{2}\partial_\mu \tilde{A}_5 \partial^\mu \tilde{A}_5 + \tag{5.32}$$

$$+\,\delta(y)\left(\frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 + \frac{e_5^2 v_1^2}{2}A'_\mu(x,y)A'^\mu(x,y) - \frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2\right) + \tag{5.33}$$

$$+\,\delta(z-b)\left(\frac{1}{2}\partial_\mu h_2 \partial^\mu h_2 + \frac{e_5^2 v_2^2}{2}A'_\mu(x,y)A'^\mu(x,y) - \frac{\lambda v_2^2}{2}h_2^2\right) + \ldots \tag{5.34}$$

ahol

$$Q^2 = \left(\delta(y-b)\frac{1}{e_5^2 v_2^2} + \delta(y)\frac{1}{e_5^2 v_1^2} + 1\right) \tag{5.35}$$

Így már csak a fizikai mezőket tartalmazza az elmélet. A modellben lévő valódi szabadsági fokok: $A_\mu(x,y)$ U(1) mértékmező, 2 tömeges skalár $h_1(x)$ és $h_2(x)$, valamint egy tömegtelen 4D-s skalármező, amely nem csatolódik le az elméletről $\tilde{A}_5(x)$. Az utóbbiról majd még bővebben tárgyalunk.

5.3. Peremfeltételek, móduskifejtés

Az effektív 4D-s képhez szükség van a mértékmezők Kaluza-Klein móduskifejtésére. Ehhez segítséget nyújt az orbifold kép, de figyelembe kell venni az orbifold fixpontokban (brane-ek helyein) lévő peremfeltételeket is. A peremfeltételek meghatározásához a (5.3) által leírt hatást kell a mezők szerint variálni. Így a parciális integrálás után megkapjuk a mozgásegyenletek (bulk-egyenletek) mellett a most nem eltűnő peremfeltételeket (részleteket ld. a Variációs elv c. fejezetben):

$$\left[\frac{\partial\left(\mathcal{L}_{bulk}\right)}{\partial\left(\partial_5 A_M\right)}\right]_0^b + \left.\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{H1}}{\partial A_M}\right]\right|_0 + \left.\left[\frac{\partial \mathcal{L}_{H2}}{\partial A_M}\right]\right|_b = 0, \tag{5.36}$$

ahol az $\mathcal{L}_{H1}$ és az $\mathcal{L}_{H2}$ tagok a különböző brane-eken lévő Higgs-mezők Lagrange-sűrűsége, $\mathcal{L}_{bulk}$ az extra dimenziós mértékmezőt leíró Lagrange.

A fenti képletből és az unitér mértékben megadott Lagrange-sűrűségből kifejezhetőek a peremfeltételek, melyeket a mértékmezőkben lineáris rendig írunk fel:

$$\partial_5 A^\mu|_0 - e_5^2 v_1^2 A^\mu|_0 = 0, \tag{5.37}$$

valamint

$$\partial_5 A^\mu|_b + e_5^2 v_2^2 A^\mu|_b = 0. \tag{5.38}$$

Az előjelek csak attól függenek, hogy melyik irányból integrálunk az extra dimenzió mentén.

A KK-felbontást a bulk egyenlet megoldásával határozzuk meg. A bulk egyenlet az Euler-Lagrange egyenlet alapján a következő:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_5 \partial_5 A^\nu = 0 \tag{5.39}$$

Ha a mértékmezőt a változói szerint szeparáljuk, $A^\mu(x,y) = a^\mu(x) f(y)$, ahol $x = x^\mu$, akkor a (5.39) egy szeparálható parciális differenciálegyenletté alakítható, melynek az extra dimenzióra vonatkozó része:

$$\partial_5 \partial_5 f = -C^2 f. \tag{5.40}$$

Ennek a megoldása a ∂_5^2 operátor sajátfüggvénye, amit a 4-es vektromezőbe írva:

$$A^\mu(x,y) = \left[A\cos(Cy) + B\sin(Cy)\right] a^\mu(x), \tag{5.41}$$

ahol a C a KK módusok tömege, $a^\mu(x)$ az effektív vektormező. A megoldás paramétereit $(A/B, C)$ a peremfeltételek adják meg, míg a maradék 1 szabad paramétert a normálás rögzíti.

A (5.41)-t beírva a (5.37)-ba, megkapjuk a periodikus függvények amplitúdóit, amelyek meghatározzák, hogy a különböző módusok esetén melyik lesz a domináns. Ez az arány a következő:

$$\frac{A}{B} = C\frac{1}{e_5^2 v_1^2}. \tag{5.42}$$

Ezt visszahelyettesítve az megoldásba, a (5.38) megadja a C-t meghatározó egyenletet:

$$\frac{\frac{e_5^2 v_1^2 v_2^2}{C} - \frac{C}{e_5^2}}{v_1^2 + v_2^2} = ctg(bC) \tag{5.43}$$

Az egyenlet nem ad explicit megoldást C-re, de a $ctg(x)$ függvény periodikusságából következik, hogy végtelen sok, diszkrét megoldást kapunk. A tömeg így kvantált lesz, $C \to C_n$, ahol n a módusindex. A számunkra igazán fontos nullmódus (nulla tömegű módus, mely konstans az extra dimenzióban $f(y)$ =const) vizsgálható bizonyos határesetekben. A konklúzió az, hogy nulla módus nem létezik! Ha a nulla közelében sorfejtést alkalmazunk (azaz $C << b^{-1}$), akkor v_1 és v_2 kis vagy nagy értékeitől függetlenül nem kapunk nulla megoldást. Ez közvetlenül a feltételeket megadó egyenletek típusából is látszik, ugyanis a (5.37) és (5.38) is a derivált értékét adja meg a fix pontokon, ami nullától különböző, tehát az $A(y)$ nem lehet konstans, így nincs nulla módus. Ez látszik a (5.43) grafikus megoldásából is.

A vektormező móduskifejtése a következő alakban írható fel:

$$A_\mu(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu(n)}(x) N \left(\frac{C_n}{e_5^2 v_1^2} \cos(C_n y) + \sin(C_n y) \right) \tag{5.44}$$

ahol N a normálási faktor. Dimenzióanalízissel a koszinusz függvényt szorzó tagot ellenőrizni lehet. Tudjuk, hogy a C_n és v_1 tömeg dimenziójú, tehát $[C_n] = [v_1] = 1$. Amiből következik, hogy $[e_5] = -1/2$. Ez teljesen konzisztens azzal, hogy a lapos extra dimenziók esetén a mértékmezők csatolási álladóinak dimenziója $[g] = -n/2$ (n az extra dimenziók száma, részleteket ld. Nagy extra dim. fejezetben).

5.3.1. Orbifold helyett intervallum

Az extra dimenziók leírásához gyakran használják az orbifoldot, ami egyszerűsítheti a modelleket (pl. a KK-módusok egy részétől meg lehet szabadulni). Azonban az elmélet konzisztenciájához ellenőrizni kell a dinamika által megadott peremfeltételeket. Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy az orbifold és a peremfeltételek illeszkednek-e egymáshoz, ha nem akkor intervallumon kell dolgozni. Ez élő probléma, mivel a szakirodalomban ma is megjelennek olyan cikkek [7][8], ahol elmulasztják a konzisztencia vizsgálatát.

Most, hogy megtaláltuk a mozgásegyenletek érvényességét biztosító peremfeltételekhez igazódó móduskifejtést, ellenőrizhetjük az orbifold által megkövetelt ekvivalencia relációkat (2.24). Azonnal látható a (5.41)-ből, hogy az $A_\mu(x,y) = A_\mu(x,-y)$ reláció csak a $B = 0$ mellett teljesül, ami nem egyeztethető össze a peremfeltétellel.

A tanulság az, hogy az orbifold alkalmazása akkor célszerű, ha a fixpontokban lévő brane-ekre nem lokalizálunk véges VEV-ű szimmetriasértő mezőket (ekkor kaphatunk jó Neumann-feltételeket). Ellenkező esetben hasznosabb az intervallumon való modellezés. Ezért a továbbiakban szakítunk az orbifold képpel és intervallumon dolgozunk $[0, b]$ tovább.

5.4. Effektív 4D-s modell

A következőkben az effektív 4D-s Larange-sűrűségeket határozzuk meg. Ezt a matematikai fejezetben ismertetett módon (2.10), az extra dimenzióra való integrálással számítjuk ki.

5.4.1. Effektív mértékmező

A *bulk*-beli mezők effektív Lagrange-sűrűsége a következő:

$$\mathcal{L}^m_{eff} = \int_0^b dy \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_5 A_\mu \partial_5 A^\mu + \frac{Q^2}{2} \partial_\mu \tilde{A}_5 \partial^\mu \tilde{A}_5 \right) \tag{5.45}$$

Ebbe az integrálba behelyettesítve a (5.44) móduskifejtést már elvégezhető az integrálás. Vegyük észre, hogy a szorzat első tagjában szinuszok és koszinuszok szorzatát kell integrálni. Ha a szorzatban csak szinusz vagy csak koszinusz van, akkor csak abban az esetben kapunk járulékot, ha az argumentumok megegyeznek ($C_n = C_m$):

$$\int_0^b dy \cos(C_n y)\cos(C_m y) = \int_0^b dy \sin(C_n y)\sin(C_m y) = \frac{b}{2}\delta_{n,m} \tag{5.46}$$

Ekkor viszont a vegyes-szorzat integrálja nulla lesz. A szorzat második tagjára ugyanez igaz, hiszen az extra dimenzió szerinti deriválás csak a szinuszokat és koszinuszokat cseréli fel (a vegyes szorzatok itt is eltűnnek). Az újra normálás elötti $\tilde{A}_5(x)$ tisztán 4D-s mező, ezért az integrálás után csak a b szorzófaktort kap, azon tagja ahol a Q^2 nem tartalmaz Dirac-delta disztribúciót. Az effektív képben

$$\left(Q^{eff}\right)^2 = \left(b + \frac{1}{e_5^2 v_1^2} + \frac{1}{e_5^2 v_2^2}\right). \tag{5.47}$$

A kanonikusan normált mező $\tilde{A}_5' = \tilde{A}_5 Q^{eff}$. A normálási faktor pozitív feltétele megszorítást jelent az extra dimenzó méretére (b), és a skalár várhatóértékekre (v_1 és v_2) vonatkozólag:

$$(Q^{eff})^2 > 0 \Rightarrow b + \frac{1}{e_5^2 v_1^2} + \frac{1}{e_5^2 v_2^2} > 0. \tag{5.48}$$

Ez a feltétel minden esetben teljesül, hiszen minden komponense pozitív definit. Konzisztenciát igazolja, hogy v_1-ben és v_2-ben szimmetrikus a normálás, ami várható is, mert a Lagrange-sűrűség invariáns az extra dimenzióra való integrálás irányától. Végül az effektív modell *bulk* járuléka

$$\mathcal{L}_{eff}^m(x) = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} N^2 \left(\frac{C_n^2}{e_5^4 v_1^4} + 1\right)\frac{b}{2}\left[F_{\mu\nu(n)} F_n^{\mu\nu}\right] + \tag{5.49}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} N^2 \left(\frac{C_n^2}{e_5^4 v_1^4} + 1\right)\frac{b}{2} C_n^2 a_{\mu(n)} a_{(n)}^{\mu} + \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{A}_5' \partial^\mu \tilde{A}_5', \tag{5.50}$$

ahonnan leolvashatjuk a normálást, ami most módusfüggő lesz:

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{C_n^2}{e_5^4 v_1^4} + 1\right)\frac{b}{2}}} \tag{5.51}$$

Ezzel meghatároztuk a mértékmező effektív Lagrange-sűrűségét. Ebben az effektív képben már explicit megjelenik a tömegtag.

5.4.2. Effektív Higgs-szektor

Most a Higgs-szektor effektív Lagrange-sűrűségét határozzuk meg kvadratikus rendig. Ehhez a következő integrált kell kiszámítani:

$$\mathcal{L}_{eff}^{h1} = \int_0^b dy\delta(y)\left(\frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 - \frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + \frac{e_5^2 v_1^2}{2}A'_\mu(x,y)A'^\mu(x,y)\right) \quad (5.52)$$

Ezután az $A_\mu(x,y)$ mértékmező helyére a KK-móduskifejtését írva (5.44), az integrálás elvégezhető. Az integrálban a Dirac-delta miatt, a móduskifejtés azon tagjai adnak járulékot, melyekben csak tisztán koszinusz fordul elő. A vegyes szorzatok ill. a tisztán szinuszt tartalmazó tagok eltűnnek.

$$\mathcal{L}_{eff}^{h1} = \frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 - \frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + \sum_m \sum_n \frac{v_1^2 e_m e_n}{2} a_{\mu(m)} a^\mu_{(n)} \quad (5.53)$$

Ahol az $e_{(n)}$ az effektív, dimenziótlan csatolási állandó, amely meglepő módon módusfüggő:

$$e_{(n)} = \frac{C_n}{e_5^2 v_1^2} \frac{e_5}{\sqrt{\left(\frac{C_n^2}{e_5^4 v_1^4} + 1\right)\frac{b}{2}}} \quad (5.54)$$

A másik brane-en lokalizált skalármező Lagrange-sűrűsége (5.29) alakú. A számítást az előző esettel azonosan kell végezni, azzal a különbséggel, hogy a Dirac-delta a b helyen van. Ezzel viszont az integrálás bonyolódik, ugyanis a szögfüggvények nem tűnnek el. Ahhoz, hogy az előbbihez hasonló alakot kapjuk, új töltést kell bevezetni, amit az integrálás eredménye határoz meg:

$$e'_n = \frac{e_5}{\sqrt{\left(\frac{C_n^2}{e_5^4 v_1^4} + 1\right)\pi R}} \left[\frac{C_n}{e_5^2 v_1^2}\cos(C_n b) + \sin(C_n b)\right]. \quad (5.55)$$

Ezt ki lehet fejezni az e_n-nel:

$$e'_n = e_n f_n \quad (5.56)$$

$$f_n = \left[\cos(C_n b) + \frac{e_5^2 v_1^2}{C_n}\sin(C_n b)\right]. \quad (5.57)$$

Ezzel a 2-brane effektív képben (szintén kvadratikusan):

$$\mathcal{L}_{eff}^{h2} = \frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 - \frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + \sum_m \sum_n \frac{v_2^2 e'_m e'_n}{2} a_{\mu(n)} a^\mu_{(m)} \quad (5.58)$$

$$(5.59)$$

A részleteredményeket összerakva felírhatjuk a teljes effektív modell Lagrange-sűrűségét (kvadratikus rendben):

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_{\mu\nu(n)}F^{\mu\nu}_{(n)}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2 a_{\mu(n)}a^{\mu}_{(n)}+ \tag{5.60}$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\mu h_1\partial^\mu h_1 - \frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu h_1\partial^\mu h_1- \tag{5.61}$$

$$-\frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{A}_5'\partial^\mu \tilde{A}_5'+ \tag{5.62}$$

$$+\sum_m\sum_n \frac{e_m e_n(v_2^2 f_m f_n + v_1^2)}{2}a_{\mu(n)}a^{\mu}_{(m)} \tag{5.63}$$

5.5. Tömegsajátállapotok

Az effektív 4D-s Lagrange-sűrűségből leolvashatók a részecskék csupasz, fagráf szintű tömegei. A Higgs-skalárok tömegsajátállapotok, azonban vegyük észre, hogy a mértékmező módustömegeit megadó tömegmátrix nem diagonális.

A spontán szimmetriasértés következtében a mértékmező minden KK-módusa tömeget kap, valamint a módusok a kompakt extra dimenzió révén plusz tömeget kapnak az effektív 4D leírásban. Ha a mértékezőt KK-módusai szerint szám n-esekbe rendezzük (módusok szerinti oszlopvektor $\bar{a_\mu}$), természetesen $n \to \infty$, akkor a Lagrange-i tömegjárulék $\bar{a_\mu}^T M_A^2 \bar{a^\mu}$, a tömegmátrix

$$M_A^2 = \begin{pmatrix} C_1^2 + e_1^2 m_{11}^2 & e_1e_2m_{12}^2 & e_1e_3m_{13}^2 & e_1e_4m_{14}^2 & \dots \\ e_1e_2m_{12}^2 & C_2^2 + e_2^2m_{22}^2 & e_2e_3m_{23}^2 & e_4e_2m_{42}^2 & \dots \\ e_1e_3m_{13}^2 & e_3e_2m_{32}^2 & C_3^2 + e_3^2m_{33}^2 & e_4e_3m_{43}^2 & \dots \\ e_1e_4m_{14}^2 & e_4e_2m_{42}^2 & e_4e_3m_{43}^2 & C_4^2 + e_4^2m_{44}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.64}$$

ahol $m_{nm} = \sqrt{v_1^2 + f_n f_m v_2^2}$. Látható, hogy a tömegmátrix nem diagonális, ezért a KK-módusok nem tömegsajátállapotok, míg a fizikai részecskéknek viszont azoknak kell lenniük. Ezért meg kell keresnünk a tömegsajátállapotokat és tömegsajátértékeket. Az eredeti tömegmátrix-szal ez a feladat egyszerű keretek között megoldhatatlan. Ahhoz, hogy a sajátvektorok struktúrájáról mondhassunk valamit, elég egy speciális esetet viszgálnunk.

Ha a *brane*-ről, a szimmetriasértés miatt generálódó tömegjárulékot elhanyagolhatónak vesszük a *bulk* tömegjárulékkal szemben (azaz a VEV-ek nagyon kicsik), akkor $C_n = \frac{n}{b}2\pi$, valamint $f_n = 1$ minden n-re. Ezt a speciális esetet tárgyalja a [7] cikk. A cikkben $b = 2\pi R$. Ekkor a tömegmátrix n-ik sajátértékét a következő transzcendens egyenlet határozza meg:

$$m_{(n)} = \pi m^2 R \cot\left(\pi m_{(n)} R\right) \tag{5.65}$$

Az $m_{(n)}$ sajátértékhez tartozó KK tömegsajátállapot a KK-módusok lineárkombinációja lesz:

$$\hat{a}^{\mu}_{(n)} = \left(1 + \pi^2 m^2 R^2 + \frac{m^2_{(n)}}{m^2}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2m_{(n)}m}{m^2_{(n)} - (j/R)^2} \sqrt{2}^{\delta_{j,0}} a^{\mu}_{(j)} \tag{5.66}$$

A Lagrange-sűrűségbe ezeket a KK tömegsajátállapotokat kell beírni a tényleges kölcsönhatások leírásához. Azonban belátható, hogy a kinetikus és kölcsönhatási járulékok alakja nem változik meg, hiszen a folyamatokban az összes KK-módus részt vesz, valamint a tömegsajátállapotokban is megjelenik az összes módus. A változás a csatolási állandókban lesz, ugyanis a lineáris kifejtés miatt, ezek értéke megváltoztatja a módusfüggést $e_n \to e'_{(n)}$.

A transzcendens egyenletből $mR << 1$ esetben belátható, hogy nagy n értékekre a sajátérték $m_{(n)} \approx \frac{n}{R}$. A (5.66)-t átrendezve

$$\hat{a}^{\mu}_{(n)} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{j}{Rm_{(n)}}\right)^2} a^{\mu}_{(j)}. \tag{5.67}$$

Látható, hogy az n-ik tömeg sajátállapothoz meghatározó járulékot, csak az n-ik indexig tartó KK-módusok adnak, $j > n$-ra el vannak nyomva az $a^{\mu}_{(j)}$ módusok.

Az általános $f_n \neq 1$ esetben a sajátállapotok szintén, mint a KK-módusok speciális lineárkombinációja várhatóak, különböző súlyfaktorokkal, amelyek a kölcsönhatásokban a módusonkénti csatolási állandók megváltozását eredményezik.

5.6. $\tilde{A}_5(x)$ fizikája

A speciális mértékrögzítés miatt, a modellben megjelent egy nulla tömegű skalártér. A mező tömegtelen azonban kölcsönhat a mértéktérrel (A_μ) és a Higgs-terekkel (h_1 és h_2). A kölcsönhatási tagok a kinetikus Lagrange-ból származtathatók a mértéktranszfomáció után, mint megmaradó komponensek. Ez 5D-ban:

$$\mathcal{L}^{int}(x,y) = \delta(y)\left[\frac{1}{e_5^2 v_1^3}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_1 - \frac{2}{v_1}A^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_1\right] + \tag{5.68}$$

$$+\delta(y)\left[\frac{1}{2e_5^2 v_1^4}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_1^2 - \frac{1}{v_1^2}A^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_1^2\right] + \tag{5.69}$$

$$+\delta(y-b)\left[\frac{1}{e_5^2 v_2^3}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_2 + \frac{2}{v_2}A^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_2\right] + \tag{5.70}$$

$$+\delta(y-b)\left[\frac{1}{2e_5^2 v_2^4}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_2^2 - \frac{1}{v_2^2}A^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_2^2\right]. \tag{5.71}$$

Ezt integrálva az extra dimenzióra (y) megkapjuk az effektív 4D-s képet. Az integrálásnál ugyanazok a számítások érvényesek, mint a *brane* kinetikus Lagrange-sűrűség esetében. Az A_μ helyére az ő móduskifejtése kerül, a csatolásokban megjelennek a módusfüggő töltések is e_n és $f_n e_n$:

$$\mathcal{L}^{int}(x,y) = \frac{1}{e_5^2 v_1^3}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_1 - \frac{2}{e_5 v_1}\sum_n e_n a_n^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_1 + \tag{5.72}$$

$$+\frac{1}{2e_5^2 v_1^4}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_1^2 - \frac{1}{e_5 v_1^2}\sum_n e_e a_n^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_1^2 + \tag{5.73}$$

$$+\frac{1}{e_5^2 v_2^3}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_2 + \frac{2}{e_5 v_2}\sum_n e_n f_n a_n^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_2 + \tag{5.74}$$

$$+\frac{1}{2e_5^2 v_2^4}\partial_\mu\tilde{A}_5\partial^\mu\tilde{A}_5 h_2^2 + \frac{2}{e_5 v_2^2}\sum_n e_n f_n a_n^\mu\partial_\mu\tilde{A}_5 h_2^2, \tag{5.75}$$

Az effektív kölcsönhatási Lagrange-sűrűségbe a kanonikusan normált mezőt kell írni, ezért mindenhol a $\tilde{A}_5 \to \frac{\tilde{A}_5'}{Q^{eff}}$ cserét kell végrehajtani.

A fent leírt kölcsönhatások miatt, a $\tilde{A}_5$ mező a kvantumkorrekciókkal tömeget kaphat. Ahhoz, hogy a hurokkorrekciókat kiszámíthassuk meg kell határozni az elmélet Feynman-szabályait. A propagátorok és vertexek kiszámításához a T.P. Cheng és L.F. Li könyvét (hivatkozás baírása) vettem alapul (Appendix B).

A propagátorok a kinetikus Lagrange-sűrűségből (5.63) a szokásos módon számíthatók. A Higgs-mezők propagátora:

$$\Delta_h(k) = \frac{i}{k^2 - m_{h_{1,2}}^2 + i\epsilon}, \tag{5.76}$$

a $\tilde{A}_5$-részecske propagátora

$$\Delta_{\tilde{A}_5}(k) = \frac{i}{k^2 + i\epsilon}, \tag{5.77}$$

a vektormező n-ik módusának propagátora

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_n^2 + i\epsilon}, \tag{5.78}$$

ahol m_n^2 az M_A^2 tömegmátix (5.64) n-ik sajátértéke.

A vertexek esetén csak a h_1 mezőt tartalmazó tagokat határoztuk meg, mivel a h_2 csak egy konstanssal tér el tőle. Az $\tilde{A}_5'$ 1-hurok korrekcióihoz csak azokra a vertexekre van szükség, amelyekhez 3 láb esetén 1, míg 4 láb esetén 2 $\tilde{A}_5'$-láb tartozik. A nagyobb járulékot adó 3 részecske kölcsönhatások közül a két $\tilde{A}_5'$-t és egy h_1-t tartalmazó vertex (5.1/a ábra) értéke impulzustérben

$$I_{\tilde{A}_5\tilde{A}_5h_1} = -i2\frac{g^{\mu\nu}}{e_5^2 v_1^3 (Q^{eff})^2} k_{1\mu} k_{2\nu}, \tag{5.79}$$

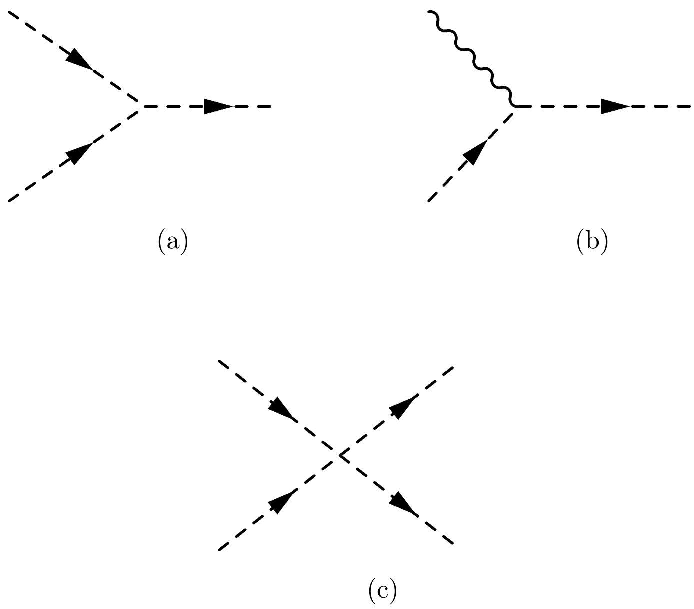
ahol k_1 bejövő, a k_2 a kimenő $\tilde{A}_5'$-részecske impulzusa. A $\tilde{A}_5$-t, $a_{n\mu}$-t és h_1-et tartalmazó 3-as vertex (5.1/b ábra)

$$I_{\tilde{A}_5ah_1} = \frac{2e_n}{e_5 v_1 Q^{eff}} k_{1\mu}, \tag{5.80}$$

ahol k_1 a $\tilde{A}_5$ impulzusa. A 4 részecske kölcsönhatásokból csak a két $\tilde{A}_5'$-t és két h_1-et tartalmazó tag releváns az 1-hurok korrekciók szempontjából (5.1/c ábra). Ennek a vertexjáruléka

$$I_{\tilde{A}_5\tilde{A}_5h_1h_1} = -2\frac{ig^{\mu\nu}}{e_5^2 v_1^4 (Q^{eff})^2} k_{1\mu} k_{2\nu}, \tag{5.81}$$

ahol k_1 bejövő, a k_2 a kimenő $\tilde{A}_5'$-részecske impulzusa.



5.1. ábra. Vertexek:(a) két $\tilde{A}'_5$ és egy h_1; (b) egy $\tilde{A}'_5$ egy $a_{n\mu}$ egy h_1; (c) két $\tilde{A}'_5$ és két h_1 vertexek.

A Feynman-szabályokkal már felírhatóak $\tilde{A}'_5$ részecskének tömegjárulékot adó hurokkorrekciók. A két $\tilde{A}'_5$-t és egy h_1-et tartalmazó 3-as kölcsönhatásból számítható hurokkorrekciót (5.2/a ábra) a következő integrál adja meg:

$$\int_0^\infty \frac{d^4k}{(2\pi)^4} I_1^2 g^{\mu\nu} p_\mu (p-k)_\nu \frac{i}{(p-k)^2 + i\epsilon} g^{\nu\rho}(p-k)_\nu p_\rho \frac{i}{k^2 - m_{h_1}^2 + i\epsilon}, \quad (5.82)$$

ahol $I_1 = \frac{-i2}{e_5^2 v_1^3 (Q^{eff})^2}$. Ez az integrál ultraibolya viselkedését tekintve 4-ed rendűen divergens. A kiszámításához regularizációt és renormálást kell használni. Ez nem meglepő, mert az extra dimenziós elméletek általában divergenciákat tartalmaznak, nem renormálhatók. A $\tilde{A}'_5$-t, h_1-et és $a_{n\mu}$-t tartalmazó kölcsönhatásból eredő hurokintegrál (5.2/b ábra):

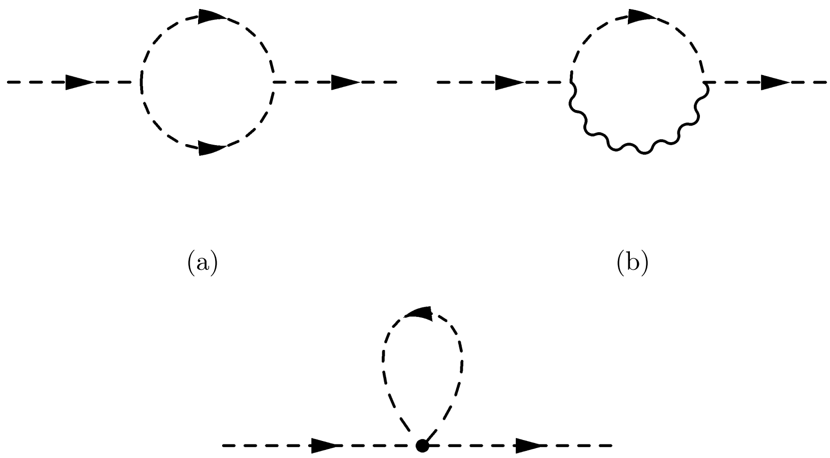
$$\int_0^\infty \frac{d^4k}{(2\pi)^4} I_2^2 p_\mu \frac{ig^{\mu\nu}}{(p-k)^2 - m_n^2 + i\epsilon} p_\nu \frac{i}{k^2 - m_{h_1}^2 + i\epsilon}, \quad (5.83)$$

ahol $I_2 = \frac{2e_n}{e_5 v_1 Q^{eff}}$. Ez is logaritmukusan divergens. Végül a két $\tilde{A}_5$-t és két

h_1-et tartalmazó 4-es kölcsönhatásból jövő hurokkorrekció (5.2/c ábra):

$$\int_0^\infty \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-i2}{e_5^2 v_1^4 (Q^{eff})^2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \frac{i}{k^2 - m_{h_1}^2 + i\epsilon}, \tag{5.84}$$

amely szintén 4-ed rendűen divergens.



(a) (b)

(c)

5.2. ábra. 1-hurok sajátenergiás járulékok: (a) két $\tilde{A}_5'$ és egy h_1; (b) egy $\tilde{A}_5'$ egy $a_{n\mu}$ egy h_1; (c) két $\tilde{A}_5'$ és két h_1 kölcsönhatások.

5.7. Összefoglalás

Ebben a fejezetben lépésről-lépésre bemutattuk az U(1) mértékelmélet extra dimenziós modelljének leírását, nagy hangsúlyt fektetve a fizikai szabadsági fokokra (unitér mérték), tömegmátrixra és csatolásokra.

Összehasonlítottuk az extra dimenzió *orbifold* és *intervallum* képét. Eredményül azt kaptuk, hogy az extra dimenziót csak akkor lehet ellentmondás mentesen *orbifold*-ként kezelni, ha a fixpontjaiban nincs szimmetriasértő potenciál. Minden más esetben intervallumon kell dolgozni.

A speciális mértékválasztás miatt, a modellben megjelent egy 4D-s, nulla tömegű skalár ($\tilde{A}'_5$), ami a mezők egy lineárkombinációja. 1-hurok szinten, azonban generálható tömegjárulék.

A következő fejezetben az itt bemutatott formalizmusra és gondolatmenetre építve dolgozzuk ki az elektrogyenge elméletet.

6. fejezet

Elektrogyenge ($SU(2) \times U(1)$) elmélet

6.1. Alapmodell, teljes Lagrange-sűrűség

A modellben 4+1 dimenzós, $g_{mn} = diag(+,-,-,-,-)$ metrikájú téridőben (x^μ, y) írjuk le a vizsgált részecskéket. Az extra dimenzió zárt intervallum, a peremeken 3-*brane*-ekkel. Így az extra dimenziót a $[0, b]$ tartománnyal le lehet írni.

Az $SU(2)\times U(1)$ mértékcsoport mezői a *bulk*-ban élnek ($SU(2) \to A^a_M(x,y)$, $M = 0,1,2,3,5$ és $a = 1,2,3$, $U(1) \to B_M(x,y)$), az $SU(2)$ *dublett* skalármezők az extra dimenzió végpontjaihoz lokalizáltak. Paraméterezésüket exponenciális alakban adjuk meg:

$$\Phi_{1,2} = e^{-i\frac{\chi^a_{1,2}\tau^a}{2v_{1,2}}} \left(\frac{v_{1,2} + h_{1,2}}{\sqrt{2}}\right)\rho \tag{6.1}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

ahol az 1-es indexű az $y = 0$ és a 2-es indexű az $y = b$ helyen lokalizált mező, amelyek vákuum várható értéke (VEV): $\langle\Phi_{1,2}\rangle = \frac{v_{1,2}}{\sqrt{2}}$. A teljes 5D-s hatás könnyen felírható:

$$\mathcal{S}(x,y) = \int d^4x \int_0^b dy \mathcal{L}(x,y) \tag{6.3}$$

A Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L}(x,y) = -\frac{1}{4}F^a_{MN}F^{aMN} - \frac{1}{4}B_{MN}B^{MN} + \tag{6.4}$$

$$+\delta(y)\left[(D_\mu\Phi_1)^+D^\mu\Phi_1 - V[\Phi_1]\right] + \tag{6.5}$$

$$+\delta(y-2\pi R)\left[(D_\mu\Phi_2)^+D^\mu\Phi_2 - V[\Phi_2]\right], \tag{6.6}$$

ahol $F^a_{MN} = \partial_M A^a_N - \partial_N A^a_M + g_5 f^{abc}A^b_M A^c_N$ az $SU(2)$, $B_{MN} = \partial_M B_N - \partial_N B_M$ az $U(1)$ térerősségtenzor, a mértékcsoport lokális szimmetriáját teljesítő kovariáns derivált: $D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2}g_5\tau^a A^a_\mu - \frac{i}{2}g' B_\mu$, ahol g_5 és g' $[-1/2]$ dimenziójú csatolási állandók. A kifejezésekben előforduló a index az $SU(2)$ csoport indexe. A nem ábeli mértékelmélet miatt, ismernünk kell a csoport Lee-algebráját, amely $SU(2)$ esetén:

$$\left[\frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\tau^c}{2}, \tag{6.7}$$

ahol τ^a, $(a = 1,2,3)$ a Pauli-mátrixok, f^{abc} a struktúra állandó. A további számítások során felhasználjuk azt, a Pauli-mátrixok közti összefüggést, amely a kommutációs és antikommutációs relációkból levezethető:

$$\tau^a\tau^b = \delta^{ab} + if^{abc}\tau^c. \tag{6.8}$$

A szimmetriasértő potenciál jelen esetben ugyanaz mint az ábeli $U(1)$ elméletben, csak itt a skalármezők a fent leírtak szerint, $SU(2)$ dublett terekkel reprezentálódnak.

6.2. Unitér mérték, szabadsági fokok

Első lépésben a valódi fizikai szabadsági fokokat kell megkeresnünk. Ehhez kihasználjuk, hogy a teljes Lagrange-sűrűség (6.6) lokális $SU(2) \times U(1)$ mértékinvarianciával rendelkezik, és választunk egy speciális mértéket, az 5D-s unitér mértéket. A mértékrögzítést két lépésben végezzük el, elöször a *bulk*-ban aztán a meghatározott paraméterekkel a *brane*-eken.

6.2.1. *Bulk* mértékrögzítés

A *bulk*-beli, vektortereket tartalmzó Lagrange-sűrűség invariáns a lokális 5D-s $SU(2)$

$$A^a_M \to A'^a_M = A^a_M + \partial_M \Theta^a - g_5 f^{abc} A^b_M \Theta^c \tag{6.9}$$

és $U(1)$

$$B_M \to B'_M = B_M + \partial_M \Theta \tag{6.10}$$

mértéktranszformációkra. A mértékrögzítés szempontjából az előző fejezetben leírt gondolatmenetet követjük.

Az $U(1)$ rész mértékrögzítése a *bulk*-ban ekvivalens az előző fejezetben leírtakkal (5.2.1.). Különbség csak a *brane*-eken lesz, mivel ott megjelenik a két vektormező keveredése is, de ezt később tárgyaljuk. Emiatt a számításokat nem ismételjük meg, csak az eredményeket közöljük. Tehát a mértékrögzített, és a megmaradó mértéktranszformációval transzformált $U(1)$ Lagrange-sűrűség tagjai:

$$-\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_5 B'_\mu \partial_5 B'^\mu + \frac{1}{2}\partial_\mu \tilde{B}_5 \partial^\mu \tilde{B}_5 + \Big[\partial_\mu B^\mu \tilde{B}_5\Big]_0^b, \tag{6.11}$$

ahol

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu + \partial_\mu \left(\Theta_0(x) + \Theta_1(x) y\right) \tag{6.12}$$

$$B_5 \to B'_5 = \tilde{B}_5(x) = B_5 + \Theta_1(x). \tag{6.13}$$

A (6.13) definiálja a $\tilde{B}_5$-t .

A nem ábeli részt szintén indexek szerint szeparált alakra kell hozni, amely kvadratikus rendben a következő:

$$\mathcal{L}^{bulk}(x,y) = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_5 A^a_\mu \partial_5 A^{a\mu} + \frac{1}{2}\partial_\mu A^a_5 \partial^\mu A^a_5 - \partial_\mu A^a_5 \partial_5 A^{a\mu} + ... \tag{6.14}$$

A magasabb rendű kölcsönhatási tagok ebből a szempontból nem relevánsak, nekünk az extra dimenziótól függő, 1-1 csatolásokat kell eltüntetni. Ez a szokásos komponens lesz, amit a (6.14)-ből parciális integrálással lehet elérni, úgy, hogy a peremeken megjelenik egy, az előző fejezetben leírt tag. A mértékrögzítés:

$$\mathcal{F}[A^a_M] = \partial_5 A^a_5 = 0. \tag{6.15}$$

Ez a mértékrögzítés az $U(1)$-hez hasonlóan elérhető.

Ezen mértékválasztás mellett határozzuk meg a megmaradó mértéktranszformációt. Az általános mértéktraszformáció:

$$A^a_\mu \to A'^a_\mu = A^a_\mu + \partial_\mu \Theta^a - g_5 f^{abc} A^b_\mu \Theta^c \tag{6.16}$$

$$A^a_5 \to A'^a_5 = A^a_5(x) + \partial_5 \Theta^a - g_5 f^{abc} A^b_5 \Theta^c = \tilde{A}^a_5(x) \tag{6.17}$$

Az (6.17) lesz $\tilde{A}^a_5$ definíciója! Ha az A^a_5-ra vonatkozó egyenletet az extra dimenzió szerint deriváljuk, és kirójuk a mértékrögzítő feltételt, akkor a Θ^a-ra kapunk egy, az $SU(2)$ indexek szerinti differenciálegyenlet-rendszert:

$$\partial_5 \overline{\Theta}(x,y) = A(x)\overline{\Theta}(x,y) + \overline{\Theta}_1(x), \tag{6.18}$$

ahol

$$\overline{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta^1(x,y) \\ \Theta^2(x,y) \\ \Theta^3(x,y) \end{pmatrix}, A(x) = g_5 \begin{pmatrix} 0 & -A^3_5 & A^2_5 \\ A^3_5 & 0 & -A^1_5 \\ -A^2_5 & A^1_5 & 0 \end{pmatrix}, \overline{\Theta}_1 = \begin{pmatrix} \Theta^1_1(x) \\ \Theta^2_1(x) \\ \Theta^3_1(x) \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

A (6.18) típusát tekintve y-ban állandó együtthatós, inhomogén diffegyenlet-rendszer, aminek az általános megoldása ismert.

A homogén rendszer megoldásához ismernünk kell az A mátrix spektrumát és sajátvektorait. A mátrix teljesen antiszimmetrikus, ezért a determinánsa és nyoma könnyen számítható, amelyekből a lineáris algebrából ismert módon következtethetünk a sajátértékekre:

$$det(A) = \prod_{i=1}^{3} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \tag{6.20}$$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\lambda_3. \tag{6.21}$$

A sajátérték ezen megfontolások mellett:$\lambda_2 = \lambda = g_5\sqrt{(A^1_5)^2 + (A^2_5)^2 + A^3_5)^2}$. A sajátvektorok egyszerű számítások után:$\lambda_1 = 0$ esetén tetszőleges 4D-s vektor $\Theta^a_0(x)$, a két, ellentétes előjelű sajátértékhez tartozó sajátvektorokra a következő összefüggéseknek kell teljesülniük:$\sum_{a=1}^{3} V^a_2 V^a_3 = 0$, $\sum_{a=1}^{3} V^a_2 A^a_5 = 0$ és $\sum_{a=1}^{3} V^a_3 A^a_5 = 0$. Ezeket a sajátvektorokat explicit nem adjuk meg, mert a további számítások szempontából nem fontosak. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandók variálásának módszerével határoztuk meg. A teljes megoldás a homogén és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összege:

$$\Theta^a(x,y) = \Theta_0^a(x) + \Theta_1^a(x)y + \left(w_2 V_2^a e^{-\lambda y} + w_3 V_3^a e^{\lambda y} - 2\right), \tag{6.22}$$

ahol w_2 és w_3 konstansok. A megoldás mint látszik, minden indexre 2, azaz összesen 6 szabad paramétert tartalmaz.

A teljes mértékelméletben a mértékrögzítés után összesen 8 szabad paraméter marad ($\Theta_0, \Theta_1, \Theta_0^a, \Theta_1^a$). Ezeket kell fixálnunk a *brane* mértékrögzítéssel.

6.2.2. *Brane* mértékrögzítés

Elöször az $y = 0$ helyen lévő *brane*-en lokalizált mezőket vizsgájluk az adott unitér mértékben. A mértékrögzítés szempontjából a Lagrange-sűrűség kinetikus komponense a fontos, mert a potenciál mértékinvariáns, így nem adnak feltételt a szabad paraméterek rögzítéséhez. A kinetikus komponens:

$$\left(\left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g_5 \tau^a A_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu\right)\Phi_1\right)^+ \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g_5 \tau^a A_\mu^a - \frac{i}{2} g' B_\mu\right)\Phi_1. \tag{6.23}$$

A speciális mértéktranszformáció után az $y = 0$ pozícióban lévő *brane*-en a következő komponensek jelennek meg a mértékmezőkben (ahol $A_\mu^a|_0 = A_\mu^a(x,0)$ és $B_\mu|_0 = B_\mu(x,0)$):

$$A_\mu^a|_0 \to A_\mu^{\prime a}|_0 = A_\mu^a|_0 + \partial_\mu \Theta^a(x,0) - g_5 f^{abc} A_\mu^b|_0 \Theta^c(x,0), \tag{6.24}$$

$$B_\mu \to B'_\mu|_0 = B_\mu|_0 + \partial_\mu \Theta_0(x) \tag{6.25}$$

ahol

$$\Theta^a(x,0) = \Theta_0^a(x) + \left(w_2 V_2^a + w_3 V_3^a - 2\right). \tag{6.26}$$

A mértéktranszformációkban 4 szabad paraméter van: $\Theta_0^a(x)$ és $\Theta_0(x)$.

Az új mezőket behelyettesítve a kinetikus tagba, és a $SU(2)$ dublett skalármezőt komponenseivel ($\chi_1^a(x)$ és $h_1(x)$) felírva, kifejthetjük a kinetikus komponenseket. Ezután az $U(1)$ elmélethez hasonlóan, a mértékmező-skalármező 1-1 csatolásokat kell eltüntetnünk. A mértékcsoport bonyolultsága miatt, ezt a lépést is két részre kell bontanunk. Az $SU(2)$ mező ($a = 1, 2$)

komponenseinek csatolásait külön kell kezelni az ($a = 3$) és az $U(1)$ mező csatolásaitól, mert az A^3_μ és a B^μ között keveredés jön létre. Ennek oka, hogy a kinetikus tagban megjelenik a különböző mértékcsoportokhoz tartozó vektormezők szorzata, amelyben csak az $a = 3$-hoz tartozó Pauli-mátrix ad nem nulla járulékot az $SU(2)$ dublettek közti szorzatban:

$$\rho^+ \tau^a \rho = -\delta^{3a}. \tag{6.27}$$

Az ($a = 1, 2$) esetében a Goldstone-típusú 1-1 csatolások az $U(1)$ elméletben ismertetett módon származhatnak: a mértékmező ($A^{a\mu}$) és a komplex fázisban szereplő mező deriváltjának ($\partial_\mu \chi^a_1$) szorzatából, másrészt a mértékmező kvadratikus tagjából ($A'^a_\mu A'^{a\mu}$), amikor a mértékmezőt ($A^{a\mu}$) a mértékrögzítő taggal ($\partial_\mu \Theta^a_0$) szorozzuk, harmadrészt a *bulk*-tag parciális integrálásából ($-\partial_\mu \tilde{A}^a_5 A^{a\mu}$):

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{v_1} \chi^a_1 + \frac{1}{g_5 v_1^2} \tilde{A}^a_5 + \frac{g_5}{2} \Theta^a_0 \right) A^{a\mu}. \tag{6.28}$$

Ennek a csatolásnak nullának kell lennie. Ez elérhető, ha a mértékrögzítés paraméterét a következő módon rögzítjük:

$$\Theta^a_0 = -\frac{2}{g_5 v_1} \chi^a_1 - \frac{2}{g_5^2 v_1^2} \tilde{A}^a_5 - \left(w_2 V^a_2 + w_3 V^a_3 - 2 \right). \tag{6.29}$$

Ezzel rögzítettünk két paramétert, amelyekkel felírhatjuk a (6.26) alapján a teljes mértékparamétereket a ezen a *brane*-en:

$$\Theta^a(x, b) = -\frac{2}{g_5 v_1} \chi^a_1 - \frac{2}{g_5^2 v_1^2} \tilde{A}^a_5, \tag{6.30}$$

Most célszerű a másik *brane* mértékrögzítsét is elvégezni, hogy az ($a = 1, 2$) esetet teljesen meghatározzuk. Az $y = b$ *brane* kinetikus Lagrange-sűrűsége (6.23) alakú, csak az $1 \to 2$ indexcserét kell elvégezni, valamint a mértékmezőket és transzformációikat az $y = b$ helyen kell értelmezni. Ez a mértéktranszformáció paraméterében a következőt jelenti:

$$\Theta^a(x, b) = \Theta^a_0(x) + \Theta^a_1 b + \left(w_2 V^a_2 e^{-\lambda b} + w_3 V^a_3 e^{\lambda b} - 2 \right), \tag{6.31}$$

$$\Theta(x, b) = \Theta_0(x) + \Theta_1(x) b \tag{6.32}$$

Az ezen paraméterekkel, a (6.25) alapján felírt traszformált mezőket írva a kinetikus tagba, megkapjuk a Goldstone-típusú csatolásokat az $y = b$ *brane*-en (a komponensek ugyanazokból a komponensekből jönnek mint a másik *brane* esetén, csak egy előjel különbözik a parciálisan integrált tagban $-\partial_\mu \tilde{A}_5^a A^{a\mu}$):

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{v_2} \chi_1^a - \frac{1}{g_5 v_2^2} \tilde{A}_5^a + \frac{g_5}{2} \Theta^a(x, b) \right) A^{a\mu}. \tag{6.33}$$

Ez a csatolás eltüntethető, ha a $\Theta^a(x, b)$-t speciálisan választjuk meg:

$$\Theta^a(x, b) = -\frac{2}{g_5 v_2} \chi_1^a + \frac{2}{g_5^2 v_2^2} \tilde{A}_5^a, \tag{6.34}$$

ami megtehető, hiszen tartalmaz szabadságot, indexenként 1 szabad paraméter: $\Theta_1^a(x)$. Ez a paraméter kifejezhető a fenti egyenletből, de mi nem vezetjük le, mert a további számítások szempontjából (megmaradó részecskék $\tilde{A}_5^a$, effektív modell) nem fontosak, ugyanis a képletek explicit a $\Theta(x, b)$-t tartalmazzák.

A maradék 4 szabad paramétert ($\Theta_0^3(x), \Theta_1^3, \Theta_0, \Theta_1$) az A_μ^a és a B_μ 1-1 típusú, skalár-vektor csatolásainak eltüntetésével rögzítjük. Ehhez fel kell írni a *brane*-eken megjelenő Goldstone-csatolásokat. Itt megjelennek a már említett, a mértékmezők keveredéséből származó tagok is. Az $y = 0$ helyen ezek a következők

$$\partial_\mu \left(\frac{g_5 v_1}{2} \chi_1^3 + \tilde{A}_5^3 + \frac{g_5^2 v_1^2}{4} \Theta_0^3 - v_1^2 \frac{g_5 g'}{4} \Theta_0 \right) A^{3\mu} + \tag{6.35}$$

$$+\partial_\mu \left(-\frac{g' v_1}{2} \chi_1^3 + \tilde{B}_5 + \frac{g'^2 v_1^2}{4} \Theta_0 - v_1^2 \frac{g_5 g'}{4} \Theta_0^3 \right) B^\mu \tag{6.36}$$

Látható, hogy az 1-1 csatolások eltüntetése nem triviális, mivel a χ_1^3-mal és a mértékparaméterekkel (Θ_0, Θ_0^3) mindkét mértékmező kölcsönhat. Hogy ezt a problémát megoldjuk, a mértékmezőknek és a skalármezőknek is egy lineárkombinációját kell bevezetnünk:

$$\bar{Z} = \frac{1}{g_5} \tilde{A}_5^3(x) - \frac{1}{g'} \tilde{B}_5(x) \tag{6.37}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{g'} \tilde{A}_5^3(x) + \frac{1}{g_5} \tilde{B}_5(x). \tag{6.38}$$

Ezzel a megfeleltetéssel a (6.36) a következő alakra hozható:

$$\partial_\mu \left(\frac{v_1}{2}\chi_1^3 + \frac{v_1^2}{4}(g_5\Theta_0^3 - g'\Theta_0) + \frac{1}{2}\bar{Z} \right)(g_5 A^{a\mu} - g' B^\mu) + \tag{6.39}$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\mu \bar{A}(g' A^{a\mu} + g_5 B^\mu) \tag{6.40}$$

Itt már a vektormezők lineárkombinációinak 1-1 csatolásai külön-külön eltüntethetők:

$$(g_5\Theta_0^3 - g'\Theta_0) = -\frac{2}{v_1}\chi_1^3 - \frac{2}{v_1^2}\bar{Z}, \tag{6.41}$$

és

$$\bar{A}|_0 = 0. \tag{6.42}$$

A (6.41) feltétellel rögzítettük a két mértékparaméter különbségét. A másik feltétel (6.42) első megközelítésben fúrcsának tűnik, hiszen explicit nincs benne szabad paraméter. Azonban, ha jobban megvizsgáljuk, akkor látható, hogy az $\tilde{A}_5^3$ és a $\tilde{B}_5$ kombinációja (6.38), amelyek a vektromezők 5. komponensének mértéktranszformált mezői ($\tilde{A}_5^3 = A_5^3 + \Theta_1^3 + ...$ (6.17) és $\tilde{B}_5 = B_5 + \Theta_1$ (6.13)). Tehát a (6.42) feltétel tulajdonképpen a két mertékparaméter összegét rögzíti. Összefoglalva, az $y = 0$ *brane* Goldstone típusú, 1-1 csatolásait eltüntetve két paramétert rögzítettünk a négyből $(g_5\Theta_0^3 - g'\Theta_0)$ és $\left(\frac{1}{g'}\Theta_1^3 + \frac{1}{g_5}\Theta_1\right)$.

Az $y = b$ helyen lévő *brane* 1-1 típusú, vektor-skalár csatolásai a parciális integrálásból jövő komponensek előjeleitől és a mértékparaméterektől eltekintve megegyeznek a másik *brane* tagjaival:

$$\partial_\mu \left(\frac{g_5 v_2}{2}\chi_2^3 - \tilde{A}_5^3 + \frac{g_5^2 v_2^2}{4}\Theta^3(x,b)^3 - v_2^2\frac{g_5 g'}{4}\Theta(x,b) \right) A^{3\mu} + \tag{6.43}$$

$$+\partial_\mu \left(-\frac{g' v_2}{2}\chi_2^3 + \tilde{B}_5 + \frac{g'^2 v_2^2}{4}\Theta(x,b) - v_2^2\frac{g_5 g'}{4}\Theta^3(x,b) \right) B^\mu \tag{6.44}$$

ahol a mértékparamétereket a (6.32) határozza meg. Ahhoz, hogy ezeket a tagokat eltüntessük az előzőekben ismertetett módon, kombinálni kell a mezőket:

$$\partial_\mu \left(\frac{v_2}{2}\chi_2^3 + \frac{v_2^2}{4}(g_5\Theta^3(x,b) - g'\Theta(x,b)) - \frac{1}{2}\bar{Z} \right)(g_5 A^{a\mu} - g' B^\mu) + \tag{6.45}$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\mu \bar{A}(g' A^{a\mu} + g_5 B^\mu). \tag{6.46}$$

Az így definiált kombinációk már eltüntethetők, ha

$$(g_5\Theta^3(x,b) - g'\Theta(x,b)) = -\frac{2}{v_2}\chi_2^3 + \frac{2}{v_2^2}\bar{Z}, \tag{6.47}$$

és

$$\bar{A}|_b = 0. \tag{6.48}$$

A (6.47) feltétellel a $(g_5\Theta_1^3 - g'\Theta_1)$-et rögzítettük, hiszen a nullás indexű paraméterek különbségét már a másik *brane*-en rögzítettük (6.41). A másik feltétel azonban megegyezik a (6.42)-val (mert $\bar{A}$ tisztán 4D-s mező!), tehát ezzel nem tudtunk új kombinációt fixálni.

Ennek következtében az a végeredmény, hogy a Goldstone típusú, 1-1 csatolásokat, mindkét *brane*-en eltüntető feltételekből, csak 3 paramétert sikerült rögzíteni a megmaradó 4-ből (az $(a = 1, 2)$ esetét nem számítva). Tehát maradt 1 szabad mértékparaméter. Ennek az a várható következménye, hogy marad egy 4D-s U(1) mértékszimmetria, amint ezt majd a későbbiekben látni is fogjuk.

6.3. Tömegmátrix

A kinetikus Lagrange-sűrűség vektormezőkben kvadratikus tagjaiból megkapjuk a spontán szimmetriasértés által generált tömegeket. Ebben a modellben, ezt a következő kifejezés adja meg (már unitér mértékben felírva) az egyes *brane*-ek esetén:

$$\frac{v_i^2}{2}\rho^+ \left(\frac{g_5}{2}A'^a_\mu\tau^a + \frac{g'}{2}B'_\mu\right)\left(\frac{g_5}{2}\tau^b A'^{b\mu} + \frac{g'}{2}B^\mu\right)\rho \tag{6.49}$$

Ezt kifejtve azonnal tapasztaljuk, hogy a tömegmátrix nem diagonális az A'^3_μ és a B^μ között fellépő keveredés miatt, melynek okát már korábban tárgyaltuk:

$$\frac{v_i^2}{8}\begin{pmatrix} A'^a_\mu \\ B'_\mu \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} g_5^2 & -g_5 g' \\ -g_5 g' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'^{a\mu} \\ B'^\mu \end{pmatrix}, \tag{6.50}$$

az $(a = 1, 2)$-höz tartozó vektormezők tömegjáruléka:$\frac{v_i^2 g_5^2}{8}$. A tömegsajátállapotok megtalálásához diagonalizálni kell a tömegmátrixot. Ennek eredménye képpen a következő mezőkonstrukciók lesznek a tömegsajátállapotok az 5D-s elméletben:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^{\prime 1} \mp iA_\mu^{\prime 2}) \Rightarrow m_{Wi}^2 = \frac{v_i^2 g_5^2}{4} \tag{6.51}$$

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_5^2 + g^{\prime 2}}}(g_5 A_\mu^{\prime 3} - g' B_\mu') \Rightarrow m_{Zi}^2 = \frac{g_5^2 + g^{\prime 2}}{4} v_i^2 \tag{6.52}$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_5^2 + g^{\prime 2}}}(g' A_\mu^{\prime 3} + g_5 B_\mu') \Rightarrow m_A^2 = 0. \tag{6.53}$$

Nem meglepő módon a tömegsajátállapotokban a normálási faktortól eltekintve, megjellenek azok a mezőkombinációk (Z_μ, A_μ), amelyek a *brane* mértékrögzítéseknél megoldották az 1-1 csatolásokban megjelenő keveredési problémát. Fontos észrevétel, hogy van egy tömegtelen 5D-s tömegsajátállapot is, aminek fontos szerepe lesz az effektív 4D-s leírásban.

6.4. 5D-s Lagrange-sűrűség unitér mértékben

Most már meg van a teljes mértékrögzítés unitér mértékben, és ezzel együtt a fizikai szabadsági fokok, valamint az 5D-s tömegsajátállapotok. Felírhatjuk kvadratikus rendben az 5D-s Lagrange-sűrűséget. A megmaradó skalármezők kinetikus komponenseit a *bulk*-ba visszük (a *brane*-eken itt is megjelennek kinetikus tagok, mint az U(1) elméletben), valamint a $W^{\pm\mu}$ konstrukcióhoz hasonlóan az $\tilde{A}_5^a, (a = 1, 2)$ skalármezőt is komplex alakban írjuk fel:

$$W_0^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{A}_5^{\prime 1} \mp i\tilde{A}_5^{\prime 2}) \tag{6.54}$$

Így a Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L}(x,y) = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} - \frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + Q_W^2 \partial_\mu W_0^+ \partial^\mu W_0^- + \tag{6.55}$$

$$+\frac{Q_Z^2}{2}\partial_\mu \bar{Z} \partial^\mu \bar{Z} + \partial_5 W_\mu^+ \partial_5 W^{-\mu} + \partial_5 Z_\mu \partial_5 Z^\mu + \partial_5 A_\mu \partial_5 A^\mu + \tag{6.56}$$

$$+\delta(y)\left(\frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 - \frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + m_{W1}^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{m_{Z1}^2}{2}Z_\mu Z^\mu\right) + \tag{6.57}$$

$$+\delta(y-b)\left(\frac{1}{2}\partial_\mu h_2 \partial^\mu h_2 - \frac{\lambda v_2^2}{2}h_2^2 + m_{W2}^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{m_{Z2}^2}{2}Z_\mu Z^\mu\right), \tag{6.58}$$

ahol

$$Q_W^2 = 1 + \delta(y)\frac{1}{g_5^2 v_1^2} + \delta(y-b)\frac{1}{g_5^2 v_2^2} \tag{6.59}$$

$$Q_Z^2 = \frac{g_5^2 g'^2}{g_5^2 + g'^2} + \delta(y)\frac{1}{v_1^2} + \delta(y-b)\frac{1}{v_2^2} \tag{6.60}$$

A $\bar{A}$ azért nem jelenik meg, mert a mértékrögzítés (6.42) és (6.48) miatt, annak nullának kell lennie. A továbbiakban az effektív modellt és a peremfeltételeket határozzuk meg.

6.5. Mozgásegyenletek, peremfeltételek, módus-kifejtés

Ahogy az előző fejezet 5.3-as pontjában láttuk, az effektív képhez szükséges a peremfeltételek és a hullámfüggvényeket meghatározó Euler-Lagrange egyenletek ismerete. Ezeket most részletesebb számítás nélkül (az $U(1)$ elméletben ismertetett módszerrel) írjuk le a (6.58)-t felhasználva. A vektormezők mozgásegyenletei kvadratikus rendben:

$$\partial_\mu W^{\pm\mu\nu} - \partial_5 \partial_5 W^{\pm\nu} = 0, \tag{6.61}$$

$$\partial_\mu Z^{\mu\nu} - \partial_5 \partial_5 Z^{\nu} = 0, \tag{6.62}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_5 \partial_5 A^{\nu} = 0. \tag{6.63}$$

A hozzájuk tartozó peremfeltételek:

$$\partial_5 W^{\pm\mu}|_{y=0} - m_{W1}^2 W^{\pm\mu}|_{y=0} = 0, \tag{6.64}$$

$$\partial_5 W^{\pm\mu}|_{y=b} + m_{W2}^2 W^{\pm\mu}|_{y=b} = 0, \tag{6.65}$$

és

$$\partial_5 Z^{\mu}|_{y=0} - m_{Z1}^2 Z^{\mu}|_{y=0} = 0, \tag{6.66}$$

$$\partial_5 Z^{\mu}|_{y=b} + m_{Z2}^2 Z^{\mu}|_{y=b} = 0, \tag{6.67}$$

valamint

$$\partial_5 A^{\mu}|_{y=0} = 0, \tag{6.68}$$

$$\partial_5 A^{\mu}|_{y=b} = 0. \tag{6.69}$$

A mozgásegyenletekből az 5.3-ban ismertetett módon megadható az általános, extra dimenziós hullámfüggvény, ami jelen esetben mindegyik mezőre ugyan olyan alakú, hiszen maguk a mozgásegyenletek is azonos szerkezetűek:

$$f^i(y) = A^i \cos(C^i y) + B^i \sin(C^i y), \tag{6.70}$$

ahol az $i = W, Z, A$, attól függően, hogy melyik vektormezőre vonatkozik.

A tömegként megjelenő C^i paramétereket a peremfeltételek határozzák meg. Mivel a $W_\mu^\pm$-re és a Z_μ-re a tömegtől eltekintve egyformák a peremfeltételek, ezért a tömegparamétert meghatározó egyenletek is azonos struktúrájúak lesznek. Az $U(1)$ elmélettel való hasonlóság miatt ((5.37) és (5.38)), a C^i-k egyenletei könnyen felírhatók (5.43):

$$\frac{\frac{g_5^2 v_1^2 v_2^2}{4C^W} - \frac{4C^W}{g_5^2}}{v_1^2 + v_2^2} = ctg(bC^W) \tag{6.71}$$

és

$$\frac{\frac{\left(g_5^2 + g'^2\right) v_1^2 v_2^2}{4C^Z} - \frac{4C^Z}{g_5^2 + g'^2}}{v_1^2 + v_2^2} = ctg(bC^Z) \tag{6.72}$$

Mindkét egyenlet traszcendens egyenlet, explicit megoldásuk nem létezik. A szerkezetből azonban már tudjuk, hogy nulla módus nem létezik, ami összhangban van a vártakkal. A tömeg a periodikus függvény miatt kvantált lesz $C^i \to C_n^i$.

Az A_μ peremfeltételei Neumann-feltételek. Ezért az általános megoldásból (6.70) csak a páros függvény marad meg, azaz a koszinusz. A tömegjárulékra vonatkozó egyenlet:

$$\sin(C^A b) = 0 \Rightarrow C_n^A = \frac{\pi}{b} n, \tag{6.73}$$

ahol $n = 0, 1, ...$ A legfontosabb következmény, hogy A_μ-nek létezik nulla módusa! Ezáltal létezik egy végtelen hatótávolságú kölcsönhatás, van egy maradék U(1) mértékszimmetria. Ez összhangban van azzal, hogy a *brane* mértékrögzítésnél maradt egy szabad mértékparaméter.

A vektromezők móduskifejtése a következő alakban írható fel:

$$W_{\pm\mu}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{\pm\mu(n)}(x) N^W \left(\frac{4C_n^W}{g_5^2 v_1^2} \cos(C_n^W y) + \sin(C_n^W y) \right), \tag{6.74}$$

$$Z_\mu(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\mu(n)}(x) N^Z \left(\frac{4C_n^Z}{(g_5^2 + g'^2)\, v_1^2} \cos(C_n^Z y) + \sin(C_n^Z y) \right), \quad (6.75)$$

és

$$A_\mu(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\mu(n)}(x) N^A \cos(C_n^A y). \quad (6.76)$$

6.6. Effektív 4D-s modell

A következőkben az effektív 4D-s Larange-sűrűségeket határozzuk meg. Ezt a matematikai fejezetben ismertetett módon (2.10), az extra dimenzióra való integrálással számítjuk ki.

6.6.1. Effektív mértékmezők

A *bulk* mértékmezők 5D-s Lagrange-sűrűsége

$$\mathcal{L}(x,y) = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^- W^{+\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + Q_W^2 \partial_\mu W_0^+ \partial^\mu W_0^- + \quad (6.77)$$

$$+ \frac{Q_Z^2}{2} \partial_\mu \bar{Z} \partial^\mu \bar{Z} + \partial_5 W_\mu^+ \partial_5 W^{-\mu} + \partial_5 Z_\mu \partial_5 Z^\mu + \partial_5 A_\mu \partial_5 A^\mu, \quad (6.78)$$

ezt kell integrálni az extra dimenzióra. A számításhoz a móduskifejtéseket kell használni. A részletek ismertetése nélkül (azokat ld. 5.4.1.), rögtön a végeredményt írjuk fel. Azonban még előtte, az $U(1)$-hez hasonlóan, a megmaradó, 4D-a skalármezőket tisztázzuk. Ezek a mezők, ugyanis tartalmaznak y függő prefaktorokat (6.60), amelyek az extra dimenzióra integrálva:

$$Q_W'^2 = b + \frac{1}{g_5^2 v_1^2} + \frac{1}{g_5^2 v_2^2}, \quad (6.79)$$

$$Q_Z'^2 = \frac{g_5^2 g'^2}{g_5^2 + g'^2} b + \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2}, . \quad (6.80)$$

Hogy jól definiált mezőket kapjunk, kanonikusan normáljuk a skalármezőket:$W_0^{\pm} = W_0^{\pm} Q'_W$, $Z = \bar{Z} Q'_Z$. Így az effektív Lagrange-sűrűség kvadratikus rendig:

$$\mathcal{L}_{eff}^m(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(N^W)^2\left(\frac{16(C_n^W)^2}{g_5^4 v_1^4}+1\right)\frac{b}{2}\left[W^+_{\mu\nu(n)}F_n^{-\mu\nu}\right]+ \tag{6.81}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(N^W)^2\left(\frac{16(C_n^W)^2}{g_5^4 v_1^4}+1\right)\frac{b}{2}(C_n^W)^2 w^+_{\mu(n)}w^{-\mu}_{(n)}+\partial_\mu W_0^-\partial^\mu W_0^+ - \tag{6.82}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(N^Z)^2\left(\frac{16(C_n^Z)^2}{(g_5^2+g'^2)^2 v_1^4}+1\right)\frac{b}{2}\left[Z_{\mu\nu(n)}Z_n^{\mu\nu}\right]+ \tag{6.83}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(N^Z)^2\left(\frac{16(C_n^Z)^2}{(g_5^2+g'^2)^2 v_1^4}+1\right)\frac{b}{2}(C_n^Z)^2 z_{\mu(n)}z^{\mu}_{(n)}+\frac{1}{2}\partial_\mu Z\partial^\mu Z - \tag{6.84}$$

$$-\frac{1}{4}(N_0^A)^2 bF_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(N^A)^2\frac{b}{2}\left[F_{\mu\nu(n)}F_n^{\mu\nu}\right]+ \tag{6.85}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(N^A)^2\frac{b}{2}(C_n^A)^2 a_{\mu(n)}a^{\mu}_{(n)}, \tag{6.86}$$

ahonnan leolvashatjuk a normálásokat:

$$N_n^W = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{16(C_n^W)^2}{g_5^4 v_1^4}+1\right)\frac{b}{2}}}, \tag{6.87}$$

$$N_n^Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{16(C_n^Z)^2}{(g_5^2+g'^2)^2 v_1^4}+1\right)\frac{b}{2}}} \tag{6.88}$$

$$N_0^A = \frac{1}{\sqrt{b}}, \tag{6.89}$$

$$N_n^A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}}. \tag{6.90}$$

Ebben az esetben is a normálási állandók módusfüggőek lesznek. A Lagrange-sűrűségbe most megjelent a nulla módus is, amely normálása eltér a többi $a_{n\mu}$ tömeges módusétól.

6.6.2. Effektív Higgs-szektor

A Higgs-szektor számítását az 5.4.2. alapján végeztük. Az $y = 0$ *brane*-en lévő Lagrange-sűrűség, amit integrálni kell az extra dimenzióra:

$$\mathcal{L}(x,y)^{h1} = \delta(y)\left(\frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 - \frac{\lambda v_1^2}{4}h_1^2 + m_{W1}^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{m_{Z1}^2}{2} Z_\mu Z^\mu\right) \tag{6.91}$$

A vektormezők helyére a móduskifejtéseket írva az integrálás könnyen elvégezhető. A Dirac-delta disztribúció miatt a tömeg a módusok között keveredve jelenik meg

$$\mathcal{L}(x)^{h1} = \frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 - \frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + \sum_m \sum_n \frac{v_1^2 g_m g_n}{4} w^+_{\mu(m)} w^{-\mu}_{(n)} + \tag{6.92}$$

$$+ \sum_m \sum_n \frac{v_1^2 g_m^Z g_n^Z}{8} z_{\mu(m)} z^\mu_{(n)}, \tag{6.93}$$

ahol

$$g_n = \frac{4C_n^W}{g_5^2 v_1^2} \frac{g_5}{\sqrt{\left(\frac{16(C_n^W)^2}{g_5^4 v_1^4} + 1\right)\frac{b}{2}}}, \tag{6.94}$$

$$g_n^Z = \frac{4C_n^Z}{(g_5^2 + g'^2)\, v_1^2} \frac{\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{\sqrt{\left(\frac{16(C_n^Z)^2}{(g_5^2+g'^2)^2 v_1^4} + 1\right)\frac{b}{2}}}. \tag{6.95}$$

A csatolások jelen esetben is módusfüggők lesznek.

A másik *brane* effektív Lagrange-sűrűségét a fentiek alapján egyszerű felírni. Különbség, csak a csatolási állandókban lesznek, hiszen a Dirac-delta disztribúció nem tünteti el móduskifejtés hullámfüggvényeit, ahogy ezt az $U(1)$ elméletben is tapasztaltuk:

$$\mathcal{L}(x)^{h2} = \frac{1}{2}\partial_\mu h_2 \partial^\mu h_2 - \frac{\lambda v_2^2}{2}h_2^2 + \sum_m \sum_n \frac{v_2^2 g'_m g'_n}{4} w^+_{\mu(m)} w^{-\mu}_{(n)} + \tag{6.96}$$

$$+ \sum_m \sum_n \frac{v_2^2 g'^Z_m g'^Z_n}{8} z_{\mu(m)} z^\mu_{(n)}, \tag{6.97}$$

ahol

$$g'_n = g_n f_n^W \tag{6.98}$$

$$f_n^W = \cos(C_n^W b) + \frac{g_5^2 v_1^2}{4C_n^W}\sin(C_n^W b), \tag{6.99}$$

valamint

$$g_n'^Z = g_n^Z f_n^Z \tag{6.100}$$

$$f_n^Z = \cos(C_n^Z b) + \frac{(g_5^2 + g'^2)\, v_1^2}{4C_n^Z} \sin(C_n^Z b). \tag{6.101}$$

Most, hogy már ismerjük a *bulk* és a *brane*-ek járulékait, foglaljuk össze a 4D-s, effektív Lagrange-sűrűséget kvadratikus rendben.

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[W^+_{\mu\nu(n)}F_n^{-\mu\nu}\right] + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n^W)^2 w^+_{\mu(n)} w^{-\mu}_{(n)} + \tag{6.102}$$

$$+\partial_\mu W_0^- \partial^\mu W_0^+ - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[Z_{\mu\nu(n)}Z_n^{\mu\nu}\right] + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^Z)^2 z_{\mu(n)} z^{\mu}_{(n)} + \tag{6.103}$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\mu Z \partial^\mu Z - \frac{1}{4}F_{0\mu\nu}F_0^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_{\mu\nu(n)}F_n^{\mu\nu}\right] + \tag{6.104}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^A)^2 a_{\mu(n)} a^{\mu}_{(n)} + \frac{1}{2}\partial_\mu h_1 \partial^\mu h_1 - \tag{6.105}$$

$$-\frac{\lambda v_1^2}{2}h_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu h_2 \partial^\mu h_2 - \frac{\lambda v_2^2}{2}h_2^2 + \tag{6.106}$$

$$+\sum_m \sum_n \frac{(v_2^2 f_m^W f_n^W + v_1^2) g_m g_n}{4} w^+_{\mu(m)} w^{-\mu}_{(n)} + \tag{6.107}$$

$$+\sum_m \sum_n \frac{(v_2^2 f_m^Z f_n^Z + v_1^2) g_m^Z g_n^Z}{8} z_{\mu(m)} z^{\mu}_{(n)} \tag{6.108}$$

A 4D-s effektív csatolási állandók (g_n és g_n^Z) dimenziótlan mennyiségek.

6.7. Tömegsajátállapotok

Az effektív, kvadratikus Lagrange-sűrűségből leolvashatók a mértékmezők tömegjárulékai. A $w_n^{\pm\mu}$ és a z_n^μ vektormezők módustömegeit megadó mátrix nem, míg az a_n^μ módusok tömegmátrixa diagonális. Ennek az az oka, hogy a spontán szimmetriasértés nem sérti a teljes mértékszimmetriát: $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$, ezért csak 3 generátorhoz tartozó mező kap így tömeget. A diagonális tömegekhez hozzájárul a kompakt extra dimenzió, KK-móduskifejtéséből eredő járuléka az effektív 4D-s képben. Ez utóbbi mind a 4 vektormezőnek generál tömeget (csak az a_n^μ-nek létezik nulla tömegű módusa).

Ha a mértékmezőket szám n-esekbe rendezzük, akkor a Lagrange-i tömegjárulékok: $\bar{w}_\mu^{+T} M_W^2 \bar{w}^{-\mu}$,$\bar{z}_\mu^T M_Z^2 \bar{z}^\mu$, és $\bar{a}_\mu^T M_A^2 \bar{a}^\mu$, a tömegmátrixok:

$$M_W^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4(C_1^W)^2 + g_1^2 m_{11}^2 & g_1 g_2 m_{12}^2 & g_1 g_3 m_{13}^2 & \dots \\ g_1 g_2 m_{12}^2 & 4(C_2^W)^2 + g_2^2 m_{22}^2 & g_2 g_3 m_{23}^2 & \dots \\ g_1 g_3 m_{13}^2 & g_3 g_2 m_{32}^2 & 4(C_3^W)^2 + g_3^2 m_{33}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & \end{pmatrix}, \tag{6.109}$$

ahol $m_{nm} = \sqrt{v_1^2 + f_n^W f_m^W v_2^2}$,

$$M_Z^2 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4(C_1^Z)^2 + (g_1^Z)^2 m_{11}^2 & g_1^Z g_2^Z m_{12}^2 & g_1^Z g_3^Z m_{13}^2 & \dots \\ g_1^Z g_2^Z m_{12}^2 & 4(C_2^Z)^2 + (g_2^Z)^2 m_{22}^2 & g_2^Z g_3^Z m_{23}^2 & \dots \\ g_1^Z g_3^Z m_{13}^2 & g_3^Z g_2^Z m_{32}^2 & 4(C_3^Z)^2 + (g_3^Z)^2 m_{33}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & \end{pmatrix}, \tag{6.110}$$

ahol $m_{nm} = \sqrt{v_1^2 + f_n^Z f_m^Z v_2^2}$,

$$M_A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & (C_1^A)^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & (C_2^A)^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & (C_3^A)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ & & & & \end{pmatrix}, \tag{6.111}$$

ahol $C_n^A = \frac{n\pi}{b}$. A nem diagonális tömegmátrixok miatt a $w_n^{\pm\mu}$ és z_n^μ módusok nem tömegsajátállapotok, tehát nem írnak le fizikai részecskéket. Ahhoz, hogy ezt a problémát megoldjuk, diagonalizálni kell a tömegmátrixot, meg kell határozni a sajátértékeket (fagráf szintű tömegek) és sajátvektorokat (fizikai részecskét leíró mezők). Ez a feladat, ahogy ezt már az $U(1)$ elméletben is leírtuk, egyszerű keretek között nem tárgyaható. Ezért a legkisebb módusra vonatkozó, $w_n^{\pm\mu}$ és z_n^μ fagráf szintű tömegarányt néhány speciális esetben számoljuk ki.

6.8. $w^{\pm\mu}$ és z^{μ} tömegarány

A modell ellenőrzése szempontjából az első lépést jelenti a mértékbozon tömegarány ellenőrzése. Ebben az eseten ez a vektormezők KK-tornyainak legkönnyebb módustömegarányát jelenti, hiszen értelemszerűen azok feleltethetők meg az általunk eddig tapasztalt mértékbozonoknak.

A tömegarányt 3 specális határesetben esetben adjuk meg.

6.8.1. $v_1 = 0$ és $v_2 = 0$

Az első eset az, amikor nincs szimmetriasértő potenciál a *brane*-eken. Ekkor a mértékbozonok peremfeltételei (6.65) és (6.67) tisztán Neumann-feltételek, azaz a móduskifejtésük és módustömegek megegyeznek az A_μ-vel. Ebből következik, hogy létezik nulla tömegű módus. Ez viszont nem felel meg az általunk tapasztalt eredményeknek.

Ez a határeset nem magyarázza meg a tömegarányt, a legkönnyebb módusok nem tömegesek.

6.8.2. $v_1 \to \infty$ és $v_2 \to \infty$

Ez az eset a Higgs mentes eset, ekkor lecsatoljuk a Higgs-mezőt a VEV-en keresztül. A mértékbozonok peremfeltételeire ((6.65) és (6.67)) ez Dirichlet-feltételt eredményez. Ekkor a móduskifejtésekben (6.70) csak a páratlan szinusz marad meg. A módustömeg könnyen kiszámítható:

$$\cos(C_n^i b) = 0 \Rightarrow C_n^i = \frac{n + \frac{1}{2}}{b}\pi. \tag{6.112}$$

ahol $i = W, Z$. Látható, hogy nincs nulla módus, a legkönnyebb mértékbozonok tömegesek. Viszont a generált tömeg mindkét mértékbozon esetében ugyan akkor, ezért a módustömegarány:

$$\frac{m_0^W}{m_0^Z} = \frac{C_0^W}{C_0^Z} = 1. \tag{6.113}$$

Ez az eset sem adja vissza jól a helyes tömegarányt, viszont van lehetőség a modell javítására, ami jól korrigálja a tömegarányt.

6.8.3. v_1 és v_2 megmarad, de hatásuk nem domináns

Ha a VEV-ek értéke kicsi (azaz $1 \gg (g^Z)^2 b^2 (v_1^2 + v_2^2)$ a (7.1)-ból), akkor a (6.109) és (6.110) tömegmátrixok leegyszerűsödnek, és olyan alakúak lesznek, mint a már az $U(1)$ elméletben is említett cikkben [7], amelyekhez ismertek a sajátértékeket meghatározó egyenletek is.

A kis VEV-ek miatt, a módustömeget meghatározó egyenletek (6.71) és (6.72) explicit megoldhatók, és a megoldásuk minkét esetben ugyan az ($C_n = C_n^W = C_n^Z$):

$$\infty \approx ctg(bC_n) \Rightarrow C_n = \frac{n\pi}{b}, \tag{6.114}$$

ez a módustömeg ugyanaz mint az első esetben. Most azonban nem okoz gondot a nulla módus, hiszen a tömegmátrix a spontán szimmetriasértés miatt nem diagonális, így a legkönnyebb módustömeget megadó sajátérték az off-diagonális elemekből kap járulékot.

Az effektív csatolási állandók ebben a közelítésben a *brane*-eken ugyan azok, mert $f_n^W \approx f_n^Z \approx 1$. Maguk a csatolások,

$$g_n = g \approx \frac{2g_5}{b}, \tag{6.115}$$

és

$$g_n^Z = g^Z \approx \frac{2\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{b}. \tag{6.116}$$

A most meghatározott csatolások és módustömegek mellett, a tömegmátrixok sajátértékeit megadó egyenletek a következők:

$$m_n^W = \left(\frac{2g_5}{b}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 ctg(m_n^W b), \tag{6.117}$$

és

$$m_n^Z = \left(\frac{2\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{b}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 ctg(m_n^Z b). \tag{6.118}$$

ezeken az egyenleteken a legkönnyebb módus meghatározásához a következő sorfejtéseket kell használni:

$$ctg(x) \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{3}, \tag{6.119}$$

$$\sqrt{\frac{1}{1+x}} \approx 1 - \frac{1}{2}x. \tag{6.120}$$

Így végül a legkisebb sajátértékek:

$$m_0^W = \frac{2g_5}{b}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\left[1 - \frac{1}{6}\left(g\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 b^2\right], \tag{6.121}$$

$$m_0^Z = \frac{2\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{b}\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\left[1 - \frac{1}{6}\left(g^Z\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 b^2\right]. \tag{6.122}$$

A tömegarány innen már egyszerűen számolható

$$\frac{m_0^W}{m_0^Z} = \cos(\theta_W)\left(1 + \frac{1}{6}(g^Z)^2(v_1^2 + v_2^2)b^2 + O(v_i^4)\right), \tag{6.123}$$

ahol $\cos(\theta_W) = \frac{g}{g^Z} = \frac{g_5}{\sqrt{g_5^2+g'^2}}$ a Weinberg-szög koszinusza.

A tömegarány ebben az esetben nullad rendben visszaadja a 4D-ban megszokott értéket, illetve első rendben ad egy kis korrekciót, amely arányos az extra dimenzió méretének négyzetével.

6.9. $W_0^{\pm}(x)$ és $Z(x)$ kölcsönhatások

Végül fontos megemlíteni a mértékrögzítés után megmaradó skalármezők kölcsönhatásait, ugyanis az ezekből számolható kvantumkorrekciók révén tömeget generálhatunk az említett mezőknek.

Kölcsönhatási tagok az $U(1)$ elmélettel ellentétben, nem csak a *brane*-ekről jöhetnek, hanem a *bulk*-ból is, hiszen az $SU(2) \times U(1)$ mértékcsoport nem ábeli. Az 5D-s kölcsönhatási Lagrange a *bulk*-ban:

$$\mathcal{L}^{bulk} = g_5\left(\partial_5 A'^{\,a}_{\mu} - \partial_\mu \tilde{A}_5^a\right) f^{abc}\tilde{A}_5^b A'^{c\mu} + \frac{g_5^2}{2} f^{abc} f^{ade}\tilde{A}_5^b A'^{\,c}_{\mu}\tilde{A}_5^d A'^{e\mu} + \tag{6.124}$$

$$+\frac{g_5^2}{2} f^{abc} f^{ade}\tilde{A}_5^b\tilde{A}_5^c\tilde{A}_5^d\tilde{A}_5^e, \tag{6.125}$$

ahol $a = 1, 2, 3$. Az $A^{a\mu}$ és $\tilde{A}_5^a$ mezők helyére be kell helyetesíteni az újra definiált mezőket (6.53) és (6.38). Az eredmény hasonló lesz a 4D-ban megszokott $W^{\pm\mu}$ és Z^μ kölcsönhatási tagokhoz.

A *brane*-eken lévő 5D-s kölcsönhatási Lagrange az eddigi számítások alapján könnyen felírható az új mezőkkel:

$$\mathcal{L}_b = \delta(y)\left[\frac{2}{g_5^2 v_1^3}\partial_\mu W_0^+ \partial^\mu W_0^- h_1 + \frac{1}{g_5^2 v_1^4}\partial_\mu W_0^+ \partial^\mu W_0^- h_1^2\right] + \qquad (6.126)$$

$$+\delta(y)\left[-(\partial_\mu W_0^+ W^{-\mu} + \partial_\mu W_0^- W^{+\mu})\left(\frac{4}{v_1}h_1 + \frac{2}{v_1^2}h_1^2\right)\right] + \qquad (6.127)$$

$$+\delta(y)\left[\frac{1}{(Q'^Z)^2 v_1^3}\partial_\mu Z \partial^\mu Z h_1 - \frac{\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{Q'^Z v_1}\partial_\mu Z Z^\mu h_1\right] + \qquad (6.128)$$

$$+\delta(y)\left[\frac{1}{2(Q'^Z)^2 v_1^4}\partial_\mu Z \partial^\mu Z h_1^2 - \frac{\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{2Q'^Z v_1^2}\partial_\mu Z Z^\mu h_1^2\right] + \qquad (6.129)$$

$$+\delta(y-b)\left[\frac{2}{g_5^2 v_2^3}\partial_\mu W_0^+ \partial^\mu W_0^- h_2 + \frac{1}{g_5^2 v_2^4}\partial_\mu W_0^+ \partial^\mu W_0^- h_2^2\right] + \qquad (6.130)$$

$$+\delta(y-b)\left[-(\partial_\mu W_0^+ W^{-\mu} + \partial_\mu W_0^- W^{+\mu})\left(\frac{4}{v_2}h_2 + \frac{2}{v_2^2}h_2^2\right)\right] + \qquad (6.131)$$

$$+\delta(y-b)\left[\frac{1}{(Q'^Z)^2 v_2^3}\partial_\mu Z \partial^\mu Z h_2 - \frac{\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{Q'^Z v_2}\partial_\mu Z Z^\mu h_2\right] + \qquad (6.132)$$

$$+\delta(y-b)\left[\frac{1}{2(Q'^Z)^2 v_2^4}\partial_\mu Z \partial^\mu Z h_2^2 - \frac{\sqrt{g_5^2 + g'^2}}{2Q'^Z v_2^2}\partial_\mu Z Z^\mu h_2^2\right] \qquad (6.133)$$

Az effektív 4D-s képhez a kölcsönhatási tagokat integrálni kell az extra dimenzióra. A *bulk* komponensekben a skalármezők, ha két vektormezőhöz csatolódnak, akkor csak az azonos vektormódusokkal hatnak kölcsön, mivel az integráláskor csak azok adnak nem nulla járulékot (hasonlóan a kvadratius rendű effektív Lagrange leírásához). A *brane* komonensekben már a Dirac-delta disztribúciók miatt keveredés is fellép a módusok között. A csatolási állandók itt is módusfüggők lesznek.

7. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat első részében röviden ismertettük a Standard Modell előnyeit és hártányait, kiemelt hangsúlyt fektetve a hierarchia problémára, melynek megoldása a Standard Modell kiterjesztésével lehetséges. A Standard Modellen túli elméletek közül az extra dimenziós elméleteket tárgyaltuk részeltesen. Leírtuk az elmélet kialakulásának, majd fejlődésének történetét és a húrelmélettel való kapcsolatát. Bemutattuk, hogy a különböző modellekben (nagy extra dimenziók, görbült extra dimenzió), hogy oldódik meg a hierarchia probléma.

A második részben két spontán sértett mértékelméletet, az $U(1)$ elektrodinamikát és az $SU(2)_L \times U(1)_Y$ elektrogyenge elméletet írtuk le, speciális extra dimenziós keretek között. Nagy hangsúlyt fektettünk a fizikai szabadsági fokok meghatározására, ezért spciálisan választott unitér mértékben számoltunk. A számításokat az általános, Lagrange-sűrűségbe írható R_ξ-mértékben is elvégeztük, ahol az unitér határeset ($\xi \to \infty$) visszaadta a direkt számolás eredményeit (az R_ξ-mértékről ld. [10][11][13]). Ezt a dolgozatban terjedelmi okok miatt, nem írtuk le. Meghatároztuk a mezők KK-móduskifejtését és ebből az effektív 4D-s modelleket, 4D-s tömegmátrixokat és csatolási állandókat.

Az $U(1)$ mértékelméletben összehasonlítottuk az extra dimenzió *orbifold* és *intervallum* képét. Eredményül azt kaptuk, hogy az extra dimenziót csak akkor lehet ellentmondás mentesen *orbifold*-ként kezelni, ha a fixpontjaiban nincs szimmetriasértő potenciál. Minden más esetben intervallumon kell dolgozni.

A speciális mértékrögzítés miatt a modellekben megjelentek nulla tömegű, 4D-s skalármező-konstrukciók $\tilde{A}'_5, Z, W_0^{\pm}$. Az effektív 4D-s modellben kiszámolt kölcsönhatásaik révén, már 1-hurok szinten generálható ezeknek tömegjárulék. Ezt a $\tilde{A}'_5$ esetén részletesen leírtuk.

Az elektrogyenge elmélet 4D-s modelljében a mértékbozonok legkönnyebb módusainak tömegarányát ($\frac{m_0^W}{m_0^Z}$) 3 határesetben kiszámítottuk. A kis VEV-ek határesetében ($1 \gg (g^Z)^2(v_1^2 + v_2^2)b^2$) a tömegarány:

$$\frac{m_0^W}{m_0^Z} = \cos(\theta_W)\left(1 + \frac{1}{6}(g^Z)^2(v_1^2 + v_2^2)b^2 + O(v_i^4)\right). \tag{7.1}$$

Az eredmény egy kis korrekciótól eltekintve, visszaadja a 4D-s Standard Modell jóslatát. Jelen esetben az extra dimenzió keretein belül van lehetőség a hierarchia probléma megoldására.

Irodalomjegyzék

[1] B. L. Wornshop: The quantum equation and the theory of fields, 1966

[2] L. D. Landau, E. M. Lifsic: Elméleti fizika II.: Klasszikus erőterek, 1976

[3] Ta-Pei Cheng, Ling-Fong Li: Gauge theory of elementary particle physics, Oxford, 1984

[4] V. A. Rubakov, „Large and infinite extra dimensions: An introduction," Phys. Usp. **44** (2001) 871 [Usp. Fiz. Nauk **171** (2001) 913] [arXiv:hep-ph/0104152].

[5] L. Randall and R. Sundrum, „An alternative to compactification," Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690 [arXiv:hep-th/9906064].

[6] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, „Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity," Phys. Rev. D **59** (1999) 086004 [arXiv:hep-ph/9807344].

[7] A. Muck, A. Pilaftsis and R. Ruckl, „An introduction to 5-dimensional extensions of the standard model," Lect. Notes Phys. **647** (2004) 189 [arXiv:hep-ph/0209371].

[8] A. Muck, A. Pilaftsis and R. Ruckl, „Electroweak constraints on minimal higher-dimensional extensions of the standard model," arXiv:hep-ph/0203032.

[9] A. Muck, A. Pilaftsis and R. Ruckl, „Minimal higher-dimensional extensions of the standard model and electroweak observables," Phys. Rev. D **65** (2002) 085037 [arXiv:hep-ph/0110391].

[10] C. Csaki, J. Hubisz and P. Meade, „TASI lectures on electroweak symmetry breaking from extra dimensions," arXiv:hep-ph/0510275.

[11] C. Csaki, „Higgsless electroweak symmetry breaking," arXiv:hep-ph/0412339.

[12] G. Cacciapaglia, C. Csaki, C. Grojean, M. Reece and J. Terning, „Top and bottom: A brane of their own," Phys. Rev. D **72** (2005) 095018 [arXiv:hep-ph/0505001].

[13] C. Csaki, „TASI lectures on extra dimensions and branes," arXiv:hep-ph/0404096.

[14] Peskin & Schröder: An Introduction to Quantum Field Theory, 1995