1 Mechanikai alapok

- Mechanika: fizika része, testek és anyagok mozgásállapotával foglalkozik.
- Ha a test kiterjedése kicsi, elhanyagolható: idealizálás: tömegpont vagy anyagi pont.

- Alapfogalom: erő — testek mechanikai kölcsönhatásának megnyilvánulási formája.
- Alaptörvények: Newton-axiómák (tapasztalat alapján)

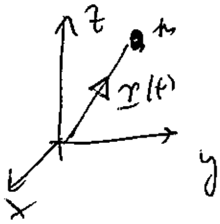
N1| Tehetetlenség elve: Létezik olyan vonatkoztatási rendszer, az inerciarendszer, amelyben minden magára hagyott (erőmentes) pontszerű test nyugalomban van, vagy egyenes vonalú, egyenletes mozgást végez.
A mechanika törvényeit erre a rendszerre vonatkoztatjuk.

N2| A dinamika alapegyenlete: $\underline{F} = m\underline{a}$. m: tehetetlen tömeg.
(Vet fel kérdéseket: mi pontosan az erő, mi a tömeg?)

N3| Erő-ellenerő törvénye: Két egymással kölcsön-hatásban levő test egymásra gyakorolt erőhatásának nagysága megegyezik, de irányuk ellentétes.

N4| Az erőhatások függetlenségének elve (szuperpozíció): Ha egy anyagi pontra több erő hat, akkor együttes hatásuk azonos az eredő erő hatásával

Történetileg: mérték $\underline{r}(t)$-t, a pont helyét az idő



függvényében: $\underline{r}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}$

Ebből számítható a sebesség: $\underline{v}(t)=\frac{d\underline{r}}{dt}=\dot{\underline{r}}(t)=\begin{bmatrix}\frac{dx(t)}{dt}\\ \frac{dy(t)}{dt}\\ \frac{dz(t)}{dt}\end{bmatrix}$

És számítható a gyorsulás: $\underline{a}(t)=\frac{d\underline{v}}{dt}=\dot{\underline{v}}=\ddot{\underline{r}}=\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$

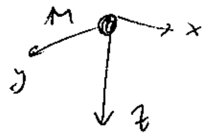
Innen meghatározható az erő: $\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)=m\ddot{\underline{r}}$ →
sok esetre meghatározták, hogyan kell felírni $\underline{F}$-et, a konkrét esetekben. Tapasztalat $\underline{F}$ ezektől függ:
hely ($\underline{r}(t)$), sebesség ($\underline{v}(t)$), idő (t).
De nem függ például a gyorsulástól, nincs pl. $\underline{F}(\ddot{\underline{r}})=m\ddot{\underline{r}}$
(ezt semmi nem garantálja, tapasztalat).

Ma: rendszerint $\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)$-t ismerjük, ebből akarjuk $\underline{r}(t)$-t számítani: $\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)=m\ddot{\underline{r}}$. Ez egy differenciálegyenlet. Kell hozzá kezdőfeltétel: $\underline{r}(0)$ és $\underline{v}(0)$ ismert kell legyen.

A Newton-féle mechanika <u>determinisztikus</u>: a kezdőfeltételek ismeretében egyértelmű, hogy mi fog történni, az $\underline{F}(\underline{r},\dot{\underline{r}},t)=m\ddot{\underline{r}}$ megoldásának létezése és egyértelműsége garantált. De hogy számítható-e, az kérdéses: a megoldás lehet nagyon érzékeny a kezdőfeltételekre, ezzel foglalkozik a káoszelmélet.

Példák erőtörvényekre!

1). Szabadesés



$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad \text{avagy} \quad \underline{F} = m\underline{g} \quad \text{ahol} \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}$$

Newton 2. axiómája: $m\ddot{\underline{r}} = m\underline{g} \Rightarrow \ddot{\underline{r}} = \underline{g}$

avagy, komponensenként kiírva:

$\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = g$

megoldás: $\dot{z} = gt + v_0$

$$z(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_0 t + z_0$$

Erőtér: a tér minden pontjában meg lehet mondani, hogy az odahelyezett (próba)testre mekkora erő hat.

Azaz: minden $\underline{r}$-hez megadható $\underline{F}$, $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$ és ez nem függ az $\dot{\underline{r}}$ sebességtől és a t időtől sem.

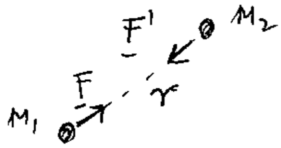
Térerősség: nehézségi erőtérben az egységnyi tömegű (próba)testre ható erő, azaz $\underline{g}$.

Ekkor egy m tömegű testre a nehézségi erőtérben

$\underline{F} = m\underline{g}$ erő hat.

Példák erőtörvényekre

2). Gravitáció (Newton, 1665.)



$$F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{ahol } \gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

(negatív előjel: megállapodás szerint a taszítás pozitív.)

m: az anyag „tulajdonsága", tömeg. Ez a súlyos tömeg.

(Vajon ugyanaz-e, mint a tehetetlen tömeg Newton 2. axiómájában? Mérések szerint (Eötvös Loránd, 1890.) igen.)
(torziós inga)

$m > 0$ mindig, emiatt a gravitációs erő vonzóerő.
m értéke bármekkora lehet, folytonos.

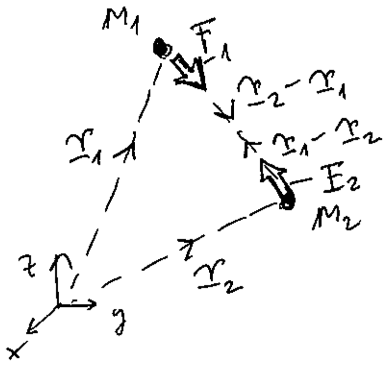
Két test esetén a mozgásegyenlet megoldható (pl. ellipszispályán keringés a közös tömegközéppont körül).

A gravitációs erő is erőtér: az m_1 közelében levő m_2 tömegre ható erő csak a helytől függ: $F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$

Most is be lehet vezetni a térerősséget: az egységnyi tömegű próbatestre ható erő: $\underline{g} = -\gamma \frac{m_1}{r^2} \Rightarrow \underline{F} = m\underline{g}$, és

$\underline{g}$ függ a helytől, hisz r benne van.

Vektorosan is felírható az erő:



$$\underline{F}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

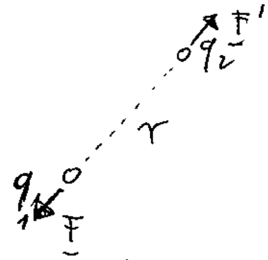
illetve

$$\underline{F}_2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

Példák erőtörvényekre

3.1. Coulomb-erő (1785)

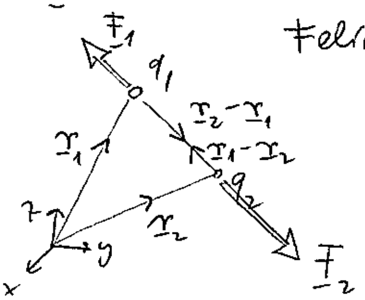
Elektromosan töltött részecskék közt hat:



$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$$, ahol $k = 9\cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$ (nagyon nagy!)

Hasonló a gravitációs erőhöz.

Felírható az erő vektorosan is:



$$\underline{F}_1 = k\frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$$ és

$$\underline{F}_2 = k\cdot\frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_2-\underline{r}_1|^3}(\underline{r}_2-\underline{r}_1)$$

q: elemi részecskék „tulajdonsága": elektromos töltés, $[q] = C$, coulomb.

q lehet pozitív, negatív (vagy 0): kétféle töltés van
(tömeg csak egy féle van).

Azonos töltések taszítják, különbözők vonzzák egymást.

A töltés értéke „kvantált", nem folytonos, a proton $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C$ töltésének, az elemi töltésnek egész számú többszöröse.

Elektrosztatika: a töltések, azok helye állandó.

Az elektrosztatikus tér forrásai az elektromos töltések.

Az elektromos erő „távolhatás": a töltések elhelyezésekor azonnal felépül az elektromos tér, nem kell idő az elektromos mező létrejöttéhez.

Milyen erős az elektromos erő?

a). Két proton egymástól 1m távolságra:

- elektromos erő: $F_e = k \frac{e^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{1^2} = 23 \cdot 10^{-29} N$ (taszítás)

- gravitációs erő: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg$

$$F_g = -\gamma \cdot \frac{m_p^2}{r^2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{(1{,}67 \cdot 10^{-27})^2}{1^2} = -18{,}6 \cdot 10^{-65} N \text{ (vonzás)}$$

Az elektromos erő $F_e / |F_g| = 1{,}2 \cdot 10^{36}$ -szor erősebb!

(milliárdszor - milliárdszor - milliárdszor - milliárdszor erősebb).

b). Két 80 kg-os ember egymástól karnyújtásnyira (1m) áll, és 2%-kal több elektron van bennük, mint proton. Mekkora erő hat köztük?

A 80 kg fele proton, fele neutron (elektronok tömege 1000-szer kisebb, elhanyagoljuk).

1 proton tömege $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg$, ezkor 40 kg-ban

$\frac{80 kg/2}{m_p} = \frac{40}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 24 \cdot 10^{27}$ proton van. Két százalékkal több

elektron töltése: $q = \frac{2}{100} \cdot 24 \cdot 10^{27} \cdot (-1{,}6 \cdot 10^{-19} C) = -8 \cdot 10^{7} C$

Taszítóerő: $F_e = k \cdot \frac{q^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(8 \cdot 10^7)^2}{1^2} = 6 \cdot 10^{25} N$

Borzasztó nagy erő!

Például egy Föld tömegű test súlya a Föld felszínén

$F = Mg = 6 \cdot 10^{24} kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} = 6 \cdot 10^{25} N$, tehát F_e képes

volna megtartani egy Föld súlyú testet!

Hogy lehet, hogy ilyen nagy erőket csak 100 évvel később fedezték fel, mint a gravitációs erőt? 1/7

Azért, mert az anyagokban a pozitív és negatív töltések nagyon pontosan egyenlő arányban és nagyon egyenletesen vannak eloszlva, minden hétköznapi méretű darabja az anyagnak elektromosan semleges.

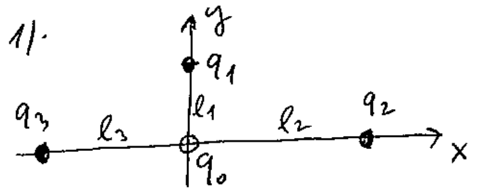
Mégis igen fontos szerepet játszik az elektromos erő:

- ez tartja egyben az anyagokat
- a kémiai kötések a töltések nem teljesen egyenletes eloszlását használják ki
- a testek „érintkezése" valójában elektromos kölcsönhatás
- megtanultuk az elektromosságot ügyesen használni, csaknem minden eszközünk ezt használja.

- látás

Számpéldák

1/.



A q_1, q_2, q_3 töltések helye rögzített. Mekkora erőt fejtenek ki a q_0 töltésre?

$q_0 = 1\,\mu C$

$q_1 = 2\,\mu C \qquad l_1 = 1\,m$

$q_2 = 3\,\mu C \qquad l_2 = 1\,m$

$q_3 = -4\,\mu C \qquad l_3 = 2\,m$

x irányba: $F_x = -k\frac{q_0 q_2}{l_2^2} + k\frac{q_0 q_3}{l_3^2} = -9\cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-6}}{1^2} + 9\cdot 10^9 \frac{10^{-6}\cdot(-4)\cdot 10^{-6}}{2^2}$

$F_x = -36\cdot 10^{-3}\,N \; (\leftarrow)$

y irányba: $F_y = -k\frac{q_0 q_1}{l_1^2} = -9\cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{-6}}{1^2} = -18\cdot 10^{-3}\,N \; (\downarrow)$

$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 40{,}25\cdot 10^{-3}\,N \; (\swarrow)$

2/. A Földre és a Holdra mekkora töltést kell juttatni ($Q=?$), hogy ezek taszítóereje ellensúlyozza a gravitációs vonzást?

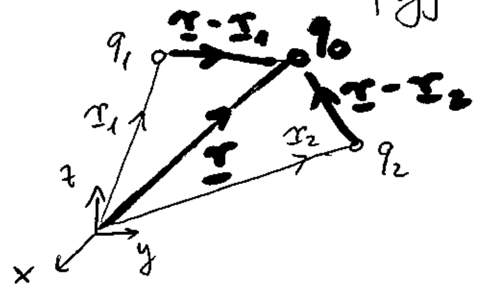
$M_{Föld} = 6\cdot 10^{24}\,kg, \quad M_{Hold} = 7{,}3\cdot 10^{22}\,kg$

Tekintsük a két égitestet pontszerűnek!

$-\gamma\cdot\frac{M_{Föld}\cdot M_{Hold}}{r^2} + k\cdot\frac{Q^2}{r^2} = 0 \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{\gamma}{k} M_{Föld}\cdot M_{Hold}} = 5{,}7\cdot 10^{13}\,C$

A Coulomb-erő is erőteret alkot.

Rögzített $q_1, q_2, \dots, q_n$ töltések közelébe helyezve egy q_0 ponttöltést, a rá ható erő függ q_0 töltés $\underline{r}$ helyzetétől.



$$\underline{F} = k \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3} \cdot (\underline{r}-\underline{r}_i)$$

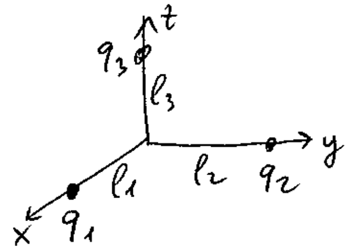
Mivel $\underline{F}$ függ $\underline{r}$-től, de nem függ időtől és sebességtől, ez erőtér (legalábbis elektrosztatika esetén).

Bevezethető az elektromos térerősség fogalma: az egységnyi töltésű ($q_0 = 1C$) próbatöltésre ható erő nagysága:

$$\underline{E} = \frac{\underline{F}}{q_0} = k \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3} (\underline{r}-\underline{r}_i)$$

Az $\underline{E}$ térerősségű elektromos térbe helyezett q töltésre $\underline{F} = \underline{E} \cdot q$ elektromos (Coulomb)-erő hat.

Számpélda: Mekkora az elektromos térerősség az origóban a rögzített $q_1 = 1\mu C$, $q_2 = 2\mu C$, $q_3 = 2\mu C$ töltések hatására? $l_1 = 1m$, $l_2 = 0{,}5m$, $l_3 = 2m$



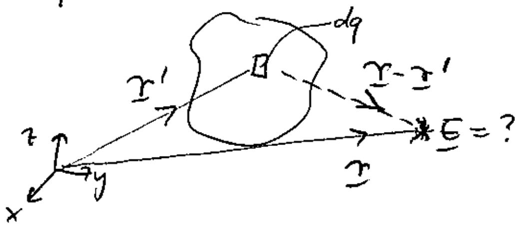
$$\underline{E} = k \sum_{i=1}^{3} \frac{q_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3} (\underline{r}-\underline{r}_i) \quad \text{ahol} \quad \underline{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (origóba mutat)}$$

$$\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} m \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} m \quad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} m \quad \Rightarrow$$

$$\underline{E}(\underline{0}) = 9 \cdot 10^9 \left\{ \frac{10^{-6}}{1^3} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0{,}5^3} \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \frac{N}{C} = 9 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \frac{N}{C}$$

A térerősség nagysága: $\mathbf{E} = |\underline{E}| = 9 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1^2 + 8^2 + 0{,}5^2} = 72{,}7 \cdot 10^3 \frac{N}{C}$

Folytonos töltéseloszlás esetén a térerősség számítása:



$$d\underline{E}(\underline{r}) = k\,\frac{dq}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}(\underline{r}-\underline{r}')$$

mint ponttöltés esetén.

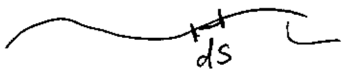
Összegezve minden dq járulékát:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int d\underline{E}(\underline{r}') = k\int_{(V)} \frac{dq}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}(\underline{r}-\underline{r}')$$

Az integrálban $\underline{r}'$ végigmegy minden dq töltés helyén.

Mit jelent itt dq?

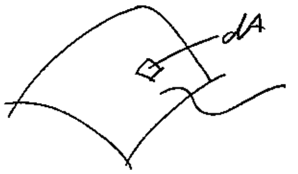
- Vonalmenti töltéseloszlás esetén (pl. drót):



λ; $[\lambda]=\frac{C}{m}$: egységnyi hosszra eső töltés.

Ekkor $dq=\lambda\cdot ds$

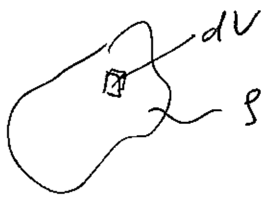
- Felület mentén megoszló töltés esetén (pl. fémek felülete):



σ; $[\sigma]=\frac{C}{m^2}$: egységnyi felületre eső töltés.

Ekkor $dq=\sigma\cdot dA$

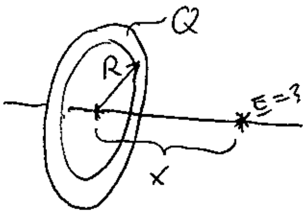
- Térfogatban megoszló töltés:



ρ; $[\rho]=\frac{C}{m^3}$: egységnyi térfogatban levő töltés.

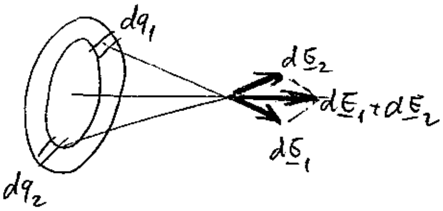
Ekkor $dq=\rho\cdot dV$

Példa



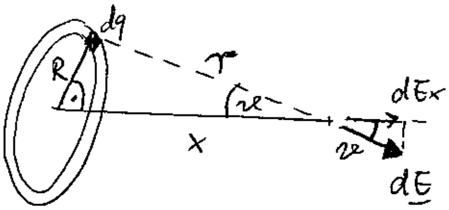
R sugarú, Q egyenletesen eloszló össztöltésű kör gyűrű tengelye mentén mekkora az elektromos térerősség?

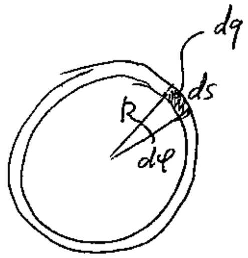
Szimmetria miatt csak x irányú térerősség lesz, az ellentétes töltéselemek hatása kiejti a többi komponenst.



x irányú komponens:

$$dE_x = k\,\frac{dq}{r^2}\cos\vartheta$$





ahol

$$dq = \lambda\cdot ds = \frac{Q}{2R\pi}\cdot R\cdot d\varphi = \frac{Q}{2\pi}\cdot d\varphi \qquad ds$$

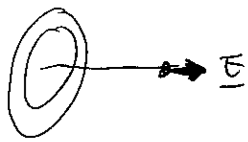
$$r = \sqrt{R^2+x^2}\quad , \quad \cos\vartheta = \frac{x}{r}$$

Ezzel:

$$dE_x = k\,\frac{Q}{2\pi}\,d\varphi\cdot\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Összegezve minden dq töltéselemre:

$$E = E_x = \int dE_x = k\,\frac{Q}{2\pi}\,\frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{kQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$



- Ha $x=0 \Rightarrow E=0$, a gyűrű középpontjában zérus a térerősség
- Ha $x\to\infty \Rightarrow R^2+x^2\to x^2$, azaz $E\to\frac{kQ}{x^2}$, vagyis olyan, mintha pontöltés lenne: messziről a gyűrű pontnak látszik.

(l. még: sötétben minden tehén fekete).

Példák erőtörvényekre

41. Mágneses erő

Korai megfigyelések:

- ókori görögök: vasoxidot tartalmazó kövek vonzzák egymást és a vastárgyakat
- ókori kínaiak: fonálra függesztett mágnesvasérc beáll Észak–Dél irányba.

Következtetés: ilyenkor mágneses tér épül fel.

A mágneses teret mozgó elektromos töltések hozzák létre (nem elektrosztatika).

Tapasztalat: mágneses térben mozgó elektromos töltésre erő hat:

Lorentz-erő: $\underline{F} = q\underline{v} \times \underline{B}$, ahol

- $\underline{B}$: mágneses indukció vektora, a mágneses mező nagyságát és irányát jellemzi, $[B] = \frac{Ns}{Cm} = T$ (tesla)
- $\underline{v}$: mozgó töltés sebessége
- q: töltés nagysága
- $\times$: vektoriális szorzás (jobbkézszabály).

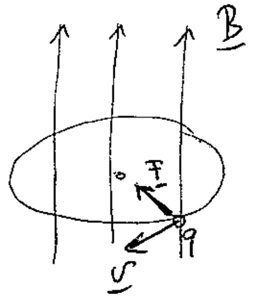
Lorentz-erő tulajdonságai:

- csak mozgó töltésekre hat
- az erő merőleges a mágneses térre és a mozgó töltések sebességére
- nem tudja megváltoztatni a sebesség nagyságát, csak az irányát.

(Megjegyzés: ha egyszerre van elektromos és mágneses tér is:
$$\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$
)

Homogén mágneses mezőben mozgó töltés:

$\underline{B}$ = áll. (térben és időben), tegyük fel, hogy a $\underline{v}$ sebesség merőleges $\underline{B}$-re.



$\underline{F} = q \cdot \underline{v} \times \underline{B}$, mivel $\underline{v}$ és $\underline{B}$ merőlegesek, és $\underline{F}$ merőleges mindkettőre

$\Rightarrow$ a töltés körpályán mozog, az erő változtatja a sebesség irányát, de a nagyságát nem.

$F = qvB = m \cdot a_{cp} = m\frac{v^2}{r}$: a Lorentz-erő biztosítja a körpályán maradáshoz szükséges (centripetális) gyorsulást.

$\Rightarrow$ $r = \frac{mv}{qB}$ a körpálya sugara.

Mennyi idő alatt tesz meg egy kört?

$$vT = 2r\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{v}\cdot r = \frac{2\pi}{v}\cdot\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

Érdekes, hogy $T = \frac{2\pi \cdot m}{qB}$ nem függ a sebességtől!

Példák erőtér vényerre

5) Rugóra erősített test mozgása

Rugóerő: $F(x)$, függ az x kitéréstől

Taylor-sor, ha kicsi az x kitérés:

$$F(x) = F(0) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0} \cdot x + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=0} \cdot x^2 + \ldots$$

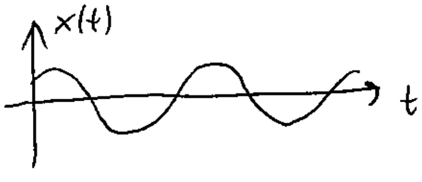
Itt
- $F(0) = 0$, hiszen ha nincs kitérés, nincs rugóerő.
- $\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0} = -k$, ahol k a rugóállandó.
- További tagok elhanyagolhatók, ha x kicsi. (ha x nem kicsi, akkor ez nem igaz → kaotikus viselkedés, érzékenység a kezdőállapotra, megjósolhatatlan mozgás).

Kis kitérés esetén: $F(x) = -kx = m\ddot{x}$, átrendezve:

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, bevezetve $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ sajátkörfrekvenciát:

$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$. Megoldás:

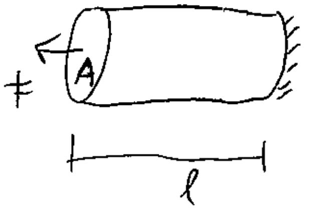
$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad \text{rezgőmozgás.}$$



$F(x)$ is erőtér, hiszen csak x-től függ, időtől és sebességtől nem.

6). Rugalmas test alakváltozásai, feszültségei

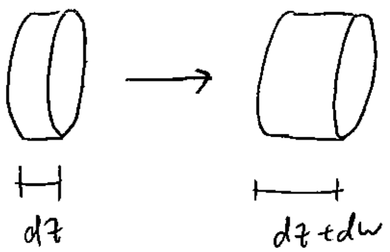
Egyszerű eset: lineárisan rugalmas rúd húzása.



Normálfeszültség: $\sigma = \frac{dN}{dA}$ → egységnyi felületen átadott normálerő, a dA felületelemen átadódó, felületre merőleges dN erőből.

$[\sigma] = \frac{N}{m^2}$

Megnyúlás (alakváltozás a húzott rúd esetén):



$\varepsilon = \frac{dw}{dz}$, az elemi hosszú ($dz$) szakasz dw megnyúlásából. $[\varepsilon] = 1$

A rúd teljes megnyúlása: $\Delta l = \int dw = \int_0^l \varepsilon \, dz$

Lineárisan rugalmas anyag: $\sigma = E \cdot \varepsilon$, ahol

E a rugalmassági modulus (Young-modulus), anyagállandó.

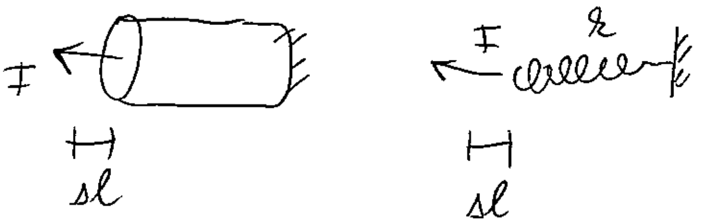
Saint-Venant-elv: $\varepsilon =$ áll. a keresztmetszetben $\Rightarrow \sigma$ is.

Mivel $N = \int_{(A)} \sigma \, dA = \sigma A \Rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$ és $\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{N}{EA}$

Most $N=F$.

Innen: $\Delta l = \frac{F}{EA} \int_0^l dz = \frac{Fl}{EA}$

A húzott rúd tekinthető rugónak is; legyen k a rugónak a rugóállandója:



Milyen k rugóállandó mellett lesz azonos F normálerő hatására ugyanakkora a Δl megnyúlás?

$$\underbrace{F = \frac{EA}{l} \cdot \Delta l \qquad F = k \cdot \Delta l}$$

$k = \dfrac{EA}{l}$ a rugóállandó.

Potenciálos erőtér

Sok példában eddig $\underline{F}$ erőtér volt: $\underline{F} = \underline{F}(\underline{r})$.

Egy speciális erőtér a potenciálos erőtér:

$\underline{F}(\underline{r})$ erőtér potenciálos erőtér, ha létezik olyan $U(\underline{r})$ skalár függvény, amelynek negatív gradiense $\underline{F}(\underline{r})$:

$\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} U(\underline{r})$. $U(\underline{r})$ a potenciálfüggvény.

Ez azt jelenti, hogy $\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ esetén:

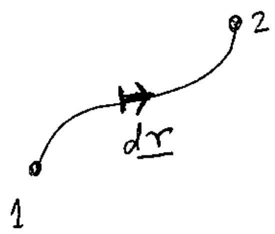
$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}$$

Mivel $U(\underline{r})$ deriváltjai adják meg a fizikailag releváns $\underline{F}$ erőt, ezért ha $U(\underline{r})$ potenciálfüggvény, akkor $U(\underline{r})$+ áll. is az, ugyanazt az $\underline{F}$ erőt adja. Az állandó eltérések rögzítése után $U(\underline{r})$ a potenciális energia.

Szokás az állandót úgy választani, hogy $|\underline{r}| \to \infty$ esetén $U \to 0$ legyen.

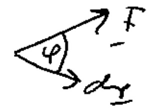
$[U] = \mathrm{N \cdot m} = \mathrm{J}$ (joule).

Vezessük be a munka fogalmát!



Elemi munka, míg az anyagi pont $d\underline{r}$ -rel odébb mozdul:

$dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$ (skalárszorzat, ha $\underline{F}$ és $d\underline{r}$ iránya nem azonos, akkor:

- $\underline{F} d\underline{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z dz$, vagy
- $\underline{F} d\underline{r} = F \cdot dr \cdot \cos\varphi$ )

A teljes munkavégzése az $\underline{F}$ erőnek, míg az anyagi pont az 1. pontból a 2. pontba jut:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \underline{F} d\underline{r}$$

Állítás: potenciálos erőtér teljes munkavégzése csak a kezdő és a végpont helyétől függ.

Bizonyítás: volt: $\underline{F} = -\operatorname{grad} U$, azaz $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$

$$\Rightarrow W_{12} = \int_1^2 \begin{bmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} & -\frac{\partial U}{\partial y} & -\frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = -\int_1^2 \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)}$$

dU teljes differenciál: U megváltozása az egyes irányokba való elmozdulásokból.

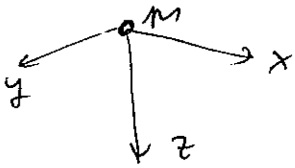
$$\Rightarrow W_{12} = -\int_1^2 dU = -\left[U\right]_1^2 = -U_2 + U_1 = U_1 - U_2$$

Tehát a munka a kezdőpontbeli és végpontbeli potenciális energia különbsége, tehát független attól, milyen útvonalon jutunk el 1. pontból 2.-be, csak a kezdő- és végpont helyétől függ.

Ha a kezdő- és végpont azonos: $W_{12} = 0$ $\Rightarrow$ zárt pályán zérus a munkavégzés. Ez fontos jellemzője a potenciálos erőtérnek.

Példák potenciálos erőtérre

1). Szabadesés



Volt: $\underline{F} = m\underline{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = mg \end{matrix}$

Választható: $U = -mgz + C$, ekkor

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

Ha C-t rögzítjük, U a <u>helyzeti energia</u>.

Számpélda:

Mennyivel nő a potenciális energiája egy 20 kg-os vödörnek, ha felhúzzuk a tetőre? ($\Delta h = 4\,m$).

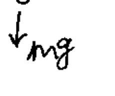
$$\Delta U = mg\,\Delta h = 20 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 784{,}8\,J.$$

Számpélda

Mennyi a munkavégzés, ha az előző feladatban a vödröt felhúzzuk a tetőre, majd visszaengedjük?

Zárt pályán 0 a munkavégzése a gravitációs erőnek.
Ellenőrizzük le:

– felfelé: $W_1 = -mg \cdot \Delta h$ – lefelé: $W_2 = +mg \cdot \Delta h$



Teljes munka: $W = -mg \cdot \Delta h + mg \cdot \Delta h = 0$

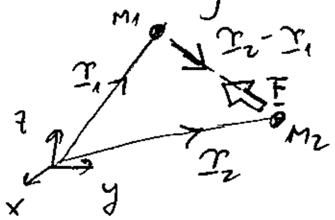
2). Gravitáció

$F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ (ha csak az erő nagysága lényeges).

Választható: $U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + C$.

Ekkor: $F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r^2}$ (ha csak a két tömegpontot összekötő egyenes mentén mozognak).

Ha az iránya is fontos az erőnek:



$$\underline{F}_2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} \cdot (\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

Ekkor: ha $\underline{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\underline{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$:

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|} + C = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}} + C$$

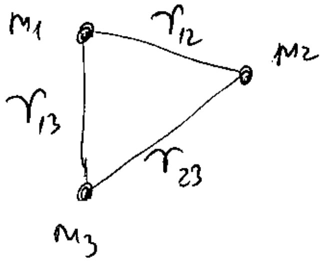
Rögzíthető $C = 0$, ekkor $|\underline{r}_2 - \underline{r}_1| \to \infty$ esetén lesz $U \to 0$,

U a potenciális energia.

Ekkor pl. az m_2-re ható erő y komponense:

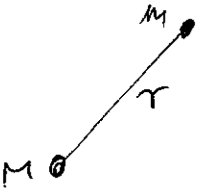
$$F_{2y} = -\frac{\partial U}{\partial y_2} = -\frac{\gamma m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{\left[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right]^{3/2}} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_2 - \underline{r}_1|^3} (y_2 - y_1)$$

Ha kettőnél több test van, akkor összeadódnak a potenciális energiák:



$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \gamma \frac{m_1 m_3}{r_{13}} - \gamma \frac{m_2 m_3}{r_{23}}$$

Számpélda: Mennyi a potenciális energia ebben az elrendezésben? $M = 6\cdot 10^{24}$ kg (Föld), $m = 7{,}3\cdot 10^{22}$ kg (Hold)



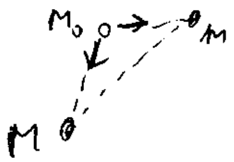
$r = 384\,400$ km (Föld–Hold közepes távolság).

$$U = -\gamma \frac{mM}{r} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{6\cdot 10^{24}\cdot 7{,}3\cdot 10^{22}}{384\,400\,000} = -7{,}6\cdot 10^{28}\ \text{J}$$

Mekkora erővel vonzzák egymást?

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{6\cdot 10^{24}\cdot 7{,}3\cdot 10^{22}}{(384\,400\,000)^2} = -2\cdot 10^{20}\ \text{N}.$$

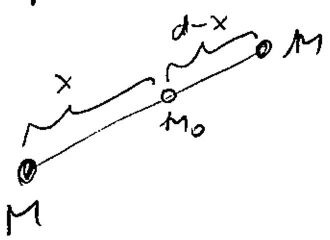
Számpélda: Hova kell tenni az $m_0 = 30000$ kg tömegű űrhajót, hogy ne mozduljon el?



$M = 6\cdot 10^{24}$ kg (Föld), $m = 7{,}3\cdot 10^{22}$ kg (Hold)

$d = 384\,400$ km. Tegyük fel, hogy a Föld és a Hold nem mozognak, és az űrhajó sem befolyásolja őket.

Biztos, hogy egy egyenesben kell legyenek, és m_0 a két égitest közt van:



Ekkor: $$U = -\gamma \frac{mM}{d} - \gamma \frac{m m_0}{|d-x|} - \gamma \frac{M m_0}{x}$$

Ebből erő m_0-ra: $F_0 = -\frac{\partial U}{\partial x}$ azaz

$$F_0 = +\gamma \frac{m m_0}{(d-x)^2} - \gamma \frac{m_0 M}{x^2} = 0$$

(Ezt közvetlenül is fel lehetett volna írni: két erő egyensúlya.)

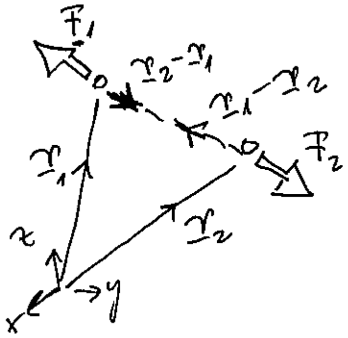
Innen:

$$x = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{m}+\sqrt{M}}\cdot d \approx 0{,}9\cdot d = 346\,200 \text{ km}. \quad \text{(Földtől mért távolság).}$$

Példák potenciálos erőterre

3). Elektromos tér

Volt:



$$\underline{F}_1 = k\frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}(\underline{r}_1-\underline{r}_2)$$

Létezik-e potenciálfüggvény?

$$U(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = k\frac{q_1 q_2}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|} + C =$$

$$= k\frac{q_1 q_2}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}} + C$$

Ez tényleg potenciálfüggvény, ha

$$F_{1x} = -\frac{\partial U}{\partial x_1},\ F_{1y} = -\frac{\partial U}{\partial y_1},\ F_{1z} = -\frac{\partial U}{\partial z_1},\ F_{2x} = -\frac{\partial U}{\partial x_2},\ F_{2y} = -\frac{\partial U}{\partial y_2},\ F_{2z} = -\frac{\partial U}{\partial z_2}$$

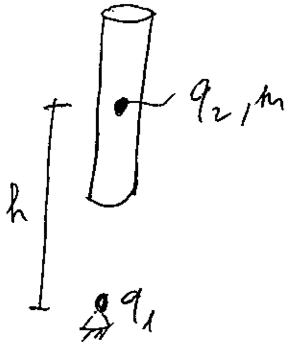
Például:

$$F_{1x} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} = -k\frac{q_1 q_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2(x_1-x_2)}{\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right]^{3/2}} = k\frac{q_1 q_2\,(x_1-x_2)}{|\underline{r}_1-\underline{r}_2|^3}$$

Hasonlóan ellenőrizhető a többi komponens is.

Tehát: az elektrosztatikus tér, a Coulomb-erő **potenciálos**.

Pld A rögzített $q_1 = 2\,\mu C$ töltés feletti csőben egy $m = 0{,}54$ kg tömegű, $q_2 = 3\,\mu C$ töltésű részecske lebeg egyensúlyi helyzetben. Mekkora h távolsággal van feljebb a q_2 töltés a q_1 töltésnél?



– Egyensúly alapján: a lefelé ható erők:

$$mg - k\frac{q_1 q_2}{h^2} = 0 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{k q_1 q_2}{mg}}$$

$$h = \sqrt{\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 2\cdot 10^{-6}\cdot 3\cdot 10^{-6}}{0{,}54\cdot 10}} = 0{,}1\ m$$

– Potenciális energia segítségével:

$$U = mgh + k\frac{q_1 q_2}{h} \rightarrow \frac{dU}{dh} = mg - k\frac{q_1 q_2}{h^2} = 0$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{k q_1 q_2}{mg}}$$

Korábban láttuk: az egységnyi töltésre ható erő az elektromos térerősség: $\underline{E} = \frac{\underline{F}}{q}$, ahol $\underline{F}$ a q töltésre ható erő.

Mivel $\underline{F} = -\operatorname{grad} U \Rightarrow \underline{E} = \frac{\underline{F}}{q} = -\operatorname{grad}\frac{U}{q} \Rightarrow$ célszerű elnevezni $\frac{U}{q}$-t:

Def: Egységnyi elektromos töltésű anyagi pont potenciális energiája elektromos térben az elektromos potenciál:

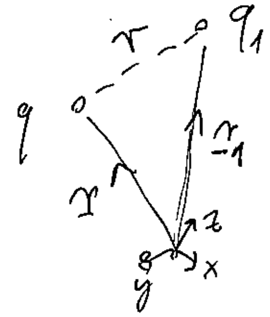
$V = \frac{U}{q}$, $[V] = \text{volt } (V)$.

Def: Elektromos potenciálkülönbség, vagy elektromos feszültség az egységnyi töltésű anyagi pontnak az elektromos mezőben két pont közt való mozgatása közben (általunk) végzett munka: $\Delta V_{12} = V_2 - V_1 = \frac{U_2 - U_1}{q} = -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{E}\, d\underline{r}$.

Ennek alapján az elektromos potenciált így is lehet definiálni:

Def: Az elektromos potenciál egy tetszőleges referencia-ponthoz (gyakran a végtelen távoli ponthoz) viszonyított potenciálkülönbség.

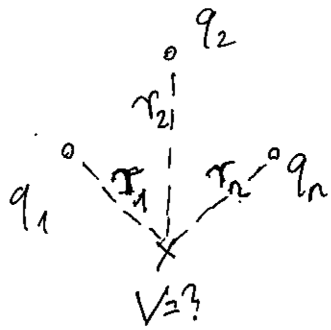
Két töltés esetén láttuk:



$$U = k\frac{qq_1}{|\underline{r}-\underline{r}_1|} \Rightarrow V = \frac{U}{q_1} = k\frac{q}{r} \rightarrow \text{ekkora}$$

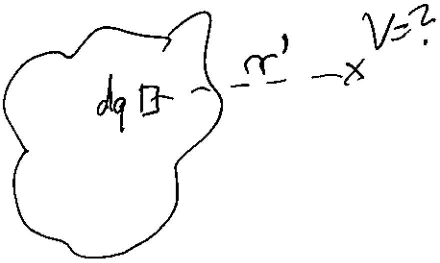
az elektromos potenciál a q ponttöltéstől r távolságra.

Több ponttöltés esetén:



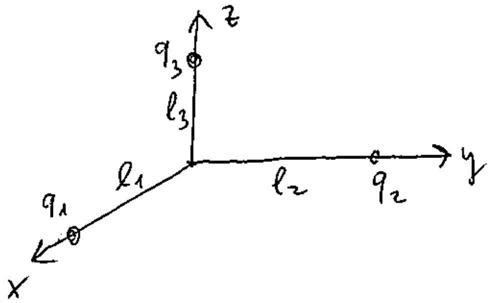
$$V = k\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i}$$

Folytonos töltés-eloszlás esetén:



$$V = k\int_{(V)} \frac{dq}{r'}$$

Számpélda: Mekkora a változott elrendezésben a potenciál az origóban? És az $x=0$, $y=1m$, $z=0$ pontban?



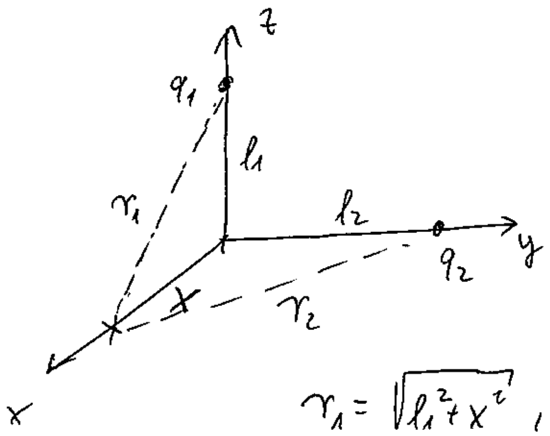
$q_1 = 1\mu C$, $q_2 = 2\mu C$, $q_3 = 2\mu C$

$l_1 = 1m$, $l_2 = 0{,}5m$, $l_3 = 2m$

Origoban:
$$V = k\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{l_i} = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{10^{-6}}{1} + \frac{2\cdot10^{-6}}{0{,}5} + \frac{2\cdot10^{-6}}{2}\right) = 54\cdot10^3 V$$

Az $x=0$, $y=1m$, $z=0$ pontban:
$$V = 9\cdot10^9\cdot\left(\frac{10^{-6}}{\sqrt{l_1^2+1^2}} + \frac{2\cdot10^{-6}}{0{,}5} + \frac{2\cdot10^{-6}}{\sqrt{l_3^2+1^2}}\right) = 9\cdot10^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 4 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 50{,}4\cdot10^3 V$$

Számpélda: Hogyan alakul a változott elrendezésben a potenciál az x tengely mentén?

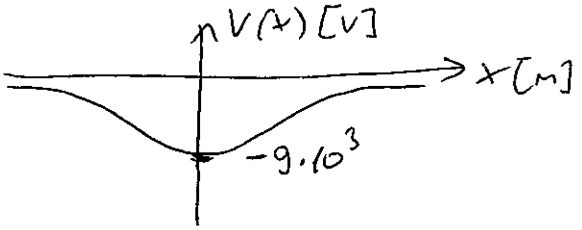


$q_1 = 1\mu C$ $\quad$ $q_2 = -2\mu C$

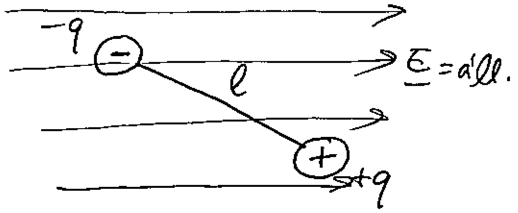
$l_1 = 1m$ $\quad$ $l_2 = 1m$

$r_1 = \sqrt{l_1^2 + x^2}$, $r_2 = \sqrt{l_2^2 + x^2}$

$$V = k\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 9\cdot10^9\left(\frac{10^{-6}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{2\cdot10^{-6}}{\sqrt{1+x^2}}\right) = -\frac{9\cdot10^3}{\sqrt{1+x^2}}$$

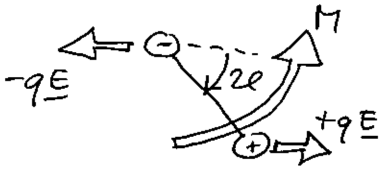


Példa: Elektromos dipólus potenciális energiája homogén elektromos térben.



Elektromos dipólus: két azonos nagyságú, de ellentétes előjelű töltés fix távolságra egymástól. Töltések: $+q$ és $-q$, távolságuk l. Homogén elektromos tér: azonos $\underline{E}$ elektromos térerősség a tér minden pontjában.

Erők:



Eredő erő zérus, de van nyomaték:

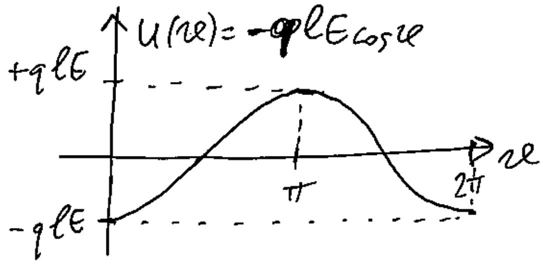
$M = -qlE\sin\vartheta$ (negatív előjel: mert M ellentétes irányú ϑ-val).

Található olyan potenciálfüggvény, hogy $M = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$ legyen?

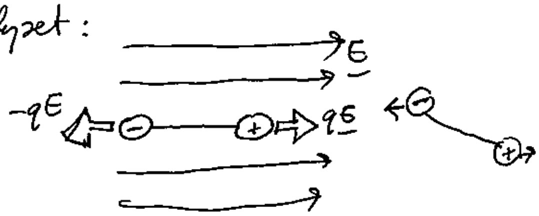
Igen: $U = -qlE\cos\vartheta$, ekkor $M = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -qlE\sin\vartheta$.

Mikor van egyensúly? Ha $\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$ (azaz ha $M=0$), ami $\sin\vartheta = 0$ esetben fordul elő $\Rightarrow$ $\vartheta = 0$ vagy $\vartheta = \pi$.

Az $U(\vartheta)$ függvény ezeken a helyeken nem változik ϑ kis megváltoztatása esetén.

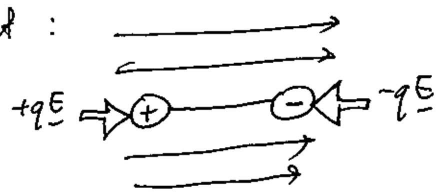


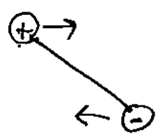
$\underline{\vartheta = 0}$ helyzet:



Kis kitérítéskor M visszaforgatja ebbe a helyzetbe $\Rightarrow$ stabil egyensúlyi helyzet, $U(\vartheta)$ minimális $\vartheta = 0$-nál.

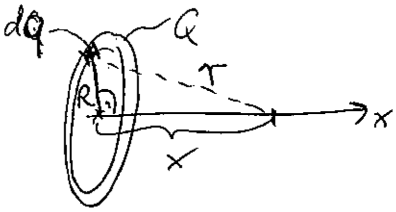
$\vartheta = \pi$ helyzet:





Kis kitérítéskor M még jobban elfordítja $\Rightarrow$ instabil egyensúlyi helyzet, $U(\vartheta)$ maximális $\vartheta = \pi$-nél.

példa: A Q össztöltésű gyűrű tengelye mentén merre a potenciál? És a térerősség?



Potenciál dq-ból, mint ponttöltésből:

$$dV = k\frac{dq}{r} \qquad \text{ahol} \qquad r = \sqrt{R^2+x^2} \quad \Rightarrow dV = k\frac{dq}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

A teljes potenciál:

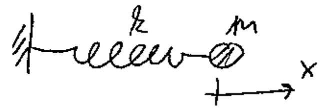
$$V(x) = \int_{(\ell)} \frac{k\,dq}{\sqrt{R^2+x^2}} = \frac{k}{\sqrt{R^2+x^2}} \underbrace{\int dq}_{Q} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

Innen a térerősség:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{kQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Példák potenciálos erőtérre

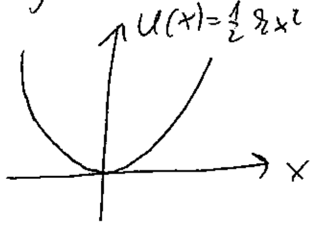
4)- Rugóra erősített test



$F(x) = -kx$

Potenciálfüggvény: $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$, mert $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$.
Választjuk: $C=0 \rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ a rugóban tárolt rugalmas energia.
Mikor van egyensúlyban a test? Ha $F=0$, azaz $x=0$.

Mi jellemzi $U(x)$-et $x=0$-nál?



$x=0$-nál minimuma van, vízszintes az érintője.

Vízszintes érintő: ahol $\frac{dU}{dx}=0$. De mivel $F=-\frac{dU}{dx}$, emiatt

$F=0 \rightarrow$ egyensúly, nincs eredő erő.

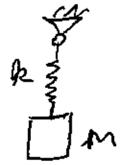
Fordítva: ha nincs eredő erő, $F=0 \Rightarrow \frac{dU}{dx} = -F = 0$, azaz

$U(x)$-nek vízszintes az érintője. Azaz: az egyensúly szükséges és elégséges feltétele, hogy a potenciális energia stacionárius legyen.

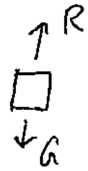
Számpélda: Mekkora a rugóállandója egy lineáris rugónak, amelyet 10 cm-rel megnyújtva a benne felhalmozódó energia 1 kJ?

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \rightarrow k = \frac{2U}{x^2} = \frac{2\cdot 10^3\,J}{(0{,}1\,m)^2} = 2\cdot 10^5\,\frac{N}{m}$$

Pld. Egy $k = 300\ \frac{N}{m}$ rugóállandójú rugón $m = 30\ dkg$ tömegű test lóg. Mekkora a rugó megnyúlása?



– Egyensúly alapján:



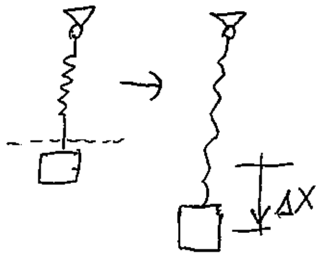
$R = G$

ahol $R = k \cdot \Delta x$ és $G = mg$

$$\Rightarrow k \cdot \Delta x = mg \Rightarrow \Delta x = \frac{m \cdot g}{k} = \frac{0{,}3\ kg \cdot 10\ \frac{m}{s^2}}{300\ \frac{N}{m}}$$

$$\Delta x = 0{,}01\ m = 1\ cm.$$

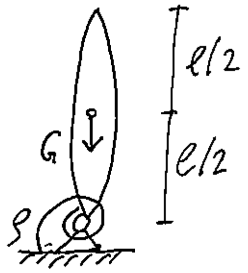
– Potenciális energia segítségével:



$$U = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2 - mg \cdot \Delta x$$

$$\frac{dU}{d(\Delta x)} = k \cdot \Delta x - mg = 0 \rightarrow \Delta x = \frac{mg}{k} = 1\ cm$$

Példa: Torziós rugóval megtámasztott oszlop.



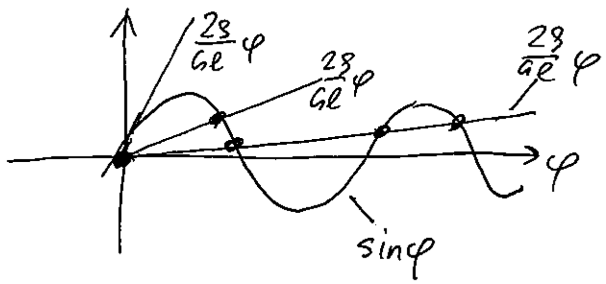
A torziós rugó az elfordulással arányos visszatérítő nyomatékot fejt ki:

Potenciális energia: gravitáció és rugó miatt van:

$U(\varphi)=\frac{1}{2}s\varphi^2+G\cdot\frac{l}{2}\cdot\cos\varphi$, ebből az oszlopra ható nyomaték: $M=-\frac{\partial U}{\partial\varphi}=-s\varphi+G\frac{l}{2}\sin\varphi$.

Egyensúly: olyan φ-nél, ahol $M=0$: $-s\varphi+G\frac{l}{2}\sin\varphi=0 \Rightarrow$

$\sin\varphi=\frac{2s}{Gl}\cdot\varphi$. A megoldások száma $\frac{2s}{Gl}$-től függ, grafikusan:



Ha $\frac{2s}{Gl}$ kicsi, sok megoldás.

Ha $\frac{2s}{Gl}$ nagy, csak $\varphi=0$ a megoldás.

A $\varphi=0$ mindig megoldás, de vajon mindig stabil-e? Azaz $U(\varphi)$-nek $\varphi=0$ mindig minimumhelye? Nézzük meg!

$\varphi=0$ minimumhely, ha $\frac{d^2U}{d\varphi^2}>0$, különben maximumhely ha $\frac{d^2U}{d\varphi^2}<0$, a kettő közti átmenet a kritikus eset: $\frac{d^2U}{d\varphi^2}=0$.

Számítsuk ki: $\frac{d^2U}{d\varphi^2}=s-G\frac{l}{2}\cdot\cos\varphi$, ha $\varphi=0$: $\left.\frac{d^2U}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=s-\frac{Gl}{2}$

Ha $s-\frac{Gl}{2}>0$, azaz $G<\frac{2s}{l} \Rightarrow \frac{d^2U}{d\varphi^2}>0 \Rightarrow \varphi=0$ stabil egyensúly.

Ha $s-\frac{Gl}{2}<0$, azaz $G>\frac{2s}{l} \Rightarrow \frac{d^2U}{d\varphi^2}<0 \Rightarrow \varphi=0$ instabil egyensúly.

Ha $s-\frac{Gl}{2}=0$, azaz $G=\frac{2s}{l} \Rightarrow \frac{d^2U}{d\varphi^2}=0 \Rightarrow$ ennél a G tehernél veszti el a stabilitását a $\varphi=0$ egyensúlyi helyzet.

5/. Rugalmas test alakváltozásai, feszültségei

Egyszerű eset: lineárisan rugalmas rúd húzása.

Rugalmas rúd potenciális energiája: mint rugónál:

$U_{rug} = \frac{1}{2} k \Delta l^2$. Korábban láttuk: $k = \frac{EA}{l}$ és

$\Delta l = \int_0^l \varepsilon \, dz = \varepsilon \cdot l$ (ha ε = állandó a hossz mentén).

Ezzel: $U_{rug} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \cdot \varepsilon^2 l^2 = \frac{1}{2} EAl \cdot \varepsilon^2$

Vezessük be a rugalmas rúdban tárolt potenciális energia sűrűségét:

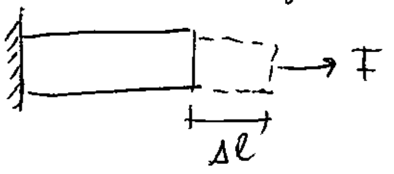
$$u_{rug} = \underbrace{\frac{U_{rug}}{A \cdot l}}_{A\cdot l \text{ a rúd térfogata}} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \underbrace{=}_{\sigma = E\cdot\varepsilon \text{ (lin. rug.)}} \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon$$

Ennek fényében a rúd teljes rugalmas potenciális energiája:

$$U_{rug} = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV$$

(lineárisan rugalmas anyagú rúd és kis alakváltozás esetén).

Ennek segítségével a megnyújtott rúd alakváltozásának számítása:

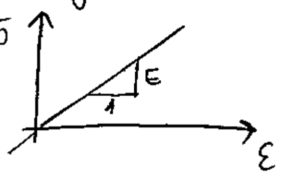


A teljes potenciális energiának két része van: σ–ε-ból és F-ből:

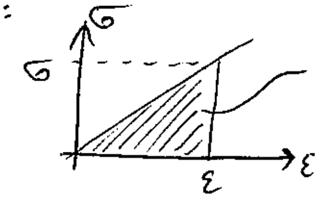
$$U = U_{rug} + U_F = \frac{1}{2} \int_{(V)} \sigma \varepsilon \, dV - F \cdot \Delta l = \frac{1}{2} l E A \varepsilon^2 - F \varepsilon \cdot l$$

Egyensúly: $-\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = 0 \Rightarrow lEA\varepsilon - Fl = 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{F}{EA} \Rightarrow \Delta l = l\varepsilon = \frac{Fl}{EA}$

Eddig lineárisan rugalmas anyagról volt szó: $\sigma = E \cdot \varepsilon$:

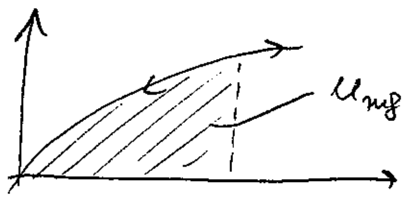


Ekkor a potenciális energia sűrűsége a $\sigma - \varepsilon$ diagramon a görbe alatti terület volt:



$u_{rug} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$

Ha az anyag rugalmas, de nem lineárisan rugalmas, akkor a helyzet hasonló: a potenciális energia sűrűsége a $\sigma - \varepsilon$ diagram alatti terület:



Persze σ és ε a szerkezet minden pontjában más és más lehet, ezért a teljes potenciális energia:

$$U_{rug} = \int_{(V)} u_{rug} \cdot dV.$$

Nem rugalmas, pl. képlékeny anyagnál baj van:

Nem egy görbe van, melyik alatti területet kell venni? Nem lehet potenciált, potenciális energiát definiálni, mert az erő (feszültség) egy adott alakváltozás esetén attól függ, hogy melyik ágon vagyunk a diagramnál, ε nem határozza meg egyértelműen σ-t: nem teljesül, hogy egy adott ε-hoz adott σ tartozik. Zárt görbén körbemenve nem zérus a munka: terhelés-tehermentesítés során nem nyerődik vissza a befektetett energia, annak egy része melegíti az anyagot.

Példák, amikor nincs potenciál és potenciális energia:

- Képlékeny anyag (Maradó alakváltozás van, nem jut vissza eredeti helyzetébe a tehermentesítés után, pl. meghajlított drót. Nem nyerhető vissza a befektetett energia, az az anyagot melegíti.)

- Súrlódás (pl. tégla tologatása az asztalon: a befektetett energia nem nyerhető vissza, zárt úton körbemenve nem nulla a munkavégzés. A végzett munka attól függ, hogy mennyit tologatjuk a téglát, nem csak a kezdő- és végponttól.) (Ilyen a szerkezetek belső csillapítása is: pl. ha egy híd lengésbe jön, a lengés kitérései idővel csökkennek, csökken az energia.)

- Mágnesség: (Lorentz-erő: $\underline{F} = q\underline{v} \times \underline{B}$, vagyis az erő nemcsak a helytől függ, hanem a sebességtől is. Emiatt nem lehet potenciált definiálni.)

Vagyis: potenciálos erőtérben minden pontba egyértelműen oda lehet képzelni egy erőt, ami az odahelyezett testre hat. Nem potenciálos erőtérben ez nem egyértelmű: mindig más erőt kell az adott pontba képzelni attól függően, hogy pl. mekkora sebességgel érkeznénk abba a pontba, vagy hogy mi történt addig a rendszerrel.