# $\boxed{2}$ Hőterjedés

Miért fontos?

- fűtés (lakás, erőmű, reaktor...)
- hűtés (hűtőszekrény, légkondicionálás)
- hőszigetelés (lakás, bojler, ...)
- hőátadás (edény fala, hőcserélő erőművekben, ...)

Három fő mechanizmus:

- Konverció: hő, energia szállítása folyadékban vagy gázban a molekulák mozgása által. A mozgó részecskék magukkal viszik az energiát. Mechanizmusai:
  - diffúzió (részecskék rendezetlen hőmozgása, ütközések)
  - advekció (sodródás).

  Szilárd anyagban elhanyagolható.
- Hősugárzás: elektromágneses sugárzás, a meleg ($T > 0\,K$) tárgyak fotonokat (elektromágneses sugárzást) bocsátanak ki az elektronok elrendeződésének változásai miatt.

  Nem kell hozzá közeg, vákuumban is működik.

  Az egységnyi felületen időegység alatt kisugárzott energia

  $r = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$, ahol $[r] = J/m^2 s$, $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\, W/m^2 K^4$ (Stefan - Boltzmann - állandó)

  $T$: a felület hőmérséklete, $[T] = K$ (kelvin) ($273K - 0°C$)

  $\varepsilon$: a sugárzó test tulajdonságaitól függ, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$.

  $\varepsilon = 1$: feketetest: idealizált test, amely minden beérkező sugárzást elnyel, nem ver vissza.

  Alacsony hőmérsékleten a hősugárzás nem számottevő, de fontos pl. izzó fém, tűz, napsütés, stb. esetén.

  Pl. 300K esetén: $r = \varepsilon \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4 \frac{W}{m^2} = \varepsilon \cdot 459{,}3 \frac{W}{m^2}$

– <u>Hővezetés</u>: A molekulák közti kölcsönhatások, pl. ütközések okozzák: a melegebb terület gyorsabban mozgó, rezgő részecskéi energiát adnak át a hidegebb terület lassabb molekuláinak. Mindig fellép, ha a hőmérséklet helyről helyre változik, azaz ha <u>hőmérséklet gradiens</u> van az anyagban.

Csak ezzel foglalkozunk most.

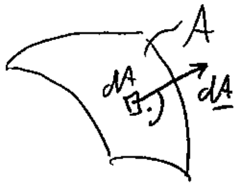
## Hővezetés

Jellemzése: $\underline{\dot q}$ hőáramsűrűség-vektor. Nagysága megadja az időegység alatt az egységnyi felületen átáramló energiát,

$$[|\underline{\dot q}|] = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$$

, iránya megadja, merre folyik az energia.

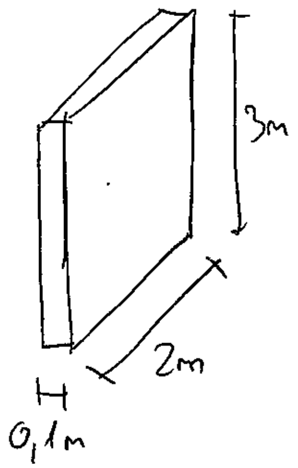
$d\dot Q$ – egy $d\underline{A}$ felületelemen áthaladó energia időegység alatt. Itt $d\underline{A}$ a felületre merőleges vektor, $|d\underline{A}| = dA$ a felületelem nagysága. Az $A$ felületen átáramló energia időegység alatt:




$$\dot Q = \int_{(A)} \underline{\dot q}\, d\underline{A}, \quad [\dot Q] = W = \frac{J}{s}.$$

Ennek neve <u>hőáram</u>.

Számpélda: A falon $\dot{Q} = 24\,W$ hő áramlik át másodpercenként. Mekkora a hőáramsűrűség?




$$\dot{Q} = \int_{(A)} \underline{\dot{q}}\, d\underline{A}$$

. Most $\underline{\dot{q}}$ és $d\underline{A}$ is merőleges a felületre, azonos az iránya: $\underline{\dot{q}}\, d\underline{A} = \dot{q} \cdot dA$

Mivel $\dot{q}$ állandó a felület minden pontjában (feltevés):

$$\dot{Q} = \dot{q} \int_{(A)} dA = \dot{q} \cdot A \quad \text{, azaz} \quad \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{24\,W}{6\,m^2} = 4\,\frac{W}{m^2}$$

Számpélda: Mekkora falfelületen áramlik át $\dot{Q} = 30\,W$ hő másodpercenként, ha $\dot{q} = 5\,\frac{W}{m^2}$ a hőáramsűrűség?

$$\dot{Q} = \dot{q} A \rightarrow A = \frac{\dot{Q}}{\dot{q}} = \frac{30\,W}{5\,\frac{W}{m^2}} = 6\,m^2$$

Megfigyelés: $\underline{\dot{q}}$ attól függ, hogy milyen gyorsan változik a hőmérséklet helyről-helyre. Ezt a $T$ hőmérséklet ($[T]=K$) térbeli eloszlása, $T(\underline{r})$ gradiense adja meg:

$$\operatorname{grad} T(\underline{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Itt pl. $\frac{\partial T}{\partial x}$ adja meg, hogy mennyit változik a hőmérséklet, míg $x$ irányba lépünk egységnyit.

grad $T$ iránya arra mutat, amerre legjobban nő a hőmérséklet.

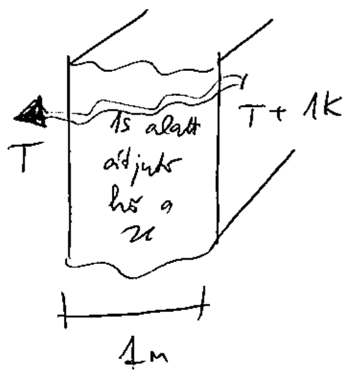
Ha a hőmérsékleti gradiens ($|\operatorname{grad} T|$) nem ~~túl~~ nagy (azaz az anyagon, testen belül a hőmérséklet nem nagyon változik helyről-helyre), akkor, a megfigyelések szerint, $\underline{\dot{q}}$ arányos grad$T$ -vel:

$$\boxed{\underline{\dot{q}} = -\varkappa \cdot \operatorname{grad} T}$$ Fourier-egyenlet,

ahol $[\varkappa] = \frac{J}{m \cdot s \cdot K} = \frac{W}{mK}$ hővezetési együttható

($J = N \cdot m$, joule; $W = \frac{J}{s}$, watt)

$\varkappa$ hővezetési együttható jelentése: egységnyi idő alatt 1K hőmérsékletesésen $\underbrace{1\,m}_{1\,m^2\text{-es felületen}}$ hosszon áthaladó hő (energia) mennyisége:




$\varkappa$ értéke általában függ a hőmérséklettől és a nyomástól.

$\varkappa > 0$ mindig: az energia a magasabb hőmérsékletű helytől a hidegebb felé megy, ezért van a negatív előjel a Fourier-egyenletben: $\underline{\dot{q}}$ és grad $T$ iránya ellentétes.

A hővezetési együttható tipikus értékei:

- fémek: $2-420 \frac{W}{mK}$ → jó hővezetés, mert a szabad elektronok sok energiát szállítanak (emiatt jó áramvezetők is, a szabad elektronok miatt).
- építő- és szigetelőanyagok: $0{,}02-3 \frac{W}{mK}$
- cseppfolyós anyagok (kivéve folyékony fémek): $0{,}09-0{,}7 \frac{W}{mK}$
- gázok: $0{,}005-0{,}5 \frac{W}{mK}$ → rossz hővezető, mert ritkán vannak benne a részecskék, kevés az ütközés (de: ha mozog a gáz, a konvekció ezt jelentősen növeli!)

---

Ha csak x irányban van hőterjedés, $T = T(x)$ és $\underline{\dot{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_x \\ \dot{q}_y \\ \dot{q}_z \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \dot{q}_x = -\varkappa \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -\varkappa \frac{dT}{dx}, \quad \dot{q}_y = 0, \quad \dot{q}_z = 0$$

(például falon keresztül).

<u>Számpélda</u>: Mekkora a hőáramsűrűség a téglafalon keresztül, ha a hőmérséklet centiméterenként 1°C-t esik? A téglafal hővezetési együtthatója $\varkappa = 0{,}5 \frac{W}{mK}$.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1K}{1\,cm} = \frac{1K}{10^{-2}\,m} = 100 \frac{K}{m}$$

$$\dot{q}_x = -\varkappa \frac{dT}{dx} = -0{,}5 \frac{W}{mK} \cdot 100 \frac{K}{m} = -50 \frac{W}{m^2}$$

<u>Számpélda</u>: Mekkora a hőmérsékleti gradiens a falban, ha a hőáramsűrűség $\dot{q}_x = 30 \frac{W}{m^2}$, a téglafal hővezetési együtthatója $\varkappa = 0{,}5 \frac{W}{mK}$?

$$\dot{q}_x = -\varkappa \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_x}{\varkappa} = -\frac{30 \frac{W}{m^2}}{0{,}5 \frac{W}{mK}} = -60 \frac{K}{m}$$

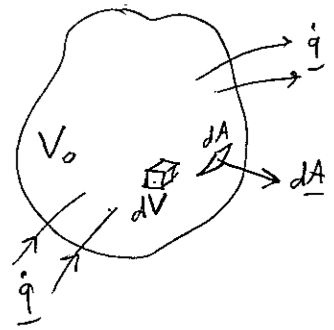
Tehát méterenként 60 °C-ot esik a téglafallban a hőmérséklet, azaz centiméterenként 0,6 °C-ot.

---

DE HONNAN TUDJUK, HOGY VÁLTOZIK A FALBAN A HŐMÉRSÉKLET?

# Hővezetési egyenlet

Tekintsünk egy $V_0$ térfogatrészt, $A_0$ felülettel!




$dV$: kicsiny térfogatelem; $[dV] = m^3$.
$dA$: kicsiny felületelem; $[dA] = m^2$
$d\underline{A}$: kicsiny felületelem-vektor: nagysága: $|d\underline{A}| = dA$,
iránya: felületre merőleges, kifelé mutat.
$[dA] = [d\underline{A}] = m^2$.

Ha a hőmérséklet megváltozik a $dV$ részben, akkor a benne levő energia is. A hőmérséklet függhet a helytől és az időtől is: $T = T(\underline{r}, t)$. Egységnyi idő alatt a hőmérsékletváltozás adott helyen: $\frac{\partial T}{\partial t}$. Jelölje $c_p$ az állandó nyomáson vett fajhőt: ennyi hő kell egységnyi tömegű anyag egységnyi hőmérséklettel történő melegítéséhez, $[c_p] = \frac{J}{kg \cdot K}$. Szilárd anyagról van szó, ezért állandó a nyomás.

A $dV$ térfogatelem tart $dm = \rho \cdot dV$ tömeg ($\rho$: sűrűség, $[\rho] = \frac{kg}{m^3}$) felmelegítéséhez $c_p \cdot dm \cdot dT$ energia kell, ha $dT$ a hőmérséklet változása, egységnyi idő alatt $c_p \cdot dm \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV$.

Ezt a teljes $V_0$ térfogatra összegezve a $V_0$-on belül a teljes energiaváltozás időegység alatt:

$$\frac{dE}{dt} = \int_{(V_0)} c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV$$

(időegység alatt bekövetkező energiaváltozás, azaz teljesítmény mértékegysége van.)

Az energia megváltozásának oka $V_0$-on belül lehet:

- felületi hőcsere $A_0$-on keresztül
- hőforrás vagy hőelnyelés $V_0$-on belül (pl. fűtőszál, kémiai reakció, nukleáris energia felszabadulása, ...)

Azaz: $\frac{dE}{dt} = \int_{(V_0)} c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} dV =$ felületi hőcsere + hőforrás − hőelnyelés.

- Felületi hőcsere: időegység alatt beáramló hő:

$$\dot{Q} = -\oint_{(A_0)} \dot{\underline{q}}\, d\underline{A}$$

Gauss–Osztrogradszkij-tételt felhasználva:

(negatív előjel: $\oint \dot{\underline{q}}\, d\underline{A}$ a kiáramló hő, $d\underline{A}$ kifelé mutat)

$$\dot{Q} = -\oint_{(A_0)} \dot{\underline{q}}\, d\underline{A} = -\int_{(V_0)} \operatorname{div} \dot{\underline{q}}\, dV$$

, ahol div: divergencia (forrásosság):

$$\operatorname{div} \dot{\underline{q}} = \frac{\partial \dot{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{q}_z}{\partial z}$$

- Hőforrás és -elnyelés $V_0$-ban: ha az egységnyi térfogatban időegység alatt $\dot{e}$ hő termelődik, $[\dot{e}] = \frac{J}{m^3 \cdot s}$, akkor a teljes $V_0$ térfogatban időegység alatt

$$\dot{J} = \int_{(V_0)} \dot{e}\, dV$$

Ezekkel: $\frac{dE}{dt} = \dot{Q} + \dot{J}$, azaz

$$\int_{(V_0)} c_p \varrho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV = -\int_{(V_0)} \operatorname{div} \dot{\underline{q}}\, dV + \int_{(V_0)} \dot{e}\, dV \Rightarrow \int_{(V_0)} \left[ c_p \varrho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \dot{\underline{q}} - \dot{e} \right] dV = 0$$

Mivel ez minden $V_0$ térfogatra igaz:

$$\boxed{c_p \cdot \varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \dot{\underline{q}} - \dot{e} = 0}$$

Hővezetés általános differenciálegyenlete.

Használjuk, ki hogy $\dot{\underline{q}} = -\varkappa \operatorname{grad} T$ (Fourier-törvény):

$$\boxed{c_p \cdot \varrho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + \dot{e}}$$

Speciális esetek

— Ha $\varkappa$ mindenhol azonos, nem függ a helytől:

$$c_p \cdot \varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \cdot \operatorname{div} \operatorname{grad} T + \dot{e} = \varkappa \cdot \Delta T + \dot{e} \quad \text{ahol}$$

$\Delta =$ Laplace-operátor.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \Delta T + \frac{1}{\varrho \cdot c_p} \cdot \dot{e} \quad , \text{ahol } a = \frac{\varkappa}{\varrho \cdot c_p} \, , \ [a] = \frac{m^2}{s} \text{ a}$$

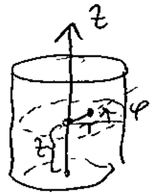
hőmérsékletvezetési tényező

• Derékszögű koordinátarendszerben:

$T = T(x, y, z, t)$ és $\dot{e} = \dot{e}(x, y, z, t)$, ekkor az egyenlet:

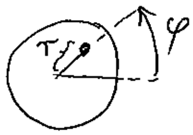
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{\varrho c_p} \cdot \dot{e}$$

• Hengerkoordinátarendszerben:




$T = T(r, \varphi, z, t)$, $\dot{e} = \dot{e}(r, \varphi, z, t)$

ekkor az egyenlet:




$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\varrho c_p} \cdot \dot{e}$$

— Stacionárius eset: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, állandósult állapot, ekkor (ha $\varkappa$ még mindig helytől független): $\varkappa \cdot \Delta T + \dot{e} = 0$.

— Ha nincs belső hőfejlődés sem: $\dot{e} = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$.

Ez egydimenziós esetben (ha csak $x$ irányban van hővezetés):

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = A \cdot x + B$$

, a hőmérséklet lineárisan változik $x$-ben, $A$ és $B$ pedig a peremfeltételektől függ.

## Peremfeltétel

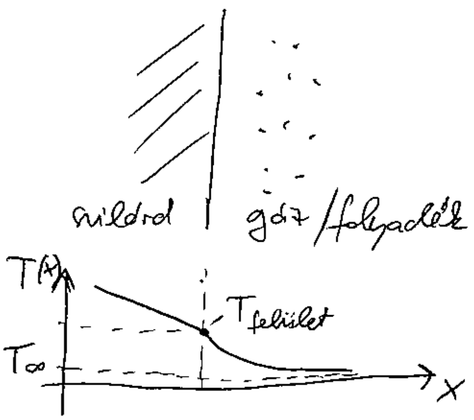
1). Felület hőmérséklete rögzített, $T|_{felület} = \text{adott}$

2). Felület hőfluxusa adott, rögzített: $\dot{q}|_{felület} = \text{adott}$.
Volt: Fourier-törvény: $\dot{q} = -\varkappa \cdot \text{grad}\, T$ miatt ekkor grad T is adott, tehát a hőmérséklet gradiense (hely szerinti változása) adott a felületen.

3). Newton-féle lehűlési törvény: a szilárd fal mellől konvekció viszi el a hőt. Ez a legfizikaibb, legcinikusabb peremfeltétel. Ekkor, mérések alapján, teljesül:

$$\dot{q}|_{felület} = \alpha \cdot (T_{felület} - T_\infty)$$

, ahol $\dot{q}|_{felület}$ a szilárd anyagban a hőáramsűrűség a felületen, arra merőlegesen




$T_{felület}$ a felület hőmérséklete,
$T_\infty$ a gáz/folyadék hőmérséklete végtelen messze a felülettől

$\alpha$: hőátadási tényező, $[\alpha] = \frac{W}{m^2 K}$

| Anyag | $\alpha\, [W/m^2K]$ |
|---|---|
| Álló levegő | 2,8 – 23 |
| Mozgó levegő | 11,3 – 55 |
| Mozgó víz | 280 – 17000 |
| Telített gőz | 5700 – 28000 |

Stacionárius esetben, mivel a felületen átadott $\dot{q}$ hőáramsűrűség azonos a szilárd anyagban haladóval:

$\dot{q} = -\varkappa\, \text{grad}\, T \Rightarrow$

$\alpha \cdot (T_{felület} - T_\infty) = -\varkappa (\text{grad}\, T)|_{felület}$

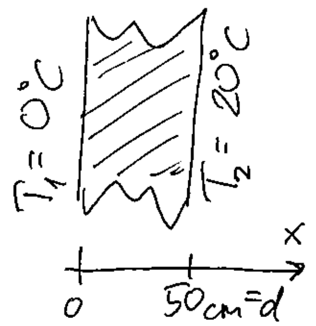
Ha csak x szerint van hővezetés, a felületre merőlegesen:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{felület} = \frac{-\alpha}{\varkappa} (T_{felület} - T_\infty)$$

Fajlagos hőellenállás (számpélda)



50 cm vastag fal külső felülete 0°C-os, a belső 20°C-os. Hogyan változik a hőmérséklet a falban? Mekkora a falon átjutó hőáramsűrűség, ha a téglafal hővezetési együtthatója $\varkappa = 0{,}5\,\frac{W}{mK}$ ?




Láttuk: ha $\varkappa$ független a helytől, stacionárius a hővezetés, és nincs a falban hőkeletkezés/hőelnyelés:

$$\Delta T = 0 \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow T(x) = A \cdot x + B.$$

Peremfeltételek: $x=0$: $T(0) = T_1$ és $x = d$ : $T(d) = T_2$

azaz $T(0) = A \cdot 0 + B = T_1$ , $T(d) = A \cdot d + B = T_2$

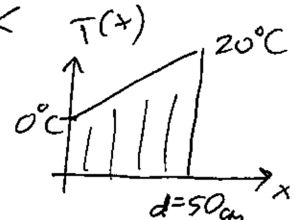
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$B = T_1 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{T_2 - T_1}{d}$$

Vagyis: $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1$

számokkal: $T(x) = \frac{293K - 273K}{0{,}5m} \cdot x + 273K$

$T(x) = 40\,\frac{K}{m} \cdot x + 273\,K \longrightarrow$




Írjuk fel gradT-t: $\mathrm{grad}\,T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_2 - T_1}{d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} K/m$

A hőáramsűrűség a Fourier-egyenletből: $\underline{\dot q} = -\varkappa\,\mathrm{grad}\,T$

$\Rightarrow \quad \underline{\dot q} = \begin{bmatrix} -0{,}5 \cdot 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{K}{m} \cdot \frac{W}{mK} = \begin{bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{W}{m^2}$ azaz $\dot q = \dot q_x = -20\,\frac{W}{m^2}$.

Láttuk:

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} \cdot x + T_1$$ stacionárius hővezetés falon át.

$$\Rightarrow \operatorname{grad} T = \begin{bmatrix} \frac{T_2 - T_1}{d} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\dot{q}} = -\varkappa \operatorname{grad} T, \quad \dot{q} = \dot{q}_x = -\varkappa \frac{T_2 - T_1}{d}$$

x tengely szerinti sorrend!!!

azaz $\dot{q} = \dot{q}_x = \varkappa \frac{T_1 - T_2}{d}$. Vezessük be: $\Delta T = T_1 - T_2$ (hőmérséklet-különbség)

$$\dot{q} = \frac{\varkappa}{d} \cdot \Delta T$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\dot{q} = \frac{\Delta T}{r}}$$

Vezessük be: $\boxed{r = \frac{d}{\varkappa}}$

FAJLAGOS HŐELLENÁLLÁS: egy $d$ vastagságú, $\varkappa$ hővezetési együtthatójú fal egységnyi felületű darabja mennyire „áll ellen" a hővezetésnek.

Minél vastagabb a fal, annál nagyobb $r$, és minél nagyobb a hővezetési együtthatója, annál kisebb $r$.

$$[r] = \frac{m^2 K}{W}.$$

Innen is kifejezhető $r$:

$r = \frac{\Delta T}{\dot{q}}$, ahonnan a fajlagos hőellenállás szemléletes jelentése: a fal $1 m^2$-én 1s alatt 1 J hő átjuttatásához mekkora hőmérsékletkülönbség kell legyen a fal két oldala között. Minél nagyobb hőmérsékletkülönbség szükséges, annál inkább ellenáll a fal a hővezetésnek, annál nagyobb $r$, a fajlagos hőellenállás.

---

A számpéldában: $r = d/\varkappa = 0{,}5 m / 0{,}5 \frac{W}{mK} = 1 \frac{m^2 K}{W} \Rightarrow \dot{q} = \frac{\Delta T}{r} = -20 \frac{W}{m^2}$

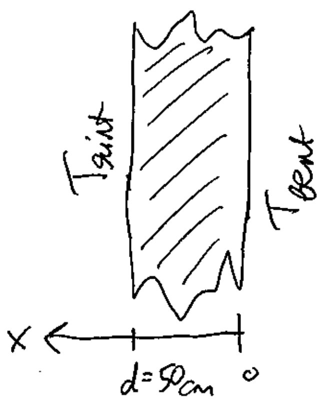
ahogy már az előző oldalon láttuk.

# Hőellenállás (számpélda):

10 m²-es, 50 cm vastag téglafalon 120 W hő áramlik a belső oldalról a külső felé. A kinti hőmérséklet $T_{kint} = 8°C$. Mekkora a benti hőmérséklet, ha a téglafal hővezetési együtthatója $\varkappa = 0{,}5 \frac{W}{mK}$?

$\dot{q} = \dot{q}_x = \frac{\dot{Q}}{A}$, és $\dot{q} = \frac{\Delta T}{r}$ fal esetén $\Rightarrow \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\Delta T}{r}$

ahol $\Delta T = T_{bent} - T_{kint}$ (Megjegyzés: mindegy, hogy az x tengelyt milyen irányban vesszük fel, de $\Delta T$-ben a két tagot ennek sorrendjében kell írni: $\Delta T = T_{bent} - T_{kint}$).




Innen: $\dot{Q} = A \cdot \frac{\Delta T}{r} = \frac{\Delta T}{\frac{r}{A}} = \frac{\Delta T}{\left(\frac{d}{A\varkappa}\right)}$

Vezessük be: $\boxed{R = \frac{d}{A \cdot \varkappa}}$ hőellenállás: d vastagságú, A felületű $\varkappa$ hővezetési együtthatójú fal mennyire áll ellen a hővezetésnek. $[R] = \frac{K}{W}$. (Megjegyzés: $R = \frac{r}{A}$; $r = A \cdot R$).

Nagy d (vastag fal) $\Rightarrow$ nagy R (jobb szigetelő)

Nagy A (nagy felület, ahol átjut a hő) $\Rightarrow$ kis R (kis ellenállás)

Nagy $\varkappa$ (jó hővezető) $\Rightarrow$ kis R (kis ellenállás).

Ezzel: $\boxed{\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R}}$

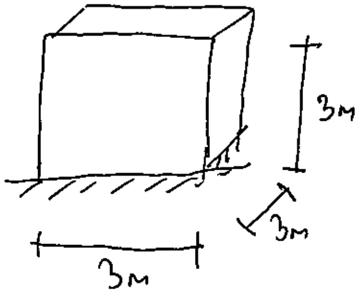
Példában: $R = \frac{d}{A\varkappa} = \frac{0{,}5\,m}{10\,m^2 \cdot 0{,}5 \frac{W}{mK}} = 0{,}1 \frac{K}{W}$ ; $\Delta T = \dot{Q} R = 120\,W \cdot 0{,}1 \frac{K}{W}$

$\Delta T = 12\,K = T_{bent} - T_{kint} \Rightarrow T_{bent} = T_{kint} + \Delta T = 8°C + 12°C = 20°C$

Azaz $T_{bent} = 20°C$ a belső falhőmérséklet.

Számpélda

Mennyi hő áramlik ki egy nap alatt abból az épületből, amelynek $d=50cm$ vastag falainak és tetejének hővezetési együtthatója $\kappa=0{,}5\,\frac{W}{mK}$, ha a falak belső hőmérséklete $T_0=20°C$, a külső $T_1=0°C$ ?




A falak és a tető össz felülete:

$$A=5\cdot 3^2\,m^2=45\,m^2$$

Innen: a hőellenállás:

$$R=\frac{d}{A\cdot\kappa}=\frac{0{,}5\,m}{45\,m^2\cdot 0{,}5\,\frac{W}{mK}}=\frac{1}{45}\,\frac{K}{W}$$

A másodpercenként átáramló hő:

$\dot{Q}=\frac{\Delta T}{R}$, ahol $\Delta T=20°C-0°C=20°C=20K$ (ha az x tengely kifelé mutat)

$\dot{Q}=\frac{20K}{\frac{1}{45}\frac{K}{W}}=900W$, azaz 900 J másodpercenként.

Egész nap: $T=1\text{ nap}=24\cdot 60\cdot 60\,s=86\,400\,s$

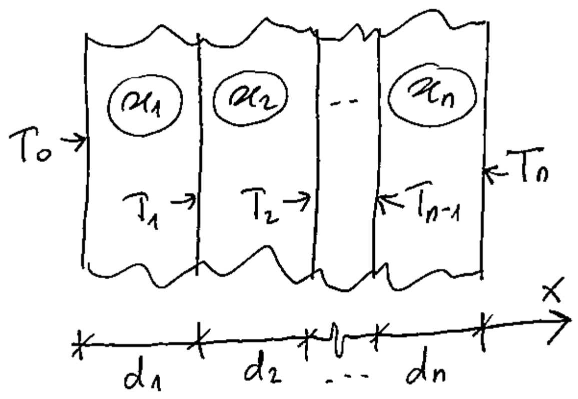
$\Rightarrow \Delta E=\dot{Q}\cdot T=900\,\frac{J}{s}\cdot 86400\,s=77{,}76\cdot 10^6\,J=77{,}76\,MJ$

Ezt kell fűtéssel pótolni. Pl. gázfűtés ára: kb. 2,5 Ft/MJ, ezzel naponta $77{,}76\,MJ\cdot 2{,}5\,\frac{Ft}{MJ}=194{,}40\,Ft$ -ba kerül a fűtés.

Havonta: 30 nappal számolva:

$30\cdot 194{,}4=5832{,}-\,Ft$ -ba kerül a fűtés.

Többrétegű fal (pl. tégla, hőszigetelés, vakolat...)




A rétegek soros elrendezésben, a hő sorban áthalad mindegyik rétegen.

Tegyük fel, hogy a szélső felületek hőmérséklete ismert ($T_0$ és $T_n$): 1. típusú peremfeltétel.

Mekkora a falon áthaladó $\dot{q}_x$ hőáramsűrűség, $\dot{Q}$ hőáram, és mekkorák a közbenső felületek $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ hőmérsékletei?

Az $i$-edik rétegben: $\dot{q}_{xi} = \frac{\Delta T_i}{r_i}$, ahol $r_i$ az $i$-edik réteg fajlagos hőellenállása ($r_i = \frac{d_i}{\lambda_i}$), $\Delta T_i = T_{i-1} - T_i$ a hőmérséklet-különbség a réteg két oldala között.

$\dot{q}_{xi}$ minden rétegre azonos kell legyen, ha stacionárius esetet nézünk (hiszen ami átmegy az egyik rétegen, az át kell menjen a többin is, mert nem halmozódhat fel sehol a hő), azaz: $\dot{q} = \dot{q}_x = \dot{q}_{x1} = \dot{q}_{x2} = \dots = \dot{q}_{xn}$, azaz $\dot{q} = \frac{T_{i-1} - T_i}{r_i}$ minden $i$-re,

ahonnan $\dot{q} \cdot r_i = T_{i-1} - T_i$. Kiírva:

$$\begin{cases} \dot{q} r_1 = T_0 - T_1 \\ \dot{q} \cdot r_2 = T_1 - T_2 \\ \vdots \\ \dot{q} r_{n-1} = T_{n-2} - T_{n-1} \\ \dot{q} r_n = T_{n-1} - T_n \end{cases}$$

Ezeket összeadva:

$$\dot{q}\left(r_1 + r_2 + \dots + r_n\right) = T_0 - T_n$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{q} = \frac{T_0 - T_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n} = \frac{T_0 - T_n}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

Bevezetve $\Delta T = T_0 - T_n$ (hőmérsékletkülönbség a fal két oldala között):

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

Vezessük be: $\boxed{r_e = r_1 + r_2 + \dots + r_n = \sum_{i=1}^{n} r_i}$

eredő fajlagos hőellenállást, ekkor

$\boxed{\dot{q} = \frac{\Delta T}{r_e}}$ Formálisan ez hasonló a korábbi, 1 rétegre (vagy 1 rétegű falra) vonatkozó képlethez $\left( \dot{q}_i = \frac{\Delta T_i}{r_i} \right)$, de most egy sok rétegű falra vonatkozik!

Azaz: egy többrétegű fal számítható egy $r_e$ eredő fajlagos hőellenállású falként.

Ha $r_e$ ismert, akkor számítható $\dot{q}$:

$\dot{q} = \frac{\Delta T}{r_e}$ Innen az egyes hőmérsékletek is számíthatók az előző oldalon összeadott képletekből:

$T_1 = T_0 - \dot{q} r_1$ , $T_2 = T_1 - \dot{q} r_2$ , ---, $T_{n-1} = T_{n-2} - \dot{q} r_{n-1}$.

(Végül ellenőrzés: $T_n = T_{n-1} - \dot{q} \cdot r_n$ vissza kell adja az adott $T_n$-et.)

Láttuk: $\dot{q} = \frac{T_0 - T_n}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$ . Mindegyik rétegre: $r_i = R_i \cdot A_i$ , ahol $A_i$ az i-edik réteg felülete. De ez most minden rétegre azonos: $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$ , azaz $r_i = R_i \cdot A$

$\downarrow$

$\dot{q} = \frac{T_0 - T_n}{A \cdot \sum_{i=1}^{n} R_i} \Rightarrow A\dot{q} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$ . Itt $\dot{Q} = A\dot{q}$ , és vezessük be:

$\boxed{R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n}$ eredő hőellenállása az n rétegű falnak (soros elrendezés esetén).

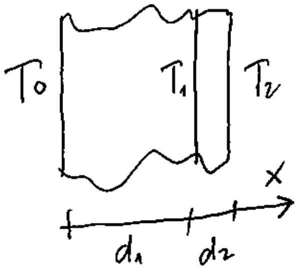
Azaz $\boxed{R_e = \sum_{i=1}^{n} R_i}$

Ezzel: $\boxed{\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_e}}$ a hőáram a többrétegű falon át.

## Számpélda



A 30 cm vastag téglafalat ($\varkappa_1 = 0,5 \frac{W}{mK}$) kívülről 3 cm hőszigetelő vakolat burkolja ($\varkappa_2 = 0,15 \frac{W}{mK}$). Hogyan változik a falban a hőmérséklet, és mekkora a hőáramsűrűség, ha a fal külső hőmérséklete $T_2 = -10°C$, a belső $T_0 = 20°C$ ?




$r_1 = \frac{d_1}{\varkappa_1} = \frac{0,3m}{0,5\frac{W}{mK}} = 0,6 \frac{m^2K}{W}$ ; $r_2 = \frac{d_2}{\varkappa_2} = \frac{0,03m}{0,15\frac{W}{mK}} = 0,2\frac{m^2K}{W}$

$r_e = r_1 + r_2 = 0,8 \frac{m^2K}{W}$ ; $\Delta T = T_0 - T_2 = 20°C - (-10°C)$

$\Rightarrow \Delta T = 30K$ ; $\boxed{\dot q = \frac{\Delta T}{r_e} = \frac{30K}{0,8\frac{m^2K}{W}} = 37,5\frac{W}{m^2}}$

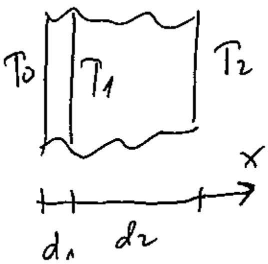
Hőmérséklet:

$T_1 = T_0 - \dot q r_1 = 20°C - 37,5\frac{W}{m^2}\cdot 0,6\frac{m^2°C}{W} = -2,5°C$

Ellenőrzés: $T_2 = T_1 - \dot q r_2 = -2,5°C - 37,5\frac{W}{m^2}\cdot 0,2\frac{m^2°C}{W} = -10°C$ rendben.

## Számpélda

És ha belül van a hőszigetelő vakolat?




Most $T_0 = 20°C$ és $T_2 = -10°C$, $d_1 = 3cm$ és $d_2 = 30cm$.

Azaz $r_1$ és $r_2$ felcserélődött: $r_1 = 0,2\frac{m^2K}{W}$, $r_2 = 0,6\frac{m^2K}{W}$

De az eredő ugyanaz: $r_e = r_1 + r_2 = 0,8\frac{m^2K}{W}$.

Megmaradt $\Delta T$ is: $\Delta T = T_0 - T_2 = 30°C = 30K$

Megmaradt $\dot q = \frac{\Delta T}{r_e} = 37,5\frac{W}{m^2}$ is.

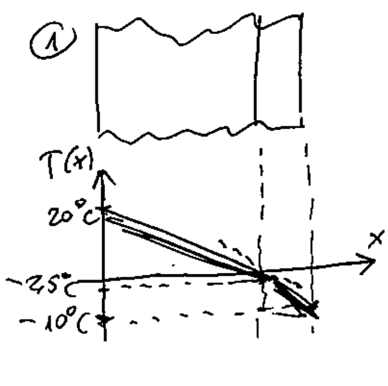
Változik a belső hőmérséklet:

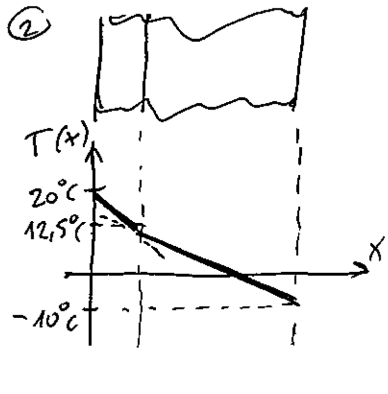
$T_1 = T_0 - \dot q r_1 = 20°C - 37,5\cdot 0,2 = 12,5°C$

Ellenőrzés:

$T_2 = T_1 - \dot q r_2 = -10°C$ rendben.

A különbség a két eset között:




A ② esetben sokkal hidegebb a fal, emiatt kicsapódik a pára a falban ⇒ penészedés. Emiatt jobb az ① változat.

Számpélda: Egy $d_r = 1\,mm$ falvastagságú acélradiátor ($\varkappa_r = 50 \frac{W}{mK}$) belső, víz felőli oldalán a hőmérséklet $50°C$, a radiátor falán át a hőáramsűrűség $\dot{q} = 12 \frac{W}{m^2}$ (kifelé).

a). Mekkora a radiátor külső hőmérséklete?

b). Mekkora a radiátorra terített törölköző külső oldalán a hőmérséklet, ha a törölköző ($\varkappa_t = 0{,}02 \frac{W}{mK}$) $d_t = 5\,mm$ vastag?

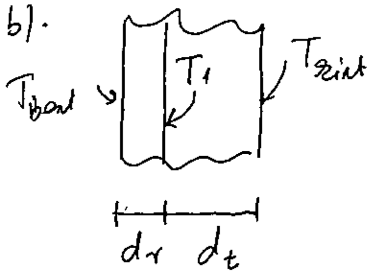
a). $r_r = \frac{d_r}{\varkappa_r} = \frac{10^{-3}\,m}{50 \frac{W}{mK}} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{m^2K}{W}$ ; $\dot{q} = \frac{\Delta T}{r_r} \rightarrow \Delta T = \dot{q}\, r_r$

$\Delta T = 12 \frac{W}{m^2} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \frac{m^2K}{W} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\,K$. Másrészt:

$\Delta T = T_{bent} - T_{kint} \Rightarrow T_{kint} = T_{bent} - \Delta T = 49{,}99976\,°C$

Alig alacsonyabb a radiátor belső oldalánál a külső oldal hőmérséklete, a kis vastagság és a nagy hővezetőképesség miatt.

b).




$r_r = 2 \cdot 10^{-5} \frac{m^2K}{W}$ (mint előbb)

$r_t = \frac{d_t}{\varkappa_t} = \frac{5 \cdot 10^{-3}\,m}{0{,}02 \frac{W}{mK}} = 0{,}25 \frac{m^2K}{W}$

$r_e = r_r + r_t = 2 \cdot 10^{-5} + 0{,}25 = 0{,}25002 \frac{m^2K}{W}$

$\Delta T = T_{bent} - T_{kint}$ és $\dot{q} = \frac{\Delta T}{r_e} \rightarrow T_{kint} = T_{bent} - \Delta T = T_{bent} - \dot{q}\, r_e$

$T_{kint} = 50°C - 12 \frac{W}{m^2} \cdot 0{,}25002 \frac{m^2K}{W} = 46{,}99976\,°C$

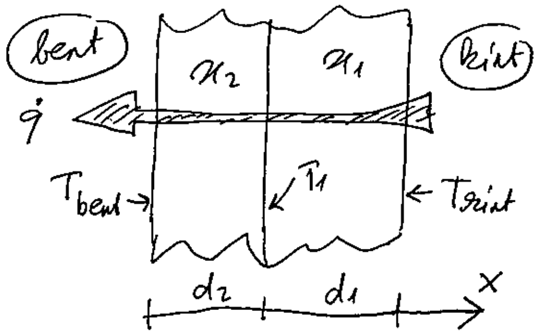
A két réteg közti különbség, ha csak a radiátort nézzük:

$\dot{q} = \frac{T_{bent} - T_1}{r_r} \rightarrow T_1 = T_{bent} - \dot{q} \cdot r_r = 50°C - 12 \frac{W}{m^2} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \frac{m^2K}{W}$

$T_1 = 49{,}99976\,°C$, mint az a). részben.

A kinti hőmérséklet kb. $3°C$-kal kevesebb lett amiatt, hogy a törölközőt ráterítettük a radiátorra.

Számpélda: Mekkora a hőáramsűrűség egy hűtőház kétrétegű falán át, ha a külső rétege $d_1 = 25\,cm$ vastag vöröstégla ($\varkappa_1 = 0{,}77\,\frac{W}{mK}$), a belső rétege száraz parafa ($d_2 = 20\,cm$, $\varkappa_2 = 0{,}042\,\frac{W}{mK}$). A parafa réteget elhanyagolható hőellenállású vízszigetelés védi a nedvességtől. A tégla külső felülete $25°C$, a parafa belső felülete $-2°C$. Mekkora a hőmérséklet a két réteg között?




$$r_1 = \frac{d_1}{\varkappa_1} = \frac{0{,}25\,m}{0{,}77\,\frac{W}{mK}} = 0{,}3247\,\frac{m^2K}{W}$$

$$r_2 = \frac{d_2}{\varkappa_2} = \frac{0{,}2\,m}{0{,}042\,\frac{W}{mK}} = 4{,}762\,\frac{m^2K}{W}$$

$$r_e = r_1 + r_2 = 5{,}087\,\frac{m^2K}{W}$$

$$\Delta T = T_{bent} - T_{kint} = -2°C - 25°C = -27°C$$

$$\dot q = \frac{\Delta T}{r_e} = \frac{-27\,K}{5{,}087\,\frac{m^2K}{W}} = -5{,}308\,\frac{W}{m^2}$$

(negatív: x tengellyel ellentétes irányban, befelé halad a hő.)

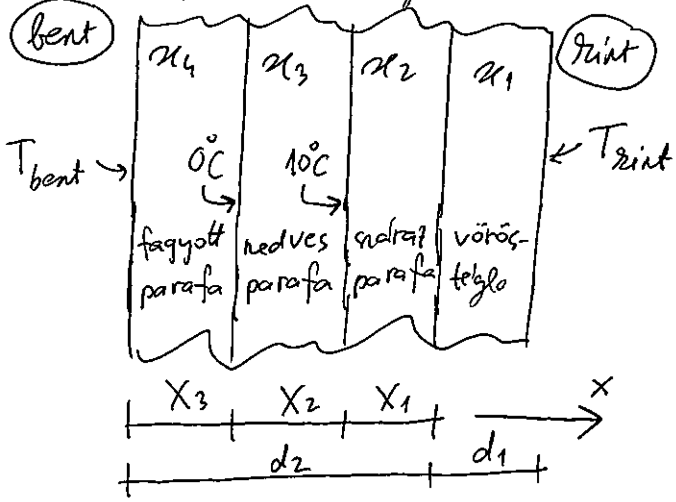
Csak a parafa rétegre:

$$\dot q = \frac{T_{bent} - T_1}{r_2} \Rightarrow T_1 = T_{bent} - \dot q \cdot r_2 = -2°C - \left(-5{,}308\,\frac{W}{m^2}\right) \cdot 4{,}762\,\frac{m^2K}{W}$$

$$T_1 = 23{,}28°C$$

Számpélda, folyt.: Ha az előző feladatban kimarad a vízszigetelés, a pára behatol a parafarétegbe, ahol meg is tud fagyni, a parafaréteg hőmérsékletétől függően. Ha a parafa hőmérséklete $0°C < T < 10°C$, akkor a pára kicsapódik (kondenzálódik), a parafa nedves lesz, ekkor $\varkappa_3 = 0{,}14 \frac{W}{mK}$ a hővezetési együtthatója. Ha a parafa hőmérséklete $0°C$ alá süllyed, akkor a víz meg is fagy, ekkor $\varkappa_4 = 0{,}35 \frac{W}{mK}$ a parafaréteg hővezetési együtthatója. Milyen vastag most a nedves, illetve a fagyott réteg? Mekkora a hőáramsűrűség? (A nedvesség diffúzióját elhanyagoljuk.)

Most a fal 4 rétegű lett:




Nem változott: $r_1 = 0{,}3247 \frac{m^2K}{W}$

$$r_2 = \frac{X_1}{\varkappa_2}, \quad r_3 = \frac{X_2}{\varkappa_3}, \quad r_4 = \frac{X_3}{\varkappa_4}$$

$$r_e = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$$

$$\dot q = \frac{\Delta T}{r_e}$$, azaz:

$$\dot q = \frac{T_{bent} - T_{kint}}{r_1 + \frac{X_1}{\varkappa_2} + \frac{X_2}{\varkappa_3} + \frac{X_3}{\varkappa_4}} \quad (1)$$

Másrészt: $X_1 + X_2 + X_3 = d_2$ (2)

Fagyott réteg: $\dot q = \frac{T_{bent} - 0°C}{r_4} = \frac{-2K}{r_4}$ (3)

Nedves réteg: $\dot q = \frac{0°C - 10°C}{r_3} = \frac{-10K}{r_3}$ (4)

4 egyenlet, 4 ismeretlen: $X_1, X_2, X_3, \dot q$

(3): $X_3 = -\frac{2K \cdot 0{,}35 \frac{W}{mK}}{\dot q}$

(4): $X_2 = -\frac{10K \cdot 0{,}14 \frac{W}{mK}}{\dot q}$

(2)-be beírva:

$$X_1 = d_2 - X_2 - X_3 = 0{,}2\,m + \frac{0{,}7 \frac{W}{m}}{\dot q} + \frac{1{,}4 \frac{W}{m}}{\dot q} = 0{,}2\,m + \frac{2{,}1 \frac{W}{m}}{\dot q}$$

(1)-be beírva mindet: csak $\dot q$ az ismeretlen:

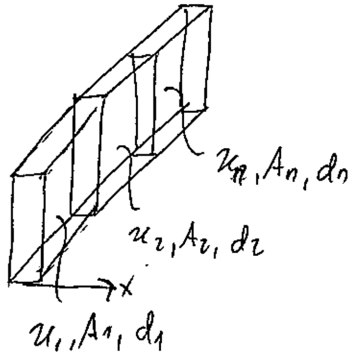
$\dot q = -12{,}78 \frac{W}{m^2}$ (negatív: befelé megy, x-szel ellentétes irányba)

Visszahelyettesítve: $X_3 = 0{,}05478\,m = 5{,}478\,cm$ (fagyott)

$X_2 = 0{,}1096\,m = 10{,}96\,cm$ (nedves)

$X_1 = 0{,}03566\,m = 3{,}566\,cm$ (száraz)

Hővezetés eltérő tulajdonságú, párhuzamosan elhelyezett falakon keresztül (pl. ajtó, ablak, ...)




$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ : hővezetési együtthatók.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ : falak felülete.

$d_1, d_2, \ldots, d_n$ : falvastagságok.

Tegyük fel, hogy az egy oldalon levő (belső illetve külső) felületek hőmérséklete ismert, és azonos (1. típusú peremfeltétel). Ha a belső falfelületek hőmérséklete $T_1$, a külsőké $T_2$, akkor az $i$-edik falelemben a hőmérsékleti gradiens és a hőfluxus:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_i = \frac{T_2 - T_1}{d_i} \quad ; \quad (\dot{q}_x)_i = -\varkappa_i \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_i = -\frac{\varkappa_i}{d_i}(T_2 - T_1) = \frac{T_1 - T_2}{r_i},$$

ahol $r_i = d_i/\varkappa_i$ az $i$-edik elem fajlagos hőellenállása.

Az $A_i$ felületű, $i$-edik falelemen időegység alatt átáramló hő:

$$\dot{Q}_i = (\dot{q}_x)_i \cdot A_i = -\frac{\varkappa_i A_i}{d_i}(T_2 - T_1) = -\frac{1}{R_i}(T_2 - T_1) = \frac{1}{R_i}(T_1 - T_2) = \frac{\Delta T}{R_i}$$

ahol $R_i = \dfrac{d_i}{\varkappa_i A_i}$ az $i$-edik elem hőellenállása, $\Delta T = T_1 - T_2$.

A teljes átáramló hő:

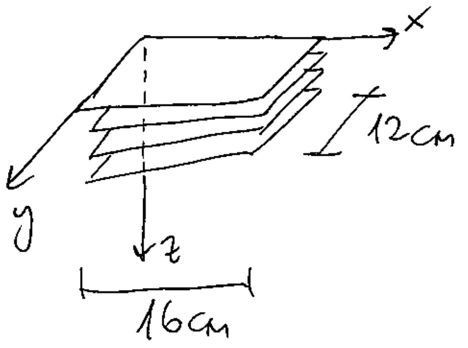
$$\dot{Q} = \sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i = \Delta T \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

, ahol bevezetve az $R_e$ eredő hőellenállást:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_e} \quad \text{azaz} \quad \Delta T = \dot{Q} \cdot R_e .$$

Tehát $R_e = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$ a párhuzamosan elhelyezett falelemek eredő hőellenállása. Az elhelyezés párhuzamos, mert egyszerre mindegyiken, párhuzamosan áramlik át a hő.

Számpélda: Egy vasmag 200 db. 0,5mm vastag, 12cm x 16cm -es vaslemezből ($\varkappa_v = 59{,}4 \frac{W}{mK}$) és a köztük levő 199 db. 0,05mm vastag, 12cm x 16cm-es szigetelő-papírból ($\varkappa_p = 0{,}14 \frac{W}{mK}$) áll. Mekkora az eredő hőellenállása a vasmagnak az éleivel párhuzamosan?




ⓧ irányban:

$$-\text{vasréteg}: R_v = \frac{0{,}16m}{5\cdot 10^{-4}m \cdot 0{,}12m \cdot 59{,}4\frac{W}{mK}}$$

$$R_v = 44{,}89 \frac{K}{W}$$

$$-\text{papír}: R_p = \frac{0{,}16m}{5\cdot 10^{-5}m \cdot 0{,}12m \cdot 0{,}14\frac{W}{mK}} = 190\,476 \frac{K}{W}$$

Az elrendezés párhuzamos:

$$R_{ex} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} = \frac{1}{200\cdot\frac{1}{R_v} + 199\cdot\frac{1}{R_p}} = 0{,}2244 \frac{K}{W}$$

ⓨ irányban:

$$R_v = \frac{0{,}12}{5\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}16\cdot 59{,}4} = 25{,}25\frac{K}{W}; \quad R_p = \frac{0{,}12m}{5\cdot 10^{-5}\cdot 0{,}16m^2\cdot 0{,}14\frac{W}{mK}} = 107\,143 \frac{K}{W}$$

Párhuzamos: $$R_{ey} = \frac{1}{200\frac{1}{R_v} + 199\cdot\frac{1}{R_p}} = 0{,}1262 \frac{K}{W}$$

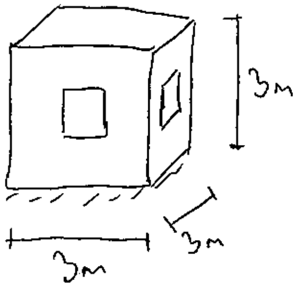
ⓩ irányban:

$$R_v = \frac{5\cdot 10^{-4}}{0{,}12\cdot 0{,}16\cdot 59{,}4} = 4{,}384\cdot 10^{-4}\frac{K}{W}; \quad R_p = \frac{5\cdot 10^{-5}}{0{,}12\cdot 0{,}16\cdot 0{,}14} = 0{,}01860 \frac{K}{W}$$

Soros elrendezés: $R_{ez} = 200\cdot R_v + 199\cdot R_p = 3{,}789 \frac{K}{W}$

Vegyük észre: x, y irányban a papírréteg nem játszik szerepet, mert a vas szállítja a hőt. A z irányban a vasréteg nem játszik szerepet, mert a papír szerepe döntő a hőáramlás megállításában.

## Számpélda




Mennyi hő áramlik ki az épületből 1 nap alatt, ha $d_1 = 50\,cm$ a falvastagság, $\varkappa_1 = 0{,}5\,\frac{W}{mK}$ a hővezetési együttható, $T_0 = 20°C$ a fal belső és $T_1 = 0°C$ a külső hőmérséklete? Minden oldalon van egy $1{,}25\,m^2$ -es ablak, amelynek $d_2 = 1\,cm$ a vastagsága, $\varkappa_2 = 0{,}8\,\frac{W}{mK}$ a hővezetési együtthatója.

A fal felülete: $5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 1{,}25 = 40\,m^2$

Az ablakok össz felülete: $4 \cdot 1{,}25 = 5\,m^2$

Hőellenállások: fal: $R_1 = \frac{d_1}{\varkappa_1 A_1} = \frac{0{,}5\,m}{0{,}5\,\frac{W}{mK} \cdot 40\,m^2} = 0{,}025\,\frac{K}{W}$

ablakok: $R_2 = \frac{d_2}{\varkappa_2 A_2} = \frac{0{,}01\,m}{0{,}8\,\frac{W}{mK} \cdot 5\,m^2} = 0{,}0025\,\frac{K}{W}$

Eredő hőellenállás: $R_e = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{40 + 400} = \frac{1}{440}\,\frac{K}{W} = 0{,}002273\,\frac{K}{W}$

Az időegység alatt átáramló hő:

$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_e} = \frac{20\,K}{0{,}002273\,\frac{K}{W}} = 8800\,W$ (ablak nélkül ez 900 W volt, lásd 2/15 oldal)

Egy nap alatt: $\Delta E = \dot{Q} \cdot T = 8800\,\frac{J}{s} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24\,s = 760{,}32\,MJ$

(ablak nélkül ez 77,76 MJ volt, ez kb. tízszer annyi! Ennyire fontos a hőszigetelő ablak!)

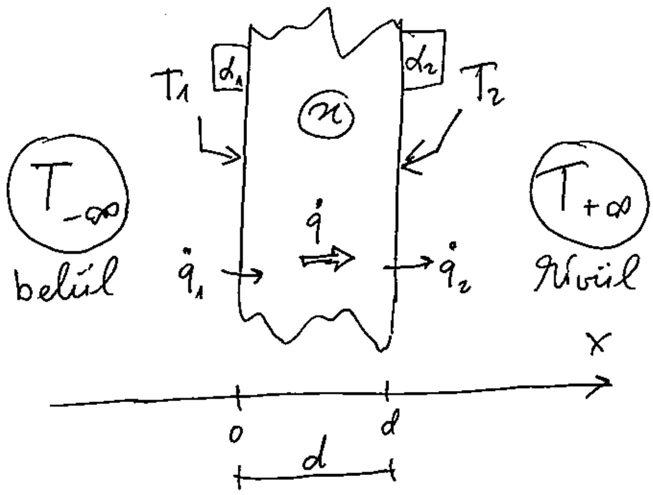
A $\Delta E$ hőveszteség pótlása fűtéssel, 2,50 Ft./MJ -lal számolva:

napi $2{,}5 \cdot 760{,}32 = 1900{,}80$ Ft. naponta, havonta:

$30 \cdot 1900{,}8 = 57.024$,- Ft.

## Newton-féle lehülési törvény — számpélda:

30 cm vastag téglafalon belül $T_{-\infty}=20°C$, kívül $T_{+\infty}=6°C$ a hőmérséklet. Mekkora a hőáramsűrűség a falon át, és mekkora a fal belső illetve külső felületének a hőmérséklete, ha $\varkappa=0{,}5\,\frac{W}{mK}$ a fal hővezetési együtthatója, és $\alpha_1=\alpha_2=20\,\frac{W}{m^2K}$ a hőátadási tényező a fal belső és külső oldalán?




Newton-féle lehülési törvény:

$$-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{felület} = \frac{\alpha}{\varkappa}\left(T_{felület} - T_\infty\right)$$

(ahol $T_\infty = T_{-\infty}$ vagy $T_{+\infty}$)

Fourier-törvény:

$$\dot q = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}$$

- Ennek alapján a fal külső oldalára kiáramló hő:

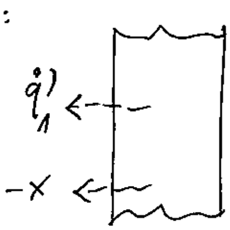
$$\dot q_2 = +\varkappa\frac{\alpha_2}{\varkappa}\left(T_2 - T_{+\infty}\right)$$

(itt $\alpha=\alpha_2$, $T_{felület}=T_2$, $T_\infty=T_{+\infty}$)

azaz

$$\boxed{\dot q_2 = \alpha_2\left(T_2 - T_{+\infty}\right)}$$

- A belső oldalon kiáramló hő: $-\dot q_1$, $(-x)$ irányban:




$$\dot q_1' = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial(-x)} = +\varkappa\cdot\frac{\alpha}{\varkappa}\left(T_{felület} - T_\infty\right)$$

ahol most $\dot q_1' = -\dot q_1$, $\alpha=\alpha_1$, $T_{felület}=T_1$, $T_\infty = T_{-\infty}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\dot q_1 = -\alpha_1\left(T_1 - T_{-\infty}\right)}$$

• A falon átáramló hő:

$\boxed{\dot q = -\varkappa \dfrac{T_2-T_1}{d}}$ , ahol $T_1$, $T_2$ és $\dot q$ is ismeretlen.

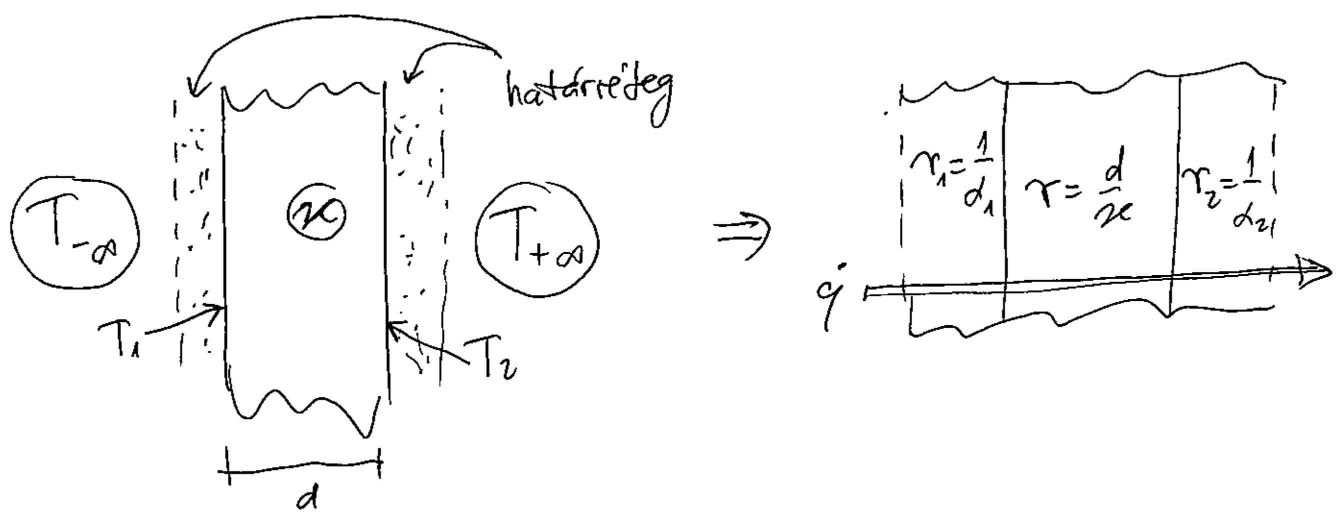
Stacionárius esetben a három $\dot q$ azonos: $\dot q=\dot q_1=\dot q_2$, különben valahol összegyűlne a hő. Emiatt:

$$\frac{\dot q}{\alpha_1}=T_{-\infty}-T_1 \;;\quad \frac{\dot q}{\alpha_2}=T_2-T_{+\infty} \;;\quad \frac{\dot q\cdot d}{\varkappa}=T_1-T_2 \qquad (*)$$

Összeadva ezeket: $\dot q\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{d}{\varkappa}+\frac{1}{\alpha_2}\right)=T_{-\infty}-T_{+\infty}$ azaz

$$\dot q=\frac{T_{-\infty}-T_{+\infty}}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{d}{\varkappa}+\frac{1}{\alpha_2}}$$

. Itt a nevező tekinthető a fal, és a közvetlenül mellette levő légréteg hőellenállásának: $r_e=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{d}{\varkappa}+\frac{1}{\alpha_2}$ . Olyan, mintha a hő a $\Delta T=T_{-\infty}-T_{+\infty}$ hőmérsékletkülönbség hatására áthaladna a falon, és két olyan légrétegen, amelyekben a hőátadás fizikai folyamata zajlik, és amelyeknek hőellenállása $\frac{1}{\alpha_1}$ illetve $\frac{1}{\alpha_2}$:



Tehát a Newton-féle lehűlési törvény annyit jelent, hogy figyelembe vesszük a fal mellett közvetlenül annak a légrétegnek a hőellenállását, amely valamennyire átveszi a fal hőmérsékletét. Ennek a rétegnek a fajlagos hőellenállása $r = \frac{1}{\alpha}$, ahol $\alpha$ a hőátadási tényező. Hőellenállása pedig $R = \frac{1}{\alpha \cdot A}$, ahol $A$ a fal felülete.

A fal fajlagos hőellenállásának eredője, figyelembe véve a légrétegeket: $r_e = \frac{1}{\alpha_1} + r_{fal} + \frac{1}{\alpha_2}$, ahol $\alpha_1$ és $\alpha_2$ a fal két oldalán a hőátadási tényező, $r_{fal}$ magának a falnak a fajlagos hőellenállása.

Hasonlóan, az eredő hőellenállás:

$$R_e = \frac{1}{\alpha_1 A} + R_{fal} + \frac{1}{\alpha_2 A}$$

, ahol $R_{fal}$ a fal hőellenállása.

Mikor jelentős a légrétegek hőszigetelésének hatása, illetve a Newton-féle lehűlési törvény hatása? Ha $\frac{1}{\alpha_1}$ és $\frac{1}{\alpha_2}$ nem hanyagolhatók el $r_{fal}$ mellett. A feladatban: $\frac{1}{\alpha} = 0{,}05 \frac{m^2K}{W}$, $r_{fal} = \frac{d}{\lambda} = 0{,}6 \frac{m^2K}{W}$

azaz kis hatás várható.

Számítsuk ki:

$$r_e = \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\kappa} + \frac{1}{\alpha} = 0{,}05\,\frac{m^2K}{W} + 0{,}6\,\frac{m^2K}{W} + 0{,}05\,\frac{m^2K}{W} = 0{,}7\,\frac{m^2K}{W}$$

(légréteg nélkül $0{,}6\,\frac{m^2K}{W}$ lenne).

Ezzel: $$\dot{q} = \frac{\Delta T}{r_e} = \frac{T_{-\infty} - T_{+\infty}}{r_e} = \frac{14K}{0{,}7\,\frac{m^2K}{W}} = 20\,\frac{W}{m^2}$$

(légréteg nélkül $\dot{q} = \frac{14}{0{,}6} = 23{,}33\,\frac{W}{m^2}$ lenne)

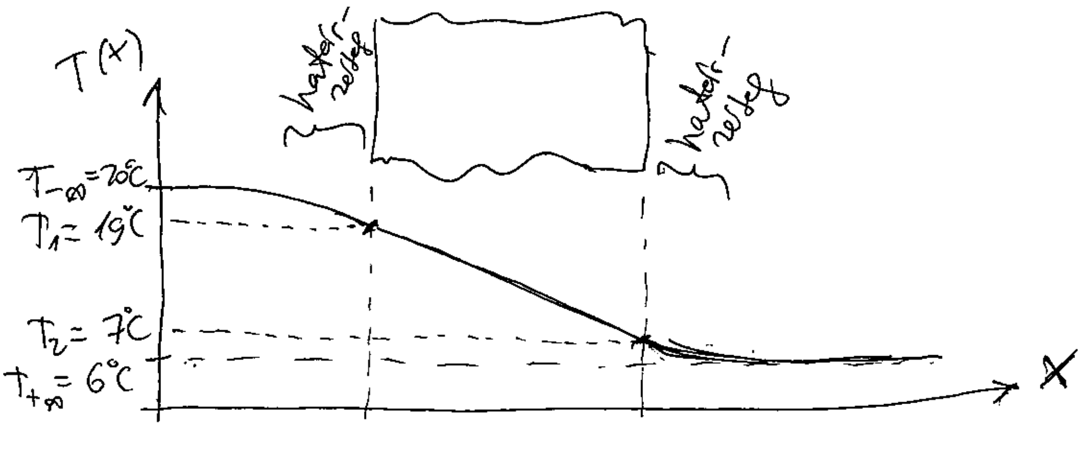
A fal felületének hőmérséklete a 2/24 oldali (*) jelű képletekből számolható:

$$T_1 = T_{-\infty} - \frac{\dot{q}}{\alpha_1} = +20°C - \frac{20}{20}°C = 19°C$$

$$T_2 = T_{+\infty} + \frac{\dot{q}}{\alpha_2} = 6°C + \frac{20}{20}°C = 7°C$$

(légréteg nélkül, azaz ha a légréteg hőellenállása 0 lenne, vagyis a hőátadás $\alpha \to \infty$ lenne, akkor

$T_1 = T_{-\infty} = 20°C$, $T_2 = T_{+\infty} = 6°C$ lenne.)



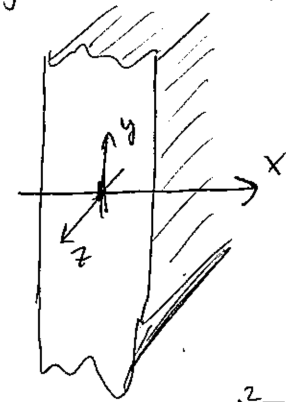
# Beton kötése

Betonban kötés közben hő fejlődik: $\dot e \neq 0$:

$$c_p \varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\varkappa \cdot \mathrm{grad}\, T) + \dot e$$

Tegyük fel, hogy

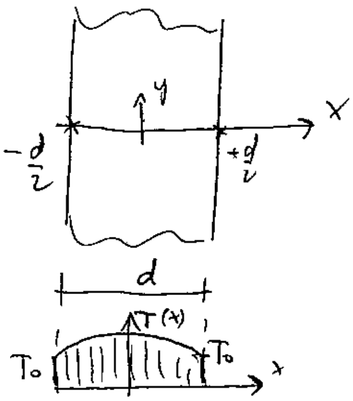
- $\varkappa =$ állandó, ekkor $\mathrm{div}(\varkappa\, \mathrm{grad}\, T) = \varkappa \cdot \Delta T$
- stacionárius állapotot vizsgálunk: $\dot e =$ áll., $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.
- Lemezről van szó, a hő csak x irányban terjed, merőlegesen a d vastagságú lemezre: $\Delta T = \frac{d^2 T}{dx^2}$.




Ekkor: $\varkappa \cdot \frac{d^2 T}{dx^2} + \dot e = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\dot e}{\varkappa} =$ állandó (nem függ x-től).

Integrálva kétszer: $\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot e}{\varkappa} \cdot x + A$, $\quad T(x) = -\frac{1}{2}\frac{\dot e}{\varkappa} x^2 + Ax + B$

Peremfeltétel: tegyük fel, hogy ismerjük a lemez felületén a hőmérsékletet: $T_0$. Azaz: ha $x = \pm \frac{d}{2} \Rightarrow T\left(\pm\frac{d}{2}\right) = T_0$




$x = \frac{d}{2}$: $\quad T_0 = -\frac{1}{2}\frac{\dot e}{\varkappa}\left(\frac{d}{2}\right)^2 + A\frac{d}{2} + B$

$x = -\frac{d}{2}$: $\quad T_0 = -\frac{1}{2}\frac{\dot e}{\varkappa}\left(-\frac{d}{2}\right)^2 - A\frac{d}{2} + B$

összeadva: $B = T_0 + \frac{1}{8}\frac{\dot e}{\varkappa} d^2$

kivonva: $A = 0$

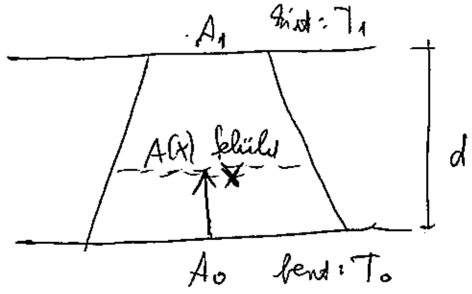
$$\Rightarrow T(x) = -\frac{1}{2}\frac{\dot e}{\varkappa} x^2 + T_0 + \frac{1}{8}\frac{\dot e}{\varkappa} d^2 = T_0 + \frac{1}{2}\frac{\dot e}{\varkappa}\left(\frac{d^2}{4} - x^2\right)$$

Ennek maximuma középen van, ahol $\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0$, a maximum:

$T_{max} = T_0 + \frac{1}{8}\frac{\dot e}{\varkappa} d^2$. Pár számszerű adat betonra: $\varkappa = 1{,}5 \frac{W}{mK}$, $\dot e = 3000 \frac{W}{m^3}$. Ha például $T_{max} = 50°C$-nál nagyobb hőmérséklet nem engedhető meg a betonban, és $T_0 = 20°C$ a külső hőmérséklet, akkor $d_{max} = \sqrt{8\frac{\varkappa}{\dot e}(T_{max} - T_0)} = 0{,}35\,m$, ennél vastagabb lemezzel baj lehet!

## Hővezetés változó keresztmetszeten át: hőhíd.

Tegyük fel, hogy egy jó hőszigetelő falban van egy hőhíd, amelynek hővezetése sokkal jobb a falénál. Tegyük fel, hogy a hővezető felület lineárisan változik a vastagság mentén: $A(x) = A_0 + \frac{A_1 - A_0}{d} \cdot x$




Tegyük fel, hogy:

- csak a hőhídon megy át hő,
- csak $x$ irányba vezetődik a hő, kicsi a különbség $A_0$ és $A_1$ közt.

Ekkor az összes $A(x)$ felületen ugyanaz a $\dot{Q}$ hő megy át:

$$\dot{Q} = A(x) \cdot \dot{q}_x(x) \quad \text{és} \quad \dot{q}_x(x) = -\varkappa \operatorname{grad} T = -\varkappa \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Q}}{A(x)} = -\varkappa \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{\dot{Q}}{A_0 + \frac{A_1 - A_0}{d} x} = -\varkappa \frac{dT}{dx} \Rightarrow -\varkappa \, dT = \frac{\dot{Q}}{A_0 + \frac{A_1 - A_0}{d} x} dx$$

Integrálva a $-\frac{\varkappa A_0}{\dot{Q}} dT = \frac{1}{1 + \left(\frac{A_1}{A_0} - 1\right)\frac{x}{d}} dx$ összefüggést:

$$-\frac{\varkappa A_0}{\dot{Q}} \left(T(x) - T_0\right) = \frac{d}{\frac{A_1}{A_0} - 1} \ln\left[1 + \left(\frac{A_1}{A_0} - 1\right)\frac{x}{d}\right] \qquad (*)$$

Az $x=0$ peremen teljesül, hogy $T(0) = T_0$, OK

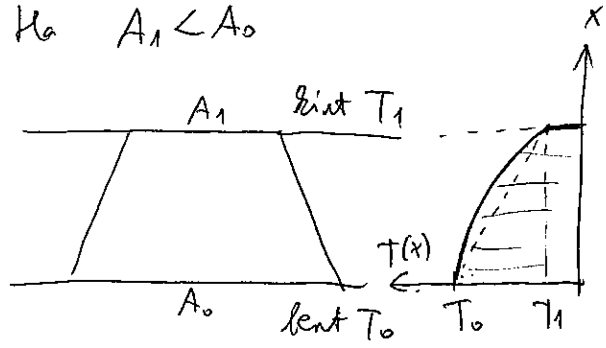
Az $x=d$ peremen, mivel $T = T_1 \Rightarrow -\frac{\varkappa A_0}{\dot{Q}}(T_1 - T_0) = \frac{d}{\frac{A_1}{A_0} - 1} \cdot \ln \frac{A_1}{A_0}$

ahonnan $$\dot{Q} = \frac{-\varkappa (A_1 - A_0)(T_1 - T_0)}{d \cdot \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right)} = -\frac{\varkappa}{d} \frac{A_1 - A_0}{\ln A_1 - \ln A_0} \cdot (T_1 - T_0)$$

Ezt visszaírva $(*)$-ba: $$T(x) = T_0 + \frac{\ln\left[1 + \left(\frac{A_1}{A_0} - 1\right)\frac{x}{d}\right]}{\ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right)} \cdot (T_1 - T_0)$$

Két különböző eset: 

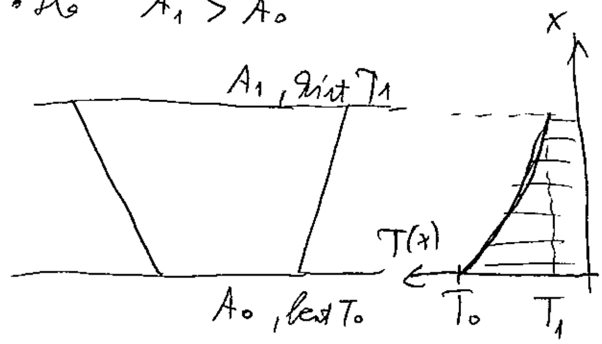
• Ha $A_1 < A_0$




⇓

melegebb fal

• Ha $A_1 > A_0$

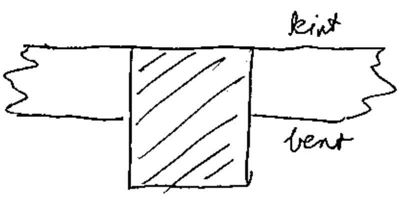



⇓

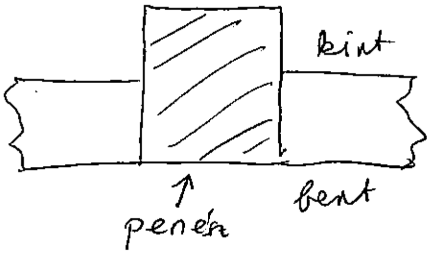
hidegebb fal

Vagyis: ha már van hőhíd, akkor valamivel jobb, ha kifelé (a hideg oldal felé) kisebb a felülete, mert ez melegebb falat, kisebb páralecsapódást eredményez. A nagyobb kinti (hideg oldali) felülete van a hőhídnak, akkor hűtőbordaként viselkedik, hidegebb lesz a fal, nagyobb a páralecsapódás.

Ennek szellemében:




kevésbé veszélyes hőhíd: körbe van fűtve, a belső oldal nem hűl le annyira.

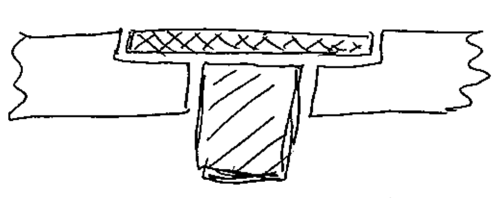



hőhíd „hűtőborda" hatással: a belső oldal nagyon lehűl.

Probléma a hőhidakkal: magas(abb) hővezetés, illetve az alacsonyabb felületi hőmérséklet miatti páralecsapódás a belső oldalon.

Érdemes szigetelni a hőhidakat:

Nem tökéletes: a hőáram nem „egyenesen" terjed, el tudja kerülni a szigetelést.

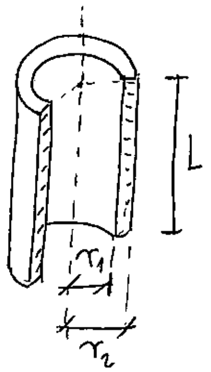


Jó megoldás: túl kell nyújtani a hőszigetelést.

# Hővezetés hengeres falban, pl. csőfalban.

A 2/8 oldalon volt: $$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{\varrho c_p}\cdot \dot{e}$$

a hővezetés egyenlete $\varkappa =$ áll. mellett hengerkoordinátás alakban,



ahol $a = \frac{\varkappa}{\varrho \cdot c_p}$ a hőfokvezetési tényező, és $T = T(r, \varphi, z)$

Ha a cső hossza mentén a hőmérséklet állandó: $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

Ha a hőmérséklet eloszlása hengerszimmetrikus: $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$

Ha stacionárius esetet vizsgálunk: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Ha a falban nem termelődik hő: $\dot{e} = 0$

Ekkor:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{1}{r}\frac{dT}{dr} \rightarrow \frac{d\left(\frac{dT}{dr}\right)}{\frac{dT}{dr}} = -\frac{dr}{r}$$

Integrálva: $$\ln\left(\frac{dT}{dr}\right) = -\ln r + \ln C = \ln\frac{C}{r} \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C}{r} \Rightarrow dT = \frac{C}{r}dr$$

Integrálva: $$T + T_* = C\cdot \ln r$$

Peremfeltételek: $r = r_1 \Rightarrow T = T_1$ , $r = r_2 \Rightarrow T = T_2$

Beírva: $T_1 + T_* = C\cdot\ln r_1$ illetve $T_2 + T_* = C\cdot \ln r_2$

$$\Rightarrow C = \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}} \quad ; \quad T_* = \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\cdot \ln r_1 - T_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T(r) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\cdot \ln\frac{r}{r_1}}$$ a hőmérsékleteloszlás.

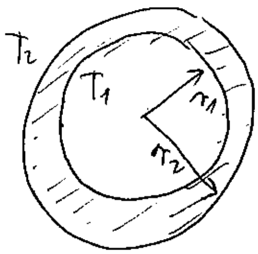
Hőáramsűrűség: $$\dot{q}_r = -\varkappa\frac{dT}{dr} = -\varkappa\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}}\cdot\frac{1}{r}$$ (függ $r$-től!)

A teljes $2\pi r\cdot L$ felületű hengerpaláston áthaladó hő időegység alatt:

$$\dot{Q} = 2\pi r L\cdot \dot{q}_r = -\varkappa\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{r_1}{r_2}} 2\pi L.$$

Számpélda

Mekkora a hőveszteség a 2m hosszú melegvízcsőben másodpercenként, ha a csőben levő víz és a cső belső fala 50°C, a cső külső fala 20°C-os, és a cső hővezetési együtthatója $\varkappa = 0{,}50 \frac{W}{mK}$?
A cső belső átmérője 16mm, külső átmérője 20mm.




$r_1 = 8mm$ $\quad$ $L = 2m$ $\quad$ $T_1 = 50°C$

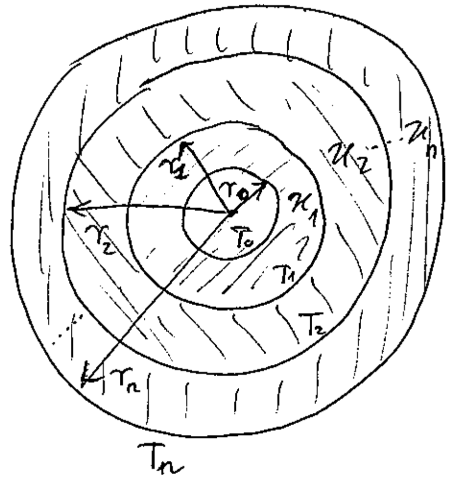
$r_2 = 10mm$ $\quad$ $T_2 = 20°C$

$$\dot{Q} = -\varkappa \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \cdot 2\pi L = -0{,}5 \frac{W}{mK} \cdot \frac{50°C - 20°C}{\ln \frac{8}{10}} \cdot 2\pi \cdot 2m = 844{,}7\ W$$

(Megjegyzés: feltettük, hogy a cső hossza mentén végig állandó a hőmérséklet, amihez az kell, hogy a víz gyorsan áramoljon a csőben.)

# Réteges hengeres fal






Adott a belső felület $T_0$ hőmérséklete, a külső felület $T_n$ hőmérséklete, valamint az $n$ réteg $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$ hővezetési együtthatója.

Mekkora a hőveszteség másodpercenként ($\dot{Q}$) és mekkora a hőmérséklete a rétegeket határoló felületeknek ($T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$)?

Minden rétegen ugyanaz a $\dot{Q}$ hő halad át stacionárius állapotban, és mindegyikre igaz az egy rétegre vonatkozó eredmény, pl. az i-edik rétegre:

$$\dot{Q} = -\varkappa_i \frac{T_{i-1} - T_i}{\ln \frac{r_{i-1}}{r_i}} \cdot 2\pi L$$

, ahol $L$ a cső hossza.

Innen: $$T_{i-1} - T_i = \frac{\dot{Q}}{2\pi L \cdot \varkappa_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}} \qquad (i=1 \dots n). \qquad (*)$$

Adjuk össze ezeket:

$$T_0 - T_n = \frac{\dot{Q}}{2\pi L} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varkappa_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}$$

Innen $\dot{Q}$ kifejezhető:

$$\dot{Q} = 2\pi L \frac{T_0 - T_n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\varkappa_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}}$$

Ezt visszaírva (*)-ba, sorban számolhatók a hőmérsékletek:

$$T_i = T_{i-1} + \frac{\dot{Q}}{2\pi L \cdot \varkappa_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i} = T_{i-1} + \frac{1}{\varkappa_i} \ln \frac{r_{i-1}}{r_i} (T_0 - T_n) \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\varkappa_j} \ln \frac{r_j}{r_{j-1}}}$$

## Számpélda

Egy 160 mm belső, 170 mm külső átmérőjű gőzvezetékben $T_0 = 300\,°C$ gőz áramlik (a cső belső felületének hőmérséklete $T_0$). A csőre kívülről 2 rétegű szigetelés kerül, a belső réteg vastagsága 30 mm ($\varkappa_2 = 0{,}15\ \frac{W}{mK}$), a külső réteg vastagsága 50 mm ($\varkappa_3 = 0{,}08\ \frac{W}{mK}$). A gőzvezeték hővezetési együtthatója $\varkappa_1 = 50\ \frac{W}{mK}$.

A szigetelés külső felületének hőmérséklete $T_3 = 50\,°C$.

Mekkora a másodpercenkénti hőveszteség a cső 1 m-es szakaszán?

Mekkora a rétegek közti hőmérséklet?

$r_0 = 8\ cm$, $r_1 = 8{,}5\ cm$, $r_2 = 11{,}5\ cm$, $r_3 = 16{,}5\ cm$.

$$\dot{Q} = 2\pi L \frac{T_0 - T_3}{\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\varkappa_i} \ln \frac{r_i}{r_{i-1}}} \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{Q}}{L} = 2\pi \frac{300 - 50}{\frac{1}{50} \ln \frac{8{,}5}{8} + \frac{1}{0{,}15} \ln \frac{11{,}5}{8{,}5} + \frac{1}{0{,}08} \ln \frac{16{,}5}{11{,}5}} = 241\ \frac{W}{m}$$

Ezután:

$$T_1 = T_0 + \frac{\dot{Q}}{L} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varkappa_1} \ln \frac{r_0}{r_1} = 300 + 241 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{50} \ln \frac{8}{8{,}5} = 299\,°C$$

$$T_2 = T_1 + \frac{\dot{Q}}{L} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varkappa_2} \ln \frac{r_1}{r_2} = 299\,°C + 241 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{0{,}15} \ln \frac{8{,}5}{11{,}5} = 222\,°C$$

Ellenőrzés:

$$T_3 = T_2 + \frac{\dot{Q}}{L} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\varkappa_3} \ln \frac{r_2}{r_3} = 222 + 241 \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{0{,}08} \ln \frac{11{,}5}{16{,}5} = 50\,°C \text{ rendben.}$$