

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Kar**

Szatmáry Zoltán

Reaktorfizika mérnököknek

Egyetemi jegyzet

Budapest, 2007

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	6
1.1. Feladatok.....	8
2. Alapfogalmak.....	Hiba! A könyvjelző nem létezik.
2.1. Hatáskeresztmetszetek	Hiba! A könyvjelző nem létezik.
2.2. Neutronfluxus, neutronáram, reakciógyakoriság.....	Hiba! A könyvjelző nem létezik.
2.3. Feladatok.....	Hiba! A könyvjelző nem létezik.
3. Reaktorkinetika	25
3.1. Pontkinetikai modell	25
3.2. Reciprokóra egyenlet	28
3.3. A pontkinetikai egyenlet megoldása speciális esetekben	32
3.3.1. Prompt kritikusság, megszaladás	32
3.3.2. Reaktivitásugrás	32
3.3.3. A reaktor vészleállítása	34
3.3.4. Szubkritikus neutronsokszorozás	35
3.4. A reaktivitás mérési módszerei	36
3.4.1. A reaktivitás mérése szuperkritikus állapotokban	36
3.4.2. 1/N módszer	37
3.4.3. Pulzált neutronforrás módszere szubkritikus reaktorban.....	39
3.4.4. Inverz kinetika	43
3.5. Feladatok.....	44
4. Transzportegyenlet, diffúzióegyenlet	47
4.1. Transzport magfüggvény	47
4.2. Diffúziós közelítés	49
4.3. Fick-törvény	51
4.4. A neutronok mérlege, időfüggő diffúzióegyenlet.....	53
4.5. Kezdeti, folytonossági és peremfeltételek	54
4.6. Energiafüggő diffúzióegyenlet.....	56
4.7. Feladatok.....	58
5. Diffúzióelmélet	59
5.1. Sajátérték-egyenletek.....	59
5.1.1. Kinetikus sajátérték.....	59
5.1.2. Sztatikus sajátérték	60
5.2. Egycsoport közelítés	61
5.3. Kritikusság	62
5.4. Neutronforrás végtelen, nem-sokszorozó közegben. Green-függvény.....	65
5.4.1. Pontforrás	65
5.4.2. Vonalforrás	67
5.4.3. Síkforrás	68
5.5. A Helmholtz-egyenlet megoldásai.....	69
5.5.1. Gömbgeometria.....	69
5.5.2. Hengeres geometria	71
5.5.3. Téglatest.....	73
5.5.4. A diffúziós hossz mérése	74
5.6. Időfüggés és kritikusság egycsoport közelítésben	75
5.6.1. Kinetikus sajátértékek egycsoport közelítésben	75
5.6.2. Sztatikus sajátértékek egycsoport közelítésben	78
5.6.3. Egy közkeletű tévedés.....	80

5.7. A pontkinetikai egyenletek levezetése.....	81
5.8. Reaktorok egycsoport-elmélete	84
5.8.1. Csupasz reaktorok.....	84
5.8.2. Reflektált reaktor egycsoport elmélete	85
5.8.3. Albédó.....	89
5.9. Feladatok.....	90
6. Lassuláselmélet.....	94
6.1. A hasadási neutronok spektruma	95
6.2. Lassulás rugalmas szóródások útján	97
6.2.1. Rugalmas szórási magfüggvény	97
6.2.2. Moderátorok jellemzői.....	100
6.2.3. Letargia	101
6.2.4. A szórás anizotrópiája.....	102
6.3. Lassulás homogén közegben.....	103
6.3.1. Lassulási és szórási sűrűség.....	103
6.3.2. Lassulás végtelen közegben abszorpció nélkül	104
6.3.3. Lassulás hidrogénen, abszorbeáló közegben	105
6.3.4. Lassulás az általános esetben.....	106
6.3.5. Lassulási modellek.....	108
6.3.6. Lassulás keverékben	110
6.4. Rezonanciaintegrál.....	110
6.4.1. Rezonanciaabszorpció homogén közegben	110
6.4.2. Rezonanciaabszorpció fűtőelemrácsokban	113
6.4.3. Dancoff-faktor.....	114
6.4.4. Doppler-effektus	115
6.5. Termalizáció	118
6.5.1. Termalizációs magfüggvények	118
6.5.2. Termikus spektrum homogén közegben	119
6.5.3. Termalizáció szabályos fűtőelemrácsokban	122
6.6. Fermi-kor, migrációs terület	125
6.7. Az effektív későneutron-hányad	127
6.8. Feladatok.....	128
7. Többcsoport módszerek.....	131
7.1. Kevéscsoport diffúzióelmélet	132
7.2. Kétcsoport-elmélet.....	135
7.2.1. Csupasz termikus reaktorok.....	135
7.2.2. Reflektált reaktor kétcsoport-elmélete.....	138
7.4. A véges differenciák módszere.....	141
7.4.1. A véges differenciák felírása	141
7.4.2. Határfeltételek.....	144
7.5. A végesdifferencia-egyenletek megoldása iterációval	145
7.5.1. Az egyenletrendszer felírása	145
7.5.2. Belső iteráció	146
7.5.3. Külső iteráció	148
7.6. Feladatok.....	152
8. Termikus reaktorok.....	154
8.1. Optimális fűtőelemrácsok	155
8.2. Reaktivitástényezők	160
8.2.1. A moderátor hőfoktényezője.....	161
8.2.2. Doppler-együttható	165

8.2.3. A bórsav hatása	167
8.2.4. Üregegyütthető	168
8.2.5. Nyomáségyütthető	168
8.2.6. Teljesítménytényező	168
8.2.7. Bórsavegyütthető	169
8.3. A reaktor megszaladása	169
8.4. Feladatok	175
9. Kiegészítés	177
9.1. Izotópláncok	177
9.1.1. Nehéz elemek	177
9.1.2. Hasadási termékek	180
9.2. Uránlánc	183
9.2.1. Az ^{235}U -izotópból induló ág	184
9.2.2. Az ^{238}U -izotópból kiinduló ág	186
9.2.3. Konverzió és szaporítás	190
9.3. Hasadási termékek	192
9.3.1. Xe-mérgeződés	194
9.3.2. Sm-mérgeződés	196
9.4. Atomerőművek üzemeltetése	198
9.4.1. Kampány	198
9.4.2. A reaktor manőverezhetősége	199
9.4.3. Üzemviteli számítások	202
9.5. Feladatok	202
1. Függelék. Kétszerezési idő a reaktivitás függvényében a BME oktatóreaktorra vonatkozóan	205

1. Bevezetés

Ez a jegyzet a „Reaktorfizika mérnököknek” című előadás alapján készült. A teljes anyag megtalálható Szatmáry Zoltán „Bevezetés a reaktorfizikába” című könyvében. Mivel azonban a gépészmérnök hallgatók érdeklődése és matematikai felkészültsége nem egészen felel meg e könyvnek, a nekik szóló előadást matematikailag egyszerűbben építettük fel.

Az előadásnak két előzménye van: a „Mag- és neutronfizika” és az „Atomenergetikai alapismeretek” című előadások. Bevezetésként összefoglaljuk, hogy ezek alapján mely dolgok ismeretét tételezzük fel. Először nézzük a magfizikai ismereteket:

- Az atommagok szerkezete, alapállapot jellemzői (tömegszám, kötési energia, spin stb.).
- Magreakciók fajtái (potenciálszórás, rugalmatlan szórás, abszorpció, hasadás). Közbenső mag fogalma. Hasadási termékek, késő neutronok.
- Hatáskeresztmetszet fogalma.
- Rezonanciák, Breit-Wigner formula.
- A radioaktív bomlás fajtái, alapvető törvényszerűségei. Radioaktív bomlási sorok.

Reaktorfizikai alapismeretek:

- Hasadások láncreakciója, sokszorozási tényező, reaktivitás.
- Termikus, epitermikus és gyors neutronok.
- Négy- és hatfaktor-formula, az egyes tényezők ($\eta, f, p, \varepsilon, P$) fizikai jelentése.
- Neutronsűrűség, neutronfluxus.
- Reaktorok fajtái.
- Szabályozórudak.
- A hasadóanyag kiégése, összetételének változása, a hasadási termékek felhalmozódása.

Az előtanulmányok során nem volt lehetőség arra, hogy ezeket az ismereteket olyan mélységben közöljék, ahogy arra a reaktorfizikában szükség van. Ezért közülük számosat — alaposabb megközelítésben — az alábbiakban ismét előadunk. Külön kiemeljük a hatáskeresztmetszetet és a neutronfluxust, amelyek a reaktorfizikában központi szerepet játszanak.

A reaktorok működését a neutronok által kiváltott magreakciók összessége jelenti. Mivel a reakciók hatáskeresztmetszete függ a neutron E mozgási energiájától, a reaktorok elméletének egyik változója E , és az elmélet egyik feladata a neutronok energiaspektrumának a meghatározása. A neutronok térben mozognak, ezért szükség van a neutron helyét megadó \mathbf{r} helyváltozóra, továbbá a neutron sebességének az irányára. Az utóbbit az $\vec{\Omega}$ egységvektorral jellemezzük. Végül ismernünk kell a magreakciók időbeli lefolyását, tehát be kell vezetnünk a t időváltozót is. Az utóbbival

kapcsolatban megjegyezzük, hogy a reaktorok működése két időskálán zajlik: egyrészt vannak a neutronok pillanatnyi számát megszabó folyamatok, másrészt a reaktort alkotó anyagok összetételének a változásai. Az előbbiek gyorsak, általában másodperces időskálán zajlanak le, viszont az utóbbiak sokkal lassabbak, időskálájuk napokban, sőt hónapokban mérhető. Végeredményben tehát a reaktorfizikában hét változóval kell dolgoznunk: \mathbf{r} , E , $\vec{\Omega}$ és t .¹

Létezik egy egyenlet, amelynek a megoldása megadja a $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ neutronfluxust: ez a transzportegyenlet (Boltzmann-egyenlet), amely a reaktorfizika alap-egyenlete. Jóllehet pontosan leírja a három alapjelenség, vagyis a neutronspektrum, neutrodiffúzió és kinetika kölcsönhatását, az egyes jelenségek lényegét nagyon nehéz belőle megérteni. A megértést az segíti, hogy az alapjelenségeket egymástól függetlenül, külön-külön tárgyaljuk, hiszen ekkor a változók számát le tudjuk csökkenteni. Ez persze közelítés, de vállaljuk, mert az előadás elsődleges célja éppen a jelenségek lényegének a megvilágítása. Természetesen lesz olyan fejezet is, amelyben bizonyos jelenségeket kölcsönhatásukban fogjuk tárgyalni.

A mondottak értelmében először a kinetikát tárgyaljuk (3. fejezet), vagyis a jelenségeknek t -től való függését. Ezt követően a diffúzióegyenletet vezetjük le (4. fejezet). A „Bevezetés a reaktorfizikába” című könyvtől eltérően ezt nem a transzportegyenlet differenciális alakjából, hanem az integrális alak jelentősen leegyszerűsített formájából kiindulva fogjuk megtenni. Ezt követően a könyv által követett úton haladunk tovább.

Az egyes fejezetekhez gyakorló feladatok csatlakoznak. Megoldásukhoz bizonyos magfizikai adatok szükségesek, amelyeket az alábbi táblázatokban összegeztünk.

1.1. táblázat. Néhány izotóp és elem tömegszáma

Izotóp (elem)	Tömegszám	Izotóp (elem)	Tömegszám
¹ H	1,0079	Zr	91,224
² H	2,0147	Nb	92,9064
Be	9,0122	Gd	157,25
B	10,811	²³⁴ U	234,0409
¹⁰ B	10,0129	²³⁵ U	235,0439
¹¹ B	11,0093	²³⁸ U	238,0508
C	12,011	²³⁹ Pu	239,0522
O	15,9994	²⁴⁰ Pu	240,0538
Al	26,9815	²⁴¹ Pu	241,0568

¹ Az $\vec{\Omega}$ egységvektornak ugyan három komponense van, valójában két szögváltozóval jellemezhető (vö. 2.7. ábra).

1.2. táblázat. Termikus hatáskeresztmetszetek (barnban)

Izotóp (elem)	σ_s	σ_a	σ_f	ν	η
^1H	20,44	0,332	—	—	—
^2H	3,39	0,00053	—	—	—
C	4,75	0,00340	—	—	—
O	3,76	0,00027	—	—	—
^{232}Th	12,7	7,40	—	—	—
^{233}U	8,2	579	531	2,49	2,29
^{235}U	13,8	681	582	2,43	2,08
^{238}U	8,9	2,70	—	—	—
^{239}Pu	7,7	1011	742	2,87	2,11
^{240}Pu	1,5	289	—	—	—
^{241}Pu	11,0	1377	1009	2,93	2,14

1.3. táblázat. A β későneutron-hányad különböző izotópokra

Izotóp	β (%)
^{232}Th	2,03
^{233}U	0,27
^{235}U	0,65
^{238}U	1,48
^{239}Pu	0,21
^{240}Pu	0,27
^{241}Pu	0,49

1.4. táblázat. A későneutron-csoportok adatai a fő hasadó izotópokra

Csoport (i)	$T_{1/2}$ (s)	$\beta_f \cdot 10^5$		
		^{233}U	^{235}U	^{239}Pu
1*	55,7	23	21	7
2**	22,7	79	142	63
3	6,2	67	128	45
4	2,3	74	257	69
5	0,615	14	75	18
6	0,23	9	27	9

*A csoportnak egyetlen hasadási termék felel meg: $^{87}\text{Br} \rightarrow ^{87}\text{Kr} \rightarrow ^{86}\text{Kr} + \text{neutron}$.

**A csoportnak egyetlen hasadási termék felel meg: $^{137}\text{I} \rightarrow ^{137}\text{Xe} \rightarrow ^{136}\text{Xe} + \text{neutron}$.

1.1. Feladatok

1.1. Legyen p_k annak a valószínűsége, hogy a neutron egy ütközés után k utódot hoz létre. Induláskor legyen egy végtelen reaktorban N neutron. Képzeld el, hogy a neutronok egyszerre ütköznek. Az első-, második-, n -edik ütközés után megmaradó neutronok alkotják az első-, második-, n -edik generációt. Mi a valószínűsége, hogy az n -edik generáció után a láncreakció leáll? (16 pont)

- 1.2. Véletlen fát készítünk az alábbi módon. A fa gyökere egy neutron. Ha ütközése után k neutron keletkezik, a fa k ágra bomlik. Legyen az egy ütközésben keletkező neutronok számának várhatóértéke n . Mi annak valószínűsége, hogy a fa kihal? Mi a feltétele, hogy a fa örök életű legyen? (16 pont)
- 1.3. A biztonsági elemzés során egy kóddal kiszámítanak egy kimenő-változót, amelynek értéke adott korlát alatt kell, hogy maradjon. Figyelembe véve a bemenő adatok bizonytalanságát, a kimenő-változó értéke is véletlenszerű. Hány számítás kell annak megállapításához, hogy 95% bizonyossággal állíthassuk, a kimenő-változó a korlát alatt marad? (18 pont)
- 1.4. Megismételjük az előző pontban elmondott számításokat. Mi a valószínűsége, hogy az új felső korlát nagyobb lesz, mint az első? (18 pont)
- 1.5. Legyen $t = 0$ -kor N neutron egy homogén reaktorban. Ütközéskor p_k valószínűséggel keletkezik k neutron ($0 \leq k \leq M$). Feltesszük, hogy a neutronok egyszerre ütköznek. Az I -edik ütközés után az I -edik generációról beszélünk. Mi annak a valószínűsége, hogy L generáció után a neutronok száma 0 lesz? (20 pont)
- 1.6. Neutronnyalábbal besugárzunk N darab egyforma tömegű követ. A besugárzott kövek γ -aktivitását NaJ detektorral mérjük. Hány mérésből található meg a legnagyobb aktivitású kő? (20 pont)
- 1.7. Keressük meg a ^{239}Pu abszorpciós, teljes és hasadási hatáskeresztmetszetének energiafüggését a <http://www-nds.iaea.org/> weboldalon és rajzoljuk/nyomtassuk ki az ábrát a (0–100 eV) tartományban! Keressünk olyan anyagot, amelyik alkalmas 1 MeV-nél nagyobb energiájú neutronok detektálására! Hogyan történne a mérés? (16 pont)
- 1.8. Készítsünk olyan kétszer folytonosan deriválható függvényt, amely eltűnik egy négyzet peremén! (4 pont)
- 1.9. Készítsünk olyan kétszer folytonosan deriválható függvényt, amely eltűnik egy szabályos hatszög peremén! (18 pont)
- 1.10. Egy VER-440 kazettában 126 cella van. A cellák kevéscsoport-állandóit (csoportállandóit) numerikus módszerrel állítjuk elő. Annak vizsgálatára, hogyan változik a kazettán belül az egyes cellák teljesítménye a csoportállandók bizonytalanságainak (hibáinak) függvényében, Monte-Carlo számítást végzünk az alábbi módon. A cellákat típusokba soroljuk, a típusok száma K , minden típushoz meghatározzuk a csoportállandók valószínűségi eloszlásfüggvényét, és minden cellában ebből az eloszlásból sorsoljuk annak csoportállandóit. A kisorsolt csoportállandók mellett meghatározzuk a cellák teljesítménysűrűségét. Becsüljük meg K függvényében egy adott pontosságú válasz eléréséhez szükséges számítás számát! (18 pont)
- 1.11. A reaktorból beérkező (neutron) nyaláb mérete $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$, a céltárgy mérete viszont csak $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Készítsünk egy vázlatot, hogyan kellene a nyaláb méretét megváltoztatni! Útmutatás: Létezik neutrontükör, amivel a neutronok úgy terelhetőek, mint a fotonok tükörrel. (18 pont)

2. Alapfogalmak

2.1. Hatáskeresztmetszetek

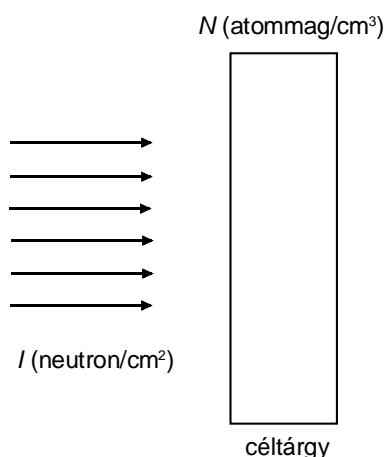
A reaktorfizikában a *hatáskeresztmetszet* segítségével fejezzük ki annak a valószínűségét, hogy az egyes atommagok a különböző fajta magreakciókban részt vesznek. Tekintsünk egy cm^3 -enként N atommagot tartalmazó, vékony¹ céltárgyat, amelynek egy cm^2 -ére I neutron esik merőlegesen (2.1. ábra). A térfogategységben bekövetkező magreakciók R száma nyilván arányos N -nel és I -vel:

$$R = NI\sigma$$

ahol a σ arányossági tényezőt *mikroszkopikus* hatáskeresztmetszetnek nevezzük. Ha az atommagot a klasszikus mechanika fogalmai szerint képzeljük el, akkor σ -t tekinthetjük az atommag keresztmetszetének, vagyis $r^2\pi$ -nek, hiszen az atommagok együttesen $Nr^2\pi$ felületet mutatnak a neutronnyalábbal szemben. (r az atommagot körülvevő magerőtér sugara.) Ha valamelyik neutron ebbe beleütközik, bekövetkezhet a magreakció. A valóságban bonyolult kvantummechanikai effektusok is fellépnek, amelyek eldöntik, hogy a neutron és az atommag találkozásakor valóban bekövetkezik-e a reakció. Mindezeket figyelembe véve adódik ki a σ hatáskeresztmetszet. Annyira mindenesetre látszik, hogy felületdimenziójú mennyiségről van szó. Mivel az atommag sugara 10^{-12} cm nagyságrendű, a hatáskeresztmetszet természetes egysége a *barn*:

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

A szokásos felületegységek helyett az SI rendszer a magfizikában és a reaktorfizikában – kivételesen – megengedi ezt a már régóta használatos egységet.



2.1. ábra. Kollimált neutronnyaláb és egy céltárgy kölcsönhatása

¹ A "vékonyság" itt azt jelenti, hogy elhanyagolható egy atommagnak egy másik által való esetleges "takarása".

Véges vastagságú anyagon való áthaladáskor a neutronnyaláb gyengül az anyagban található atommagok sűrűségének és hatáskeresztmetszetének a függvényében. Tekintsük a 2.2. ábrát. Az anyagra kívülről cm^2 -enként I_0 neutron esik be a céltárgyra merőlegesen. A neutronnyalábból egy x cm vastagságú rétegen csak ennél kevesebb, $I(x)$ számú neutron fog áthaladni, mivel a közben bekövetkező magreakciók a nyalábhhoz tartozó neutronok számát csökkentik. Ha az anyag egy cm^3 -ében N számú atommag van, akkor az $(x, x+dx)$ közé eső rétegben bekövetkező csökkenésre a

$$-dI(x) = I(x)N\sigma dx \quad (2.1)$$

összefüggést írhatjuk fel, amiből egyszerűen kapjuk, hogy

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma x}. \quad (2.2)$$

Itt

$$\Sigma = N\sigma \quad (2.3)$$

a *makroszkopikus* hatáskeresztmetszet. Szokásos egysége: $1/\text{cm}$ ($= \text{cm}^{-3} \cdot \text{cm}^2$). Fizikai jelentése: a magreakciónak a neutron által megtett út 1 cm -ére vonatkozó valószínűsége. Az N magsűrűséget a g/cm^3 -ben mért ρ makroszkopikus sűrűséggel az

$$N = \frac{6,0221 \cdot 10^{23} \rho}{A}$$

képlet kapcsolja össze. Mivel a *Loschmidt-szám* a grammatomsúlynyi anyagban levő atommagok számát adja meg, a nevezőben álló A tömegszám gramm egységekben értendő, vagyis N $1/\text{cm}^3$ egységekben adódik. Ha σ -t barnban fejezzük ki, akkor a mikroszkopikus hatáskeresztmetszet cm^2 -re átszámolt értéke $10^{-24} \sigma$. Ezzel a

$$\Sigma = \frac{6,0221 \cdot 10^{23} \rho}{A} \cdot 10^{-24} \sigma = \frac{0,60221 \rho}{A} \cdot \sigma$$

képlet a makroszkopikus hatáskeresztmetszetet $1/\text{cm}$ -ben adja meg. Erre való tekintettel az

$$N = \frac{0,60221 \rho}{A} \quad (2.4)$$

képletet szoktuk a magsűrűségek számítására használni, amely a magsűrűséget nem $1/\text{cm}^3$, hanem $1/(\text{cm} \cdot \text{barn})$ egységekben adja meg. Ha tehát ezt egy barnban mért mikroszkopikus hatáskeresztmetszettel szorozzuk, akkor – a fentiek értelmében – $1/\text{cm}$ -ben kifejezett makroszkopikus hatáskeresztmetszetet kapunk eredményül.

A hatáskeresztmetszetek két szempontból is additívak. *Először*, a különböző típusú magreakciók együttes hatáskeresztmetszete a rész-hatáskeresztmetszetek ösz-

szége. Például, az *abszorpciós* hatáskeresztmetszetet a *befogási* és a *hasadási* hatáskeresztmetszetből a

$$\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f, \quad (2.5a)$$

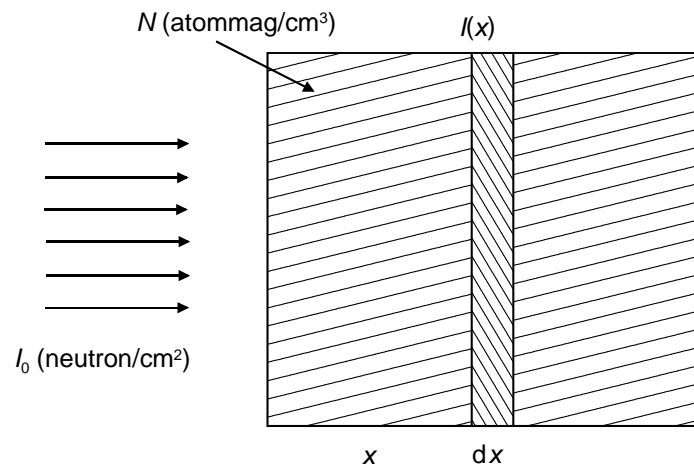
a teljes hatáskeresztmetszetet pedig a

$$\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s \quad (2.5b)$$

képlettel számíthatjuk ki, ahol σ_s a *rugalmas szórás* hatáskeresztmetszet. (Ha *rugalmatlan szórás* is van, akkor (2.5b) jobb oldalán még egy σ_{in} tagot is szerepeltetni kell.) A mikroszkopikus hatáskeresztmetszetek összeadásának az az alapja, hogy a különböző fajta magreakciók egymást kizáró események, amelyek valószínűségét összeadva megkapjuk az összetett esemény valószínűségét. *Másodszor*, egy különböző fajtájú atommagokból álló keverék makroszkopikus hatáskeresztmetszetét a különböző fajta magok mikroszkopikus hatáskeresztmetszetének lineáris kombinációja adja. Például, a keverék abszorpciós makroszkopikus hatáskeresztmetszetét a

$$\Sigma_a = N_1\sigma_{a1} + N_2\sigma_{a2} + \dots \quad (2.5c)$$

képlettel számíthatjuk ki, ahol N_i és σ_{ai} az i -edik fajta mag sűrűsége, illetve abszorpciós mikroszkopikus hatáskeresztmetszete ($i = 1, 2, \dots$). Az összeadásnak ugyanaz a magyarázata, mint az előbbi esetben: a különböző fajta magokon bekövetkező magreakciók egymást kizáró események, tehát valószínűségeik összeadhatók.



2.2. ábra. Kollimált neutronnyaláb gyengülése

A makroszkopikus hatáskeresztmetszet reciprokát *átlagos szabad úthossznak* szoktuk nevezni. Annyiféle szabad úthosszról lehet beszélni, ahányféle hatáskeresztmetszet van. Szemléletes és egyszerű fizikai jelentést azonban csak $1/\Sigma_t$ -nek és $1/\Sigma_a$ -nak lehet adni. Az előbbi annak a távolságnak a várható értéke, amelyet a neutron ütközés nélkül megtesz. Ezt könnyen megkaphatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy – mint könnyen belátható [vö. 2.2. ábra és (2.2) egyenlet] – annak a valószínűsége, hogy az első ütközés az $(x, x+dx)$ intervallumban történik,

$$e^{-\Sigma_t x} \Sigma_t dx,$$

amivel a kérdéses várható érték

$$M(x) = \int_0^{\infty} e^{-\Sigma_t x} \Sigma_t x dx = \frac{1}{\Sigma_t}.$$

A többi szabad úthossz értelmezése bonyolultabb. Nézzük például $1/\Sigma_a$ fizikai jelentését. Annak a valószínűsége, hogy a neutronnak pontosan n -edik ütközése fog abszorpcióra vezetni:

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} \left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \right)^{n-1},$$

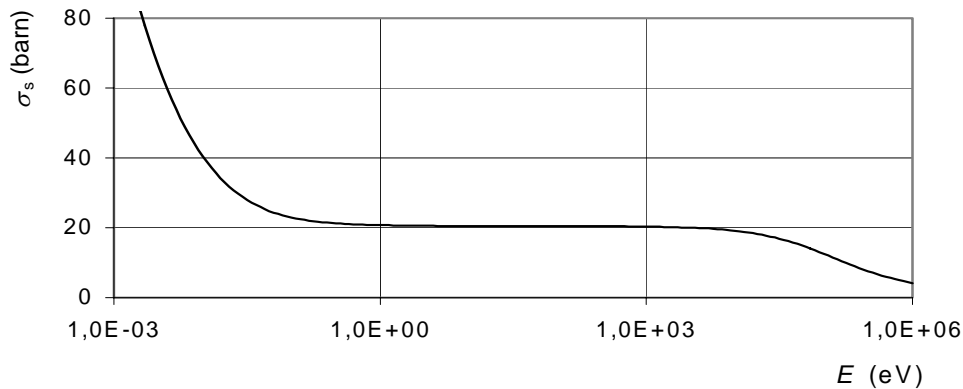
hiszen az abszorpciót $(n-1)$ szórás előzi meg, és egy ütközés Σ_a/Σ_t és Σ_s/Σ_t valószínűséggel vezet abszorpcióra, illetve szórásra ($n = 1, 2, \dots$). Ebben az esetben a cikkcakokban megtett út átlagos hossza n/Σ_t . Az abszorpcióig megtett út várható értéke tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Sigma_a}{\Sigma_t} \left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t} \right)^{n-1} \frac{n}{\Sigma_t} = \frac{1}{\Sigma_a}, \quad (2.6)$$

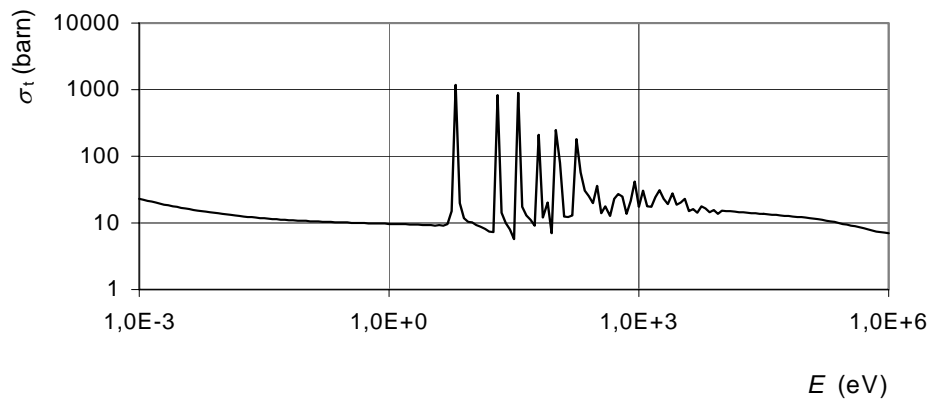
amint ez némi számolás után belátható. Ha ugyanezt az első hasadási megtett útra számoljuk végig, Σ_f/Σ_a^2 jön ki, $1/\Sigma_f$ tehát nem értelmezhető így. Hasonlóan $1/\Sigma_s$ -nek sem sikerül szemléletes értelmet adni. Ennek ellenére egyaránt beszélünk abszorpciós, hasadási, szórás stb. szabad úthosszokról, amelyek szokásos jelölése rendre $\lambda_a, \lambda_f, \lambda_s \dots$

A hatáskeresztmetszetek általában függnek a magreakciót kiváltó neutron energiájától. E függés jellege atommagonként és reakciófajtanként nagyon eltérő lehet. Például, a potenciálszórás hatáskeresztmetszet széles energiatartományban gyakorlatilag állandó, viszont a befogási és a hasadási hatáskeresztmetszet igen gyors, rezonanciaszerű változásokat is mutathat. Az előbbire példaként a 2.3. ábrán látható a hidrogén szórás hatáskeresztmetszete. Az utóbbira a 2.4. ábra mutat példát (az ^{238}U teljes hatáskeresztmetszete). Ezen túlmenően a hatáskeresztmetszetek nagysága atommagról atommagra is nagyon eltérő lehet. Például, a deutérium abszorpciós hatáskeresztmetszete 1 mbarn, szemben a ^{135}Xe -tel, amelyre ugyanez (1 eV-nál kisebb energiájú neutronokra) a millió barn-t is meghaladja. Mint látni fogjuk, ennek komoly következményei vannak mind a reaktorok működésére, mind a reaktorelméletre vonatkozóan. A különböző atommagok hatáskeresztmetszeteinek a neutronenergiától való függését a reaktorfizika a magfizikai mérések eredményeiből veszi. A világ több vezető laboratóriumában foglalkoznak a magfizikusok által mért adatok kritikai elemzésével (ún. *evaluálásával*), aminek eredményeképpen időről időre ún. *magadatkönyvtárakat* publikálnak. A forgalomban lévő könyvtárak nagy (néha a milliót is meghaladó) számú adatot tartalmaznak, amelyeket a reaktorfizikusok numerikus számításaikban használnak fel. Tekintve azonban, hogy – mint mondtuk – az egyes hatáskeresztmetszetek jellegének és nagyságának komoly befolyása van a reak-

toelméletre, a reaktorfizikusnak éppen úgy ismernie kell az egyes izotópok hatáske-
resztmetszeteit (nagyságukat és a neutronenergiától való függésük jellegét), mint a
biológusnak az egyes növény- és állatfajok tulajdonságait.



2.3. ábra. A ^1H szórási hatáskeresztmetszete (mért adatok)



2.4. ábra. Az ^{238}U teljes hatáskeresztmetszete

A 2.4. ábrán látható csúcsokat *rezonanciáknak* nevezzük, amelyeken belül a hatáskeresztmetszet nagyon szűk energiatartományon belül nagyon nagy értékre ugrik fel. Ennek az az oka, hogy az ilyen energiájú neutronok az összetett mag valamelyik energianívóját gerjesztik. (A neutron energiájának a gerjesztési energia és a mag viszszalökésére fordított energia összegéhez kell közel lennie.) Ha ezt az energiát E_r -rel jelöljük, akkor ehhez közeli E energiákon a teljes, a befogási és a hasadási hatáskeresztmetszeteiket a *Breit–Wigner*-formula szerint számíthatjuk ki:

$$\sigma_t(E) = \frac{\sigma_0}{1+x^2} + \left(\sigma_0 \sigma_{pa} g_j \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \right)^{1/2} \frac{2x}{1+x^2} + \sigma_{pa}, \quad (2.7a)$$

$$\sigma_c(E) = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}, \quad (2.7b)$$

$$\sigma_f(E) = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \frac{\Gamma_f}{\Gamma} \quad (2.7c)$$

ahol

$$x = \frac{E - E_r}{\Gamma/2}, \quad (2.7d)$$

továbbá Γ , Γ_n , Γ_γ , Γ_f , $\Gamma_a = \Gamma_\gamma + \Gamma_f$ rendre a rezonancia teljes, rezonanciaszórási, befogási, hasadási és abszorpciós szélessége, σ_0 a teljes rezonancia-hatáskeresztmetszet értéke az $E = E_r$ rezonanciaenergiánál, σ_{pa} az abszorbens mag potenciálszórási hatáskeresztmetszete, végül $g_j = (2J+1)/(2I+2)$ a statisztikus spin-tényező (ahol I az eredeti atommag, J pedig az összetett mag spinkvantumszáma).² Ezekben a képletekben E a neutronnak a maghoz képest való relatív mozgásához tartozó energia. A (2.7a) képletben szereplő második tagot a kvantummechanika szerint úgy értelmezzük, mint a potenciál- és a rezonanciaszóráshoz tartozó hullámfüggvények interferenciájának a következményét. Ez a tag eredményezi azt, hogy a rezonancia-hatáskeresztmetszetek görbéje enyhén aszimmetrikus.

A reaktorok működése szempontjából elsősorban a nehéz páros-páros izotópok (^{238}U , ^{232}Th , ^{240}Pu stb.) rezonanciáinak van jelentőségük, de pontos számításokban nem hagyhatók figyelmen kívül a páros-páratlan (például ^{235}U , ^{239}Pu) izotópok rezonanciái sem. Az egyes izotópok esetében több, mint száz egymástól jól elkülönülő rezonanciát azonosítottak (lásd például 2.4. ábra), amelyek E_r energiája néhány eV-től néhány keV-ig terjed. A gyakorlatban különösen fontos az ^{238}U 6,67 eV-nál és a ^{240}Pu 1 eV-nál lévő rezonanciája. Az egymástól elkülöníthető, ún. *felbontott rezonanciák* felett (tehát a keV tartományban) van még sok, egymástól nehezen elkülöníthető, ún. *fel nem bontott rezonancia*, amelyek leírására a numerikus számításokban statisztikus módszereket szoktunk alkalmazni: (kísérletileg vagy elméletileg) eloszlásfüggvényeket határozzunk meg az E_r energiákra és Γ vonalszélességekre. Jegyzetünkben csak a felbontott rezonanciákkal fogunk foglalkozni.

A szórási hatáskeresztmetszetre vonatkozóan az energiától való függésen túlmenő részletezésre is szükség van, hiszen nem mindegy, hogy a szóródás után a neutron milyen energiával és milyen irányban repül tovább. Ezért a $\sigma_s(E)$ szórási hatáskeresztmetszet mellett bevezetjük a *szórási magfüggvény* fogalmát:

$$\sigma_s(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}'$$

annak a szórási magreakciónak a hatáskeresztmetszete, amelyben egy $\vec{\Omega}$ irányban repülő E energiájú neutron a szóródás után az $(E', E'+dE')$ intervallumba eső energiával és az $\vec{\Omega}'$ körüli $d\vec{\Omega}'$ térszögben repül tovább. ($\vec{\Omega}$ és $\vec{\Omega}'$ a neutron sebességének az irányába mutató egységvektorok.) Bizonyos kristályos anyagoktól eltekintve a szórási magfüggvény nem függ külön-külön az $\vec{\Omega}$ és $\vec{\Omega}'$ irányoktól, hanem csak az általuk bezárt szögtől, tehát végső soron az $\vec{\Omega}\vec{\Omega}'$ skalárszorzattól. Ha még ettől sem függ, akkor *izotrop* szórásról beszélünk, és ilyenkor a magfüggvény a

² A (2.7a) alatti Breit–Wigner-formula akkor érvényes, amikor a rezonanciában az atommag egyetlen energianívója játszik szerepet. A legtöbb esetben azonban több nívót is figyelembe kell venni, és emiatt a korszerű számításokban az ún. *többnívós formulákat* használják. Jegyzetünkben mégis megtartjuk az egynívós képleteket, mert ezek könnyen kezelhetők, és alkalmasak a legfontosabb jelenségek *lényegének* ismertetésére.

$$\sigma_s(E \rightarrow E', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \frac{\sigma_s(E \rightarrow E')}{4\pi}$$

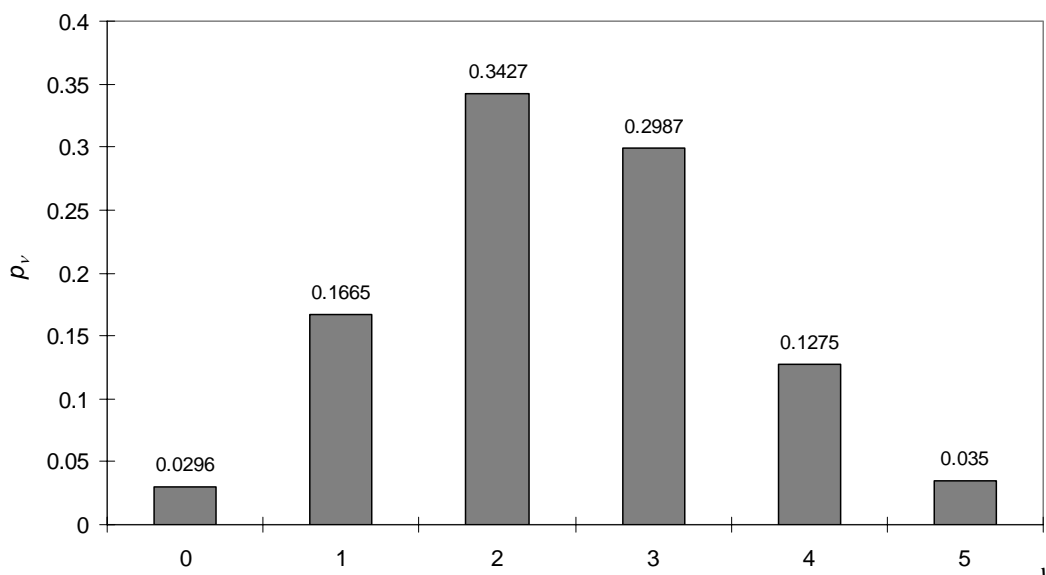
alakban írható fel. Ilyennek szoktuk tekinteni a rugalmatlan szórás, de ez gyakran elfogadható közelítés a rugalmas szórás esetében is. Végül a hatáskeresztmetszetek additivitásából következik, hogy

$$\sigma_s(E) = \int \int_{4\pi} \sigma_s(E \rightarrow E', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') dE' d\vec{\Omega}' .$$

Ha a szóródás analógiájára a hasadás esetében is definiálunk egy magfüggvényt, akkor egy egyszerű, elfajult alakot kapunk:

$$\sigma_f(E \rightarrow E', \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \frac{f(E') \nu(E) \Sigma_f(E)}{4\pi} ,$$

mivel a hasadásban keletkező neutronok irányeloszlása izotrop, továbbá $f(E')$ energiaspektrumuk független a hasadást kiváltó neutron E energiájától. $\nu(E)$ a hasadásban keletkező neutronok átlagos száma, amely viszont E' -től független.³ Az egy hasadásban keletkező neutronok száma 0 és 5 között változhat. Valószínűségi eloszlásfüggvénye ²³⁵U-re a 2.4. ábrán látható. $\nu(E)$ erre vonatkozó átlag. A jelölés egyszerűsítése érdekében $\nu(E) \Sigma_f(E)$ helyett gyakran $\nu \Sigma_f(E)$ -t írunk, ami természetesen nem jelenti azt, hogy ν -t E -től függetlennek tekintenénk.



2.5. ábra. Az ²³⁵U hasadásában keletkező ν számának valószínűségi eloszlásfüggvénye

Az eddigiekben a neutronnal ütköző atommagot nyugalomban levőnek tekintettük, pedig a valóságban hőmozgást végez. A magfizikában definiált hatáskeresztmetszet mindig a neutronnak a tömegközépponti rendszerben (TKR) vett energiájára vonatkozik, viszont a reaktorfizikában E konzekvensen a laboratóriumi rendszerben

³ Ezek a kijelentések ugyan közelítők, de a reaktorfizikában jó közelítéssel mindig elfogadhatók.

(LR) vett energia. Ennek az ellentmondásnak a feloldására szolgál az *effektív hatáskeresztmetszet*.

Legyen a neutron és a mag sebessége LR-ben rendre \mathbf{v} és \mathbf{V} . A magok hőmozgását a $P(\mathbf{V})$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel írjuk le. A mondottak szerint a magfizikai hatáskeresztmetszet a

$$v_r = |\mathbf{v} - \mathbf{V}|$$

relatív sebességtől függ. Azoknak a magoknak a sűrűsége, amelyek sebessége a \mathbf{V} körüli $d\mathbf{V}$ sebesség-térfogatelemben esik, $N P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}$, tehát ezek magfizikai makroszkopikus hatáskeresztmetszete

$$N \sigma(v_r) P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}.$$

Az ütköző neutron dt idő alatt ezekhez a magokhoz képest $v_r dt$ utat tesz meg, tehát annak a valószínűsége, hogy dt idő alatt magreakció következik be,

$$N v_r \sigma(v_r) P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} dt.$$

Ezt \mathbf{V} -re integrálva megkapjuk a magreakció teljes valószínűségét.

Ha az ütköző mag nem mozogna, ugyanez a valószínűség $N \sigma v dt$ lenne. Az effektív hatáskeresztmetszet az a mennyiség, amely ugyanezzel a formulával helyesen adja meg a magreakció valószínűségét:

$$N v \sigma_{\text{eff}}(v) dt = \int N v_r \sigma(v_r) P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} dt,$$

vagyis a reaktorfizikában használt, effektív hatáskeresztmetszet

$$\sigma_{\text{eff}}(v) = \frac{1}{v} \int v_r \sigma(v_r) P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}. \quad (2.8)$$

Az integrálás kiterjed az összes lehetséges \mathbf{V} sebességekre.

Az $1/v$ hatáskeresztmetszet az egyetlen kivétel, amelyre az effektív hatáskeresztmetszet megegyezik a magfizikaival. Ekkor ugyanis $v_r \sigma(v_r) = v \sigma(v)$, amivel

$$\sigma_{\text{eff}}(v) = \sigma(v) \int P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \sigma(v).$$

Minden más esetben a kettő egymástól eltér. A reaktorfizikának két fejezete van, ahol ez az eltérés fontos szerepet játszik: a Doppler-effektus (6.4.4. szakasz) és a termalizáció (6.5. alfejezet).

Amikor a magfizikusok hatáskeresztmetszetet mérnek, nem a magfizikai, hanem az effektív hatáskeresztmetszetet mérik. Mivel $P(\mathbf{V})$ függ a hőmérséklettől, közölniük kell, hogy a mérést milyen hőmérsékleten végezték. Ha ez ismert, a mérési

eredményt — a (2.8) egyenlet megfordításával — vissza lehet számolni a magfizikai hatáskeresztmetszetre, és ennek alapján az effektív hatáskeresztmetszet tetszőleges másik hőmérsékletre vonatkozóan is előállítható. A korszerű hatáskeresztmetszet-kezelő programok ezeket a műveleteket a szükséges pontossággal el tudják végezni.

Befejezésül megjegyezzük, hogy amikor a hőmérséklet csökken, a $P(\mathbf{V})$ sűrűségfüggvény egyre szűkül, és 0 K közelében egy δ -függvényhez tart. Ezért $v_r \approx v$. Ekkor tehát az effektív hatáskeresztmetszet a magfizikaihoz tart. Erre való tekintettel az utóbbit gyakran “0 K-re redukált hatáskeresztmetszetnek” szoktuk nevezni.

2.2. Neutronfluxus, neutronáram, reakciógyakoriság

Az eddigiekben szigorúan egy irányban repülő, azonos energiájú neutronokból álló nyalábokat tekintettünk. A valóságos esetekben azonban a különböző neutronok energiája egymástól eltér, és repülésük iránya sem ugyanaz. Általában tehát csak a neutronok hely, energia és repülési irány szerinti *eloszlásáról* beszélhetünk, amit *neutrontérnek* is szoktunk nevezni. A reaktorfizika két központi fogalma a neutronsűrűség és a neutronfluxus. Definíciójuk a következő. Tekintsük azokat a neutronokat, amelyek az \mathbf{r} helyvektorhoz tartozó hely dV térfogatú környezetében vannak, az $\vec{\Omega}$ egységvektor körüli $d\vec{\Omega}$ kúpszögbe eső irányban repülnek, és energiájuk az $(E, E+dE)$ intervallumba esik. Ha a fázistér említett tartománya mindegyik változó szerint végtelen kicsi, akkor ezeknek a neutronoknak a számát

$$n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dV dE d\vec{\Omega}$$

alakban írhatjuk fel. Itt $n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ a *neutronsűrűség*, amely általában attól is függ, hogy melyik t időpontban tekintjük a neutronteret. A definícióból következik, hogy első három változójára vonatkozóan $n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ sűrűségdimenziójú.

Nézzük ezek után, hogyan fejezhető ki ebben az általános esetben egy kiválasztott magreakció gyakorisága. Jelöljük v -vel az E energiájú neutronok sebességét. Ezek tehát dt idő alatt $ds = vdt$ utat futnak be. Annak a valószínűsége, hogy ezalatt magreakciót váltanak ki [vö. (2.1) és (2.3)]:

$$\Sigma ds = \Sigma v dt .$$

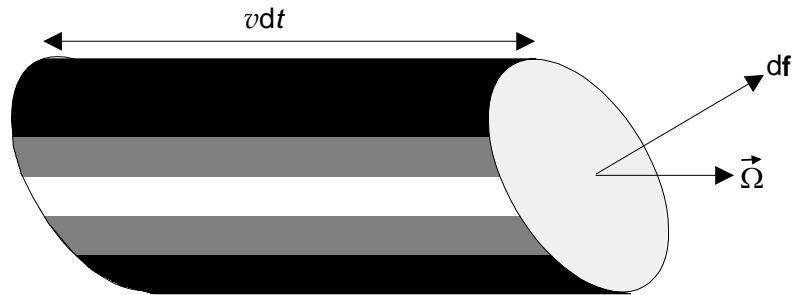
A fentiekben tekintett fázis-térfogatelemben eső neutronok által kiváltott magreakciók száma tehát

$$\Sigma \int v n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dV dE dt .$$

Az itt megjelenő $\int v n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ szorzatot *neutronfluxusnak* nevezzük:

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \int v n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) .$$

A mondottak értelmében a $\Sigma\Phi$ szorzat megadja a tekintett fázis-térfogatelembe eső neutronok által 1 s alatt kiváltott magreakciók számát, osztva a fázis-térfogatelem nagyságával.



2.6. ábra. Az $\vec{\Omega}$ irányban haladó neutronnyalábnak az a része fog dt idő alatt áthaladni a df felületvektorú felületdarabon, amely a vdt hosszúságú hengerben van.

A neutronfluxusnak szemléletes fizikai jelentése van. Tekintsünk egy df felületelemet az \mathbf{r} pont közelében (2.6. ábra), és számítsuk ki, hogy 1 s alatt hány olyan neutron halad rajta keresztül, amelyek az $\vec{\Omega}$ körüli $d\vec{\Omega}$ kúpszögben lévő irányban repülnek, és energiájuk az $(E, E+dE)$ intervallumba esik. Nyilvánvaló, hogy dt idő alatt az ábrára berajzolt df alapú, $\vec{\Omega}$ -val párhuzamos tengelyű és vdt hosszúságú hengerben levő valamennyi neutron át fog haladni a kiszemelt felületelemen. Mivel a henger térfogata $dV = (\vec{\Omega} df) \cdot vdt$, ezeknek a neutronoknak a száma

$$n(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dEd\vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} df) \cdot vdt = \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dEd\vec{\Omega} \cdot (\vec{\Omega} df) \cdot dt.$$

Ebből következik, hogy $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dEd\vec{\Omega}$ megadja az $\vec{\Omega}$ irányra merőlegesen elhelyezett egységnyi felületen időegység alatt áthaladó neutronok számát.

Erre való tekintettel a fluxust sokan egyfajta áramsűrűségnek szokták tekinteni. Ha csak az $\vec{\Omega}$ irányban ütközés nélkül repülő neutronokat tekintjük, akkor $\vec{\Omega}\Phi$ -t valóban hasznos *áramsűrűség-vektornak* tekinteni. Tekintsünk például egy V térfogatot, és számítsuk ki a térfogathból kiáramló és az oda beáramló neutronok számának a különbségét, tehát a *nettó kifolyást*. Ha a kiszemelt térfogatelem felületének minden pontjában a df felületvektort kifelé irányítjuk, akkor az időegységre vonatkozó nettó kifolyást a

$$dEd\vec{\Omega} \oint \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot (\vec{\Omega} df)$$

felületi integrál adja meg, hiszen a térfogatba befelé repülő neutronokra $\vec{\Omega}df$ negatív, a kifelé repülőkre pedig pozitív, vagyis az integrál a nettó kifolyást előjelhelyesen adja meg. (Más szóval: akkor pozitív, ha több neutron repül ki, mint amennyi berepül.) A Gauss-tétel segítségével ez térfogati integrállá alakítható át:

$$\begin{aligned} \oint \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot (\vec{\Omega} df) &= \int \text{div}(\vec{\Omega} \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)) dV = \\ &= \int \vec{\Omega} \text{grad} \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) dV, \end{aligned}$$

ahol a div és grad operátorok az \mathbf{r} változóra hatnak. Eszerint az $\vec{\Omega} \text{grad} \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ kifejezésnek is szemléletes fizikai jelentése van: az $\vec{\Omega}$ irányba repülő neutronoknak a térfogategységből való, egységnyi időre vonatkozó nettó kifolyása.

Jól kollimált nyalábok esetében tehát van némi létjogosultsága annak, hogy a fluxusnak áramsűrűségszerű értelmezést adjunk. Ez hasznos lehet például a fénysugarak esetében, ha a szórt fény elhanyagolható. A reaktorfizikában azonban nem egyetlen irányban repülő neutronokkal foglalkozunk, hanem általában olyan neutronterek leírására van szükség, amelyekben a neutronok minden irányban repülnek. Ezért itt a fluxusnak ez a fajta értelmezése nem igazán segíti a jelenségek megértését. Egyébként is, a “neutronáram” kifejezésnek a reaktorfizikában az alábbi, matematikailag pontosan meghatározott jelentése van, amely a fentitől eltér.

Fejtsük a fluxust az $\vec{\Omega}$ változó szerint haladó sorba.⁴ Az így kapott sor első két tagja

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, E, t) + \frac{3}{4\pi} \vec{\Omega} \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) + \dots \quad (2.9)$$

Mint közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhető, az itt szereplő együtthatófüggvények az alábbi módon fejezhetők ki az eredeti $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ függvénnyel:

$$\Phi(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega}, \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \vec{\Omega} \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega}. \quad (2.10b)$$

Az utóbbi képlet annak tömör kifejezése, hogy

$$J_x(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Omega_x \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega},$$

$$J_y(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Omega_y \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega},$$

$$J_z(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Omega_z \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega}.$$

Az Ω_x , Ω_y és Ω_z komponenseket később explicit formában is felírjuk. A $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ függvényt – az eredeti $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ függvényhez hasonlóan – szintén fluxusnak szoktuk nevezni. A reaktorfizikában szokásos jelölésmód szerint köztük csak a kiírt argumentumok alapján teszünk különbséget. Amikor a későbbi fejezetekben fluxusról beszélünk, mindig $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ -re gondolunk. Ha szükséges a két mennyiség megkülön-

⁴ A valóságban az $\vec{\Omega}$ változó gömbfüggvényei szerinti sorfejtésről van szó. Az egyszerűség kedvéért azonban a gömbfüggvényeket elhagytuk a gondolatmenetből.

böztetése, a $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ függvényt *szögfüggő fluxusnak* nevezzük. A továbbiakban ehhez a megkülönböztetéshez konzekvensen ragaszkodni fogunk.

Jóllehet a szögfüggő fluxusból kiindulva $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ -nek is lehet fizikai jelentést adni, ez már annyira kevésbé szemléletes, hogy elhagyjuk. Helyette azonban egy másik jelentés a gyakorlatban is hasznos.⁵ Tekintsünk egy V térfogatot, és számoljuk össze, hogy az $(E, E+dE)$ intervallumba eső energiájú neutronok egy infinitezimális dt idő alatt mekkora utat tesznek meg benne. Ha sebességüket v -vel jelöljük, akkor ez az út

$$dEdt \int_V n(\mathbf{r}, E, t) v dV = dEdt \int_V \Phi(\mathbf{r}, E, t) dV .$$

Azt kaptuk tehát, hogy a kiszemelt energiájú, az \mathbf{r} pont körüli *térfogategységben* levő neutronok 1 s alatt összesen $\Phi(\mathbf{r}, E, t) dE$ utat tesznek meg. Ha Σ a minket érdeklő magreakció makroszkopikus hatáskeresztmetszete, Σ annak a valószínűsége, hogy a megtett út hosszegységén magreakció következzen be, így a $\Sigma\Phi(\mathbf{r}, E, t) dE$ szorzat megadja az \mathbf{r} hely körüli egységnyi térfogatban időegység alatt az $(E, E+dE)$ intervallumba eső energiájú neutronok által kiváltott magreakciók számát.

A $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ vektort *neutronáramnak* nevezzük, amelynek a szögfüggő fluxushoz hasonlóan szintén szemléletes fizikai jelentése van. Vegyünk az \mathbf{r} pont közelében egy irányított $d\mathbf{f}$ felületelemet, és tekintsük külön azoknak a neutronoknak a számát, amelyek $\vec{\Omega}$ repülési irányára $\vec{\Omega}d\mathbf{f} > 0$, továbbá azokat, amelyekre $\vec{\Omega}d\mathbf{f} < 0$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)d\mathbf{f}$ a két szám különbsége. Az alábbiak végig az $(E, E+dE)$ intervallumba eső energiájú neutronokra fognak vonatkozni. A könnyebb kifejezés kedvéért az erre való utalást, továbbá az emiatt fellépő dE szorzótényezőt a képletekből elhagyjuk. Legyen $d\mathbf{f}$ iránya először a z tengely iránya (2.7. ábra). Vezessük be a következő jelöléseket:

$$J_z^+ = \int_{\Omega_z > 0} \Omega_z \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega}, \quad (2.11a)$$

$$J_z^- = - \int_{\Omega_z < 0} \Omega_z \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega}. \quad (2.11b)$$

A szögfüggő fluxus fent részletezett fizikai jelentése szerint az előbbi integrál megadja az x - y síkot alulról felfelé átlépő neutronok időegység alatti számát, az utóbbi pedig a felülről lefelé haladókét. Helyettesítsük be ide $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ (2.9)-ben felírt kifejezését, és vegyük figyelembe az alábbi – könnyen ellenőrizhető – összefüggéseket:

$$\int_{\Omega_z > 0} \Omega_z d\vec{\Omega} = - \int_{\Omega_z < 0} \Omega_z d\vec{\Omega} = \pi,$$

⁵ Egyes könyvek közvetlenül ennek a fizikai jelentésnek az alapján definiálják a $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ fluxust. A tapasztalat szerint ennek megértése a hallgatóknak – első hallásra – nehézséget okoz.

$$\int_{\Omega_z > 0} \Omega_z^2 d\vec{\Omega} = \int_{\Omega_z < 0} \Omega_z^2 d\vec{\Omega} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\int_{\Omega_z > 0} \Omega_x \Omega_y d\vec{\Omega} = \int_{\Omega_z > 0} \Omega_x \Omega_z d\vec{\Omega} = \int_{\Omega_z > 0} \Omega_y \Omega_z d\vec{\Omega} = 0,$$

$$\int_{\Omega_z < 0} \Omega_x \Omega_y d\vec{\Omega} = \int_{\Omega_z < 0} \Omega_x \Omega_z d\vec{\Omega} = \int_{\Omega_z < 0} \Omega_y \Omega_z d\vec{\Omega} = 0.$$

Ellenőrzésükhöz figyelembe kell venni az alábbi összefüggéseket (lásd 2.7. ábra):

$$\Omega_x = \sin\theta \cos\varphi,$$

$$\Omega_y = \sin\theta \sin\varphi,$$

$$\Omega_z = \cos\theta,$$

továbbá

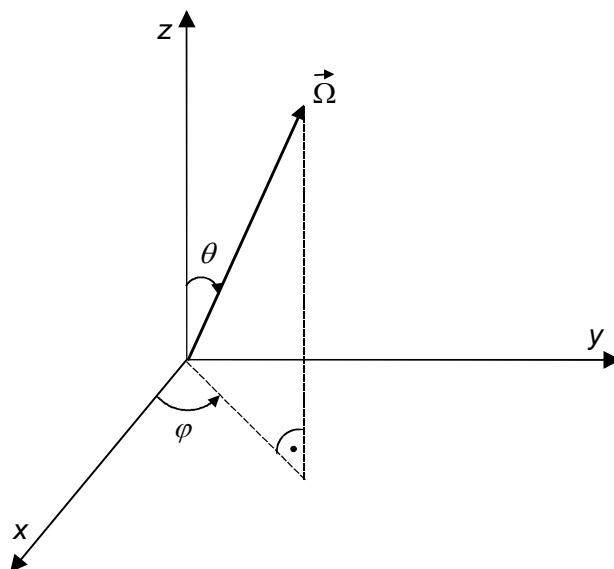
$$d\vec{\Omega} = \sin\theta d\theta d\varphi,$$

végül az integrálási tartományok a következők:

$$\Omega_z < 0: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$

és

$$\Omega_z > 0: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$



2.7. ábra. Az $\vec{\Omega}$ vektor komponensei

A fenti integrálok figyelembevételével a (2.11) egyenletekből kapjuk:

$$J_z^+ = \frac{1}{4} \Phi(\mathbf{r}, E, t) + \frac{1}{2} J_z(\mathbf{r}, E, t), \quad (2.12a)$$

$$J_z^- = \frac{1}{4} \Phi(\mathbf{r}, E, t) - \frac{1}{2} J_z(\mathbf{r}, E, t), \quad (2.12b)$$

amiből rögtön látható, hogy — amint azt fentebb állítottuk — a két szám különbsége valóban a neutronáram z komponensét adja meg:

$$J_z = J_z^+ - J_z^- .$$

Teljesen analóg eredményt kapnánk, ha ezeket a számításokat az x vagy y tengelyre vonatkozóan végeznénk el. Ha egy tetszőleges helyzetű df felületelemet tekintünk, a fentiek analógiájára okoskodhatunk:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t) d\mathbf{f} &= \int_{4\pi} (\vec{\Omega} d\mathbf{f}) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} = \\ &= \int_{\vec{\Omega} d\mathbf{f} > 0} (\vec{\Omega} d\mathbf{f}) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} + \int_{\vec{\Omega} d\mathbf{f} < 0} (\vec{\Omega} d\mathbf{f}) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} . \end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy az itt szereplő két integrál analóg a (2.11a)-ban és (2.11b)-ben felírt mennyiségekkel. Vezessük be ezért a következő jelöléseket:

$$J_f^+ = \int_{\vec{\Omega} d\mathbf{f} > 0} (\vec{\Omega} d\mathbf{f}) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} \quad \text{és} \quad J_f^- = - \int_{\vec{\Omega} d\mathbf{f} < 0} (\vec{\Omega} d\mathbf{f}) \Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{\Omega} .$$

Így $\mathbf{J}d\mathbf{f}$ valóban a két mennyiség különbségét, tehát a felületelemen keresztül történő nettó neutronáramlást adja meg:

$$\mathbf{J}d\mathbf{f} = J_f^+ - J_f^- .$$

Ha most a különböző irányítású, azonos területű df felületelemeket tekintjük, a $\mathbf{J}d\mathbf{f}$ skalár szorzat akkor a legnagyobb, ha \mathbf{J} és $d\mathbf{f}$ iránya azonos. Ebből következik, hogy a $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$ vektor iránya az az irány, amerre a nettó neutronáramlás a legnagyobb.

A jelen szakasz befejezéséeként definiáljuk a *reakciógyakoriság* fogalmát: valamilyen magreakciónak 1 cm^3 -re és 1 s -ra vonatkozó száma. Ha a kiválasztott magreakció makroszkopikus hatáskeresztmetszete Σ , akkor a reakciógyakoriságot az

$$R = \int_0^{\infty} \Sigma(E) \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE \quad (2.13)$$

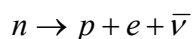
integrál adja meg. $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ a (2.10a) képletben definiált fluxus.

A neutronok sűrűsége sok nagyságrenddel kisebb, mint a reaktort alkotó elemek atommagjaié. Ezért a reaktorfizikában elhanyagoljuk a (n, n) kölcsönhatásokat,

csak a neutronok és az atommagok közötti kölcsönhatásokat vesszük figyelembe (vö. 2.9. feladat). Ez lényegesen egyszerűsíti a reaktorelméletet, mert emiatt a neutronfluxusra vonatkozó egyenletek lineárisak.

2.3. Feladatok

- 2.1. Az alumínium sűrűsége $2,7 \text{ g/cm}^3$. Mennyi az alumínium magsűrűsége? (2 pont)
- 2.2. A víz sűrűsége $0,99799 \text{ g/cm}^3$. Mennyi a hidrogén és oxigén magsűrűsége? (3 pont)
- 2.3. 1 liter vízben feloldunk 7 g bórsavat (H_3BO_3). Számítsuk ki az egyes atommagok sűrűségét! Amikor 1000 cm^3 vízben C_B gramm bórsavat feloldunk, az oldat térfogata $V = 1000 + C_B/1,9 \text{ cm}^3$ -re nő. A víz sűrűségét vegyük a 2.2. feladatból. (5 pont)
- 2.4. Az UO_2 sűrűsége $10,4 \text{ g/cm}^3$. Számítsuk ki az ^{235}U , ^{238}U és az oxigén magsűrűségét, ha az urán dúsítása $3,6$ atomszázalék! (3 pont)
- 2.5. Az UO_2 sűrűsége $10,4 \text{ g/cm}^3$. Számítsuk ki az ^{235}U , ^{238}U és az oxigén magsűrűségét, ha az urán dúsítása $3,6$ súlyszázalék! Útmutatás: a súlyszázalékot számítsuk át atomszázalékra. (5 pont)
- 2.6. Mutassuk meg, hogy a hőmozgáshoz képest nagy neutronenergiákra az effektív hatáskeresztmetszet megegyezik a magfizikaival, ha az utóbbi az energia lassan változó függvénye! Útmutatás: a (2.9) képletben alkalmazzunk sorfejtést az atommag sebessége szerint. (7 pont)
- 2.7. Bizonyítsuk be a (2.12) egyenleteket! Útmutatás: használjuk ki az $\vec{\Omega}$ vektor komponenseinek integráljaira vonatkozó képleteket. (5 pont)
- 2.8. Bizonyítsuk be a (2.6) egyenletet! (5 pont)
- 2.9. A paksi atomerőműben a termikus neutronok fluxusa $3 \cdot 10^{13} \text{ n/(cm}^2 \cdot \text{s)}$. Hasonlítsuk össze a hidrogénen való neutronszórások és az (n,n) szórások gyakoriságát. A termikus neutronok sebességét vegyük 3 km/s -nek. Az (n,n) reakció hatáskeresztmetszete $35,5 \text{ barn}$. (7 pont)
- 2.10. Egy reaktor termikus teljesítménye 3000 MW . Mennyi hidrogén keletkezik naponta a neutronok



reakció szerinti bomlása révén? (A bomlás felezési ideje 11 perc , egy neutron átlagos élettartama a reaktorban $25 \mu\text{s}$, egy hasadásból átlagosan $2,43$ neutron keletkezik. $3,1 \cdot 10^{10}$ hasadásból szabadul föl 1 J energia.) (8 pont)

- 2.11. A polietilént gyakran használják moderátornak. Számoljuk ki, hogyan hat a polimerizáció foka a magsűrűségekre! Hasonlítsuk össze a $(\text{CH}_2\text{--CH}_2\text{--CH}_2\text{--CH}_2)$ molekula és a $(\text{CH}_2)_{40}$ molekula magsűrűségeit! A polietilén sűrűségét vegyük $0,92 \text{ g/cm}^3$ -nek. (5 pont)

3. Reaktorkinetika

3.1. Pontkinetikai modell

A reaktorkinetikában általában azt vizsgáljuk, hogy időben hogyan változik a neutronfluxus egy *változatlan* reaktorban. Ez azt jelenti, hogy logikus feltenni: a neutronfluxusnak az \mathbf{r} , E , $\vec{\Omega}$ változóktól való függése időben nem változik, vagyis a fluxust az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \varphi(t) \Phi_0(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}). \quad (3.1)$$

A $\Phi_0(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$ alakfüggvény konkrét részletei ebben a fejezetben nem érdekesek. Ezek határozzák meg a reaktorkinetika két legfontosabb paraméterét, a k_{eff} sokszorozási tényezőt és az ℓ neutron-élettartamot. k_{eff} pontos definícióját az 5.1. alfejezetben fogjuk megadni, egyelőre a hatfaktor-formulán alapuló jelentését használjuk: azt adja meg, hogy egy hasadóanyagban abszorbeált neutron által keltett ν hasadási neutron közül — hasadás, lassulás, termikus diffúzió után — átlagosan hány neutron fog ismét hasadóanyagban abszorbeálódni. A két abszorpció között eltelt idő átlagos értéke az ℓ neutron-élettartam.

Ezt a meghatározást a következőképpen is fogalmazhatjuk. Ha a hasadóanyag makroszkopikus abszorpciós hatáskeresztmetszete $\Sigma_a^{(h)}$, akkor a hasadóanyagban 1 s alatt 1 cm³-ben bekövetkező abszorpciók száma $\Sigma_a^{(h)} \varphi$ -vel arányos.¹ A fenti definíció szerint ℓ idő elteltével bekövetkező abszorpciók száma $k_{\text{eff}} \Sigma_a^{(h)} \varphi$ -vel lesz arányos. Mivel — kiindulási feltevésünk szerint — sem a Φ_0 alakfüggvény, sem a $\Sigma_a^{(h)}$ hatáskeresztmetszet nem változik, ezt úgy is lehet mondani, hogy a φ fluxus ℓ idő elteltével k_{eff} -szeresére nő. Mivel mind a reaktorban levő neutronok száma, mind a reaktor összteljesítménye φ -vel arányos, a k_{eff} -szeres növekedés ezekre a mennyiségekre is érvényes.

Mielőtt továbbmegyünk, megbecsüljük az ℓ neutron-élettartamnak legalább a nagyságrendjét. A neutronlassulás ideje a termikus neutrontdiffúzió idejéhez képest elhanyagolható (vö. 6.8. feladat). A 2. fejezetben láttuk, hogy egy termikus neutron a keletkezéstől az abszorpcióig befutott cikcakkszerű útjának átlagos hossza $1/\Sigma_a$. Eközben a neutron v sebessége nem változik, tehát az eltelt idő átlaga

$$\ell = \frac{1}{\Sigma_a v}. \quad (3.2)$$

Ez a képlet végtelen méretű reaktorra érvényes, amelyből a neutronok nem szökhetnek ki. Véges méretű reaktorban a termikus neutronok diffúziója nem csak abszorpci-

¹ Az itt használt hatáskeresztmetszet az alakfüggvényre vett átlag, vö. 5.2. alfejezet.

óval érhet véget, hanem ki is szökhetnek a reaktorból. Emiatt a neutron-élettartam a (3.2) képlethez képest rövidebb. Ezt a rövidülést az 5.7. alfejezetben megadjuk. A jelen fejezetben azonban nagyságrendi becslésként a (3.2) képlet mindenképpen megfelel – különösen atomerőművekben, amelyek nagy mérete miatt a kiszökés kicsi. A 2.5. feladatban kiszámoltuk, hogy az ^{235}U magűrűsége $8,5555 \cdot 10^{-4} / (\text{cm} \cdot \text{barn})$, az 1.2. táblázat szerint $\sigma_a = 681 \text{ barn}$, vagyis $\Sigma_a = 8,5555 \cdot 10^{-4} \cdot 681 = 0,5826 \text{ cm}^{-1}$. Egy atomerőműben ennél jóval kisebb érték alakul ki, ezért jobb egy $\Sigma_a = 0,1 \text{ cm}^{-1}$ értékkel számolni. A termikus neutronok átlagos sebességét 4 km/s -nak vesszük, amivel (3.2) szerint $\ell = 1 / (4 \cdot 10^5 \cdot 0,1) = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, vagyis $25 \mu\text{s}$.

A fenti definíció szerint

$$\varphi(t + \ell) = k_{\text{eff}} \varphi(t).$$

Mivel ℓ kicsi, itt alkalmazhatjuk a következő sorfejtést:

$$\varphi(t + \ell) = \varphi(t) + \ell \frac{d\varphi(t)}{dt} + \dots, \quad (3.3)$$

amivel

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \cong \frac{k_{\text{eff}} - 1}{\ell} \varphi(t). \quad (3.4)$$

A differenciálegyenlet megoldása nyilván

$$\varphi(t) = \varphi_0 \exp\left\{\frac{k_{\text{eff}} - 1}{\ell} t\right\},$$

ahol φ_0 a $t = 0$ -hoz tartozó fluxus. Tekintsünk egy számpéldát! Legyen $k_{\text{eff}} = 1,0001$, ami azt jelenti, hogy meglehetősen nagy pontossággal sikerült a kritikus állapotot beállítani. A megoldás: $\varphi(t) = \varphi_0 e^{4t}$. Eszerint $t = 1 \text{ s}$ alatt a fluxus (tehát a teljesítmény is) $e^4 = 54,6$ -szeresére nő. Ilyen körülmények között nagyon kényes feladat a reaktor teljesítményének szabályozása. Például mechanikus beavatkozó szervek segítségével gyakorlatilag lehetetlen. A reaktorok biztonságos működését a késő neutronok teszik lehetővé, mert – mint a 3.2. alfejezetben látni fogjuk – az időbeli változásokat a fenti-ekhez képest nagyon lelassítják.

Az i -edik későneutron-csoportozhoz tartozó anyamagoknak a t időponthoz tartozó számát $C_i(t)$ -vel jelöljük ($i = 1, 2, \dots, 6$). Bomlási állandójuk legyen λ_i . A késő neutronok figyelembevételével a (3.4) egyenlet a következőképpen módosul. ℓ idő elteltével a promptneutron-sokszorozás eredményeképpen a fluxus $k_{\text{eff}}(1 - \beta)\varphi(t)$ -re növekszik, ahol β a későneutron-hányad. Ugyanez alatt az idő alatt az i -edik fajta későneutron-anyamagok ehhez $\lambda_i C_i(t) \ell$ járulékot adnak. Általában meg szoktuk engedni,

hogy a reaktorban legyen egy $S(t)$ külső neutronforrás², amelynek a járuléka $S(t)\ell$. Ezzel

$$\varphi(t + \ell) = k_{\text{eff}}(1 - \beta)\varphi(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t)\ell + S(t)\ell.$$

Ha ismét alkalmazzuk a (3.3) sorfejtést, a

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{k_{\text{eff}}(1 - \beta) - 1}{\ell} \varphi(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) + S(t)$$

egyenletet kapjuk. k_{eff} helyett általában a

$$\rho = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} \quad (3.5a)$$

reaktivitást használjuk. Hasonlóan bevezetjük a

$$A = \frac{\ell}{k_{\text{eff}}} \quad (3.5b)$$

generációs időt. Ezzel egyenletünk átírható a

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\rho - \beta}{A} \varphi(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) + S(t) \quad (3.6a)$$

alakba. Szükségünk van még a későneutron-anyamagok koncentrációjára vonatkozó egyenletekre is. Az ℓ idő alatt keletkező i -edik fajta anyagok száma a fenti gondolatmenet alapján $k_{\text{eff}}\varphi\beta_i$, ahol β_i az i -edik fajta anyagok hányada.³ A $C_i(t)$ koncentráció új értéke tehát

$$C_i(t + \ell) = C_i(t) + k_{\text{eff}}\varphi\beta_i - \lambda_i C_i(t)\ell.$$

A jobb oldalon a harmadik tag az anyagok radioaktív bomlását fejezi ki. Egy (3.3)-hoz hasonló sorfejtés segítségével ez a

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\varphi}{A} \beta_i - \lambda_i C_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.6b)$$

alakra hozható. A (3.6) egyenleteket *pontkinetikai egyenletrendszernek* nevezzük.

Az elnevezés gyakran félreértésekhez vezet. A reaktorfizika hőskorában a fenti gondolatmenetet úgy értelmezték, hogy φ egy *pontszerű* reaktor fluxusa. Innen szár-

² A „külső” jelző itt arra utal, hogy a neutronforrás független a neutronfluxustól.

³ A késő neutronokat jellemző paraméterek magfizikai értékeit a legfontosabb izotópokra az 1.3. és 1.4. táblázatok tartalmazzák.

mazik a „pontkinetika” elnevezés. Egy másik felfogás szerint a (3.6) egyenletek egy végtelen méretű reaktorra vonatkoznak, amelyben a fluxus nem függ az \mathbf{r} térbeli változótól. Az 5.7. alfejezetben megmutatjuk, hogy az egyenletek a (3.1) feltevés mellett érvényesek, amibe belefér akár egy végtelen kicsi, akár egy végtelen nagy méretű reaktor is. Mivel a $\Phi_0(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$ alakfüggvényt *alaplómódusnak* is nevezzük, a pontkinetikai egyenleteket a leghelyesebb az alapmódus kinetikájának tekinteni.

Az elmondottakból következnek a pontkinetikai modell érvényességének a határai:

- Egyrészt korlátozott a (3.1) egyenlet érvényessége. Amikor a reaktivitás változik, általában változik a $\Phi_0(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega})$ alakfüggvény is. Például egy szabályozórúd környezetében a fluxus lecsökken, tehát amikor a reaktivitást egy szabályozórúd mozgatásával változtatjuk, a fluxus térbeli alakja függ a reaktivitástól. Ez az effektus az \mathbf{r} és t változó kölcsönhatása.
- Másrészt az ℓ neutron-élettartam (és így a Λ generációs idő is) függ a reaktivitástól. Ez a függés elsősorban a neutronspektrum változásával függ össze, tehát ezt a hatást az E és t változó kölcsönhatása okozza.

Végeredményben levonhatjuk azt a következtetést, hogy a pontkinetikai modell csak a kritikushoz közeli reaktorállapotokban jó közelítés.

3.2. Reciprokóra egyenlet

Az előző alfejezetben láttuk, hogy egy akár csak enyhén szuperkritikus reaktorban a reaktor teljesítménye túlságosan gyorsan nőne, ha nem lennének késő neutronok. Ezért az alábbiakban azt nézzük meg, milyen gyorsan változik a (3.6) egyenletrendszer megoldása egy forrásmentes ($S(t) = 0$) szuperkritikus reaktorban. Általános reaktorfizikai tapasztalat, hogy egy magára hagyott szuperkritikus reaktorban – egy bizonyos idő elteltével – a neutronfluxus exponenciálisan nő. A megoldást tehát keressük a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 e^{\omega t}, \\ C_i(t) &= C_{i0} e^{\omega t}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \end{aligned}$$

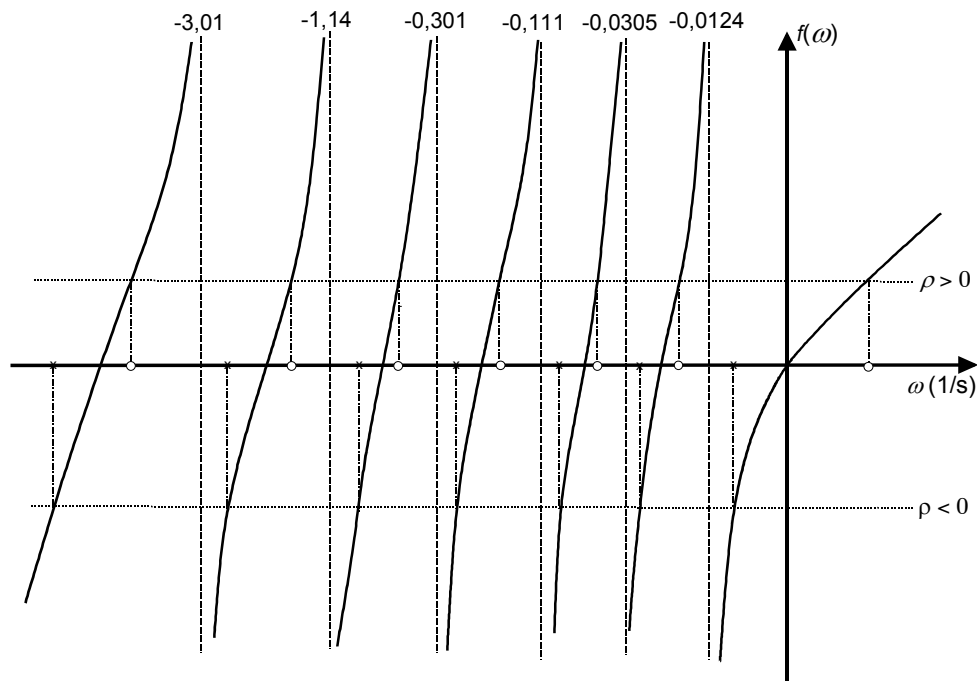
alakban, amit a (3.6) egyenletrendszerbe helyettesítve – rövid számolás után (vö. 3.1. feladat) – azt kapjuk, hogy az egyenletnek csak akkor van nem-triviális megoldása, ha ω kielégíti a

$$\frac{\rho}{\beta} = \frac{\Lambda}{\beta} \omega + \omega \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i / \beta}{\lambda_i + \omega} \quad (3.7)$$

egyenletet, az együtthatók között pedig fennáll a

$$C_{i0} = \frac{\beta_i \varphi_0 / \Lambda}{\lambda_i + \omega}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.8)$$

összefüggés.



3.1. ábra. A reciprokóra-egyenlet megoldásai

3.1. táblázat. Az ω_j időállandók néhány jellegzetes reaktivitásra

ρ/β	-1,0 \$	0 \$	0,1 \$	0,2 \$	1,0 \$	2,0 \$
ω_0 (1/s)	-0,0120	0,0	0,0102	0,0273	9,656	263,8
ω_1 (1/s)	-0,0249	-0,0143	-0,0138	-0,0135	-0,0128	-0,0126
ω_2 (1/s)	-0,0956	-0,0684	-0,0629	-0,0574	-0,0380	-0,0341
ω_3 (1/s)	-0,242	-0,195	-0,188	-0,180	-0,138	-0,124
ω_4 (1/s)	-1,066	-1,022	-1,001	-0,989	-0,691	-0,406
ω_5 (1/s)	-2,955	-2,901	-2,891	-2,878	-2,298	-1,267
ω_6 (1/s)	-516,8	-260,4	-234,6	-208,8	-11,07	-3,153

A (3.7) egyenletet *reciprokóra-egyenletnek* nevezzük, amely a reaktorok üzemeltetői számára alapvető összefüggés. Ha ugyanis a reaktor adott állapotában sikerül kísérleti úton meghatározni ω értékét, akkor (3.7) megadja a reaktivitást. Nézzük meg ezért közelebbről, milyen ω időállandók fordulhatnak elő. Ha ρ adott, akkor (3.7) ω -ra vonatkozóan egy 7-edfokú algebrai egyenletté alakítható át, tehát (3.7)-et ω -nak 7 különböző értéke elégíti ki. A 3.1. ábrán ω függvényében ábrázoltuk (3.7) jobboldalát, amelyet az ábrán $f(\omega)$ -val jelöltünk.⁴ Az ábráról leolvasható, hogy mind a 7 gyök

⁴ Az ábra csak tájékoztató jellegű, léptéke torzított. A legfontosabb torzítás abban áll, hogy a legnegatívabb tengelymetszete ω -nak $-\beta/\Lambda$ néhányszorosával egyenlő értékénél található. β/Λ nagyságrendje viszont 100/s, aminél a λ_i bomlási állandók sokkal kisebbek (vö. 1.4. táblázat).

valós. Közülük a legnagyobbat ω_0 -val jelöljük, a többit pedig ω_j -vel ($j = 1, 2, \dots, 6$). Értékük a 3.1. táblázatban található néhány jellegzetes reaktivitásra.

Az elmondottak alapján felírhatjuk (3.6) általános megoldását:

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^6 \varphi_j e^{\omega_j t}, \quad (3.9a)$$

$$C_i(t) = \sum_{j=0}^6 C_{ij} e^{\omega_j t}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (3.9b)$$

ahol a C_{ij} együtthatókat a megfelelő φ_j együtthatókból (3.8) mintájára kell kiszámítani:

$$C_{ij} = \frac{\beta_i \varphi_j / \Lambda}{\lambda_i + \omega_j}, \quad (j = 0, 1, \dots, 6). \quad (3.9c)$$

A φ_j együtthatókat a kezdeti feltételek határozzák meg. Egyelőre azonban nem szükséges ezekre különösebb gondot fordítanunk. A 3.1. ábráról és a 3.1. táblázatból ugyanis látható, hogy szuperkritikus állapotban ($\rho > 0$) ω_0 pozitív, a többi gyök negatív; szubkritikus állapotban ($\rho < 0$) pedig mindegyik gyök negatív. Ebből következik, hogy szuperkritikus állapotban elegendően hosszú idő elteltével csak az ω_0 -nak megfelelő, exponenciálisan növekvő tag marad meg:

$$\varphi(t) \approx \varphi_0 e^{\omega_0 t} \quad (\text{elegendően nagy } t\text{-re}). \quad (3.10)$$

A gyakorlatban valóban tapasztaljuk, hogy a reaktor ($\varphi(t)$ -vel arányos) teljesítménye szuperkritikus állapotban – egy átmeneti időszak elteltével (vö. 3.3.2. szakasz) – exponenciálisan növekszik. A növekedés ütemét ω_0 helyett általában azzal az idővel szoktuk jellemezni, amely alatt a teljesítmény kétszeresére nő (T_{2x}). Mint könnyen belátható,

$$\omega_0 = \frac{\ln 2}{T_{2x}} = \frac{0,6931}{T_{2x}}. \quad (3.11)$$

A T_{2x} kétszerezési idő kísérletileg jól mérhető. Ha vele ω_0 -at (3.11) alapján kifejezzük, a ρ reaktivitást (3.7)-ből kiszámíthatjuk. Az 1. függelékben megtaláljuk a reaktivitás értékeit a kétszerezési idő függvényében.⁵ A “reciprokóra” elnevezés onnan ered, hogy a történelmileg első reaktorokban – biztonsági megfontolásokból – többnyire csak órákban mérhető kétszerezési időket engedtek meg.

(3.7) alkalmazásához számított mennyiségekre van szükség. Ilyen a Λ generációs idő, de tulajdonképpen ilyenek a β , β_i későneutron-hányadok is. Ez utóbbiak esetében arról van szó, hogy a késő neutronok kisebb energiával keletkeznek, mint a

⁵ Ez a táblázat a BME oktatóreaktorára vonatkozik. Jóllehet a táblázat függ a reaktor fajtájától, első közelítésben használhatjuk, például, a paksi atomerőműre is.

prompt neutronok, és ezért rájuk vonatkozóan a kiszökési valószínűség kisebb, tehát a láncreakció számára értékesebbek. Emiatt (3.7)-ben nem a magfizikából ismert, az 1.3. és 1.4. táblázatban megadott értékeket kell használni, hanem azoknál (általában) nagyobb, effektív értékeket. Az *effektív későneutron-hányad* számításáról a 6.7. alfejezetben lesz szó. A számított értékek bizonytalanságait csökkenthetjük, ha (3.7) mindkét oldalát β -val osztjuk, vagyis a reaktivitást az effektív későneutron-hányad egységeiben fejezzük ki. A λ/β hányados pedig kísérletileg meghatározható.⁶ Az effektív későneutron-hányadot, mint a reaktivitás egységét *dollárnak* (\$) nevezzük. A reaktivitást a kétszerezési idő függvényében megadó táblázatokat is dollárban szokás elkészíteni.

Befejezésül még egy megjegyzést teszünk a késő neutronok szerepével kapcsolatban. Gyakran hallani a következő okfejtést: "A késő neutronok megnövelik a neutronok átlagos élettartamát, és ezzel lassítják a láncreakciót." Egy példával megvilágítjuk, hogy ez a dolog lényegének *alapos félreértése*. Ha az 1.4. táblázatban megadott felezési időket a β -ekkel súlyozva átlagoljuk, akkor ^{235}U -ra 8,97 s jön ki, ami az átlagos periódusidőre 12,9 s-ot ad.⁷ Egy vízzel moderált reaktorban $\ell \approx 2,5 \cdot 10^{-5}$ s. Ezt a késő neutronok periódusával átlagolva

$$\bar{\ell} = (1 - 0,0065) \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} + 0,0065 \cdot 12,9 = 0,084 \text{ s}$$

adódik. Ha a késő neutronokat nem vesszük figyelembe, de a prompt neutronok élettartamát ennyinek vesszük, akkor (3.4) szerint a reaktor periódusa

$$\frac{\bar{\ell}}{k_{\text{eff}} - 1} \approx \frac{\bar{\ell}}{\rho}.$$

Ha, például, a reaktivitás $\rho/\beta = 0,2$ \$, akkor a periódusra $0,084/(0,2 \cdot 0,0065) = 65$ s adódik. A 3.1. táblázatból viszont tudjuk, hogy ebben az esetben a periódus

$$\frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{0,0273} = 36,63 \text{ s}.$$

Az ellentmondás nyilvánvaló. A hiba ott van, hogy a kifogásolt okfejtés nem veszi figyelembe a (3.4) és a (3.6) egyenletek közötti *szerkezeti* különbséget. A késő neutronok figyelembevétele *megváltoztatja az időfüggő egyenlet szerkezetét*. Ez a szerkezeti változás olyan alapvető, hogy nem helyettesíthető semmiféle átlagos promptneutron-élettartammal. Mindez azt is mutatja, hogy a heurisztikus, leegyszerűsítő magyarázatokkal ajánlatos csínján bánni, mert akár nagyságrendi tévedést is okozhatnak.

Arról esetleg lehet szó, hogy a hat későneutron-csoportot egyetlen csoporttal és egy átlagos felezési idővel helyettesítjük. Bizonyos elméleti vizsgálatok számára az irodalomban is lehet találkozni ilyen egyszerűsítéssel. De ebben is mindenképpen meg kell tartani a (3.6) egyenletrendszer szerkezetét: kell egy egyenlet a prompt neutronokra és egy másik a későneutron-anyagokra.

⁶ Különben is alig ad járulékot (3.7)-ben.

⁷ A periódusidő az az idő, amely alatt a fluxus e-szeresére nő: $\ln 2 \cdot T_{2x}$.

3.3. A pontkinetikai egyenlet megoldása speciális esetekben

3.3.1. Prompt kritikusság, megszaladás

A $\rho/\beta = +1$ reaktivitás a reaktorok biztonságára vonatkozóan fontos határ. Számítsuk ki ugyanis (3.7) alapján a generációs idő egy tipikus értékénél ($25 \mu\text{s}$) a reaktivitás és a kétszerezési idő néhány összetartozó értékét. Az eredményt a 3.2 táblázat tartalmazza. Látható ezekből a számokból, hogy 1 dollárnál lényegesen kisebb reaktivitásokra a kétszerezési idő 10 s és 100 s közé esik. 1 dollár környékén viszont gyorsan csökken, és 10 ms nagyságrendűvé válik. Abban a reaktorban, amelyik ilyen rövid idő alatt kétszerezi meg a teljesítményét, gyakorlatilag lehetetlen külső beavatkozó szervekkel (pl. szabályozórudakkal) a növekedést megállítani, hiszen a beavatkozó szervek működéséhez legalább 100 ms nagyságrendű időkre van szükség. Ha tehát egy reaktorban dollárnál nagyobb reaktivitású állapot alakul ki, akkor az szabályozhatatlanná válik, úgy mondjuk: *megszalad*. Atombomba-robbantáskor mesterségesen idéznek elő megszaladást, de reaktorban ez *balesetnek* számít. A teljesítmény természetesen megszaladáskor sem növekszik minden határon túl, mert ott előbb-utóbb negatív visszacsatolások lépnek fel (pl. a reaktor melegedése miatt), amelyek a reaktivitást 0 alá viszik, vagyis a reaktort szubkritikussá teszik. (Ezzel részletesebben a 8.3. alfejezetben foglalkozunk.) A reaktorok üzemét általában úgy korlátozzák, hogy benne 20 s-nál rövidebb kétszerezési idők ne léphessenek fel, ami a reciprokóra-egyenlet szerint azt jelenti, hogy a reaktivitás körülbelül 0,2 dollárnál ne legyen nagyobb. Mindebből egyébként az is következik, hogy a késő neutronok nélkül nem lenne elképzelhető a reaktorok működése: a kritikus állapot közelében viselkedne a reaktor úgy, ahogy a késő neutronokkal 1 dollár környékén.

3.2. táblázat. A reaktivitás és a kétszerezési idő néhány jellegzetes összetartozó értéke

ρ/β	T_{2x}
4,0	0,865 ms
3,0	1,307 ms
2,0	2,627 ms
1,0	71,78 ms
0,5	3,962 s
0,3	12,53 s
0,2	25,39 s
0,1	67,85 s

3.3.2. Reaktivitásugrás

Tétellezzük fel, hogy a reaktor φ_k állandó fluxus mellett kritikus állapotban van, és a $t = 0$ időpillanatban egy $\rho > 0$ reaktivitást viszünk be. Kérdés: hogyan változik a fluxus ezt követően? A (3.8) képletbe $\omega = 0$ -t helyettesítve kapjuk a későneutron-anyagok állandósult koncentrációját:

$$C_{i0} = \frac{\varphi_k \beta_i}{\lambda_i A}$$

A felvetett probléma megoldása számára ezek fogják adni a kezdőfeltételeket. A (3.9) képletek alapján írhatjuk:

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^6 \varphi_j e^{\omega_j t},$$

$$C_i(t) = \sum_{j=0}^6 \frac{\beta_i \varphi_j / \Lambda}{\lambda_i + \omega_j} e^{\omega_j t}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Ha ide $t = 0$ -t helyettesítünk, a következő egyenletrendszert kapjuk a hét ismeretlen együtthatóra:

$$\varphi_k = \sum_{j=0}^6 \varphi_j, \quad (3.12a)$$

$$\frac{\varphi_k \beta_i}{\lambda_i \Lambda} = \sum_{j=0}^6 \frac{\beta_i \varphi_j / \Lambda}{\lambda_i + \omega_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

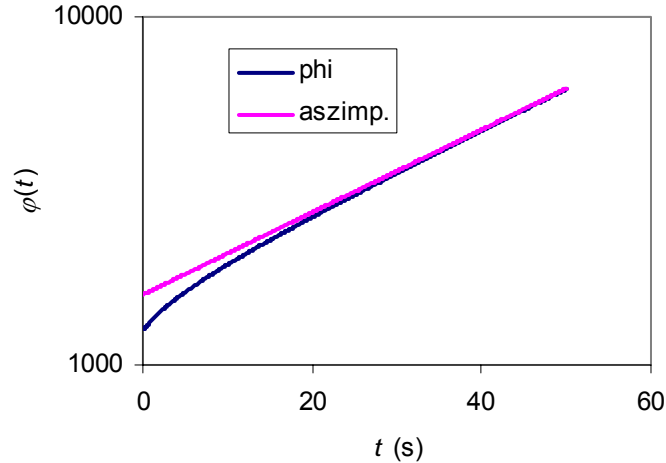
Az utóbbi egyenletet némileg egyszerűsíthetjük:

$$\varphi_k = \lambda_i \sum_{j=0}^6 \frac{\varphi_j}{\lambda_i + \omega_j}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.12b)$$

A (3.12) egyenletek egy algebrai egyenletet alkotnak a φ_j együtthatókra vonatkozóan ($j = 0, 1, \dots, 6$). Az egyenletrendszert megoldása révén kapott együtthatókat a (3.9a) egyenletbe helyettesítve kapjuk a reaktor választ. $\rho/\beta = 0,20$ \$ és $\varphi_k = 1000$ mellett a következő együtthatók adódnak:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1591,0; & \varphi_1 &= -37,085; & \varphi_2 &= -183,19; & \varphi_3 &= -83,355; \\ \varphi_4 &= -28,407; & \varphi_5 &= -10,178; & \varphi_6 &= -24877. \end{aligned}$$

Az ω_j időállandókat a 3.1. táblázatból vehetjük. A 3.2. ábra „phi” jelű görbéje mutatja az ezekkel az együtthatókkal kapott görbét. Az „aszimp.” jelű görbén az ω_0 -hoz tartozó $\varphi_0 \exp(\omega_0 t)$ tiszta exponenciális függvény látható. Látjuk, hogy mintegy 40 s elteltével a két görbe összesimul. A kétszerezési idő $T_{2x} = \ln 2 / \omega_0 = 25,39$ s. Általában is igaz, ami az ábrán látszik: körülbelül két kétszerezési idő alatt a negatív időállandójú tagok elhanyagolhatóvá válnak a nulladik, pozitív időállandójú tag mellett.



3.2. ábra. A fluxus változása egy reaktivitásugrást követően

3.3.3. A reaktor vészleállítása

A gyakorlat számára nagyon fontos a reaktor vészleállítása. Ha az operátor valamilyen rendellenességet tapasztal, általában a reaktorba ejti az ún. biztonságvédelmi (BV) rudakat, aminek hatására a reaktivitás pillanatszerűen átmegy egy nagy abszolút értékű negatív számba. Tételezzük fel, hogy a leállítás előtt a reaktor kritikus volt, és a bevitt reaktivitás 1 \$, vagyis a BV-rudak leejtése után $\rho/\beta = -1,0$. Az erre a reaktorállapotról vonatkozó időállandók a 3.1. táblázatban láthatók. Az előző szakaszban mutatott módszerrel kiszámítottuk az együtthatókat:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 45,879; & \varphi_1 &= 183,52; & \varphi_2 &= 118,23; & \varphi_3 &= 116,30; \\ \varphi_4 &= 27,006; & \varphi_5 &= 9,4571; & \varphi_6 &= 499,61. \end{aligned}$$

A fluxus időfüggése a leállítást követő rövid időszakban a 3.3. ábrán látható. Az első századmásodpercben a fluxus gyorsan csökken, majd egy az ábra időskáláján állandó értékbe megy át. Ez az állandó érték $\varphi' \approx 500$. Valójában persze a fluxus csökken, de nagyon lassan: percek múlva már csak a leglassabban csökkenő $\varphi_0 \exp(\omega_0 t)$ tag marad meg, amelynek a felezési ideje $\ln 2 / 0,0120 = 57,9$ s. Mindenesetre néhány perc alatt a neutronok teljesen eltűnnek a reaktorból.

Érdeemes megvizsgálni, hogy a kvázistabil φ' fluxus értéke hogyan függ a bevitt negatív reaktivitástól. A 3.3. ábrán látható kezdeti gyors csökkenés annak a tagnak a következménye, amelynek az időállandója $\omega_6 = -516,8 \text{ s}^{-1}$. Ez gyakorlatilag nincs hatással a későneutron-anyamagok koncentrációjára, hiszen a megfelelő C_{ij} együtthatók (3.9c) szerint kicsik – a nevezőben levő nagy abszolút értékű ω_6 miatt.

Erre való tekintettel az első néhány századmásodpercben a $\sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t)$ összeg gyakorlatilag változatlan. A (3.6a) egyenletet tehát a BV-rudak leejtése előtt a következő alakba írhatjuk át:

$$0 = \frac{-\beta}{\Lambda} \varphi_k + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i .$$

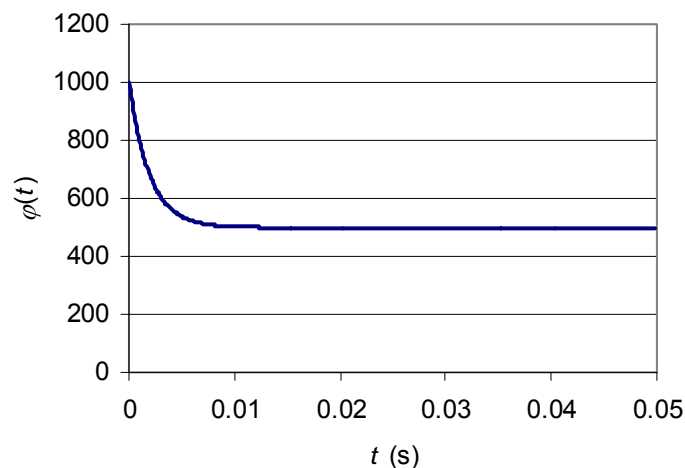
A rudak leejtését követő századmásodperc elteltével pedig az egyenlet alakja

$$0 = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} \varphi' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i .$$

Mivel a $\sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t)$ összeg a két egyenletben közelítőleg azonos, a két neutronfluxus hányadosa

$$\frac{\varphi_k}{\varphi'} \approx \frac{\beta - \rho}{\beta} = 1 - \frac{\rho}{\beta} . \quad (3.13)$$

A fenti számpéldában a két fluxus hányadosa $1000/500 = 2$, ami a képlet szerint éppen megfelel a -1 \$ bevitt reaktivitásnak.



3.3. ábra. A fluxus változása a reaktor vészleállítását követően

3.3.4. Szubkritikus neutronsokszorozás

Tegyük fel, hogy a reaktor szubkritikus, és van benne egy időben állandó S_0 erősségű külső forrás. Egyszerű számolással kapjuk (vö. 3.3. feladat), hogy a fluxus időben állandó, és értéke

$$\varphi_\infty = \frac{S_0 \Lambda}{-\rho} = \frac{S_0 \ell}{1 - k_{\text{eff}}} . \quad (3.14)$$

Ezt a képletet *szubkritikus sokszorozás*nak szoktuk nevezni. Az elnevezés megvilágítására alkalmazzuk a következő gondolatmenetet. Ha a neutronforrás 1 s alatt S_0 neutron juttat a reaktorba, akkor az ℓ idő alatt bejutó neutronok száma $S_0 \ell$. Újabb ℓ idő

elteltével ezek számát a reaktor k_{eff} -szeresére csökkenti, de a forrás termel újabb $S_0\ell$ számú neutron, tehát 2ℓ idő elteltével összesen már

$$S_0\ell + S_0\ell k_{\text{eff}}$$

számú neutron van a reaktorban. Újabb ℓ idő elteltével ezek számát a reaktor ismét k_{eff} -szeresére csökkenti, továbbá a forrás termel újabb $S_0\ell$ számú neutron, és így tovább. Elegendően hosszú idő elteltével tehát a reaktorban

$$S_0\ell + S_0\ell k_{\text{eff}} + S_0\ell k_{\text{eff}}^2 + \dots = \frac{S_0\ell}{1 - k_{\text{eff}}} \quad (3.15)$$

neutron lesz.⁸ Ugyanezt kaptuk a (3.14) képletben is. A szubkritikus sokszorozás jelenségének nagy szerepe van a reaktorok indításakor (vö. 3.4.2. szakasz).

3.4. A reaktivitás mérési módszerei

A reaktivitás mérési módszerei a (3.6) egyenletrendszeren alapulnak. Ezek a módszerek természetesen olyan mértékben közelítők, amilyen mértékben közelítő maga a pontkinetikai egyenletrendszer. Vannak esetek, amelyekben így is kielégítően pontos eredményt lehet kapni, de számos eset van, amelyekben az ezen alapuló módszer meglehetősen pontatlan. Helyenként rámutatunk a pontatlanság fő okaira, a tér-függő effektusokra, amelyekre vonatkozóan lehet korrekciókat alkalmazni, de ezek részleteibe ebben a jegyzetben nem mehetünk bele.

3.4.1. A reaktivitás mérése szuperkritikus állapotokban

Szuperkritikus reaktorállapotokban a *kétszerezési idő módszere* kifogástalan eredményeket szolgáltat. A mérés lényegét a 3.3.2. szakaszban tulajdonképpen már megbeszéltük, ezért itt csak a mérés menetét foglaljuk össze:

1. Szuperkritikus állapotban külső neutronforrás nélkül hagyjuk a reaktor teljesítményét növekedni, és közben regisztráljuk, hogyan növekszik a t idő függvényében a reaktorba helyezett neutrondetektor által időegység alatt mért beütések száma. Így megmérjük a (3.9a) képlet által meghatározott $\varphi(t)$ függvényt.
2. A felvett függvényből elhagyjuk a kezdeti szakaszt (vö. 3.2. ábra), és csak azt tartjuk meg, amelyen érvényes a (3.10) alatti közelítés.⁹ Az utóbbira egy exponenciális függvényt illesztve meghatározzuk ω_0 -at, illetve T_{2x} -et [vö. (3.11)].
3. A (3.7) reciprokóra-egyenletből dollár egységekben kapjuk a ρ reaktivitást. Erre a célra használhatjuk az 1. függelékben található táblázatot.
4. Ha a dollárban kapott reaktivitásból ki akarjuk számítani k_{eff} -et, szükség van β_{eff} értékére (lásd a 8.3. alfejezetben).

⁸ Ezért szoktuk a szubkritikus reaktorokat *sokszorozó rendszereknek* is nevezni.

⁹ Az elhagyandó szakasz kijelölése nem egyszerű dolog, korrekt megoldása matematikai statisztikai elemzést igényel.

A kétszerezési idő módszerét enyhén szuperkritikus állapotok reaktivitásának mérésére használjuk. Mivel biztonsági okokból 15–20 s-nál kisebb kétszerezési időket nem szokás megengedni, ezt a módszert legfeljebb 0,2–0,3 \$ reaktivitásokig tudjuk alkalmazni. Ilyen reaktorállapotokban a reciprokóra-egyenlet nagy pontossággal érvényes. Ebből következik, hogy a módszert az egyik legpontosabb reaktivitásmérési módszernek tekinthetjük – legalábbis ami a dollárban mért reaktivitásokat illeti. Ha ebből k_{eff} -et kívánjuk kiszámítani¹⁰, akkor ennek pontossága függ β_{eff} számításának a pontosságától.

Érdemes megjegyezni, hogy fontos követelmény a reaktor forrásmentes volta. Ha ugyanis egy külső forrás van a reaktorban, akkor az – szerencsétlen körülmények között – eltorzíthatja a 3.2. ábrán mutatott felfutási görbét (vö. 3.5. feladat). A (3.10) szerinti tiszta exponenciális görbealak aszimptotikusan be fog állni, de sokkal lassabban, mint külső forrás nélkül. Emiatt az exponenciális illesztést csak nagy beütésszámoknál kezdhetjük, amelyeknél már zavaró effektusok (például holtidő) pontatlanná tehetik a mérést.

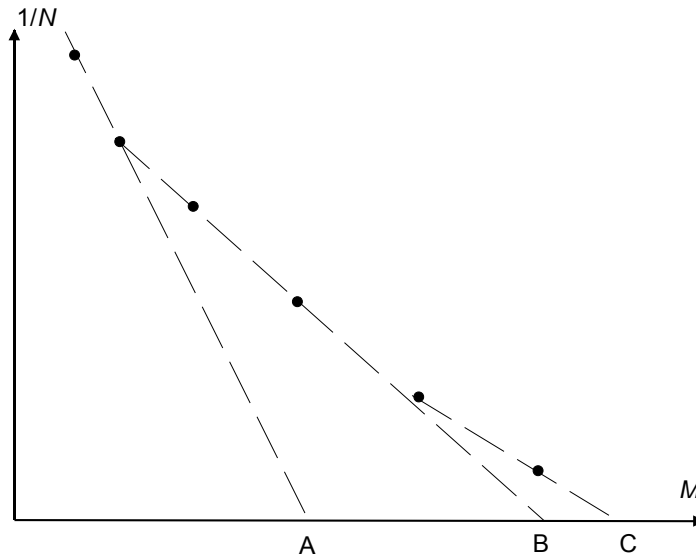
3.4.2. $1/N$ módszer

Szubkritikus állapotban mindig használható az “ $1/N$ módszer”, amely ugyan lehet nagyon pontatlan is, de egyszerűségénél fogva kedvelt és gyakran alkalmazott módszer. Elvi alapját a 3.3.4. szakaszban tárgyalt szubkritikus sokszorozás, vagyis a (3.14) képlet adja. Tekintve, hogy a reaktivitást mindig az N beütésszám reciprokára vezetjük vissza, ezt a mérési módszert “ $1/N$ módszer”-nek nevezzük.

Ha egy szubkritikus reaktorban elhelyezünk egy neutronforrást és egy neutrondetektort, majd fokozatosan növeljük a reaktorban a hasadóanyag mennyiségét, akkor azt tapasztaljuk, hogy a neutrondetektor egyre több neutront jelez. Ha a detektorban időegység alatt megszámlált neutronok számát N -nel jelöljük, ez arányos $\varphi(t)$ -vel. (3.14) szerint így a $-\rho$ reaktivitás $1/N$ -nel arányos. Ez az észrevétel a *kritikussági kísérlet* alapja: ha a 3.4. ábra mintájára ábrázoljuk $1/N$ értékét a reaktorban lévő hasadóanyag M tömegének a függvényében, a görbe az M tengelyt éppen a kritikus tömegnél fogja átmetszeni. Ha tehát a szubkritikus állapotokból $1/N \rightarrow 0$ -ra extrapolálunk, akkor megtudhatjuk, mennyi hasadóanyag hiányzik még a kritikus tömegből. (Az extrapoláció eredményeit a 3.4. ábrán az A, B és C betűkkel jelöltük.) Ezen a módon a megszaladás¹¹ veszélye nélkül, biztonságosan tudjuk a reaktort kritikussá tenni.

¹⁰ A reaktorfizikusok ezt úgy mondják, hogy “a reaktivitást abszolút egységekre számítjuk át”. Tekintve, hogy mind ρ , mind β_{eff} , mind maga a ρ/β_{eff} hányados dimenzió nélküli szám, ez a kifejezés első hallásra furcsának tűnhet. Mivel azonban β_{eff} a dollárnak mint reaktivitásegységnek az értéke, az idézett kifejezés nem kifogásolható.

¹¹ Lásd a 3.3.1. szakaszban.



3.4. ábra. Extrapoláció a kritikus tömeg meghatározására

A mérés végrehajtásához egy külső neutronforrásra van szükség. Egy természetes „külső” forrás van a reaktorban: az ^{238}U izotóp spontán hasadása az izotóp minden grammjában percenként 26 neutronot termel.¹² A BME oktatóreaktorban ez másodpercenként körülbelül 12 ezer neutronot jelent. A gyakorlatban ez elegendő ahhoz, hogy a kétszerezési idő méréséhez a reaktor elinduljon, de elég kicsi ahhoz, hogy ne zavarja a kétszerezési idő mérését, vagyis a fluxus exponenciális felfutása gyorsan ki tudjon alakulni. Ugyanakkor nagyon kevés ahhoz, hogy az $1/N$ mérést vége tudjuk hajtani. Ez a mérés sokkal erősebb külső forrást igényel. Ilyen forrást úgy kapunk, hogy polóniumot vagy plutóniumot BeO-hoz keverünk: a Po vagy Pu radioaktív bomlása α -részecskéket termel, amelyek a berilliumban (α, n) reakciót váltanak ki. Végeredményben minden α -bomlás egy neutronot termel. Az így kapott Po-Be vagy Pu-Be forrásokkal másodpercenként akár néhányszor 10^6 neutron is kaphatunk.

Befejezésül rámutatunk a módszer alkalmazásának a korlátaira. Az 5.7. alfejezetben látni fogjuk, hogy az itt szereplő S forraserősség valójában nem az, aminek eddig tekintettük: S a forrás tényleges $S(\mathbf{r})$ térbeli eloszlásának az alaplómódusra (vö. 5.20. feladat) vonatkozó sorfejtési együtthatója. Nézzük meg ennek következményeit – például – a kritikussági kísérletre vonatkozóan, amelyben általában pontszerű neutronforrást használunk. Ahogy a reaktor méretét növeljük, változik az alaplómódus térfüggése, tehát változik maga S is. Továbbra is fennáll persze, hogy $1/N$ arányos a reaktivitással, de az arányossági tényező (SA) minden reaktorállapotban más és más. Mivel a kritikussági kísérletben csak azt használjuk ki, hogy $1/N \rightarrow 0$, amikor $\rho \rightarrow 0$, azt gondolná az ember, hogy az arányossági tényező változása nem zavarja ezt a kísérletet. A gyakorlatban azonban mégis okozhat problémát. Amíg ugyanis az extrapolációs görbe alulról *konvex*, amint a 3.4. ábrán látható, az extrapoláció mindig a kritikus tömeg alábecslésére vezet, tehát a biztonság irányában téved. Ha azonban a forrás és a detektor egymáshoz viszonyított helyzetét szerencsétlenül választjuk meg, előfordulhat, hogy az extrapolációs görbe alulról *konkáv*. Ilyenkor – mint könnyen beláthatjuk – az extrapoláció a kritikus tömeg felülbecslésére vezet, ami már veszélyes és

¹² Jóllehet ez a neutronforrás eltávolíthatatlanul benne van a reaktorban, mégis külső forrásnak kell tekintenünk, hiszen nem függ a reaktorban kialakuló fluxustól.

ezért kerülendő. A reaktorok üzemviteli szabályzata általában tiltja a kritikussági kísérletnek ilyen feltételek között való végrehajtását. Addig kell próbálgatni a detektor helyét, amíg a görbe nem válik alulról konvexszé. A tapasztalat azt mutatja, hogy a detektort és a forrást a legjobb úgy elhelyezni, hogy közöttük legyen az aktív zóna.¹³

Tanulságos az $1/N$ módszer alkalmazhatóságát egy másik gyakori alkalmazás, a rúdkalibrálás esetében is megvizsgálni. E mérésben azt kívánjuk meghatározni, hogyan függ a reaktivitás a szabályozórúd axiális helyzetétől (z). Mivel a rúd két szélső helyzete között a reaktivitás különbsége általában dollár nagyságrendű, ezt a mérést nem lehet szuperkritikus állapotban elvégezni, hanem csak szubkritikusban. Az $1/N$ módszer csak a *reaktivitással arányos* eredményt ad, tehát szükség van az arányossági tényezőnek más módszerrel való meghatározására. Tegyük fel, hogy az $1/N$ módszerrel megmértük a

$$\rho(z) = -\frac{A}{N(z)}$$

függvényt, ahol $N(z)$ a rúd z magasságánál mért beütésszám, és A a keresett arányossági tényező. Itt már felmerül a kérdés, A mennyiben tekinthető z -től függetlennek. Tegyük fel, hogy jó közelítéssel független. Értékét a következőképpen lehet meghatározni. Elmozdítunk egy *másik* szabályozórudat úgy, hogy a *vizsgált* rúdnek legyen olyan helyzete, amelynél a reaktor szuperkritikus. Kiválasztunk két ilyen rúdhelyzetet: z_1 és z_2 , és ezeknél a kétszeresési idő módszerével megmérjük a reaktivitást: ρ_1 , illetve ρ_2 . Ha azt is feltesszük, hogy az A tényezőt a másik rúd elmozdulása sem változtatja meg¹⁴, akkor írhatjuk:

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{A}{N(z_2)} - \frac{A}{N(z_1)},$$

amiből A meghatározható. Ez a példa is mutatja, hogy az $1/N$ módszer alkalmazásához sok olyan feltevést kell tennünk, amelyek érvényességét csak korlátozottan, illetve csak további feltevésekkel tudjuk ellenőrizni.

A fentiekben tárgyalt két példa alapján az $1/N$ módszert csak tájékoztató jellegű mérésekhez tudjuk ajánlani. Ha a szubkritikus reaktivitást nagyobb igénnyel (például számításokkal való összehasonlítás céljából) kívánjuk megmérni, akkor vagy a pulzált neutronforrás módszerét, vagy valamilyen egyéb, itt nem tárgyalható módszert célszerű alkalmaznunk.

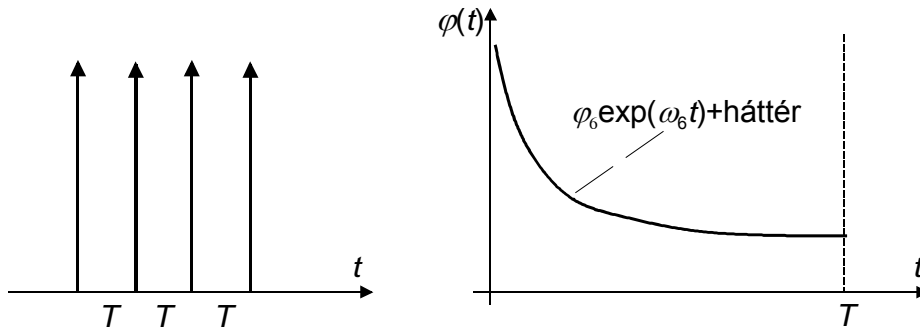
3.4.3. Pulzált neutronforrás módszere szubkritikus reaktorban

A *pulzált neutronforrás* olyan eszköz, amely beállítható T időközönként egy rövid ideig ($1-2 \mu\text{s}$) tartó neutroncsomagot juttat a reaktorba (3.5. ábra). Ha egy *időanalizátor* segítségével megmérjük a neutrondetektor által az egyes neutroncsomago-

¹³ Henger alakú reaktor esetében például jó eredményre szokott vezetni, ha a detektort és a forrást a vízszintes metszet egyik átmérőjének két ellentétes végén helyezük el.

¹⁴ Ezt szubkritikus állapotokban végzett gondos mérésekkel – közelítőleg – ellenőrizni lehet.

kat követően kialakuló beütésszámot, akkor a 3.5. ábrán sematikusán ábrázolt $\varphi(t)$ görbét kapjuk. Az időanalizátor minden neutroncsomag belövésekor újraindul, és a következőig számlálja a detektált neutronokat. Így az analizátor mindegyik csatornájában kapott beütésszám a mérés teljes tartama alatt belőtt összes neutroncsomagokat követően regisztrált beütésszámok összege. Nézzük meg, hogyan tudjuk ezt a mérési eredményt értelmezni és a reaktivitással összekapcsolni.



3.5. ábra. Mérés pulzált neutronforrással szubkritikus reaktorban

Egyetlen neutroncsomagot követően a $(t, t+dt)$ időintervallumban (vagyis az időanalizátor egyik csatornájában) regisztrált neutronok számát (3.9a) szerint a

$$\sum_{j=0}^6 \varphi_j e^{\omega_j t} dt$$

összeg adja meg, ahol az ω_j időállandók a (3.7) reciprokóra-egyenlet gyökei. Az analizátor kiszemelt csatornájában ehhez hozzáadódnak a korábbi neutroncsomagok járuléka, amelyeket a neutronforrás a T ciklusidő egész számú többszöröseivel korábban lött be a reaktorba:

$$\varphi(t)dt = \sum_{n=-\infty}^0 \sum_{j=0}^6 \varphi_j e^{\omega_j(t+nT)} dt = \sum_{j=0}^6 \frac{\varphi_j}{1 - e^{\omega_j T}} e^{\omega_j t} dt. \quad (3.16)$$

Látható, hogy az időanalizátorban kapott eredmény ugyanazoknak az exponenciális függvényeknek a lineáris kombinációja, amelyekkel más reaktorkinetikai mérések esetében is találkoztunk. Megmutatjuk, hogy T alkalmas megválasztásával ebből meg lehet határozni a reaktivitást.

A 3.1. ábráról leolvasható, hogy $\rho < 0$ esetén a legnagyobb abszolút értékű időállandó ω_6 , amelyről belátható, hogy minden i -re¹⁵:

$$-\omega_6 \gg \lambda_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Ezt (3.7)-ben figyelembe véve jó közelítéssel írhatjuk:

¹⁵ A 3.1. ábrán ez nem nyilvánvaló, mert az ábra torzít. Világosabban látszik viszont a 3.1. táblázatból.

$$\omega_6 \approx -\frac{\beta}{\Lambda} \left(1 - \frac{\rho}{\beta}\right). \quad (3.17)$$

Ebből következik, hogy kritikus állapotban

$$\omega_6^{\text{krit.}} = -\frac{\beta}{\Lambda}, \quad (3.18)$$

amivel a reaktivitást a

$$-\frac{\rho}{\beta} = \frac{\omega_6 - \omega_6^{\text{krit.}}}{\omega_6^{\text{krit.}}} \quad (3.19)$$

képlet adja meg. Ha sikerülne ω_6 -ot a vizsgált szubkritikus állapotban és a kritikus állapotban megmérnünk, akkor (3.19) segítségével meg tudnánk határozni a reaktivitást.

T -t úgy választjuk meg, hogy teljesüljenek az

$$|\omega_6 T| \gg 1, \quad \text{de} \quad |\omega_j T| \ll 1, \quad (j = 0, 1, \dots, 5) \quad (3.20)$$

egyenlőtlenségek. Ekkor minden neutroncsomag után (3.16)-ban a $j = 6$ tag a következő impulzus érkezéséig gyakorlatilag eltűnik, viszont a $j < 6$ tagok ezalatt alig változnak. Így (3.16)-ot a következő módon közelíthetjük:

$$\varphi(t) dt \approx \varphi_6 e^{\omega_6 t} dt + \sum_{j=0}^5 \frac{\varphi_j}{-\omega_j T} e^{\omega_j t} dt \approx \varphi_6 e^{\omega_6 t} dt + b dt. \quad (3.21)$$

Az időanalizátor által mért görbére tehát egy exponenciálisan csökkenő tag és egy "háttér" ($b dt$) összegét lehet illeszteni. Ennek alapján ω_6 értéke kísérletileg meghatározható. Ha ezt a mérést a reaktor különböző állapotaiban (például egy szabályozórúd különböző helyzeteiben) elvégezzük, ω_6 értékeit a kritikus rúdhelyzetre extrapolálva meghatározhatjuk β/Λ értékét [vö. (3.18)], amiből (3.19) alapján megkapjuk a reaktivitást. Ezt a mérési módszert *Simmons és King módszerének* nevezzük.

A pulzált neutronforrással végzett mérésnek van egy olyan kiértékelési módja is, amely nem igényli ω_6 értékének a kritikus állapotra való extrapolációját. Ez nagy könnyebbség, mert így a reaktivitást *egyetlen* mérésből is megkaphatjuk. A fentiek szerint az időanalizátor által mért görbében világosan elkülöníthető egy állandó tag (b) és egy gyorsan csökkenő tag. Mivel az előbbi azokhoz az ω_j sajátértékekhez rendeltük, amelyek a 3.1. ábrán a λ_i későneutron-időállandók nagyságrendjébe esnek, ezt a tagot *késő járuléknak* szoktuk nevezni – szemben a *prompt járuléknak* nevezett másik taggal. Ha kiszámítjuk a két tag alatti

$$A_p = \int_0^T \varphi_6 e^{\omega_6 t} dt = \varphi_6 \frac{e^{\omega_6 T} - 1}{\omega_6} \approx -\frac{\varphi_6}{\omega_6} \quad \text{és} \quad A_d = bT \quad (3.22)$$

területeket,¹⁶ akkor a reaktivitást a két terület aránya adja:

$$-\frac{\rho}{\beta} = \frac{A_p}{A_d}. \quad (3.23)$$

A reaktivitásnak ezt a meghatározási módját *Sjöstrand-módszernek* nevezzük. Az alapjául szolgáló (3.23) összefüggést csak heurisztikus úton vezetjük le.¹⁷

A fentiekben prompt és késő területnek nevezett mennyiségek (A_p , illetve A_d) az ω_j sajátértékek nagyságrendje szerint szétválasztott tagok összegei, de – nevükkel ellentétben – szigorúan véve nem rendelhetők hozzá a prompt, illetve késő neutronokhoz. Nos, az alábbi heurisztikus gondolatmenetben ezeket a neveket mégis szó szerint vesszük. Ha a pulzált neutronforrás 1 s alatt átlagosan S számú neutronot juttat a reaktorba, akkor (3.15) szellemében ebből

$$S + Sk_{\text{eff}} + Sk_{\text{eff}}^2 + \dots = \frac{S}{1 - k_{\text{eff}}}$$

számú neutron marad meg a reaktorban. Mivel ez a prompt és késő neutronokat együttesen jelenti, ez a mennyiség ($A_p + A_d$)-vel arányos. Ha csak a prompt neutronok által okozott neutronsokszorozást vesszük figyelembe, akkor ehelyett

$$\frac{S}{1 - (1 - \beta)k_{\text{eff}}}$$

adódik, ami A_p -vel arányos. Vegyük a kettő hányadosát:

$$\frac{A_p + A_d}{A_p} = \frac{1 - (1 - \beta)k_{\text{eff}}}{1 - k_{\text{eff}}},$$

amiből egyszerűen következik (3.23).

A pulzált neutronforrás módszere a szubkritikus reaktivitások mérésének legjobb módszere. A pontkinetikai egyenletrendszer keretében csak annyiban közelítő, amennyiben ω_6 abszolút értéke sokkal nagyobb, mint a λ_i időállandók, ami gyakorlatilag minden reaktortípusra érvényes. A módszer alkalmazásának viszont korlátot szab a pontkinetikai egyenletrendszer érvényessége. Néhány dollárt meghaladó abszolút értékű reaktivitások esetében már olyan tér- és energiafüggő effektusok lépnek fel, amelyek a módszert problematikusá teszik.

¹⁶ A “d” index az angol “delayed” (= késő) szóra utal. Ez a jelölés már a magyar nyelvű irodalomban is meghonosodott.

¹⁷ A matematikailag korrekt levezetés a Bevezetés a reaktorfizikába című könyv 3.7. alfejezetében található.

3.4.4. Inverz kinetika

A reaktivitásmérésnek egyéb módszerei is vannak: *rúdejtéses* módszer, *a forrás kirántásának* módszere stb., amelyek mind a pontkinetikai egyenlet speciális körülmények között való közelítő megoldásain alapulnak. Például, egy szabályozórúd felső és alsó véghelyzete közötti reaktivitáskülönbséget (a rúd értékességét) a következő egyszerű módon lehet megmérni: kihúzott rúddal kritikus állapotból kiindulva hirtelen a reaktorba ejtjük a rudat, amit követően – mint a 3.3.3. szakaszban láttuk – a fluxus értéke gyorsan egy kisebb, közelítőleg állandó értékre áll be. Az utóbbi állapotban és a kiindulási állapotban mért beütésszámok hányadosa a (3.13) képlet alapján megadja a keresett reaktivitást. Aki ilyen mérést csinált, tudja, milyen nehéz eldönteni, a rúdejtés után mi az az “állandó” beütésszám, amellyel osztania kell. Ennek az az oka, hogy a késő neutronok miatt a fluxus csökkenése csak lelassul, de állandó értékről – szigorúan véve – nem beszélhetünk. Ezekon a nehézségeken segít az inverz kinetika, amely akkor vált alkalmazhatóvá, amikor a reaktorokhoz számítógépet lehetett csatlakoztatni. Természetesen ennek sem jobb a pontossága, mint magáé a pontkinetikai egyenleté. Egyszerűsége folytán azonban nagyon népszerű a gyakorlat emberei körében. Aki ismeri a módszer korlátait, annak kezében valóban nagyon hasznos eszköz.

Az *inverz kinetika* módszerének lényege a következő: egy neutrontetektorral a t idő függvényében mérjük $\varphi(t)$ -t, és keressük azt a ρ reaktivitást, amely mellett a mért függvény éppen a (3.6) alatti pontkinetikai egyenlet megoldása. A 3.2. és 3.3. alfejezetben az egyenlet megoldását adott ρ reaktivitás mellett kerestük, aminek most éppen a fordítottja történik. Az algoritmus a következő. A későneutron-anyamagok koncentrációját kifejezhetjük $\varphi(t)$ -vel, ha a (3.6b) egyenletet t szerint integráljuk:

$$C_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_{-\infty}^t \varphi(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt', \quad (3.24)$$

amint ezt közvetlen behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Mivel a módszert általában a kritikus állapothoz közel szoktuk alkalmazni, az S külső forrást elhagytuk. (A módszer kiterjeszhető forrásos, szubkritikus állapotokra is, de ennek részleteibe nem megyünk bele.) Ezzel az időben esetleg változó $\rho(t)$ reaktivitást a következő képlettel számítjuk ki:

$$\frac{\rho(t)}{\beta} = 1 + \frac{\Lambda \frac{d\varphi(t)}{dt} - \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{\beta} \lambda_i \int_{-\infty}^t \varphi(t') e^{-\lambda_i(t-t')} dt'}{\varphi(t)}. \quad (3.25)$$

Ezt a képletet úgy kaphatjuk meg a legegyszerűbben, hogy a (3.6a) egyenletben szereplő $C_i(t)$ függvényt (3.24)-ből behelyettesítjük, majd az így kapott egyenletet ρ -ra mint ismeretlenre megoldjuk. Látjuk, hogy ez a módszer a reaktivitást dollár egységekben adja meg. Alkalmazásához ismerni kell a Λ/β és a β_i/β hányadosokat. Az előbbi mérését a pulzált neutronforrás módszerével végezhetjük el, a β_i/β hányado-

sok pedig lényegében magfizikai adatoknak tekinthetők, de – ha szükséges – a 6.7. alfejezet szerint ki is számíthatjuk őket. A (3.25) jobb oldalának számlálójában szereplő $-\infty$ integrálási határt a mérésben úgy vehetjük a leghelyesebben figyelembe, hogy a mérés megkezdése előtt a reaktor kritikus állapotában elegendően hosszú ideig (általában néhány percig) folyamatosan mérjük a $\rho(t)$ függvényt, és csak ezután visszük be a reaktorba a mérendő $\rho(t)$ reaktivitást. Az így szervezett mérés kezdetét megelőző idő járuléka már elhanyagolható. Erről úgy győződhetünk meg, hogy a tényleges mérés megkezdése előtt a módszer tartósan $\rho = 0$ -t ad.

3.5. Feladatok

Az alábbi feladatok számszerű adatai a 3.1. táblázatban található időállandók segítségével megoldhatók. Ugyanakkor a hallgatóknak azt ajánljuk, hogy írjanak programot a (3.12) alakú algebrai egyenletrendszerek megoldására és a megoldás grafikus ábrázolására.

- 3.1. Vezessük le (3.7) és (3.8) képleteket! (1 pont)
- 3.2. Vezessük le a (3.14) képletet! (1 pont)
- 3.3. Egy külső forrás nélküli szubkritikus reaktorba a $t = 0$ időpillanatban beviszünk egy neutronforrást, amelynek az erőssége S . Határozzuk meg a pontkinetikai egyenlet megoldását! (2 pont)
- 3.4. A 3.3. feladatban szereplő reaktorban $S = 10^6 \text{ s}^{-1}$; a reaktivitás -1 \$. Rajzoljuk fel a fluxus időtől való függését az első 3 percben! Útmutatás: használjuk fel a 3.2. és 3.3. alfejezetekben található időállandókat és együtthatókat. A Λ generációs időt vegyük $25 \mu\text{s}$ -nak, $\beta = 0,0065$. (4 pont)
- 3.5. A reaktort a $t = 0$ időpontban superkritikussá tesszük $\rho/\beta = 0,2$ \$ reaktivitással, és egyidejűleg bejuttatunk egy $S = 32000 \text{ s}^{-1}$ erősségű külső neutronforrást. Számítsuk ki a 3.2. ábra megfelelőjét ebben az esetben! Útmutatás: használjuk fel a 3.2. és 3.3. alfejezetekben található időállandókat és együtthatókat. A Λ generációs időt vegyük $25 \mu\text{s}$ -nak, $\beta = 0,0065$. (8 pont)
- 3.6. Hogyan változik a fluxus egy kritikus reaktorban, amelyben egy időben állandó külső forrás van?
 - a) Vezessük le a megfelelő képleteket arra az esetre, amikor a reaktor $t = 0$ -ig szubkritikus volt, majd a $t = 0$ -ban pillanatszerűen kritikussá tesszük! Az adatokat vegyük a 3.4. feladatból. (4 pont)
 - b) Rajzoljuk fel a fluxus időfüggését! (4 pont)
- 3.7. Egy pulzált reaktivitásmérésben a ciklusidő $T = 12 \text{ ms}$, az időanalizátor csatornaszélessége $dt = 100 \mu\text{s}$. A mért bomlásgörbe a következő:

223	1482	2298	2849	3210	3295	3329	3326	3163	3018
3015	2731	2598	2494	2294	2147	1982	1930	1768	1623
1544	1379	1365	1198	1090	970	1040	922	810	852
761	706	666	614	568	616	519	477	473	451
436	403	408	329	360	340	352	334	305	333
281	300	320	289	277	289	292	280	282	274
264	254	237	264	230	271	254	230	248	278
222	233	261	249	252	238	225	213	242	262
205	240	258	237	254	218	225	212	219	227
237	237	236	246	244	228	255	222	236	199

- a) Sjöstrand módszerével határozzuk a reaktivitást!
 b) Számítsuk ki β/Λ értékét!
 c) A kiértékelést végezzük el mind függvényillesztéssel, mind grafikusán! Figyelmeztetés: a görbe elején a térfüggő effektusok miatt a görbe eltér a tiszta exponenciálistól. Ezt a részt az illesztéskor el kell hagyni!

(10 pont)

- 3.8. Egy pulzált reaktivitásmérésben a ciklusidő $T = 12$ ms, az időanalizátor csatornaszélessége $dt = 50$ μ s. A mért bomlásgörbe a következő:

371	914	1377	1807	2202	2443	2684	2917	3010	3117
3366	3306	3392	3497	3469	3484	3457	3561	3497	3436
3454	3323	3412	3241	3148	3017	3207	3057	2898	3021
2883	2803	2744	2654	2569	2680	2472	2378	2363	2306
2258	2169	2163	1960	2011	1940	1945	1878	1783	1823
1673	1689	1708	1606	1551	1550	1527	1472	1448	1401
1352	1303	1237	1271	1171	1235	1175	1098	1114	1154
1015	1015	1051	1007	992	945	900	858	898	919
792	843	862	806	823	744	742	706	707	709
714	703	689	695	682	645	679	615	629	560
556	636	587	562	609	557	611	565	528	562
528	540	540	564	559	496	452	527	527	522

- a) Sjöstrand módszerével határozzuk a reaktivitást!
 b) Számítsuk ki β/Λ értékét!
 c) A kiértékelést végezzük el mind függvényillesztéssel, mind grafikusán! Figyelmeztetés: a görbe elején a térfüggő effektusok miatt a görbe eltér a tiszta exponenciálistól. Ezt a részt az illesztéskor el kell hagyni!
 d) A kísérletező két beállítási hibát is elkövetett, amelyek a 3.7. feladathoz képest elbonyolítják a kiértékelést. Mi ez a két hiba?

(10 pont)

- 3.9. Egy szubkritikus reaktorban van egy $S = 10^6$ s⁻¹ erősségű külső neutronforrás. Miután a fluxus állandó értékre beállt, a $t = 0$ időpillanatban pillanatszerűen kibrántjuk a neutronforrást.

- a) Vezessük le az ezt követő t időkre a $\varphi(t)$ fluxust megadó képleteket!
 b) Számítsuk ki numerikusan és rajzoljuk fel $\varphi(t)$ görbét! ($\rho = -1$ \$, $\Lambda = 25$ μ s)
 c) A kapott eredmények alapján javasoljunk egy reaktivitásmérési módszert! (A módszer legyen a rúdejtéses módszerhez hasonló.)

(10 pont)

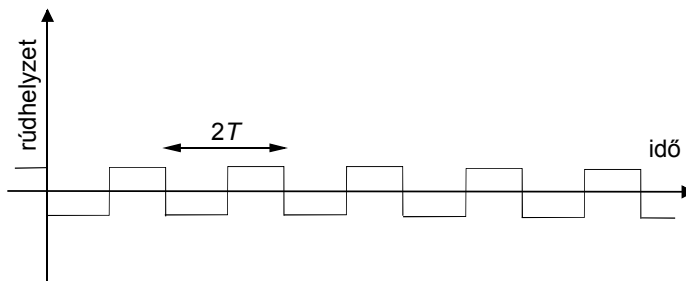
- 3.10. Egy szuperkritikus reaktorban hagyjuk, hogy kialakuljon egy tiszta exponenciális felfutás ($\rho = 0,2$ \$). A $t = 0$ időpontban a reaktort hirtelen visszavisszük a kritikus állapotba. Határozzuk meg, hogyan változik ezt követően a fluxus és a későneutron-anyamagok koncentrációja:

- a) Vezessük le a képleteket, és végezzünk numerikus vizsgálatot! (7 pont)
 b) Mi a lényeges különbség a fluxus és a C_i koncentrációk időfüggése között? Magyarázzuk meg ezt az eltérést! (7 pont)

- 3.11. Egy kritikus reaktorban az egyik szabályozó rúd helyzetét a kritikus állapot körül kis amplitúdóval időben szinuszos függvény szerint változtatjuk. Ennek hatására a reaktivitás is hasonló időfüggvény szerint változik. A változás ω körfrekvenciájának függvényében számítsuk ki, milyen amplitúdóval ingadozik a fluxus! Rajzoljuk fel az átviteli függvényt, és vizsgáljuk meg az $\omega \gg \lambda_i$ határesetet! Útmutatás: a fluxust írjuk fel $\varphi = \varphi_0 + d\varphi$ alakban, és a pontkinetikai egyenlet-

ben hanyagoljuk el a változások magasabb rendű hatványait, illetve szorzatait. Alkalmazzunk hasonló közelítést az anyagok koncentrációira is. (10 pont)

- 3.12. Egy kritikus reaktorban az egyik szabályozórúd helyzetét négyszög hullám szerint változtatjuk (lásd a mellékelt ábrán). Változik-e közben a fluxus időátlaga? Ábrázoljuk a reaktor válaszát a következő paraméterek mellett: $T = 1$ s, a reaktivitás $-0,1$ és $+0,1$ között változik, $\lambda = 25$ μ s. (15 pont)



- 3.13. Egy szabályozórúd kalibrálásakor $1/N$ módszerrel az alábbi táblázatban közölt beütésszámokat kaptuk. A rúd $z_1 = 500$ mm és $z_2 = 600$ mm helyzeténél szuperkritikus állapotban megmértük a kétszerezési időt: a következő értékeket kaptuk eredményül $T_1 = 132,2 \pm 4,3$ s, illetve $T_2 = 17,0 \pm 1,1$ s.

- a) Rajzoljuk fel a rúd kalibrációs görbéjét! Útmutatás: használjuk az 1. függelék táblázatait.
b) Végezzünk hibaszámítást is! Útmutatás: Az N beütésszámokat tekintsük Poisson-eloszlásúnak.

(10 pont)

z (mm)	N
0	4129
100	4130
200	4270
300	4727
400	5652
500	7123
600	9852
700	14397
800	19997
900	24034
1000	25219

- 3.14. Egy szubkritikus reaktort neutronforrással hajtunk meg. A forrás azonban a gyorsító tulajdonságai miatt nem stabil. Ezt egy T hosszúságú periódusú periodikus lépcsőfüggvénnyel modellezzük:

$$S(t) = \begin{cases} S_0 & 0 \leq t \leq T - \tau, \\ 0 & T - \tau \leq t \leq T. \end{cases} \quad \text{Oldjuk}$$

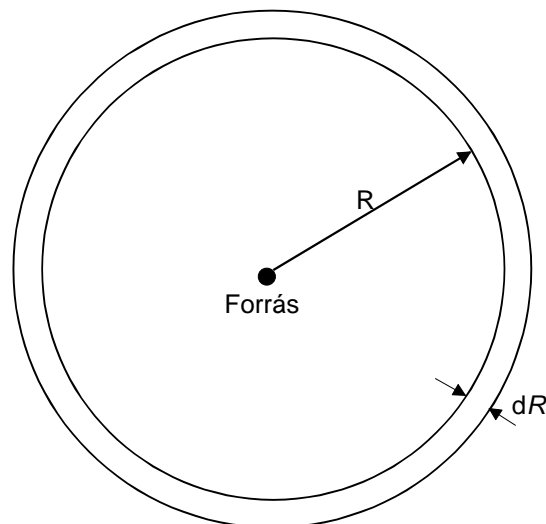
meg a pontkinetikai egyenletet ebben az esetben! (10 pont)

- 3.15. A 3.14. feladatban a működés T időtartama valószínűségi változó, de a kimaradás τ időtartama állandó. Oldjuk meg a feladatot az alábbi két esetben!

- a) T egyenletes eloszlású a $[0, 30$ s] intervallumban. (8 pont)
b) T exponenciális eloszlású 30 s várható értékkel. (8 pont)
c) Hogyan látnánk hozzá ehhez a feladathoz, ha τ is valószínűségi változó lenne? (4 pont)

4. Transzportegyenlet, diffúzióegyenlet

A reaktorok működését leíró alapegyenlet a *transzportegyenlet*, más néven *Boltzmann-egyenlet*. Az egyenlet megoldása körülbelül annyira nehéz, mint amilyen egyszerű a levezetése. Ezért általában valamilyen közelítő, de könnyebben kezelhető alakját használjuk. A leggyakoribb az ún. *diffúziós közelítés*, illetve az ezen alapuló *diffúzióegyenlet*. A legtöbb reaktorfizika könyv a transzportegyenletből indul ki, azt bizonyos közelítésekkel egyszerűsíti, és végül eljut a diffúzióegyenlethez. Ezt is aztán fokozatosan tovább egyszerűsíti, míg végül eljut jól kezelhető, egyszerű egyenletekhez. Többek között így el lehet jutni a 3. fejezetben tárgyalt pontkinetikai egyenletekhez is. Ebben a jegyzetben fordított utat fogunk követni: a legegyszerűbb feltevésekből kiindulva vezetjük le a diffúzióegyenlet legegyszerűbb alakját, amelyet aztán tovább tudunk fejleszteni. Tulajdonképpen ilyen utat követtünk a 3. fejezetben is, amikor elemi megfontolások alapján közvetlenül felírtuk a pontkinetikai egyenleteket, amelyek segítségével a reaktorok működésének elég sok jelenségét meg tudtuk érteni. A jelen fejezetben először az egycsoport, időtől független egyenleteket fogjuk tekinteni, majd fejezet végén fogunk áttérni az időtől és az energiától függ egyenletekre.



4.1. ábra. Homogén gömb belsejében levő neutronforrás

4.1. Transzport magfüggvény

Tekintsünk egy pontszerű neutronforrást, amely másodpercenként egy v sebességű neutront emittál minden irányban egyenletes valószínűséggel (4.1. ábra). Ha a neutronok nem ütköznek, akkor minden másodpercben egy neutron halad át az R sugarú gömb $4\pi R^2$ nagyságú felületén. Minden neutronnak dR/v időre van szüksége ahhoz, hogy átszelje dR vastagságú gömbhéjat, ami azt jelenti, hogy a $4\pi R^2 dR$ térfogatú gömbhéjban dR/v számú neutron van. Ebből következik, hogy ott a neutronsűrűség

$$n(R) = \frac{dR/v}{4\pi R^2 dR} = \frac{1}{4\pi R^2 v}.$$

Ha a neutronsebességgel beszorzunk, a bal oldalon a neutronfluxust kapjuk:

$$vn(R) = \Phi(R) = \frac{1}{4\pi R^2} .$$

A valóságban persze vannak neutronok, amelyek ütköznek, mielőtt a gömbhéjat elérnék. Annak a valószínűsége, hogy ez ne következzen be, (2.2) alapján $e^{-\Sigma R}$, tehát a fluxust ezzel a tényezővel le kell csökkenteni:

$$\Phi(R) = \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} . \quad (4.1)$$

Ez azoknak a neutronoknak a fluxusát adja meg, amelyek a forrásból kikerülve ütközés nélkül R távolságot megtettek.

A (4.1) képlet a neutronfluxusnak csak egy részét adja meg, hiszen nem veszi figyelembe azokat a neutronokat, amelyek legalább egyszer szóródtak. Ezért most tekintsünk egy homogén reaktort, amelyben a neutronszórás izotrop, és nem változtatja meg a szóródó neutronok v sebességét. A reaktorban legyen egy időben állandó neutronforrás, amely az \mathbf{r} pont körüli dV térfogatelemben másodpercenként $S(\mathbf{r})dV$ neutront emittál izotrop szögeloszlással. Ha a neutronfluxus $\Phi(\mathbf{r})$, akkor az \mathbf{r} pont körüli dV térfogatelemben másodpercenként megjelenik $\Sigma_s \Phi(\mathbf{r})dV$ szórt neutron – a forrás által termelt neutronokon felül. Most azt kérdezzük, hogy ezek együtt milyen ütközés nélküli fluxust hoznak létre egy \mathbf{r}' pontban. Erre a kérdésre a (4.1) képlet alapján feltehetünk:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} (S(\mathbf{r}) + \Sigma_s \Phi(\mathbf{r})) dV ,$$

ahol $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ a két pont közötti távolság. Ha ezt az egész reaktorra integráljuk, megkapjuk a teljes fluxust:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} (S(\mathbf{r}) + \Sigma_s \Phi(\mathbf{r})) dV .$$

Ezt az egyenletet általában úgy szoktuk használni, hogy benne felcseréljük a vesszős és vesszőtlen helyvektorokat:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} (S(\mathbf{r}') + \Sigma_s \Phi(\mathbf{r}')) dV' . \quad (4.2)$$

Talán első látásra furcsának tűnik, hogy az ütközés nélküli fluxusból végül a teljes fluxust kaptuk. Ezért gondoljuk meg a következőket. Amikor egy neutront tekintünk az \mathbf{r} pont közelében, ennek két kiindulása lehet: vagy közvetlenül a forrásból került oda ütközés nélkül, vagy valahol már ütközött, és az utolsó ütközési helyéről már üt-

közés nélkül eljutott az \mathbf{r} pont közelébe. Emiatt a (4.2) egyenlet valóban a teljes fluxust adja meg. (4.2) tulajdonképpen egy integrálegyenlet a $\Phi(\mathbf{r})$ fluxusra. A tett feltevések (izotrop forrás, izotrop szórás, homogén reaktor) körében teljesen egzakt egyenlet. A transzportegyenlet integrális alakjának legegyszerűbb változata.

Az integrálegyenletet nagyon egyszerű arra az esetre általánosítani, amikor a reaktor nem homogén. Ha az \mathbf{r} és \mathbf{r}' pontokat összekötő egyenes R_1, R_2, \dots hosszúságú szakaszain a hatáskeresztmetszet rendre $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$, akkor a ΣR szorzat helyett a

$$\overline{\Sigma(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})} = \Sigma_1 R_1 + \Sigma_2 R_2 + \dots \quad (4.3)$$

összeget, az ún. *optikai távolságot* kell írni. Ez tulajdonképpen a teljes hatáskeresztmetszetnek az \mathbf{r} és \mathbf{r}' pontokat összekötő egyenes mentén vett integrálja.

A (4.2) integrálegyenletben szereplő

$$\frac{e^{-\overline{\Sigma(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})}}}{4\pi R^2} \quad (4.4)$$

függvényt *transzport magfüggvénynek* nevezzük. A későbbi fejezetekben szükség lesz (4.2) és (4.4) energiafüggő alakjára is, a maga helyén majd ezt is felírjuk.

4.2. Diffúziós közelítés

Általában egyszerűbb differenciálegyenleteket megoldani, mint integrálegyenleteket. Ezért gyakran alkalmazzuk a *diffúziós közelítést*, amelynek segítségével a (4.2) integrálegyenletet differenciálegyenletté tudjuk átalakítani. A közelítés azon az észrevételen alapul, hogy az egész reaktorra kiterjesztett integrálban a transzport magfüggvény az \mathbf{r} pontnak csak néhány szabad úthossznyi környezetében számottevő, nagyobb távolságokra már elhanyagolható.

A jelölések egyszerűsítése érdekében bevezetjük a

$$Q(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}) + \Sigma_s \Phi(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

mennyiséget. Elsőként egy nagyon durva közelítést alkalmazunk: (4.2)-ben az integráljel alatt $Q(\mathbf{r}')$ -t $Q(\mathbf{r})$ -rel helyettesítjük. Ekkor az integrál nagyon leegyszerűsödik:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx Q(\mathbf{r}) \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} dV' = Q(\mathbf{r}) \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} 4\pi R^2 dR = \frac{Q(\mathbf{r})}{\Sigma}. \quad (4.6)$$

Ha itt Q helyére a (4.5) szerinti értékét helyettesítjük, akkor ez a közelítő megoldás így írható:

$$\Sigma \Phi(\mathbf{r}) \approx S(\mathbf{r}) + \Sigma_s \Phi(\mathbf{r}),$$

vagyis

$$\Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) \approx S(\mathbf{r}). \quad (4.7)$$

Ez az egyenlet egy nagyon egyszerű dolgot fejez ki: minden pont környezetében annyi neutron abszorbeálódik, mint amennyit a neutronforrás *ott* termel. Az egyenlet nyilván nem lehet valami nagyon pontos, hiszen nem vesz figyelembe egy nagyon fontos dolgot, a neutronok cikcakkszerű mozgását a keletkezési hely és az abszorpció helye között.

A modellt úgy tudjuk javítani, hogy $Q(\mathbf{r}')$ -t \mathbf{r} körül sorba fejtjük. Az $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ vektor komponensei legyenek x , y és z . A második rendig terjedő sorfejtés

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}') &= Q(\mathbf{r}) + x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} + z \frac{\partial Q}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + 2xz \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial z} \right) + \dots \end{aligned}$$

Ha ezt (4.2)-be helyettesítjük, a tagok nagy részének eltűnik az integrálja:

$$\int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} x \, dV' = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} y \, dV' = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} z \, dV' = 0. \quad (4.8a)$$

$$\int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} xy \, dV' = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} xz \, dV' = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} yz \, dV' = 0. \quad (4.8b)$$

Csak a négyzetes tagok adnak zérustól különböző eredményt:

$$\int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} x^2 \, dV' = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} y^2 \, dV' = \int \frac{e^{-\Sigma R}}{4\pi R^2} z^2 \, dV' = \frac{2}{3\Sigma^3}. \quad (4.9)$$

Ezeknek az összefüggéseknek a bizonyítását a feladatokra hagyjuk (4.1. és 4.2.). Vég-eredményben a következő összefüggést kapjuk:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q(\mathbf{r})}{\Sigma} + \frac{1}{3\Sigma^3} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right) = \frac{Q(\mathbf{r})}{\Sigma} + \frac{1}{3\Sigma^3} \Delta Q.$$

A Laplace-operátor alatt a (4.6) közelítést alkalmazzuk:

$$\Phi(\mathbf{r}) \approx \frac{Q(\mathbf{r})}{\Sigma} + \frac{1}{3\Sigma^3} \Delta(\Sigma\Phi) = \frac{S(\mathbf{r}) + \Sigma_s \Phi(\mathbf{r})}{\Sigma} + \frac{1}{3\Sigma^2} \Delta\Phi.$$

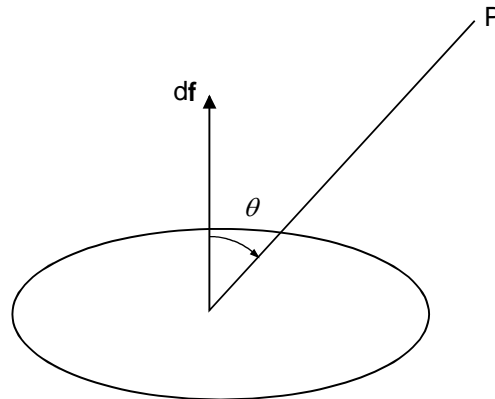
Ezt Σ -val beszorozva kapjuk a diffúzióegyenletet:

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a \Phi + S = 0, \quad (4.10)$$

ahol

$$D = \frac{1}{3\Sigma} \quad (4.11)$$

a *diffúzióállandó*, amely hosszúságdimenziójú, általában cm-ben fejezzük ki.



4.2. ábra. Vázlat a neutronáram értelmezéséhez

4.3. Fick-törvény

Az előző alfejezetben azért kellett a (4.7) egyenletet továbbfejlesztenünk, hogy figyelembe tudjuk venni a neutronok térbeli diffúzióját. Sajnos a (4.10) egyenletről még nem látszik, hogy valóban leírja ezt, így tovább kell elemeznünk a térbeli mozgást. A 2. fejezetben láttuk, hogy ezt legjobban a \mathbf{J} neutronáram tükrözi. A következőkben \mathbf{J} -t össze fogjuk kapcsolni a Φ fluxussal. Ezt az összefüggést nevezzük *Fick-törvénynek*, aminek alapján a 4.4. alfejezetben megmutatjuk, hogy a (4.10) egyenlet valóban számot ad a diffúzióról.

Tekintsük a 4.2. ábrát. Az \mathbf{r} pontnál elhelyezünk egy felületelemet, amelynek a felületvektora $d\mathbf{f}$: iránya a felületelemre merőleges, hossza a felületelem $d\mathbf{f}$ területével egyenlő. Kérdés: 1 s alatt hány neutron lép át a felületelemen felülről lefelé? A 2. fejezetben ezt $J_{\perp} d\mathbf{f}$ -fel jelöltük. A P pont körüli dV' térfogatelemből 1 s alatt izotróp irányeloszlással $Q(\mathbf{r}') dV'$ neutron indul ki [vö. (4.5) egyenlet]. Ebből csak azt a részt kell figyelembe vennünk, amelynek az iránya átmetszi a $d\mathbf{f}$ felületelemet:

$$Q(\mathbf{r}') dV' \frac{d\mathbf{f} \cos \theta}{4\pi R^2},$$

ahol a R a P pont és $d\mathbf{f}$ közötti távolság. A $\cos \theta$ tényező a felületelemet a P pontot $d\mathbf{f}$ fel összekötő egyenesre merőleges síkra vetíti. Végül ezt még be kell szoroznunk annak a valószínűségével, hogy az összekötő egyenes mentén a neutronok nem ütköznek. A 4.1. alfejezetben láttuk, hogy ez e^{-2R} . A keresett mennyiséget úgy kapjuk meg, hogy ezt a felületelem feletti féltérre integráljuk:

$$J_- df = \int_{\text{felső féltér}} Q(\mathbf{r}') dV' \frac{df \cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R}. \quad (4.12a)$$

Analóg módon kapjuk a $J_+ df$ mennyiséget, amely a felületelemet 1 s alatt alulról fel-felé mutató irányban átlépő neutronok száma:

$$J_+ df = \int_{\text{alsó féltér}} Q(\mathbf{r}') dV' \frac{df \cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R}. \quad (4.12b)$$

Ezeknek az integráloknak a kiszámításában két közelítést alkalmazunk: egyrészt Q -t $\Sigma\Phi$ -vel vesszük egyenlőnek [vö. (4.6) egyenlet], másrészt Φ -t sorba fejtjük:

$$\Phi(\mathbf{r}') = \Phi(\mathbf{r}) + x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

ahol – mint a 4.2. alfejezetben – x , y és z az $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ vektor komponensei. A z -tengelyt a df felületvektor irányában vesszük fel. Közvetlen integrálással be lehet látni a következő egyenlőségeket (vö. 4.3.–4.5. feladatok):

$$\int_{\text{felső féltér}} \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = \int_{\text{alsó féltér}} \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = \frac{1}{4\Sigma}, \quad (4.13a)$$

$$\int_{\text{felső féltér}} x \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = \int_{\text{alsó féltér}} x \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = 0, \quad (4.13b)$$

$$\int_{\text{felső féltér}} y \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = \int_{\text{alsó féltér}} y \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = 0, \quad (4.13c)$$

$$\int_{\text{felső féltér}} z \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = \frac{1}{6\Sigma^2}, \quad (4.13d)$$

$$\int_{\text{alsó féltér}} z \frac{\cos \theta}{4\pi R^2} e^{-\Sigma R} dV' = -\frac{1}{6\Sigma^2}. \quad (4.13e)$$

Ha a fenti sorajtást a (4.12) integrálokba helyettesítjük, végeredményben a

$$J_- = \frac{\Phi}{4} + \frac{1}{6\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\Phi}{4} + \frac{D}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (4.14a)$$

$$J_+ = \frac{\Phi}{4} - \frac{1}{6\Sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\Phi}{4} - \frac{D}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (4.14b)$$

Mint a 2.2. alfejezetben láttuk, a két mennyiség különbsége a neutronáram z -irányú összetevője:

$$J_z = J_+ - J_- = -D \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Ha a 4.2. ábrán látható felületelem az x- vagy az y-tengelyre merőlegesen helyezkedik el, akkor a fentiekkel teljesen analóg gondolatmenettel kapjuk a neutronáram másik két komponensét:

$$J_x = -D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{és} \quad J_y = -D \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Ezt a három egyenletet összefoglaljuk a

$$\mathbf{J} = -D \text{grad } \Phi \quad (4.15)$$

vektoregyenletbe, ami az alfejezet címében szereplő Fick-törvény. Tudjuk, hogy a neutronáram iránya azt az irányt adja meg, amelyben a nettó neutronáramlás a legerősebb. A Fick-törvényből viszont azt olvassuk ki, hogy ez az irány a *fluxus leggyorsabb csökkenésének az iránya*.

4.4. A neutronok mérlege, időfüggő diffúzióegyenlet

A 2.2. alfejezetben láttuk, hogy a $\mathbf{J}d\mathbf{f}$ skalárszorzat megadja a $d\mathbf{f}$ felületvektorrú felületelemen keresztül történő nettó neutronáramlást. Tekintsünk most egy zárt felületet, és nézzük meg, mi a

$$\oint \mathbf{J} d\mathbf{f}$$

felületi integrál fizikai jelentése: ez nem más, mint a felület által körülzárt térrészből 1 s alatt kiáramló és az oda beáramló neutronok számának a különbsége. Mivel ez akkor pozitív, amikor több neutron áramlik ki, mint be, ezt úgy szoktuk mondani, hogy ez az integrál a *nettó neutronkifolyást* adja meg. Gauss tétele alapján a felületi integrált térfogati integrállá alakíthatjuk át:

$$\oint \mathbf{J} d\mathbf{f} = \int \text{div } \mathbf{J} dV.$$

Ha a tekintett térfogat végtelenül kicsi, akkor az integrál közelítőleg $\text{div } \mathbf{J} dV$ -vel egyenlő, vagyis $\text{div } \mathbf{J}$ megadja az 1 cm³ térfogatból időegység alatt kifolyó neutronok nettó számát. Tehát a (4.7) közelítő egyenletet úgy tudjuk a neutronok térbeli mozgására korrigálni, hogy a bal oldalon megjelenítjük a neutronkifolyást kifejező tagot:

$$\Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) + \text{div } \mathbf{J}(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}).$$

Ha ide (4.15)-ből behelyettesítjük \mathbf{J} értékét, megkapjuk a (4.10) diffúzióegyenletet:

$$\Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) - \text{div}(D \text{grad } \Phi(\mathbf{r})) = \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}) - D\Delta \Phi(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}).$$

Ezzel beláttuk, hogy a (4.10) egyenlet valóban leírja a neutronok diffúz mozgását, vagyis a neutrodiffúziót. Azt is beláttuk, hogy ez az egyenlet a neutronok mérlegét fejezi ki: a keletkező neutronok száma megegyezik az abszorbeálódó és a kifolyó neutronok együttes számával. Egy reaktorban két módon keletkezhetnek neutro-

nok: hasadások vagy egy külső neutronforrás révén.¹ A külső neutronforrás fogalmát a 3. fejezetben meghatároztuk: olyan forrás, amely a fluxustól független. A hasadási reakciógyakoriság $\Sigma_f \Phi$. Minden hasadás termel ν neutron, így a hasadási forrást $\nu \Sigma_f \Phi$ adja meg. A diffúzióegyenletet tehát a következő alakban írhatjuk fel:

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a\Phi + \nu\Sigma_f\Phi + S_{\text{külső}} = 0. \quad (4.16)$$

Amikor a külső neutronforrás zérustól különbözik, ennek a differenciálegyenletnek mindig van zérustól különböző megoldása. Amikor azonban a külső neutronforrás a reaktor minden pontjában eltűnik, a (4.16) egyenletnek – az 5. fejezetben tisztázott kivételes körülményektől eltekintve – csak minden pontban eltűnő megoldása létezik, ugyanis a hasadások által termelt neutronok száma általában nem egyenlő az abszorbeálódó és a kifolyó neutronok együttes számával. Ha a kettő különbsége pozitív, a neutronok száma időben nő, ellenkező esetben pedig csökken. Ezért az egyenletet ki kell egészítenünk egy olyan taggal, amely azt minden esetben megoldhatóvá teszi.

Először is meg kell engednünk, hogy a fluxus függjön az időtől is: $\Phi(\mathbf{r}, t)$. Mint mondtuk, (4.16) bal oldala a neutronmérleget, vagyis a neutrontermelés és a neutronfogyás különbségét adja meg. A különbség nyilván a neutronsűrűség idő szerinti deriváltjával lesz egyenlő:

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}, t) + \nu\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}, t) + S_{\text{külső}}(\mathbf{r}, t). \quad (4.17)$$

Ez az *időfüggő diffúzióegyenlet*. A 3. fejezet alapján láthatjuk, hogy még ez sem teljes, hiszen nem írja le a késő neutronokat, de ettől eltekintünk.

4.5. Kezdeti, folytonossági és peremfeltételek

A (4.17) differenciálegyenlethez kezdeti és peremfeltételek tartoznak. A kezdeti feltétel egyszerű: a $t = 0$ időpontban egy adott függvénnyel egyenlő:

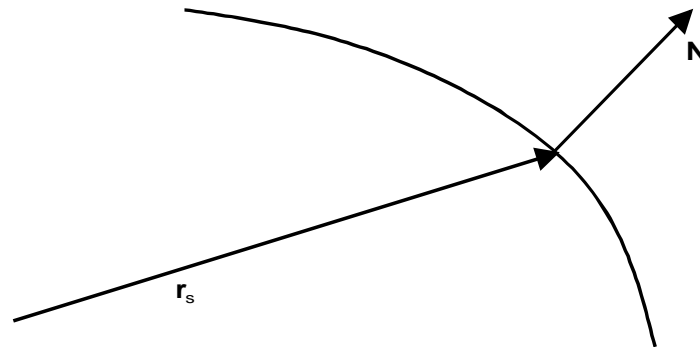
$$\Phi(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \Phi_k(\mathbf{r}), \quad (4.18)$$

ahol Φ_k az alábbi peremfeltételeket kielégítő, de egyébként szabadon megválasztható függvény.

A peremfeltételek megfogalmazása lényegesen bonyolultabb. A transzportelméletben azt szoktuk előírni, hogy a vákuummal határos konvex külső felületen a kívülről befelé mutató $\vec{\Omega}$ irányokra a $\Phi(\mathbf{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ fluxus tűnjön el. E feltétel fizikai értelmében nyilvánvaló: a neutronok a külső felületen ugyan kirepülhetnek, de a vákuumból nem térnek vissza, hiszen ott nincsenek atommagok, amelyek visszaszórják őket. Ugyanezt a követelményt a diffúzióelmélet keretében nem tudjuk megfogalmazni,

¹ Nagyon kis számban, de egyéb magreakciók is termelnek neutronokat, például az (n,2n) reakció. Ezeket a továbbiakban elhanyagoljuk.

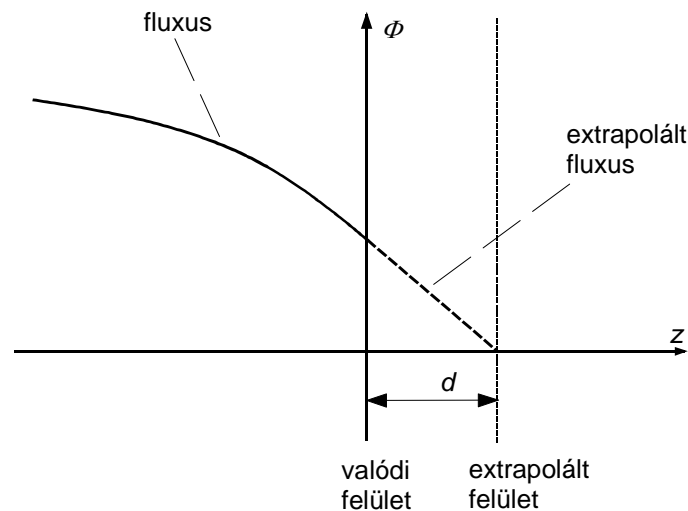
hiszen ennek az elméletnek az $\bar{\Omega}$ neutronirány nem változója. A peremfeltételt a diffúzióelmélet fogalmaival, vagyis a fluxussal és az árammal kell kifejeznünk.



4.3. ábra. A reaktor vákuummal határos külső felületének részlete

A 4.3. ábrán a vákuummal határos külső felületnek az r_s helyvektor közelébe eső részét mutatjuk. A felület külső normálisa az \mathbf{N} egységvektor. Az egyszerűség kedvéért legyen az \mathbf{N} vektor a z -tengellyel párhuzamos. A (2.12) egyenletek megadják a J_z^+ és J_z^- részáramokat. Az előbbi az egységnyi felületen keresztül a reaktorból kifelé áramló neutronok számát adja meg, ami nyilvánvalóan pozitív szám. Az utóbbi azonban eltűnik, hiszen ez a vákuumból a reaktorba visszatérő neutronok számát adná meg. Ez a felismerés a diffúzióelméleti peremfeltétel alapja. (2.12b) egyenlet és a (4.15) Fick-törvény alapján tehát a peremfeltétel így írható:

$$0 = J_z^- = \frac{\Phi}{4} - \frac{J_z}{2} = \frac{\Phi}{4} + \frac{D}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (4.19)$$



4.4. ábra. Az extrapolációs távolság és az extrapolált határfelület

A diffúzióelméletben ezt a peremfeltételt szemléletesebb formában szoktuk megfogalmazni. A reaktor belsejében kialakuló fluxust a vákuum felé lineárisan extrapoláljuk. Mivel a határfelületen a neutronáram vektora kifelé mutat, a neutronfluxus belülről kifelé haladva csökken. Emiatt az extrapolált fluxus valamilyen d távolságban zérussá válik (4.4. ábra). Az extrapolációs távolságra a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\Phi + d \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \Phi = -d \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Ezt (4.19)-be helyettesítve egyszerűen adódik:

$$d = 2D = \frac{2}{3\Sigma} = \frac{2}{3} \lambda. \quad (4.20a)$$

Transzportelméleti megfontolásokkal megmutatták, hogy a diffúzióegyenlet a transzportegyenlet jobb közelítése, ha a $2/3$ helyett egy kissé nagyobb tényezőt használunk:

$$d = 0,7104\lambda. \quad (4.20b)$$

Mivel λ cm nagyságrendű, az extrapolációs távolság néhány mm, ritkán néhány cm. Ezt a peremfeltételt úgy szoktuk a gyakorlatban alkalmazni, hogy a reaktor valódi külső felületéhez képest egy d -vel kijebb fekvő felületet szerkesztünk, és megköveteljük, hogy a Φ fluxus ezen az *extrapolált felületen* tűnjön el. A (4.19) peremfeltételhez² képest ez jelentős matematikai egyszerűsítést jelent.

E rész befejezésekképpen a reaktor különböző anyagi összetételű tartományait egymástól elválasztó belső határfelületein érvényes határfeltételeket kell megbeszelnünk. Nyilvánvaló, hogy a Φ fluxusnak ezek mentén folytonosan deriválhatónak kell lennie. Ugyanakkor nem nyilvánvaló, mit kell a fluxus deriváltjaira előírnunk. A neutronáramnak a (2.11) képletekkel megadott részeinek – a szögfüggő fluxus folytonossága miatt – a belső határfelületek mentén szintén folytonosan deriválhatónak kell lenniük. Ennél fogva ugyanezt kell a neutronáramra vonatkozóan is megkövetelnünk. Mivel egy belső határfelületen a D diffúziós állandónak szakadása van, a Fick-törvény miatt a fluxus deriváltjai is szakadással mennek át egyik tartományból a másikba.

4.6. Energiafüggő diffúzióegyenlet

Tudjuk, hogy a neutronok energiája nem azonos, hanem széles határok között változik. Emiatt elkerülhetetlen a diffúzióegyenlet olyan alakjának a felírása, amely figyelembe veszi az ezzel összefüggő jelenségeket:

- az anyagi állandók (D , Σ stb.) függenek az energiától;
- a hasadásban keletkező neutronok energiája különböző;
- a szóródó neutron energiája egyrészt függ a szóródó neutron energiájától, másrészt a szórt neutronok energiája is széles határok között változik.

Erre való tekintettel ki kell bővítenünk a fluxus argumentumait: $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$, továbbá az anyagi változók két mennyiségtől függenek: \mathbf{r} és E , például $\Sigma(\mathbf{r}, E)$.

² A (4.19) alakú peremfeltételeket P_1 peremfeltételnek szoktuk nevezni.

Először a hasadási tagot írjuk át. Az $(E, E+dE)$ intervallumba eső neutronok által kiváltott hasadások reakciógyakorisága $\Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE$, az ezek által termelt neutronok száma $\nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, E, t) dE$. Ha ezt integráljuk az energiára, megkapjuk az 1 s alatt 1 cm^3 -ben keletkező hasadási neutronok teljes számát. A hasadási neutronok energiaspektrumát jelöljük $f(E)$ -vel. Végeredményben a hasadások által 1 s alatt 1 cm^3 -ben termelt, az $(E, E+dE)$ intervallumba eső neutronok száma:

$$f(E) dE \int_0^{\infty} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE'.$$

Ezután kiszámítjuk, hogy a neutronszórások 1 s alatt 1 cm^3 -ben hány olyan neutront hoznak létre, amelyek energiája az $(E, E+dE)$ intervallumba esik. Ezt a 2.1. alfejezetben bevezetett szórási magfüggvény segítségével tudjuk kifejezni:

$$\int_0^{\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) dE \Phi(\mathbf{r}, E', t) dE'.$$

Itt a magfüggvény még mind a rugalmas, mind a rugalmatlan neutronszórásokat tartalmazza. A lassuláselméletben (6. fejezet) már meg kell különböztetnünk a kétfajta szórást.

Mielőtt felírnánk az energiafüggő diffúzióegyenletet, még meg kell beszélünk a kifolyási tag matematikai alakját. (4.17)-ben egyszerűen a $D\Delta\Phi$ kifejezés áll, ami csak homogén reaktorok esetében helyes. A 4.5. alfejezetben láttuk, hogy a fluxus deriváltjainak szakadása van, amikor a reaktorban különböző anyagi minőségű tartományok vannak. Emiatt a tartományok határán nem alkalmazhatjuk a Laplace-operátort. Az is láttuk, hogy a neutronáram, tehát $D\text{grad}\Phi$ is folytonosan deriválható, tehát ezekre a reaktor minden pontjában értelmezhető a $\text{div}(D\text{grad}\Phi)$ kifejezés. Homogén reaktorokra ez természetesen átmeny a $D\Delta\Phi$ kifejezésbe. Végeredményben tehát az energia- és időfüggő diffúzióegyenlet a következő:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, E, t)}{\partial t} &= \text{div}(D(\mathbf{r}, E)\text{grad}\Phi(\mathbf{r}, E, t)) - \Sigma_t(\mathbf{r}, E)\Phi(\mathbf{r}, E, t) + \\ &+ \int_0^{\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E)\Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' + f(E) \int_0^{\infty} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E')\Phi(\mathbf{r}, E', t) dE' + S_{\text{külső}}(\mathbf{r}, E, t). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Itt v az E energiájú neutron sebessége: $v = \sqrt{2m_n E}$.

Amikor a reaktorban könnyű elemek (H, D, Be, C stb.) is vannak, a rugalmas neutronszórás nem izotróp (lásd 6.2. alfejezet). Ebben az esetben a diffúzióállandót módosítanunk kell:

$$D = 0,7104 \lambda_{tr} = \frac{0,7104}{\Sigma_t - \Sigma_s \cos \vartheta}, \quad (4.22)$$

ahol $\overline{\cos \vartheta}$ a szórási szög koszinuszának az átlaga a laboratóriumi koordinátarendszerben (vö. 6.2. alfejezet).

Befejezésül összegezzük a diffúzióegyenlet érvényességének a korlátait, amelyek a levezetéskor alkalmazott közelítések alapján fogalmazhatók meg:

1. A fluxus térfüggése ne legyen túlságosan erős. Ellenkező esetben ugyanis a fluxusnak a 4.3. alfejezetben a lineáris tagoknál megálló sorfejtése érvénytelen. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy a közelítés nem érvényes erős abszorbensek közelében.
2. A fluxus időben ne változzon túlságosan gyorsan.³ Ez a korlátozás a gyakorlati problémák többségében jól teljesül.

A (4.21) egyenlet már meglehetősen bonyolult ahhoz, hogy csak közelítő módszerekkel lehessen megoldani. Ez lesz a következő fejezetek témája.

4.7. Feladatok

- 4.1. Bizonyítsuk be a (4.8) egyenleteket! (1 pont)
- 4.2. Bizonyítsuk be a (4.9) egyenleteket! (1 pont)
- 4.3. Bizonyítsuk be a (4.13a) egyenleteket! (1 pont)
- 4.4. Bizonyítsuk be a (4.13b) és (4.13c) egyenleteket! (2 pont)
- 4.5. Bizonyítsuk be a (4.13d) és (4.13e) egyenleteket! (2 pont)
- 4.6. A Fick-törvény levezetésénél szokásos feltenni, hogy a szögfüggő fluxus szög szerinti második és magasabb momentumai eltűnnek. Hogyan alakul a Fick-törvény, ha a második momentum nem hagyható el? (5 pont)
- 4.7. Határozzuk meg az $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ normálisú felület pozitív normálisa irányába eső parciális áramot feltéve, hogy a szögfüggő fluxust

$$\Psi(r, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \Phi(r, E) + \frac{3}{4\pi} \vec{\Omega} \mathbf{J}(r, E)$$

adja meg! (8 pont)

- 4.8. A hasadásokból származó energia a fűtőelem és a moderátor hőmérsékletét is megváltoztatja. Ha ezt összekapcsoljuk a felmelegedés okozta kitágulással, egy nem-lineáris egyenletet kapunk a fluxusra. Vezessük le (implicit formában) a visszacsatolt egyenletrendszer! (10 pont)
- 4.9. Hogyan viselkedik diffúzióelméletben az áram és a fluxus két anyag határán? (1 pont)
- 4.10. Hogyan viselkedik transzportelméletben az áram és a fluxus két anyag határán? (1 pont)

³ Ez a korlát akkor látható be, amikor a diffúzióegyenlet a transzportegyenletből vezetjük le, mint például a Bevezetés reaktorfizikába című tankönyvben.

5. Diffúzióelmélet

A diffúzióelmélet alapja a (4.21) egyenlet. Lényegesen egyszerűbb, mint a transzportegyenlet, de még mindig nagyon bonyolult. A reaktorok működésének lényeges kérdéseit csak úgy tudjuk megérteni, hogy az egyenletet egyszerűsítjük. Bizonyos értelemben visszafordítjuk a 4. fejezetben alkalmazott módszert: most a bonyolultabb felől haladunk az egyszerűbb felé. Ennek az lesz az egyik haszna, hogy megértjük a 3. és 4. fejezetek heurisztikus gondolatainak mélyebb értelmét.

5.1. Sajátérték-egyenletek

A fluxus időtől való függését ritkán kezeljük explicit módon. Ilyen kivétel például üzemzavari tranziensek tárgyalása, aminek keretében időben gyors, erős térbeli visszacsatolásokkal járó dinamikai folyamatokat kell leírni. Az esetek többségében azonban a t változót egyszerűen ki lehet küszöbölni. Ennek az a módja, hogy az időtől függő problémát *sajátérték-problémává* redukáljuk. Az alábbi két módszert nemcsak a diffúzióegyenletben magában, hanem annak bármilyen közelítésében is alkalmazni lehet. Az alábbiakban feltesszük, hogy a reaktorban nincs külső neutronforrás, tehát a (4.21) egyenletben $S_{\text{külső}} = 0$.

5.1.1. Kinetikus sajátérték

Az első módszer a *kinetikus sajátérték* bevezetése. Tétélezzük fel, hogy a fluxus az idő és a többi változó szerint szeparálható:

$$\Phi(\mathbf{r}, E, t) = T(t) \cdot \Phi(\mathbf{r}, E),$$

amit a (4.21) egyenletbe helyettesítve könnyen beláthatjuk, hogy az időtől függő rész csak

$$T(t) = e^{\omega t}$$

alakú lehet. Amikor tehát az egyenletbe a

$$\Phi(\mathbf{r}, E, t) = e^{\omega t} \cdot \Phi_{\omega}(\mathbf{r}, E) \quad (5.1)$$

próbakifejezést helyettesítjük, az

$$\frac{\omega}{v} \Phi_{\omega}(\mathbf{r}, E) = -\Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi_{\omega}(\mathbf{r}, E) + Q_{\omega}(\mathbf{r}, E) \quad (5.2a)$$

sajátérték-egyenletet kapjuk, ahol

$$Q_{\omega}(\mathbf{r}, E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \Phi_{\omega}(\mathbf{r}, E', t) dE' + f(E) \int_0^{\infty} \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \Phi_{\omega}(\mathbf{r}, E', t) dE'. \quad (5.2b)$$

Az (5.2) egyenleteket *kinetikai sajátérték-egyenletnek* nevezzük. A sajátértékek spektruma általában diszkrét.

Vegyük észre, hogy (5.2a)-ban az ω/v tényező ugyanolyan szerepet játszik, mint a Σ_t hatáskeresztmetszet. Emiatt formálisan úgy lehet tekinteni, mintha a $\Sigma_a(\mathbf{r}, E)$ abszorpciós hatáskeresztmetszet helyett

$$\Sigma_a(\mathbf{r}, E) + \frac{\omega}{v}$$

szerepelne az egyenletben. Emiatt ω/v -t szokás *időabszorpciós hatáskeresztmetszetnek* is nevezni. Bevezetésével a diffúzióegyenlet időtől független alakúra redukálódik.

5.1.2. Sztatikus sajátérték

A másik módszer a *sztatikus sajátérték* bevezetése. Ha a reaktorban a láncreakció önfenntartó, akkor matematikailag ez azt jelenti, hogy a fluxus időben állandó, vagyis (4.21) bal oldalán a t szerinti derivált eltűnik. *Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a reaktor kritikus.* Minden más esetben a t szerinti derivált 0-tól különbözik. Képzeld el, hogy a láncreakciót a következő (a gyakorlatban természetesen kivihetetlen) fogással tesszük önfenntartóvá: (4.21) hasadási tagjában ν értékét oly módon változtatjuk meg, hogy a diffúzióegyenletnek legyen időtől független megoldása. Írjuk tehát (4.21)-ben $\nu(E)$ helyére a

$$\nu'(E) = \frac{\nu(E)}{k} \quad (5.3)$$

mennyiséget, és válasszuk meg k értékét a fentiek szerint megkívánt módon. Így kapjuk a *sztatikus sajátérték-egyenletet*, amely formálisan szintén időtől független diffúzióegyenlet.

A jelen fejezetben egyszerű közelítésben mindkét sajátérték-problémát tanulmányozni fogjuk. Látjuk majd, hogy a legnagyobb sztatikus sajátérték nem más, mint a korábbi tanulmányainkban heurisztikusan bevezetett sokszorozási tényező matematikai definíciója. Az is ki fog derülni, hogy a reaktor kritikusságának az a feltétele, hogy e két sajátérték-problémában legyen olyan sajátérték, amelyre $\omega = 0$, illetve $k = 1$. A legnagyobb sztatikus sajátértéket k_{eff} -fel jelöljük. Ez a reaktor alapvető integrális¹ jellemzője. Fontos, hogy a diffúzióegyenlet minden közelítésében a fentiek szerint lehet definiálni.

¹ Az "integrális" jelzőt abban az értelemben használjuk, hogy a szóban forgó mennyiség a reaktor egészére vonatkozik – szemben például a fluxussal, a hatáskeresztmetszetekkel, amelyek a reaktoron belül helyről helyre változó mennyiségek lehetnek.

A most bevezetett két sajátérték-egyenlet között van egy lényeges elvi különbség. A Φ_ω kinetikus sajátfüggvényeket a valóságban meg lehet figyelni, amikor a reaktor teljesítménye éppen $e^{\omega t}$ -vel arányosan változik. Ezzel szemben a sztatikus sajátfüggvények – a $k_{\text{eff}} = 1$ eset kivételével – a valóságban nem figyelhetők meg, hiszen a ν paraméter magfizikai állandó, és nincs arra mód, hogy az (5.3) szerinti változtatást a valóságban is véghez vigyük. Ez az oka annak, hogy – bármilyen fontos lenne a gyakorlatban – a k_{eff} sajátértéket elvileg lehetetlen kísérletileg közvetlenül megmérni. Mérésére csak közelítő módszereink vannak (vö. 3.4. alfejezet).

Erre való tekintettel a 60-as években volt egy olyan irányzat, amely tagadta a sztatikus sajátérték létjogosultságát, és az ω kinetikus sajátértéket próbálta a közép-pontba helyezni. A 70-es évekre ez visszaszorult. Egyrészt tisztázódtak azok a feltételek, amelyek teljesülése esetén k_{eff} kielégítő pontossággal mérhető, másrészt a reaktorfizikai számítások fejlődésével k_{eff} jól számolható mennyiséggé vált. Volt egy gyakorlati ok is: az ω sajátérték mérése olyan berendezéseket igényel, amelyek atomerőművekhez csak körülményesen telepíthetők.

5.2. Egycsoport közelítés

A 4. fejezetben alkalmazott megfontolásainkban nagyrészt az egycsoport közelítést használtuk, amit ott meglehetősen primitíven értelmeztünk: azt mondtuk, hogy minden neutron energiája azonos, és a szóródások során sem változik meg. Nyilvánvaló, hogy ilyesmiről szó sem lehet. Most megmutatjuk, hogy pontosan meghatározott feltételek között a közelítés fizikailag reális.

Az *egycsoport elmélet* kiindulópontja a *reaktorelmélet alaptételének* nevezett megállapítás, amely szerint homogén reaktorban a $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ fluxus az \mathbf{r} és E változók szerint szeparálható:

$$\Phi(\mathbf{r}, E, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) \cdot \psi(E), \quad (5.4)$$

aminek az érvényessége a kísérleti reaktorfizika mindennapos tapasztalata: a reaktor belsejében, a határfelületektől távol, a különböző energiájú neutronokat különböző érzékenységgel detektáló detektorokkal ugyanazt a térbeli eloszlást mérjük. Ha (5.4)-et beírjuk a (4.21) diffúzióegyenletbe, majd E szerint integrálunk, akkor az

$$\frac{1}{\bar{\nu}} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t) \quad (5.5)$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$D = \frac{\int_0^\infty D(E) \psi(E) dE}{\psi}, \quad (5.6a)$$

$$\Sigma_a = \frac{\int_0^{\infty} \Sigma_a(E) \psi(E) dE}{\Psi}, \quad (5.6b)$$

$$v\Sigma_f = \frac{\int_0^{\infty} v\Sigma_f(E) \psi(E) dE}{\Psi}. \quad (5.6c)$$

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{v} \psi(E) dE}{\Psi}, \quad (5.6d)$$

$$S(\mathbf{r}, t) = \frac{\int_0^{\infty} S(\mathbf{r}, E, t) dE}{\Psi}, \quad (5.6e)$$

$$\Psi = \int_0^{\infty} \psi(E) dE. \quad (5.6f)$$

(5.5) levezetésekor figyelembe vettük, hogy $\Sigma_t = \Sigma_a + \Sigma_s$, és

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \psi(E') dE dE' = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E) \psi(E) dE.$$

A levezetés további részleteinek kidolgozását az 5.1. feladatba utaljuk.

Az (5.6) egyenletek által definiált átlagokat *egycsoport állandóknak* nevezzük. Az időfüggő egycsoport diffúzióegyenletet (4.17)-ben heurisztikusan már felírtuk. A fentiekből ezzel kapcsolatban két fontos dolog derül ki: egyrészt a reaktor belsejében, határfületektől elegendően távol érvényes, másrészt megadtuk, mit jelentenek a (4.17) egyenletben szereplő állandók (D , Σ_a stb.)

5.3. Kritikusság

Mint az 5.1. alfejezetben már megfogalmaztuk, egy reaktort akkor mondunk kritikussá, ha benne külső neutronforrás nélkül önfenntartó lánreakció lehetséges, amit matematikailag úgy fejezünk ki, hogy a (4.21) diffúzióegyenletnek $S_{\text{külső}} = 0$ mellett létezik időben állandó megoldása. Ez azt jelenti, hogy a sztatikus sajátérték-egyenletnek van $k = 1$ sajátértéke. Ha van ilyen sajátérték, akkor ez nem lehet más, mint a legnagyobb. Így tehát a kritikusság legáltalánosabb definíciója:

$$k_{\text{eff}} = 1. \quad (5.7)$$

Az alábbiakban látni fogjuk, hogy egyes esetekben ez szemléletes, egyszerű feltételekkel helyettesíthető.

A kritikussággal kapcsolatban mindenek előtt megjegyzendő, hogy a reaktor *kvalitatív* jellemzője: egy reaktor attól függetlenül kritikus, hogy mennyi benne a fluxus abszolút értéke. Ez az állítás egyszerűen következik abból, hogy a diffúzióegyenlet lineáris. Forrásmentes esetben a fluxust tetszőleges állandóval megszorozhatjuk, ettől a megoldás még megoldás marad. Más a helyzet azonban, amikor a reaktorban a fluxustól függő visszacsatolások vannak. Erre a 9. fejezetben látunk majd példát.

Nézzük meg, hogy az (5.4) szerinti közelítésben mi a kritikusság feltétele, vagyis nézzük meg, hogy az (5.4) feltevésnek milyen következményei vannak időtől független, forrásmentes esetben. Tegyük tehát (4.21)-ben a t szerinti deriváltat 0-val egyenlővé, és hagyjuk el a külső forrást. Mivel a reaktort homogénnek tételezzük fel, a D , Σ_t stb. együtthatókból elhagyjuk az \mathbf{r} változót. Ebben az esetben

$$Q(\mathbf{r}, E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi(\mathbf{r}, E') dE' + f(E) \int_0^{\infty} \nu \Sigma_f(E') \Phi(\mathbf{r}, E') dE'$$

szintén szeparálható:

$$Q(\mathbf{r}, E) = \Phi(\mathbf{r}) \cdot q(E),$$

ahol

$$q(E) = \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \psi(E') dE' + f(E) \int_0^{\infty} \nu \Sigma_f(E') \psi(E') dE'. \quad (5.8)$$

Ha (4.21)-ben $\Phi(\mathbf{r}, E)$ helyébe $\Phi(\mathbf{r}) \cdot \psi(E)$ -t írunk, akkor – $\Phi(\mathbf{r}) \psi(E) D(E)$ -vel való osztás után – (4.21) így írható:

$$-\frac{\Delta \Phi(\mathbf{r})}{\Phi(\mathbf{r})} = \frac{-\Sigma_t(E) \psi(E) + q(E)}{D(E) \psi(E)}.$$

A bal oldal csak \mathbf{r} -től, a jobb oldal csak E -től függ, tehát egymással csak úgy lehetnek egyenlők minden \mathbf{r} -re és E -re, ha mindkét oldal állandó. Jelöljük ezt az állandót B^2 -tel. Így azt kapjuk, hogy $\Phi(\mathbf{r})$ egy *Helmholtz-egyenletet* elégíti ki:

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) + B^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (5.9)$$

melyben B^2 a reaktor alakjától és geometriai méreteitől függő sajátérték. (5.9)-nek ugyanis csak olyan megoldásai fogadhatók el, amelyek a reaktor extrapolált külső felületén eltűnnek. B^2 neve: *geometriai görbületi paraméter*. Jele: B_g^2 . (5.9) megoldására az 5.5. alfejezetben több példát is fogunk látni, és ezek során a “görbületi” jelző értelmére is magyarázatot kapunk majd.

Vegyük most az előbbi egyenlet jobb oldalát. Ha ezt is B^2 -tel tesszük egyenlővé, akkor a

$$- [D(E)B^2 + \Sigma_t(E)]\psi(E) + q(E) = 0 \quad (5.10)$$

egyenletet kapjuk. $q(E)$ -t (5.8)-ban definiáltuk. Ezt az egyenletet *aszimptotikus lassulási egyenletnek* nevezzük. Az “aszimptotikus” jelző arra utal, hogy – mint az (5.4) feltevés is – általában csak a reaktor középső részén, a határfelületektől elegendően nagy távolságra érvényes. A megoldásként kapott neutronspektrumot felhasználhatjuk az (5.6) alatti egycsoport-állandók számítására.

Az (5.10) egyenlet megoldásával a 6. fejezetben részletesen fogunk foglalkozni. Annyi azonban különösebb analízis nélkül is látszik, hogy (5.10) is egy B^2 -re vonatkozó sajátérték-egyenlet, amelynek a sajátértékét *anyagigörbületi paraméternek* nevezzük, és B_m^2 -tel jelöljük. Az elnevezésnek az a magyarázata, hogy ez a sajátérték csak a reaktor anyagi jellemzőitől függ. (5.9) és (5.10) sajátértékeit a reaktornak egymástól teljesen független tulajdonságai határozzák meg: az előbbit a reaktor geometriája, az utóbbit pedig anyagi összetétele. Gondolatmenetünkéből következik, hogy $B_g^2 = B_m^2$, amikor a (4.21) diffúzióegyenletnek van időtől független megoldása. Az elmondottak alapján tehát – az aszimptotikus diffúzióelméletben – a kritikusság feltétele az, hogy *a geometriai és az anyagi görbületi paraméter egymással egyenlő legyen*. Általában azonban a kettő nem egyenlő egymással: $B_g^2 \neq B_m^2$. Ilyenkor (4.21)-nek – külső neutronforrás nélkül – nincs időtől független megoldása, a fluxus időben nő vagy csökken. Az 5.6.1. és 5.6.2. szakaszokban ennek a feltételeit és az időfüggés módját részletesen tanulmányozni fogjuk. Ott további kritikussági feltételeket fogunk megfogalmazni.

Mint mondtuk, az anyagi görbületi paramétert az (5.10) aszimptotikus lassulási egyenlet sajátértékeként szoktuk kiszámítani. A most bevezetett egycsoport közelítésben azonban rögtön felírhatjuk az anyagi görbületi paramétert: (5.5)-ben $\partial\Phi/\partial t = 0$ és $S \equiv 0$ mellett $\Delta\Phi(\mathbf{r})$ helyébe $-B_m^2\Phi(\mathbf{r})$ -et írunk:

$$(DB_m^2 + \nu\Sigma_f - \Sigma_a)\Phi(\mathbf{r}) = 0,$$

vagyis

$$B_m^2 = \frac{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}{D}. \quad (5.11)$$

A reaktorfizika hőskorában (az 1940-es években) az egyetlen használható elmélet az egycsoport diffúzióelmélet volt. Akkor azonban az egycsoport-állandókat közvetlen méréssel határozták meg, mert az (5.10) egyenlet megoldásához sem részletes hatáskeresztmetszet-adatok, sem pedig nagy teljesítményű számítógépek nem álltak még rendelkezésre.

5.4. Neutronforrás végtelen, nem-sokszorozó közegben. Green-függvény

Vizsgáljunk először olyan, minden irányban végtelen kiterjedésű homogén közegeket, amelyekben nincsenek hasadásra képes izotópok. Ezekben időtől független neutronterek csak időben állandó külső neutronforrás jelenlétében tudnak fennmaradni. Az (5.5) diffúzióegyenletet ennek megfelelően a

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}) + S(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.12)$$

alakban írjuk fel, amelyben $S(\mathbf{r})$ a külső neutronforrás. A gyakorlat szempontjából három idealizált eset érdekes: pont-, vonal- és síkforrás. Nézzük ezeket külön-külön.

5.4.1. Pontforrás

Legyen a koordináta-rendszer origójában egy pontszerű forrás, amely 1 s alatt 1 neutron termel, tehát legyen

$$S(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}).$$

Ebben az esetben (5.12) megoldása nyilván csak a gömbi r -koordinátától függ, vagyis a Laplace-operátort a

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\Phi) \quad (5.13)$$

alakban írhatjuk fel. Ezt (5.12)-be írva a kapott differenciálegyenletnek $r \rightarrow \infty$ mellett véges megoldásait az origón kívüli pontokban

$$\Phi(r) = C \frac{e^{-r/L}}{r}$$

alakban kereshetjük, ahol

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}. \quad (5.14)$$

A C együttható meghatározása érdekében tekintsünk egy az origó köré írt ε -sugarú gömböt, majd ε -nal tartsunk 0-hoz. Számítsuk ki a gömb felületén belülről kifelé haladó neutronok nettó számát, és tegyük ennek határértékét a forrás által termelt neutronok számával egyenlővé:

$$1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (4\pi\varepsilon^2 J(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-4\pi\varepsilon^2 D \frac{d\Phi}{dr} \Big|_{r=\varepsilon} \right) = 4\pi DC,$$

amiből az (5.12) egyenlet megoldása

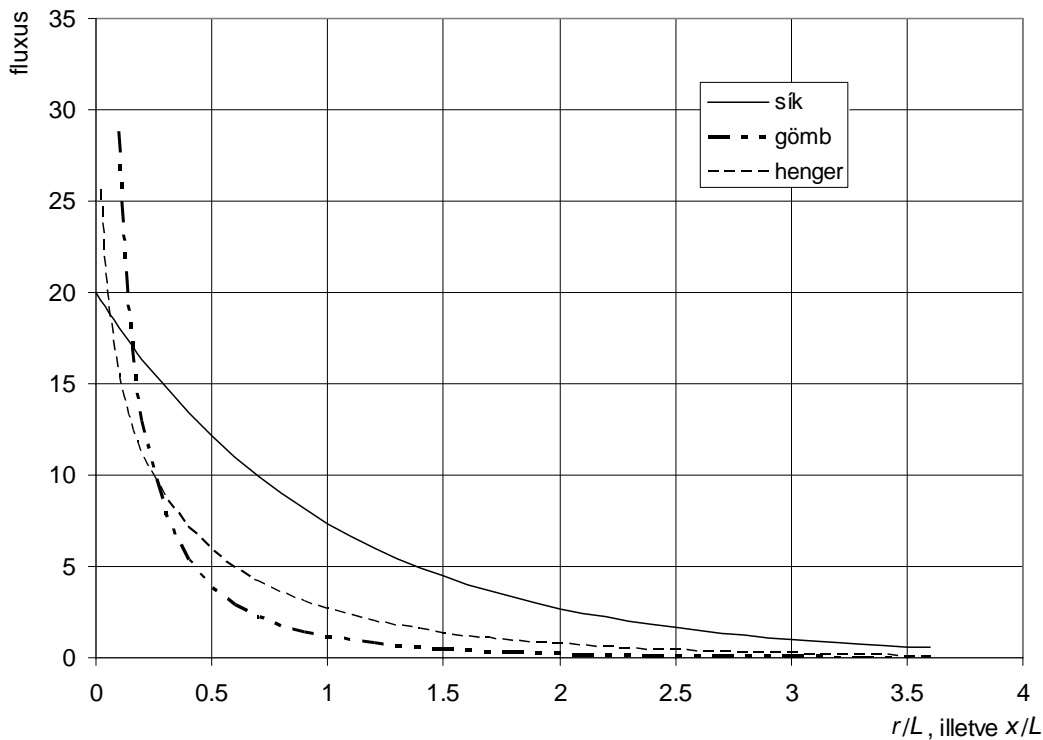
$$\Phi(r) = \frac{e^{-r/L}}{4\pi D r}. \quad (5.15)$$

A most kapott megoldásnak az origóban $1/r$ rendű szingularitása van (5.1. ábra).

(5.15) jelentősége abban áll, hogy Green-függvénynek használható. Ha térben folytonosan elosztott $S(\mathbf{r})$ neutronforrással van dolgunk, akkor (5.12) megoldását az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int S(\mathbf{r}') \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/L}}{4\pi D |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV', \quad (5.16)$$

ahol az integrálást a teljes térre kell kiterjeszteni. Abban az esetben, amikor az $S(\mathbf{r})$ forrás függ a fluxustól, (5.16) jelenti az (5.12) differenciálegyenlet integrális megfelelőjét. (5.15)-öt *diffúziós magfüggvénynek* nevezzük.

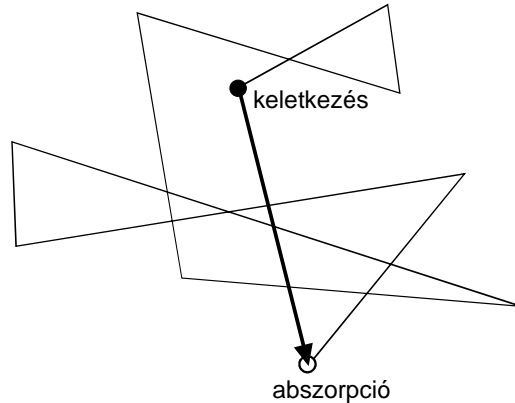


5.1. ábra. Diffúziós magfüggvények

(5.15) felhasználásával az (5.14) alatt definiált L^2 -nek szemléletes fizikai jelentést tudunk adni. Számítsuk ki annak a távolságnak a négyzetes átlagát, ahol a neutronok abszorbeálódnak. Ezt az alábbi, egyszerűen kiszámítható integrál adja meg:

$$M(r^2) = \int_0^{\infty} r^2 \Sigma_a \frac{e^{-r/L}}{4\pi D r} 4\pi r^2 dr = 6L^2. \quad (5.17)$$

Erre való tekintettel L -et *diffúziós hossz*nak, L^2 -et pedig *diffúziós terület*nek nevezük.² az 5.2. ábrán illusztráljuk az elmondottakat: a cikcakk alakú pályán egy szakasz átlagos hossza $1/\Sigma_t$, viszont a keletkezés helyétől az abszorpció helyéig berajzolt vektor hosszának négyzetes átlaga L . Ezt meg kell különböztetni a cikcakk vonal teljes hosszától, amelynek értéke $1/\Sigma_a$ (vö. 2.1. alfejezet).



5.2. ábra. Termikus neutron cikcakk alakú pályája a keletkezéstől az abszorpcióig

Az (5.16)-ban felírt diffúziós magfüggvényt érdemes összevetni a 4.1. alfejezetben kiszámított (4.1) transzport magfüggvénnyel. A legszembetűnőbb eltérés, hogy a nevezőben r helyett r^2 áll. A transzportelméletben meg lehet mutatni, hogy a pontforrás közelében ez a magfüggvény dominál, de ehhez járul még egy tag, amely gyakorlatilag megegyezik az (5.15) diffúziós magfüggvénnyel. (5.15) tehát nem a (4.14) magfüggvény megfelelője.

5.4.2. Vonalforrás

Vonalforrás esetében a z tengely mentén elhelyezkedő, az x és y irányokban végtelenül keskeny, vonalszerű izotrop neutronforrást képzelünk el, amely hosszegységenként 1 s alatt 1 neutron termel. Ebben az esetben $\Phi(\mathbf{r})$ csak a hengeres r koordinátától fog függni, és – ha a vizsgált közeg minden irányban végtelen – a Laplace-operátort a

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Phi}{dr} \right)$$

alakban írhatjuk fel, amit (5.12)-be írva $r > 0$ esetén a Bessel-féle differenciálegyenletre jutunk:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} - \frac{\Phi}{L^2} = 0.$$

² A diffúziós terület és diffúziós hossz elnevezést általában akkor használjuk, amikor az (5.12) egyenlet a termikus neutronokra vonatkozik. A teljes spektrum esetében általában *migrációs területről* beszélünk (vö. 6.6. alfejezet). A jelen fejezetben ennek a megkülönböztetésnek nincs jelentősége.

Ennek az egyenletnek $r \rightarrow \infty$ mellett véges megoldásait a

$$\Phi(r) = CK_0\left(\frac{r}{L}\right)$$

alakban kereshetjük. A C együttható meghatározására ugyanúgy okoskodhatunk, mint pontforrás esetében: a z tengely körül felvesszünk egy ε sugarú hengert, majd ε -nal 0-hoz tartunk. A henger hosszegységnyi darabjának a felületén kifelé haladó neutronszám határértékére felírhatjuk, hogy

$$1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon J(\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon D \frac{d\Phi(r)}{dr} \Big|_{r=\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi\varepsilon D \frac{C}{L} K_1\left(\frac{\varepsilon}{L}\right) = 2\pi DC.$$

Ezzel a vonalforrás által létrehozott térbeli neutroneloszlás

$$\Phi(r) = \frac{K_0(r/L)}{2\pi D}. \quad (5.18)$$

Az itt fellépő $K_0(x)$ függvénynek $x = 0$ közelében $\ln x$ rendű szingularitása van, következésképpen az (5.18) megoldás $r \rightarrow 0$ esetén $\ln r$ rendben tart a végtelenbe (5.1. ábra).

(5.16) analógiájára ez is tekinthető Green-függvénynek, továbbá erre vonatkozóan is képezhetjük az (5.17)-nek megfelelő négyzetes átlagot:

$$M(r^2) = \int_0^{\infty} r^2 \Sigma_a \frac{K_0(r/L)}{2\pi D} 2\pi r dr = 4L^2. \quad (5.19)$$

5.4.3. Síkforrás

Síkforrás esetében az y - z síkban egy síkszerű, az x irányban végtelenül vékony izotrop forrást képzelünk el, amelynek minden cm^2 -e 1 s alatt 1 neutron termel. Ebben az esetben az (5.12) egyenlet az $x \neq 0$ pontokban az alábbi egyszerű alakba megy át:

$$D \frac{d^2 \Phi}{dx^2} - \Sigma_a \Phi = 0,$$

hiszen $\Phi(\mathbf{r})$ most nyilvánvalóan csak x -től függ. E differenciálegyenlet $x \rightarrow \pm\infty$ mellett véges megoldásait a

$$\Phi(x) = C e^{-|x|/L}$$

alakban kereshetjük. A C együttható meghatározása céljából tekintjük a neutronáramot az $x = +\varepsilon$ és az $x = -\varepsilon$ síkokban, majd ε -nal tartunk 0-hoz. Nem nehéz belátni, hogy

$$1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [J(+\varepsilon) - J(-\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-DC \frac{d}{dx} e^{-x/L} \Big|_{x=\varepsilon} + DC \frac{d}{dx} e^{x/L} \Big|_{x=-\varepsilon} \right] = \frac{2CD}{L},$$

amiből

$$\Phi(x) = \frac{L}{2D} e^{-|x|/L} \quad (5.20)$$

adja a végső megoldást. Ez már nem szinguláris az $x = 0$ síkban (5.1. ábra), viszont ott nem differenciálható, vagyis a neutronáramnak szakadása van.

(5.16) analógiájára (5.20) is tekinthető Green-függvénynek, továbbá rá vonatkozóan is képezhetjük az (5.17)-ben és (5.19)-ben kiszámított négyzetes átlagot:

$$M(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Sigma_a \frac{e^{-|x|/L}}{2D} L dx = 2L^2. \quad (5.21)$$

Ha (5.17)-et, (5.19)-et és (5.21)-et összevetjük, feltűnik, hogy a dimenziószám csökkenésével egyre csökken a négyzetes átlag. Úgy is fogalmazhatunk, hogy mindegyik térbeli dimenzióhoz külön-külön $2L^2$ nagyságú négyzetes átlag rendelhető.

5.5. A Helmholtz-egyenlet megoldásai

Hasadóképes izotópokat tartalmazó sokszorozó rendszerek tárgyalásakor legtöbbször az (5.9) Helmholtz-egyenlet megoldásából indulunk ki. Ezért az alábbiakban néhány speciális geometriára vonatkozóan megoldjuk az egyenletet.

5.5.1. Gömbgeometria

Gömb alakú reaktorban $\Phi(\mathbf{r})$ csak a gömbi r koordinátától függ, így a Laplace-operátort (5.13) adja meg. Ezt (5.9)-be írva, a kapott egyenlet általános megoldása:

$$r\Phi(r) = C_1 \sin Br + C_2 \cos Br.$$

Mivel $r \rightarrow 0$ esetén $\Phi(r)$ -nek végesnek kell maradnia, csak a

$$\Phi(r) = \frac{\sin Br}{r} \quad (5.22)$$

alakú megoldások felelnek meg. Ha a reaktor extrapolált sugarát R -rel jelöljük, akkor a határfeltétel szerint B -nek ki kell elégítenie a

$$\sin BR = 0$$

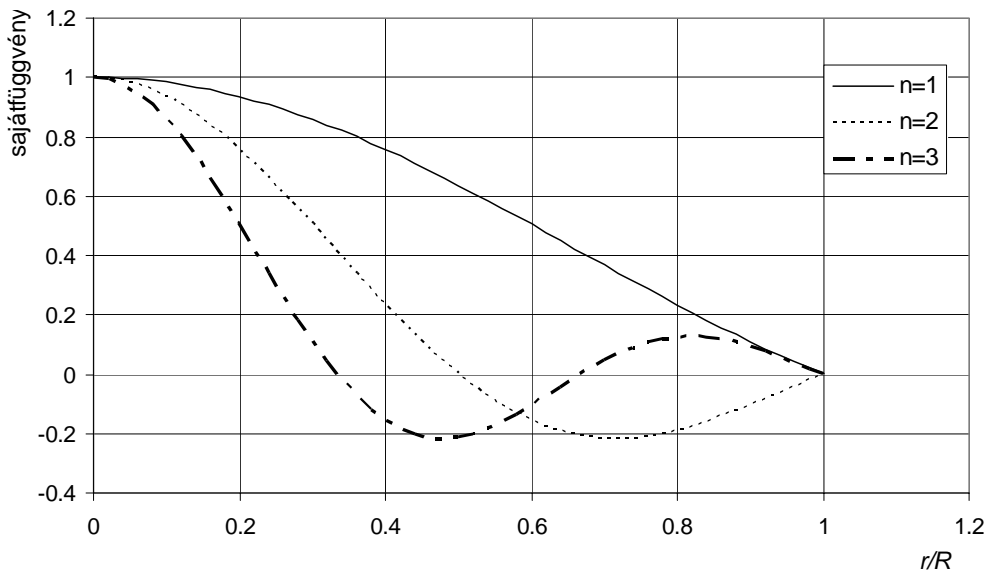
egyenletet, ahonnan a sajátértékek sorozata:

$$B_n = n \frac{\pi}{R}, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A megfelelő

$$\Phi_n(r) = \frac{\sin(n\pi r/R)}{r} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.23)$$

sajátfüggvények közül az $n = 1$ -hez tartozó $\Phi_1(r)$ az egész $[0, R)$ tartományban (tehát a reaktor belső pontjaiban) pozitív, viszont a többi sajátfüggvény egyaránt felvesz pozitív és negatív értékeket. A $\Phi_1(r)$ sajátfüggvényt ezért *alaplómódus*nak nevezzük. Az (5.23) függvények teljes rendszert alkotnak. Első három tagjukat az 5.3. ábrán mutatjuk be. Látható, hogy az n index növekedésével nő az előjelváltások száma.



5.3. ábra. A gömbgeometriához tartozó sajátfüggvények

A $\Phi_n(r)$ sajátfüggvényeknek két fontos tulajdonságát kell megemlítenünk: egyrészt ortogonálisak, vagyis

$$\int_0^R \Phi_n(r) \Phi_\ell(r) \cdot 2\pi r dr = 0, \quad \text{ha } n \neq \ell, \quad (5.24a)$$

másrészt teljes rendszert alkotnak, vagyis tetszőleges $\varphi(r)$ (négyzetesen integrálható) függvény sorba fejthető a sajátfüggvények szerint:

$$\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(r). \quad (5.24b)$$

Ez a két kijelentés érvényes marad az alábbiakban vizsgált többi geometriákhoz tartozó sajátfüggvényekre is.

5.5.2. Hengeres geometria

Henger alakú reaktorban $\Phi(\mathbf{r})$ csak az r és z hengerkoordinátáktól függ, amelyekben kifejezve a Laplace-operátor alakja a következő:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Legyen először a reaktor axiális irányban végtelen hosszú. Ekkor $\Phi(r, z)$ z -től független, és (5.9) így írható:

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + B^2 \Phi = 0, \quad (5.25)$$

amelynek $r \rightarrow 0$ esetén véges megoldása a $J_0(x)$ Bessel-függvény felhasználásával

$$\Phi(r) = J_0(Br).$$

Ha a henger extrapolált sugara R , akkor a határfeltételek szerint B -nek ki kell elégítenie a

$$J_0(BR) = 0$$

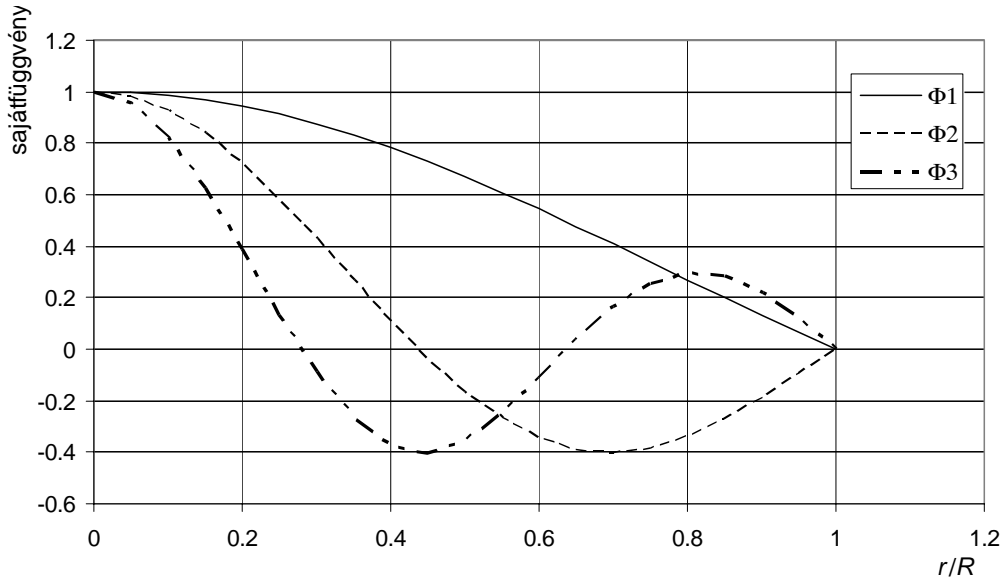
egyenletet, amiből a sajátértékek sorozata:

$$B_n = \frac{\alpha_n}{R}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ahol $\alpha_1 = 2,4048$; $\alpha_2 = 5,5201$; $\alpha_3 = 8,6537$; $\alpha_4 = 11,7915$ stb. a $J_0(x)$ Bessel-függvény gyökhelyei. A megfelelő

$$\Phi_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.26)$$

sajátfüggvények közül az $\alpha_1 = 2,4048$ -hez tartozó $\Phi_1(r)$ alapl módus az egész $[0, R)$ tartományban pozitív. Az (5.26) alatti függvények teljes rendszert alkotnak. Az 5.4. ábra mutatja az első három hengeres sajátfüggvényt.



5.4. ábra. A hengeres geometria radiális sajátfüggvényei

Véges magasságú henger esetében a sajátfüggvényeket az r és z változók szétválasztásával kereshetjük meg:

$$\Phi(r, z) = R(r) \cdot Z(z),$$

ahol $R(r)$ egy (5.25) alakú egyenletet, $Z(z)$ pedig egy

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + B^2 Z = 0$$

alakút elégít ki. A fentiek analógiájára az utóbbi sajátértékei

$$B_\ell = \ell \frac{\pi}{H} \quad (5.27)$$

és sajátfüggvényei

$$Z_\ell(z) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{H} z\right), \quad (\ell = 1, 2, \dots), \quad (5.28)$$

ha a reaktor extrapolált magassága H . Itt jegyezzük meg, hogy radiális irányban végtelen kiterjedésű, ún. *síkgeometriájú* reaktorban (5.27) és (5.28) adja meg a sajátértékek és sajátfüggvények teljes rendszerét. (5.26) alapján a radiális tényező lehetséges értékei

$$R_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right).$$

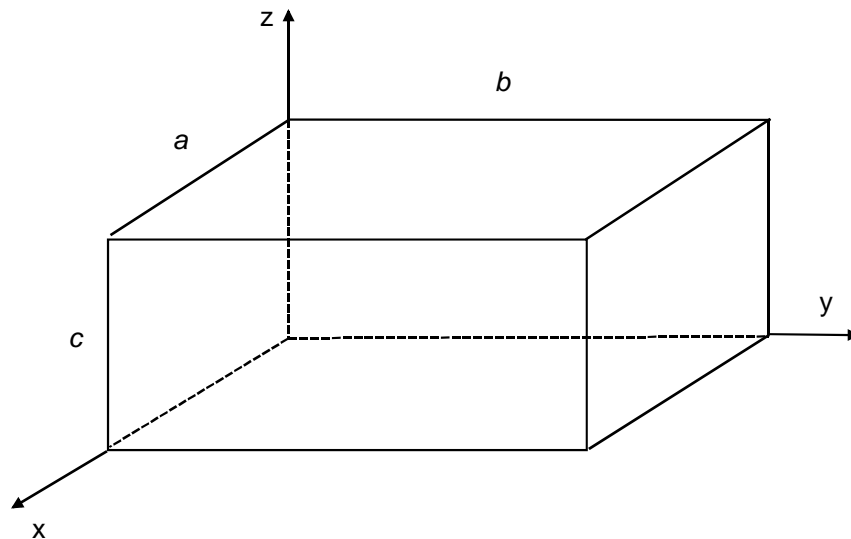
A véges magasságú, henger alakú reaktorra vonatkozó sajátértékeket és sajátfüggvényeket az előbbieket kombinációja adja meg:

$$B_{n\ell}^2 = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{H}\right)^2 \quad (5.29)$$

és

$$\Phi_{n\ell}(r, z) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{H}z\right), \quad (n, \ell = 1, 2, \dots). \quad (5.30)$$

Közülük az $n = \ell = 1$ indexekhez tartozó alaplómódus az egyetlen, amely a reaktor minden belső pontjában pozitív. Az (5.30)-ben definiált függvények teljes rendszert alkotnak.



5.5. ábra. Téglaltest alakú reaktor geometriája

5.5.3. Téglaltest

Téglaltest alakú reaktor esetében (amelynek extrapolált méretei legyenek a , b és c , 5.5. ábra) a fentiek mintájára

$$\Phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

szerinti szeparációt alkalmazunk. (5.27) és (5.28) általánosításával a sajátértékek és sajátfüggvények teljes rendszere

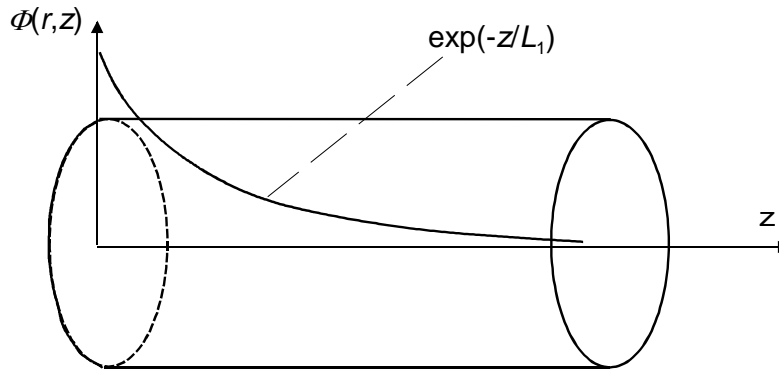
$$B_{n\ell k}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2,$$

$$\Phi_{n\ell k}(x, y, z) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\ell\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{k\pi}{c}z\right), \quad (n, \ell, k = 1, 2, \dots).$$

A reaktor belsejében végig pozitív alapl módus a $\Phi_{111}(x, y, z)$ sajátfüggvény.

5.5.4. A diffúziós hossz mérése

Az eddigiekben használt módszerek és talált sajátfüggvények gyakorlati alkalmazását egy példával illusztráljuk. Tekintsük azt a kísérleti elrendezést, amelyet az L diffúziós hossz mérésére szoktunk használni (5.6. ábra): egy R (extrapolált) sugarú, végtelen hosszúnak tekinthető henger $z = 0$ síkjában egy síkforrást helyezünk el.³ A síkforrásra kapott (5.20) magfüggvény alapján $z > 0$ -ra a henger tengelye mentén z -vel exponenciálisan csökkenő neutronfluxust várunk, amelynek a relaxációs hossza azonban az L diffúziós hosszánál kisebb, hiszen a neutronok számát most nemcsak a neutronabszorpció, hanem a henger palástja mentén való neutronkifolyás is csökkenti. Ha a relaxációs hosszt sikerül összekapcsolni L -lel, akkor az exponenciális csökkenés kísérleti megfigyeléséből az L diffúziós hosszt meg tudjuk határozni. Látni fogjuk, hogy ez valóban így is van. Erre való tekintettel az 5.6. ábrán bemutatott mérést *exponenciális kísérletek* nevezzük.



5.6. ábra. Diffúziós hossz mérése

Szimmetriaokokból a $\Phi(\mathbf{r})$ fluxus most csak az r és z hengeres koordinátáktól függ. A $\Phi(r, z)$ függvényt adott z -nél fejtsük az (5.26) alatti hengeres sajátfüggvények szerint sorba [vö. (5.24) képletek]:

$$\Phi(r, z) = \sum_n Z_n(z) J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right), \quad (5.31)$$

amit (5.12)-be helyettesítve és a sajátfüggvények ortogonalitását kihasználva a $Z_n(z)$ függvényekre a

$$\frac{d^2 Z_n(z)}{dz^2} - \left[\frac{1}{L^2} + \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 \right] Z_n(z) = 0$$

egyenletet kapjuk ($z > 0$). Ennek $z \rightarrow +\infty$ mellett véges megoldása

³ Valójában pontforrást használunk. Tőle elegendően nagy távolságban kiválaszthatunk egy síkot, és az abban kialakuló neutroneloszlást úgy tekinthetjük, mint egy síkforrást.

$$Z_n(z) = e^{-z/L_n},$$

ahol

$$\frac{1}{L_n^2} = \frac{1}{L^2} + \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2. \quad (5.32)$$

A kapott függvényeket – alkalmas C_n együtthatókkal kombinálva⁴ – (5.31)-ba helyettesítjük, és azt kapjuk, hogy

$$\Phi(r, z) = \sum_n C_n e^{-z/L_n} J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right). \quad (5.33)$$

(5.32)-ből látszik, hogy $L_1 > L_2 > \dots$, vagyis elegendően nagy z -re (5.33)-ben az $n = 1$ -nek megfelelő tag mellett az $n > 1$ indexű tagok elhanyagolhatók. A várakozásnak megfelelően tehát azt kaptuk, hogy – egy bizonyos z távolságtól kezdve – a fluxus z -nek valóban exponenciálisan csökkenő függvénye. A relaxációs hossz L_1 , amelynek mért értékét felhasználva az L diffúziós hossz (5.32)-ből $n = 1$ helyettesítéssel meghatározható.

5.6. Időfüggés és kritikusság egycsoport közelítésben

Az 5.3. alfejezetben a kritikusságot úgy definiáltuk, hogy a reaktorban külső neutronforrás nélkül időtől független neutroneloszlás alakulhat ki. Az egycsoport diffúziós közelítés elég egyszerű ahhoz, hogy az ott általánosságban mondottakat kézzelfoghatóbbá tegyük. Először az 5.1. alfejezetben bevezetett kinetikus sajátértékeket fogjuk meghatározni, majd ebből kiindulva tárgyaljuk a sztatikus sajátérték-problémát is.

5.6.1. Kinetikus sajátértékek egycsoport közelítésben

Az (5.5) alatti időfüggő egycsoport diffúzióegyenletet a következő alakban írjuk fel:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \Delta \Phi(\mathbf{r}, t) + (v \Sigma_f - \Sigma_a) \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (5.34)$$

amelyet a

$$\Phi(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = \Phi_k(\mathbf{r})$$

⁴ Ezek az együtthatók attól függenek, milyen a $z = 0$ síkban kialakuló síkforrás erősségének az r koordinátától való függése. Látni fogjuk, hogy a gyakorlatban a C_n együtthatóknak nincs jelentőségük.

kezdőfeltétellel kell megoldanunk.⁵ Az előző fejezetben több esetben meghatároztuk az (5.9) egyenlet sajátértékeinek és sajátfüggvényeinek teljes rendszerét. Jelöljük ezt most B_n^2 -tel és $\Phi_n(\mathbf{r})$ -rel ($n = 1, 2, \dots$). Feltesszük, hogy B_1^2 a legkisebb. Be fogjuk látni, hogy ha a $\Phi(\mathbf{r}, t)$ függvényt ezek szerint sorba fejtjük, akkor (5.34)-at csak egy

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n f_n e^{\omega_n t} \Phi_n(\mathbf{r}) \quad (5.35)$$

alakú sor elégítheti ki, ahol az ω_n időállandókat az

$$\omega_n = \left(-DB_n^2 + v\Sigma_f - \Sigma_a \right) v \quad (5.36)$$

képletek adják meg. $t = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy az f_n együtthatók $\Phi_k(\mathbf{r})$ sorfejtési együtthatói:

$$\Phi_k(\mathbf{r}) = \sum_n f_n \Phi_n(\mathbf{r}).$$

Az (5.35) és (5.36) egyenletek levezetése a következő. Mivel a sajátfüggvények teljes rendszert alkotnak [vö. (5.24) képletek], $\Phi(\mathbf{r}, t)$ -t írhatjuk a

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n F_n(t) \Phi_n(\mathbf{r})$$

alakban, ahol $F_n(t)$ az időnek egyelőre ismeretlen függvénye. Ezt (5.34)-ba helyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy $\Delta \Phi_n(\mathbf{r}) = -B_n^2 \Phi_n(\mathbf{r})$:

$$\frac{1}{v} \sum_n F_n'(t) \Phi_n(\mathbf{r}) = \sum_n \left(-DB_n^2 + v\Sigma_f - \Sigma_a \right) F_n(t) \Phi_n(\mathbf{r}).$$

A $\Phi_n(\mathbf{r})$ függvények ortogonalitása miatt ez csak akkor állhat fenn minden \mathbf{r} -re és t -re, ha

$$F_n'(t) = \omega_n F_n(t)$$

minden n -re, ahol ω_n -et (5.36) adja meg. Ebből pedig az következik, hogy alkalmas f_n együtthatóval

$$F_n(t) = f_n e^{\omega_n t},$$

ahogy (5.35)-ben állítjuk.

Az 5.5. alfejezetben láttuk, hogy a legkisebb sajátértékhez, vagyis B_1^2 -hez tartozó $\Phi_1(\mathbf{r})$ alaplómódus a reaktor belsejében végig pozitív. Ennek alapján (5.36)-ból kö-

⁵ Itt a “k” index a “kezdeti” szó rövidítése. Nem tévesztendő össze a más fejezetekben szereplő “k” indexszel (= 1, 2, 3, ...), amelyet dőlt betűvel szedünk.

vetkezik, hogy az ω_n időállandók közül ω_1 a legnagyobb, ami azt jelenti, hogy elegendően hosszú idő elteltével (5.35)-ben az alapmódus mellett a többi tag járuléka elhanyagolható:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \approx f_1 e^{\omega_1 t} \Phi_1(\mathbf{r}). \quad (5.37)$$

Azt az érdekes eredményt kaptuk tehát, hogy a térbeli neutroneloszlás (azaz a fluxusnak \mathbf{r} -től való függése) a $\Phi_k(\mathbf{r})$ *kezdeti eloszlás alakjától függetlenül* mindig átmeny az alapmódusba, ha elegendően hosszú ideig várunk.⁶ A kezdeti eloszlásnak legfeljebb az f_1 együttható értékére van hatása. Ez a “felejtési” tulajdonság minden, a transzport-egyenlettel, illetve annak közelítéseivel leírható *diffúzív* rendszerre jellemző.

(5.37)-ből következik, hogy – ha időtől független neutroneloszlás egyáltalán létezik –, akkor az nem lehet más, mint az alapmódus. A kritikusság feltétele tehát: $\omega_1 = 0$. Abban az esetben, amikor $\omega_1 < 0$, $t \rightarrow +\infty$ -re a fluxus 0-hoz tart: ilyen reaktorban nem lehetséges önfenntartó láncreakció. Amikor $\omega_1 > 0$, a fluxus t -vel exponenciálisan nő, amíg valamilyen külső beavatkozás (pl. egy szabályozórúd működése) ezt meg nem állítja. Az előbbi esetben *szubkritikus*, az utóbbi esetben pedig *superkritikus* reaktorról beszélünk. (5.36) alapján tehát a kritikusság feltétele

$$B_1^2 = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{D} = B_m^2, \quad (5.38)$$

hiszen erre a B_1^2 -re $\omega_1 = 0$. (B_m^2 -et (5.11)-ben írtuk fel.) Az 5.3. alfejezetben megfogalmazott feltételt (mely szerint a geometriai és az anyagi görbületi paraméternek egymással meg kell egyeznie) akkor kapjuk vissza, ha B_1^2 -et tekintjük a B_g^2 geometriai görbületi paraméternek.

Ha a Helmholtz-egyenlet korábban felírt (5.23), (5.26), (5.28) stb. megoldásainak bármelyikét is nézzük, azt találjuk, hogy a méretek növekedésekor B_1^2 csökken, és a sajátfüggvény egyre laposabb lesz. Minél nagyobb B_1^2 , annál “görbébb” a sajátfüggvény (vö. 5.3. és 5.4. ábrák). Ezért nevezzük B^2 -et *görbületi* paraméternek.

(5.38) így is írható:

$$1 = \frac{\nu \Sigma_f}{DB_1^2 + \Sigma_a} = \frac{\nu \Sigma_f \Phi}{DB_1^2 \Phi + \Sigma_a \Phi}.$$

A diffúzióegyenlet levezetésekor megbeszéltük, hogy a $-D\Delta\Phi = DB^2\Phi$ mennyiség a térfogategységből való nettó neutronkifolyást adja meg. Szavakban tehát ez az egyenlőség így fejezhető ki:

$$\text{neutrontermelés} = \text{neutronkifolyás} + \text{neutronabszorpció}.$$

⁶ Ez az állítás nem csak az egycsoport elméletben igaz.

Könnyen belátható, hogy szuperkritikus reaktorban a neutrontermelés, szubkritikus reaktorban pedig a neutronfogyás (tehát a kifolyás és az abszorpció együttesen) van túlsúlyban.

5.6.2. Sztatikus sajátértékek egycsoport közelítésben

Az (5.34) időfüggő egyenletnek megfelelő sztatikus sajátérték-egyenlet (vö. 5.2. alfejezet)

$$D\Delta\Phi(\mathbf{r}) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{k}v\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}) = 0,$$

amelyet Helmholtz-egyenletté rendezhetünk át [lásd (5.9)]:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) + \frac{\frac{1}{k}v\Sigma_f - \Sigma_a}{D}\Phi(\mathbf{r}) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a Helmholtz-egyenlet mindegyik sajátértékének megfelel egy sztatikus sajátérték, a sajátfüggvények pedig ugyanazok:

$$k_n = \frac{v\Sigma_f}{DB_n^2 + \Sigma_a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

Mivel a B_n^2 sajátértékek monoton növekvő sorozatot alkotnak, $k_1 > k_2 > \dots$. Közülük a legnagyobb $n = 1$ -hez tartozik, tehát az 5.3. alfejezetben mondottak szerint

$$k_{\text{eff}} = \frac{v\Sigma_f}{DB_1^2 + \Sigma_a}. \quad (5.40)$$

Mivel kritikus reaktorban $k_{\text{eff}} = 1$, ehelyett gyakran a *reaktivitást* használjuk:

$$\rho = \frac{k_{\text{eff}} - 1}{k_{\text{eff}}} = 1 - \frac{1}{k_{\text{eff}}}. \quad (5.41)$$

Nyilvánvaló, hogy szubkritikus reaktorban $\rho < 0$ ($k_{\text{eff}} < 1$), szuperkritikusban $\rho > 0$ ($k_{\text{eff}} > 1$).

Azt a méretet, amelynél (5.38) teljesül, *kritikus méretnek*, a benne foglalt hasadóanyag tömegét pedig *kritikus tömegnek* nevezzük. Az anyagi jellemzőkön kívül a kritikus tömeg erősen függ a reaktor alakjától is. Nézzünk például egy henger alakú reaktort. (5.29) és (5.38) alapján a henger R és H (extrapolált) méreteinek ki kell elégíteniük az

$$\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 = B_m^2$$

összefüggést ($\alpha_1 = 2,4048\dots$). A reaktor tehát végtelen sok összetartozó (R, H) értékpár mellett lehet kritikus. Nem nehéz belátni, hogy a kritikus tömeg akkor a legkisebb, amikor

$$H/R = \pi\sqrt{2}/\alpha_1 = 1,85\dots$$

Ettől eltérő méretarányok mellett a kritikus tömeg nagyobb, sőt, bizonyos méreteknél a kritikuság nem is lehetséges. Például, ha az R sugár olyan kicsi, hogy

$$\left(\frac{\alpha_1}{R}\right)^2 > B_m^2,$$

akkor egy akár végtelen hosszú henger sem lehet kritikus. Ezt az észrevételt jól ki lehet használni olyan üzemekben, amelyekben urán- vagy plutóniumoldatokat keringetnek csővezetékekben: itt ugyanis ügyelni kell arra, hogy a feldolgozott oldat semmilyen körülmények között se válhasson kritikusá, amit úgy lehet elérni, hogy a cső sugarát a fenti feltétel szerinti értelemben elegendően kicsinek választják.

E rész befejezésekképpen a kritikuság fogalmköréből még két fogalommal kell megismerkednünk. Minden irányban végtelen kiterjedésű reaktorban a geometriai görbületi paraméter eltűnik: $B_1^2 = 0$. (5.40) alapján ekkor a sokszorozási tényező értéke

$$k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}.$$

Ahhoz, hogy egy anyagból (vagy anyagok egy keverékéből) egyáltalán lehessen reaktort építeni, mindenképpen szükséges, hogy $k_\infty > 1$ legyen. Ellenkező esetben az ilyen anyagból felépített véges méretű reaktor csak subkritikus lehet. Ebből a szempontból hasznos, ha az anyagi görbületi paramétert (5.38) helyett a

$$B_m^2 = \frac{k_\infty - 1}{L^2}$$

alakban írjuk fel, ahol L az (5.14)-ben definiált diffúziós hossz. Ha $k_\infty < 1$ miatt $B_m^2 < 0$, akkor a $B_1^2 = B_m^2$ kritikusági feltétel nem teljesíthető, hiszen definíció szerint mindig: $B_1^2 \geq 0$.

(5.40)-et írjuk át a

$$k_{\text{eff}} = k_\infty P_{\text{NL}} \tag{5.43a}$$

alakba, ahol a

$$P_{\text{NL}} = \frac{1}{1 + L^2 B_1^2} \quad (5.43b)$$

jelölést alkalmaztuk. P_{NL} neve *bennmaradási valószínűség*:⁷ annak a valószínűsége, hogy egy neutron nem szökik ki a reaktorból, hanem ott abszorbeálódik, vagyis

$$P_{\text{NL}} = \frac{\Sigma_a \Phi}{DB_1^2 \Phi + \Sigma_a \Phi}.$$

Ez pedig az (5.43b) alatti kifejezéssel egyenlő. E mennyiségek fizikai jelentése alapján könnyen érthető most már az (5.43a) egyenlet fizikai tartalma is. A sokszorozási tényezőnek ilyen módon való tényezőkre bontása a transzportegyenlet magasabb közelítéseiben is értelmes, legfeljebb a k_∞ és P_{NL} tényezők számítása lesz bonyolultabb.

5.6.3. Egy közkeletű tévedés

Számos ismeretterjesztő munkában és előadásban – de néha még tankönyvekben is – az alábbi módon magyarázzák a kritikus méretet: “a neutrontermelés a térfogattal arányos, a kifolyás a felülettel; mivel a felület/térfogat arány a méretekkel csökken, kis méreteknél a neutronkifolyás van túlsúlyban, nagy méreteknél pedig a neutrontermelés, tehát van egy közbelső méret, amelynél a két folyamat egymással egyensúlyt tart”. Tényleg van ilyen méret, de az egész okfejtésnek kevés köze van a valósághoz. A kifogásolt állításból ugyanis az következne, hogy a termelés és a kifolyás viszonya a térfogat és a felület arányának felelne meg, vagyis a lineáris méretekkel arányosan nőne. Példaképpen vegyünk egy gömb alakú reaktort, amelyre (5.22) adja meg a fluxus térbeli eloszlását. Az időegység alatt a reaktorban keletkező neutronok száma

$$\int_0^R \nu \Sigma_f \frac{\sin Br}{r} 4\pi r^2 dr = 4\nu \Sigma_f R^2,$$

az időegység alatt kifolyó neutronok száma pedig

$$-4\pi R^2 D \left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=R} = 4\pi^2 D.$$

Tehát a fluxusnak (5.22) szerinti normálásakor a neutronkifolyás a reaktor méretétől éppen független, a neutrontermelés (és természetesen az abszorpció is) R^2 -tel, tehát a felülettel arányos. A két mennyiség viszonya így módon – a kifogásolt állítással ellentétben – R^2 -tel és nem R -rel arányos. Ha másfajta normálást választunk, még meglepőbb következtetésre juthatunk. Tartsuk például a reaktor teljesítményét állandónak:

⁷ Az “NL” index az angol “non-leakage” (szó szerint “nem-kiszökés”) kifejezésnek a reaktorfizikában bevett rövidítése. Ezért tartottuk meg a magyar szövegben is.

ekkor a fentiek szerint a neutrontermelés válik a méretektől függetlenné, viszont a neutronkifolyás a felülettel nem egyenesen, hanem éppen fordítottan arányosnak adódik.

Nem nehéz megtalálni, hol a hiba a kifogásolt okoskodásban: nem veszi tekintetbe, hogy *a fluxus a térben nem állandó*. Ha ugyanis $\Phi(r) \equiv \Phi_0$ (állandó) lenne, akkor az időegység alatt termelt neutronok száma

$$\int_0^R \nu \Sigma_f \Phi_0 4\pi r^2 dr = \nu \Sigma_f \Phi_0 \frac{4\pi R^3}{3},$$

a kifolyás pedig [vö. (4.14)]

$$4\pi R^2 \frac{\Phi_0}{4}$$

lenne, vagyis ezek a mennyiségek tényleg a térfogattal, illetve a felülettel lennének arányosak. A valóságnak megfelelő és első látásra paradox viszonyok tehát abból fakadnak, hogy a fluxus nem állandó, hanem a reaktor széle felé nullára csökken.

5.7. A pontkinetikai egyenletek levezetése

A 3.1. alfejezetben heurisztikusan vezettük le a pontkinetikai egyenletrendszert. A fentiek alapján már eleget tudunk ahhoz, hogy ezeket az egyenleteket nagyobb matematikai szigorúsággal is le tudjuk vezetni. Az eddig használt (5.5) egyenlet nem ad számot egy alapvető jelenségről, a *késő neutronok* létéről. Ezért az egyenletbe most olyan tagokat iktatunk, amelyek számot adnak a késő neutronokról.

Az i -edik csoporthoz tartozó anyagok számát az \mathbf{r} pont körüli dV térfogatelemben és a t időpillanatban $C_i(\mathbf{r}, t)dV$ -vel jelöljük ($i = 1, 2, \dots, 6$). A $(t, t+dt)$ időintervallumban ezek $\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t)dVdt$ számú késő neutronot emittálnak, amelyek (5.5)-ben újabb forrástagok lesznek. Ugyanakkor azt is figyelembe kell venni, hogy a hasadás pillanatában nem ν , hanem csak $\nu(1 - \beta)$ prompt neutron jelenik meg. Ezzel (5.5) helyett a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + \nu \Sigma_f (1 - \beta) \Phi(\mathbf{r}, t) + S(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\mathbf{r}, t), \quad (5.44a)$$

amelyet még ki kell egészítenünk a későneutron-anyagok koncentrációjára vonatkozó egyenletekkel:

$$\frac{\partial C_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_i C_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (5.44b)$$

Az (5.44) egyenletrendszer megoldása érdekében fejtsük az ismeretlen és ismert függvényeket a $\Phi_n(\mathbf{r})$ sajátfüggvények szerint haladó sorba [vö. (5.24) képletek]:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varphi_n(t) \Phi_n(\mathbf{r}),$$

$$C_i(\mathbf{r}, t) = \sum_n \frac{1}{v} C_{in}(t) \Phi_n(\mathbf{r}), \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

$$S(\mathbf{r}, t) = \sum_n \frac{1}{v} S_n(t) \Phi_n(\mathbf{r}).$$

E sorokat (5.44)-ba helyettesítve és a $\Phi_n(\mathbf{r})$ sajátfüggvények ortogonalitását kihasználva az egyes módusokra ($n = 1, 2, \dots$) szeparáltan kapunk egyenletrendszert:

$$\frac{d\varphi_n(t)}{dt} = \frac{\rho_n - \beta}{\Lambda} \varphi_n(t) + S_n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{in}(t), \quad (5.45a)$$

$$\frac{dC_{in}(t)}{dt} = -\lambda_i C_{in}(t) + \beta_i \frac{\varphi_n(t)}{\Lambda}, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.45b)$$

ahol

$$\rho_n = 1 - \frac{1}{k_n} \quad (5.46a)$$

és

$$k_n = \frac{v\Sigma_f}{DB_n^2 + \Sigma_a} \quad (5.46b)$$

rendre az n -edik módushoz tartozó reaktivitás és sokszorozási tényező [vö. (5.41) és (5.39)], továbbá

$$\Lambda = \frac{\ell_n}{k_n} = \frac{1}{v\Sigma_f} \quad (5.46c)$$

és

$$\ell_n = \frac{1}{v(DB_n^2 + \Sigma_a)} \quad (5.46d)$$

rendre a *generációs idő* és az n -edik módushoz tartozó *promptneutron-élettartam*. Vegyük észre, hogy a generációs idő minden módusra ugyanannyi.

Az (5.45) egyenletek fizikai jelentését a 3.1. alfejezetben adott levezetés jól bemutatja. Nem érdektelen azonban közelebbről megvizsgálni, hogy az (5.46d)-ben definiált mennyiség valóban tekinthető-e promptneutron-élettartamnak. Mindenekelőtt kiszámítjuk annak az időnek a várható értékét, amennyi egy neutron keletkezése és eltűnése (azaz kiszökése vagy abszorbeálódása) között eltelik. Erre úgy kaphatunk választ, hogy (5.44a)-ból elhagyjuk a neutrontermelési tagokat. Ekkor az n -edik módusra az

$$\frac{1}{v} \frac{d\varphi_n(t)}{dt} = -DB_n^2 \varphi_n(t) - \Sigma_a \varphi_n(t)$$

egyenletet kapjuk. Az (5.46d)-ben bevezetett jelöléssel ennek a megoldása

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n0} e^{-t/\ell_n}.$$

Tehát e^{-t/ℓ_n} annak a valószínűsége, hogy egy kiszemelt neutron nem tűnik el a $(0, t)$ időintervallumban, illetve $1 - e^{-dt/\ell_n}$ valószínűséggel tűnik el a neutron az ezt követő dt idő alatt. Így tehát

$$e^{-t/\ell_n} (1 - e^{-dt/\ell_n}) \approx e^{-t/\ell_n} \frac{dt}{\ell_n}$$

valószínűséggel fog a $(t, t+dt)$ időintervallumban eltűnni. Ebből a keresett várható érték

$$M(t) = \int_0^{\infty} t e^{-t/\ell_n} \frac{dt}{\ell_n} = \ell_n.$$

Ebben az értelemben nevezzük ℓ_n -t promptneutron-élettartamnak. A Λ generációs időnek már nem sikerül ilyen szemléletes jelentést adni. Némi elvi engedmény árán Λ a következő módon értelmezhető. 1 s alatt egy neutron megtesz v utat. Az ezalatt bekövetkező hasadások száma $\Sigma_f v$. Mivel egy hasadásban ν neutron keletkezik, az 1 s alatt keletkező hasadási neutronok átlagos száma $\nu \Sigma_f v$. Tehát $\Lambda = 1/(\nu \Sigma_f v)$ két egymást követően keletkező neutron megjelenése között átlagosan eltelt idő. Egy kritikus reaktorban pontosan ennyi idő alatt tűnik el abszorpció vagy kiszökés révén egy neutron. Emiatt ekkor $\ell_1 = \Lambda$. Ha Λ rövidebb, mint a generáció ℓ_1 élettartama, a neutronok száma nő ($k_{\text{eff}} > 1$), ha viszont hosszabb, akkor a neutronok száma csökken ($k_{\text{eff}} < 1$).⁸

A 3. fejezetben az (5.45) egyenletrendszer az $n = 1$ alaplómódusra vonatkozóan alkalmaztuk. Mivel a B_n^2 sajátértékek növekvő sorozatot alkotnak, (5.46b)-ből látható, hogy ha $k_1 \approx 1$, akkor $n > 1$ -re $k_n < 1$, tehát (5.46a) szerint $\rho_n < 0$. Ez azt jelenti, hogy a (3.7) reciprokóra-egyenlet mindegyik gyöke negatív az $n > 1$ módusokra, tehát járulékok a fluxus időfüggésében nagyon hamar elhanyagolhatóvá válik. Ez az oka annak, hogy megfontolásainkban végig az $n = 1$ -nek megfelelő alaplómódusra támaszkodhattunk.

Ezekben a megfontolásokban nem voltunk tekintettel a neutronok térbeli eloszlására, vagyis a reaktort úgy tekintettük, mintha egyetlen pontba lenne összesűrítve. Ezért nevezzük (5.45)-et *pontkinetikai egyenletnek*. Az eredeti levezetésből azonban következik, hogy ez az elnevezés tulajdonképpen igazságtalan, hiszen az egyenlet

⁸ Ezek a megfontolások nagyon leegyszerűsítik a viszonyokat. Például nem veszik figyelembe, hogy egy hasadásban egyetlen pillanat alatt $\nu (> 1)$ neutron keletkezik, továbbá, hogy a hasadási neutronok sebessége más, mint a termikus neutronoké. Másik elhanyagolás, hogy a neutronok megjelenése nem Poisson-eloszlású. Márpedig az események gyakoriságának reciproka csak Poisson-eloszlás esetében adja meg a két esemény között eltelt idő várható értékét. Mindezek ellenére a fentiek talán közelebb hozzák az Olvasóhoz Λ fizikai jelentését.

nem pontszerűnek tekintett reaktorra, hanem a $\Phi_n(\mathbf{r})$ térbeli eloszlásokat leíró módusokra érvényes. A 3.1. alfejezetben tett megfontolásaink viszont megmutatják a pontkinetikai egyenlet fizikai tartalmát, ami könnyebben kifejezhető, ha a reaktort pontnak tekintjük.

5.8. Reaktorok egycsoport-elmélete

5.8.1. Csupasz reaktorok

Tekintsünk egy csupasz reaktort, amelyet két oldalról az $x = a$ és $x = -a$ síkok határolnak. A (4.20) képletekben definiált extrapolációs távolságot elhanyagoljuk. Erre a reaktorra vonatkozóan egycsoport közelítésben az (5.34) egyenletnek megfelelő sztatikus sajátérték-egyenlet

$$D \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \Sigma_a \Phi(x) + \frac{\nu \Sigma_f \Phi(x)}{k_{\text{eff}}} = 0. \quad (5.47)$$

Vezessük be a

$$B^2 = \frac{\nu \Sigma_f / k_{\text{eff}} - \Sigma_a}{D} = \frac{k_{\infty} / k_{\text{eff}} - 1}{L^2} \quad (5.48)$$

jelölést, amivel az (5.47) egyenlet átmegy az (5.9) Helmholtz-egyenletbe. A megoldást tehát azonnal felírhatjuk:

$$\Phi(x) = \cos Bx.$$

A $\Phi(a) = \Phi(-a) = 0$ határfeltételek akkor teljesülnek, ha

$$B = \frac{\pi}{2a},$$

vagyis a megoldás

$$\Phi(x) = \cos Bx = \cos \frac{\pi x}{2a}. \quad (5.49)$$

(5.48) alapján a sokszorozási tényező

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_{\infty}}{1 + L^2 \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a + D \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2}. \quad (5.50)$$

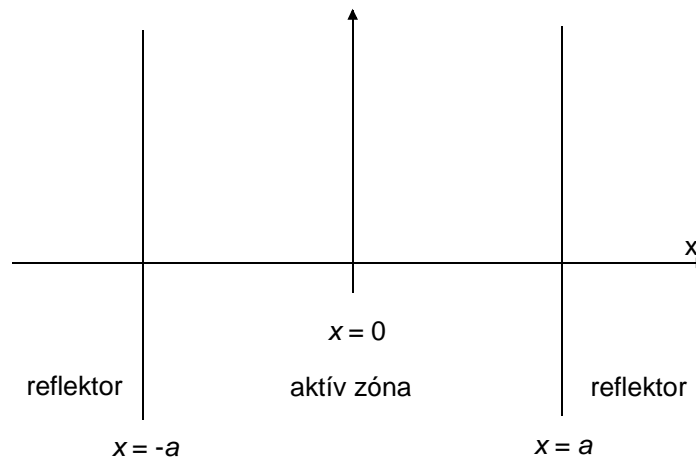
A reaktor kritikus méretét úgy kapjuk meg, hogy ezt 1-gyel tesszük egyenlővé, és az így kapott egyenletet a -ra megoldjuk:

$$a_{\text{krit}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{v\Sigma_f - \Sigma_a}{D}}} = \frac{\pi}{2B_m}. \quad (5.51)$$

Itt figyelembe vettük az anyagi görbületi paraméter (5.11) szerinti kifejezését.

5.8.2. Reflektált reaktor egycsoport elmélete

Az előző fejezetben homogén reaktort vizsgáltunk. A valóságban a reaktorok bonyolultabbak, mert a csoportállandók általában függenek a helytől. Ennek legegyszerűbb példáját mutatja be az 5.7. ábra: a reaktor hasadóanyagot tartalmazó része, az ún. *aktív zóna* ugyan homogén, de azt egy hasadóanyagot nem tartalmazó közeg, az ún. *reflektor* veszi körül. Az aktív zónából kiszökő neutronok egy részét a reflektor visszaszórja, és ezáltal csökkenti a kiszökési valószínűséget. Az ilyen szerkezetű reaktorokra tehát azt várjuk, hogy kritikus méretük kisebb lesz, mint az azonos összetételű *csupasz* reaktoré. Az alábbiakban megvizsgáljuk, valóban fennáll-e ez, és ha igen, milyen mértékű a csökkenés.



5.7. ábra. Reflektált reaktor sík geometriában

Az egyszerűség kedvéért a reaktor legyen az y - és z -irányban végtelen kiterjedésű. Az aktív zónát az $x = -a$ és $x = a$ síkok határolják. A reflektor mindkét oldalon az x -irányban is végtelen. A sztatikus sajátérték-egyenletet az aktív zóna pontjaira a

$$D_z \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \left(\frac{v\Sigma_f}{k_{\text{eff}}} - \Sigma_a^z \right) \Phi = 0, \quad (5.52a)$$

a reflektor pontjaira pedig a

$$D_r \frac{d^2\Phi}{dx^2} - \Sigma_a^r \Phi = 0 \quad (5.52b)$$

alakban írhatjuk fel, ahol a “z” index az aktív zónára, az “r” index pedig a reflektorra utal. Vezessük be ismét a

$$B^2 = \frac{\nu\Sigma_f/k_{\text{eff}} - \Sigma_a}{D_z} = \frac{k_{\infty}/k_{\text{eff}} - 1}{L_z^2} \quad (5.53)$$

jelölést. Mivel a reaktor az $x = 0$ síkra szimmetrikus, (5.52a) megoldása ezzel a jelöléssel

$$\Phi(x) = \cos Bx, \quad -a \leq x \leq a.$$

A (5.52b) egyenlet $x \rightarrow \pm\infty$ esetén eltűnő megoldása

$$\Phi(x) = Ae^{-|x|/L_r}, \quad |x| \geq a,$$

ahol az A együtthatót úgy kell megválasztani, hogy a fluxus folytonos legyen az $|x| = a$ pontokban, tehát teljesülnie kell a

$$\cos Ba = Ae^{-a/L_r} \quad (5.54)$$

feltételnek. Ezekben a kifejezésekben L_r a reflektor diffúziós hossza [vö. (5.14)]. Tudjuk azonban, hogy az $|x| = a$ pontokban nemcsak a fluxusnak, hanem az áramnak is folytonosnak kell lennie, vagyis teljesülnie kell a

$$D_z B \sin Ba = D_r \frac{A}{L_r} e^{-a/L_r} \quad (5.55)$$

feltételnek is.

Nyilvánvaló, hogy az (5.54) és (5.55) feltételek egyszerre csak az a és B változók speciális értékei mellett teljesülhetnek. A két egyenletet egymással elosztva kapjuk, hogy a sztatikus sajátérték-egyenletnek csak akkor van nem-triviális megoldása, ha érvényes a

$$B \operatorname{tg} Ba = \frac{D_r}{L_r D_z} \quad (5.56)$$

összefüggés. Az 5.7. ábrán bemutatott rendszerre vonatkozóan ez a kritikusság feltétele, amelyet kétféleképpen lehet alkalmazni:

- egyrészt megkereshetjük az aktív zóna kritikus méretét,
- másrészt adott méret mellett kiszámíthatjuk a k_{eff} sokszorozási tényezőt.

Nézzük először a kritikus méretet. Ebben az esetben (5.53)-ben $k_{\text{eff}} = 1$ -et helyettesítünk, és így B^2 éppen az aktív zóna B_m^2 anyagi görbületi paraméterével lesz egyenlő. Ezt (5.56)-be helyettesítve a kritikus méret egyszerűen kiszámítható:

$$a_{\text{kr}}^{(1)} = \frac{1}{B_m} \operatorname{arctg} \frac{D_r}{B_m L_r D_z}. \quad (5.57)$$

Érdemes ezt azzal a kritikus mérettel összevetni, amelynél az adott összetételű aktív zóna csupaszon, vagyis reflektor nélkül kritikus [vö. (5.51)]:

$$a_{\text{kr}}^{(2)} = \frac{\pi}{2B_m}.$$

A kétféle kritikus méret különbsége

$$d_{\text{refl}} = a_{\text{kr}}^{(2)} - a_{\text{kr}}^{(1)}, \quad (5.58)$$

amely azt adja meg, hogy mennyivel csökkenti a reflektor a kritikus méretet. A különbség biztosan pozitív, hiszen (5.57)-ben az arctg értéke mindig kisebb $\pi/2$ -nél. (5.57)-ből a csupasz rendszerre vonatkozó összefüggést úgy kapjuk vissza, hogy a reflektor abszorpciós hatáskeresztmetszetével tartunk végtelenhez, vagyis $L_r \rightarrow 0$. Az (5.58)-ben definiált különbséget *reflektormegtakarításnak* nevezzük.

Nézzünk egy számpéldát. Az egycsoport állandóknak az 5.1. táblázatban szereplő értékei tipikusnak tekinthetők. Ezeket az értékeket a fenti képletekbe helyettesítve az alábbiakat kapjuk:

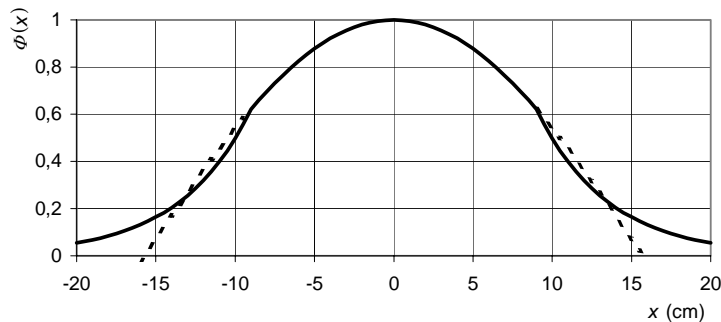
$$\begin{aligned} k_\infty &= 1,2; & B_m^2 &= 0,01 \text{ cm}^{-2}; & B_m &= 0,1 \text{ cm}^{-1}; \\ a_{\text{kr}}^{(1)} &= 6,59 \text{ cm}; & a_{\text{kr}}^{(2)} &= 15,71 \text{ cm}; & d_{\text{refl}} &= 9,12 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a reflektor révén a kritikus méret több, mint a felével csökkent. Ugyanakkor vegyük észre, hogy az aktív zóna belsejében a fluxus görbülete ugyanolyan, mintha a reaktor csupasz lenne. A reflektor csak a kritikus méretet, de nem a fluxusnak az aktív zóna belsejében kialakuló görbületét befolyásolja. Ez a fontos megállapítás általában is, nemcsak az egycsoport diffúzióelméletben igaz.

5.1. táblázat. Egycsoport-állandók (példa)

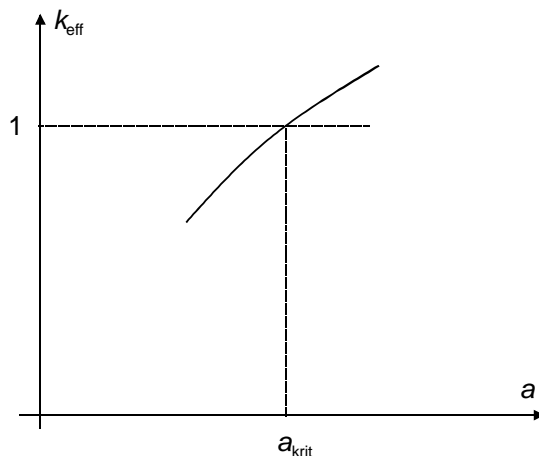
	D (cm)	Σ_a (cm ⁻¹)	$\nu\Sigma_f$ (cm ⁻¹)	L (cm)	v (km/s)
aktív zóna	2,0	0,1	0,12	4,47	3,0
reflektor	1,2	0,02	0	7,75	2,2

Az A együttható értékére (5.54) alapján $A = 1,850$ -et kapunk. A fluxus teljes menetét az 5.8. ábrán mutatjuk be. A szaggatott görbe a $\cos Bx$ görbe folytatása a reflektorban. Ahol ez nullává válik, ott lenne a csupasz reaktor kritikus. Ennek a határnak és a reaktor tényleges határának a távolsága a reflektormegtakarítás. Nem szabad azonban ezt a fogalmat a diffúziós határfeltételben szereplő extrapolációs távolsággal összetéveszteni [vö. (4.20)]. Az utóbbi esetében a transzportegyenlet megoldását extrapoláljuk a vákuum felé, a reflektormegtakarításnál viszont az aktív zónában a B_m -nek megfelelő görbületű fluxusgörbét folytatjuk az aktív zóna határán túl, mintha a reaktor csupasz volna.



5.8. ábra. Fluxuselozlás reflektált reaktorban

Mint fentebb említettük, az (5.56) kritikussági feltételt alkalmazhatjuk úgy is, hogy az aktív zóna méretét (a) adottnak vesszük, és keressük a sokszorozási tényező ehhez tartozó értékét. Ebben az esetben (5.56)-öt egy B -re vonatkozó egyenletnek tekintjük, amelynek a megoldását (5.53)-be helyettesítve kiszámíthatjuk k_{eff} értékét. B -re nézve (5.56) transzcendens egyenlet, így csak numerikus eljárásokat alkalmazhatunk. Az 5.9. ábrán az aktív zóna méretének a függvényében ábrázoltuk k_{eff} értékeit. Ezen kell megkeresni azt a méretet, amelynél $k_{\text{eff}} = 1$.



5.9. ábra. A kritikus méret keresése reflektált reaktorban

Ha nem az itt tárgyalt nagyon egyszerű síkgeometriával, hanem bonyolultabb geometriákkal van dolgunk, hasonló módon okoskodhatunk, megfontolásaink elvi menete változatlanul végig követhető. Ajánlatos, hogy az Olvasó gömb- és végtelen hosszú henger alakú reaktorra végezze el ezeket a számításokat mind általánosságban, mind a csoportállandók fenti numerikus értékei mellett (vö. 5.7. és 5.8. feladatok).

5.8.3. Albédó

A diffúzióelmélet klasszikus problémája az *albédó* számítása, amely azt jellemzi, hogy egy közegbe belépő neutronok közül a közeg hány neutront szór vissza. Tekintsük például az 5.7. ábrán mutatott rendszert. Az $x = a$ sík 1 cm^2 -én 1 s alatt az aktív zónából belép J_+ neutron, és a reflektorból visszatér J_- neutron. Ekkor az albédó definíció szerint

$$\beta = \frac{J_-}{J_+}. \quad (5.59)$$

A definíció fontos része, hogy az aktív zónába visszajutó J_- neutronnak az aktív zóna által a reaktorba visszajuttatott részét nem vesszük figyelembe, tehát az albédó kizárólag a reflektor jellemzője, a környezet tulajdonságai nem befolyásolják.

A reflektorra vonatkozó egyenlet (5.52b), amelynek a jobb oldali reflektorra vonatkozó megoldása

$$\Phi(x) = Ae^{-x/L_r}, \quad x \geq a.$$

A neutronáram ebből

$$J(x) = -D_r \frac{d\Phi}{dx} = A \frac{D_r}{L_r} e^{-x/L_r}.$$

Így tehát az $x = a$ síkon

$$J_+ = \frac{\Phi(a)}{4} + \frac{J(a)}{2},$$

$$J_- = \frac{\Phi(a)}{4} - \frac{J(a)}{2},$$

vagyis

$$\beta = \frac{\frac{\Phi(a)}{4} - \frac{J(a)}{2}}{\frac{\Phi(a)}{4} + \frac{J(a)}{2}} = \frac{\frac{A}{4} Ae^{-a/L_r} - \frac{A D_r}{2 L_r} e^{-a/L_r}}{\frac{A}{4} Ae^{-a/L_r} + \frac{A D_r}{2 L_r} e^{-a/L_r}} = \frac{1 - 2 \frac{D_r}{L_r}}{1 + 2 \frac{D_r}{L_r}}. \quad (5.60)$$

A feladatok között bonyolultabb rendszerek albédójának a számítását is megtaláljuk (5.12. és 5.13.).

5.9. Feladatok

- 5.1. Dolgozzuk ki az (5.5) és (5.6) egyenletek levezetésének részleteit! (1 pont)
- 5.2. Mutassuk meg, hogy ha az időfüggés szeparálható, az csak exponenciális lehet! Útmutatás: vezessük le az (5.1) egyenletet. (1 pont)
- 5.3. Vezessük le részletesen az (5.15) egyenletet! (1 pont)
- 5.4. Vezessük le részletesen az (5.18) egyenletet! (1 pont)
- 5.5. Hogy viszonylik egymáshoz a henger sugara és magassága, amelyben a kritikus tömeg minimális? Útmutatás: induljunk ki a kritikussági feltételből. (4 pont)
- 5.6. Egy gömb alakú reaktorban állandónak tartjuk a reaktor teljesítményét. Számítsuk ki, hogyan függ a gömb sugarától a reaktorból kiszökő neutronok száma! Útmutatás: induljunk ki az 5.6.3. szakaszban írtakból. (4 pont)
- 5.7. Számítsuk ki egy csupasz gömb és egy végtelen hosszú csupasz henger kritikus sugarát! Az egycsoport-állandókat vegyük az 5.1. táblázatból. (3 pont)
- 5.8. Számítsuk ki egy reflektált gömb és egy végtelen hosszú reflektált henger kritikus sugarát! A reflektort tekintjük végtelennek. Az egycsoport-állandókat vegyük az 5.1. táblázatból. (4 pont)
- 5.9. Az 5.7. ábrán látható reaktorban a reflektor külső határa $x = \pm b$ -nél van ($b > a$). Számítsuk ki a reflektormegtakarítást, amikor $b - a = 10$ cm! Az egycsoport-állandókat vegyük az 5.1. táblázatból. (8 pont)
- 5.10. Számítsuk ki az 5.7. ábrán látható rendszerben a reflektormegtakarítást, ha a csupasz reaktor esetében nem hanyagoljuk el az extrapolációs távolságot! Az egycsoport-állandókat vegyük az 5.1. táblázatból.
- Először alkalmazzuk a (4.20b) képlet szerinti extrapolált felületet! (3 pont)
 - Ezt követően alkalmazzuk a (4.19) határfeltételt! (3 pont)
 - Magyarázzuk meg az eltérést! (4 pont)
- 5.11. Adjunk becslést a neutronáramra!
- Először adjunk becslést a diffúzióelmélet szerint! (5 pont)
 - Eltérhető-e egy nagyobb becslés a transzportelmélet keretén belül? Ha igen, milyen mértékig és milyen feltételek között? (5 pont)
 - Adjunk meg korlátot a fluxus gradiensére diffúzióelméletben! (5 pont)
- 5.12. Számítsuk ki egy véges t vastagságú, az x -tengelyre merőleges síkokkal határolt reflektor albedóját! Mutassuk meg, hogy $t \rightarrow \infty$ esetén ez (5.60)-hez tart! (8 pont)
- 5.13. Számítsuk ki egy véges t vastagságú, az x -tengelyre merőleges síkokkal határolt reflektor albedóját, amelyen kívül egy más anyagi minőségű reflektor van! (8 pont)
- 5.14. Legyen az $x = \pm a$ síkokkal határolt homogén térrészben egy térben egyenletes, izotrop neutronforrás, amely 1 cm^3 -ben 1 s alatt 1 neutront emittál. A térrész felületének 1 cm^2 -én keresztül 1 s alatt hány neutron lép ki a vákuumba? A feladatot oldjuk meg mind a (4.19) határfeltétellel, mind a (4.20) szerinti extrapolációs távolsággal! (10 pont)
- 5.15. Számítsuk ki egy véges R sugarú izotrop neutronforrás belsejében és a forráson kívül kialakuló neutronfluxust, ha a forrás 1 s alatt térben egyenletesen 1 neutront termel! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a csoportállandók ugyanazok a forráson belül, mint kívül. (10 pont)
- 5.16. Oldjuk meg az 5.15. feladatot egy R sugarú végtelen hengerre! (8 pont)
- 5.17. Oldjuk meg az 5.15. feladatot az $x = \pm a$ síkokkal határolt homogén térrészre!

(8 pont)

5.18. Ha ismerjük a transzport vagy diffúziós magfüggvényt síkforrásra, akkor ebből kiszámíthatjuk a pontforrásra vonatkozó magfüggvényt. Mi ez az összefüggés? (10 pont)

5.19. Oldjuk meg az 5.14. feladatot egy R sugarú gömbre! (8 pont)

5.20. Az ^{238}U egy grammjában a spontán hasadások percnként 26 neutron termelnek. Egy R extrapolált sugarú reaktorban $3 \text{ kg } ^{238}\text{U}$ van egyenletes sűrűséggel. Mit kell írni az (5.45a) egyenletben $S_n(t)$ helyére?

a) Adjuk meg a képletet az alaplómódusra ($n = 1$) és az első két felharmonikusra ($n = 2$ és 3)! (5 pont)

b) Az 5.1. táblázat adatai alapján adjunk számszerű értékeket a reaktor kritikus állapotára! (3 pont)

c) Végezzük el ezeket a számításokat a -2 reaktivitású állapotra is! (2 pont)

5.21. Mi lesz a relaxációs hossz az 5.6. ábra szerinti exponenciális kísérletben, ha a hengert nem tiszta moderátor tölti ki, hanem egy sokszorozó közeg, amelyre $k_\infty < 1$? (10 pont)

5.22. Tekintsünk egy sokszorozó közeget, amelyet végtelen reflektor vesz körül. Számítsuk ki az egyenlőtlenségi tényezőt a következő három geometriában!

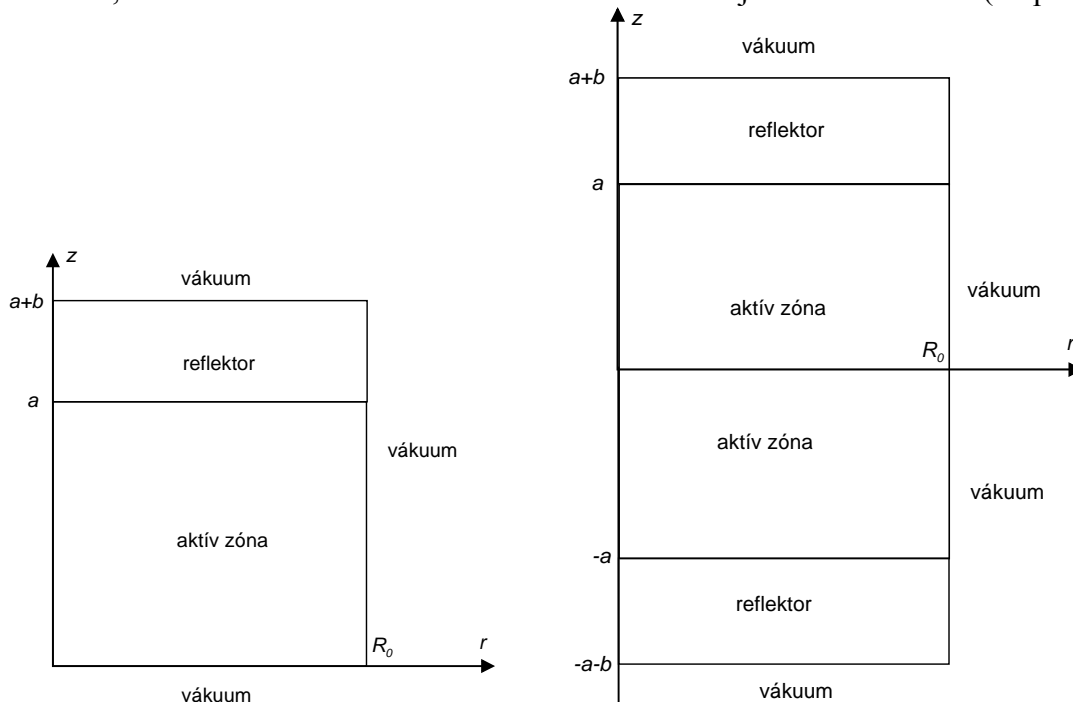
a) Az $x = \pm a$ síkokkal határolt rendszer; (5 pont)

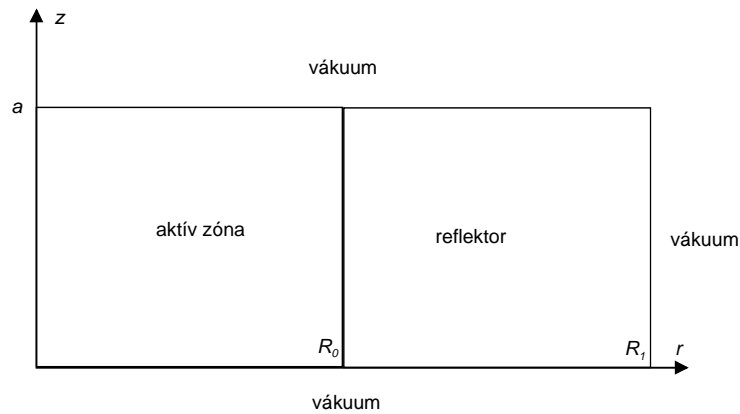
b) R sugarú végtelen hosszú henger; (3 pont)

c) R sugarú gömb. (3 pont)

Az eredményeket hasonlítsuk össze a csupasz rendszerhez tartozó megfelelő eredményekkel! Az egyenlőtlenségi tényező a $\Sigma_f \Phi$ teljesítmény maximális értéke osztva az aktív zónára átlagolt értékével.

5.23. Tekintsük az alábbi három hengeres geometriájú reaktort. Írjuk fel explicit formában a rájuk vonatkozó kritikussági feltételt! Mutassuk meg, hogy a fluxus szeparálható az r és z változók szerint! Útmutatás: mindegyik esetben a fluxus r szerinti deriváltja zérus $r = 0$ -ban; az első és harmadik esetben a fluxus zérus $z = 0$ -ban, de a második esetben a fluxus z szerinti deriváltja zérus $z = 0$ -ban. (10 pont)



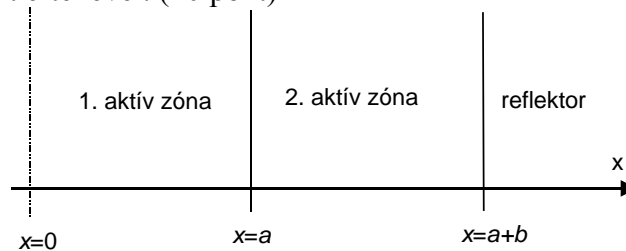


5.24. Tekintsük az alábbi, az $x = 0$ síkra szimmetrikus síkgeometriájú, két hasadó tartományból álló rendszert. A reflektort a d reflektormegtakarítással jellemezzük. Számítsuk ki a 2. számú aktív zóna b vastagságának a kritikus állapothoz tartozó értékét, és számítsuk ki az egyenlőtlenségi tényezőt! Vizsgáljuk meg külön a következő két esetet!

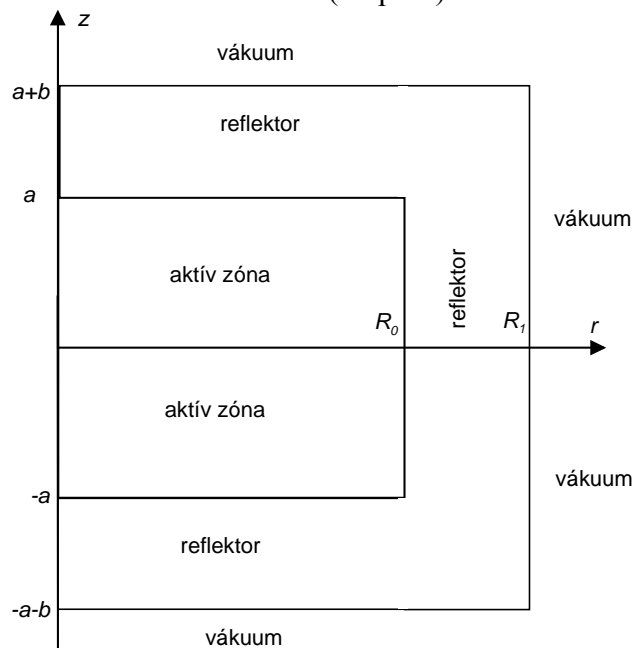
a) Az 1. számú aktív zónában $\nu\Sigma_f \geq \Sigma_a$.

b) Az 1. számú aktív zónában $\nu\Sigma_f < \Sigma_a$.

Az egyenlőtlenségi tényező a $\Sigma_f\Phi$ teljesítmény maximális értéke osztva az aktív zónára átlagolt értékével. (10 pont)



5.25. Tekintsük az alábbi hengeres geometriájú reaktort, amelynek van mind axiális, mind radiális reflektora. Mutassuk meg, hogy ebben a rendszerben a fluxus *nem* szeparálható az r és z változók szerint! (10 pont)



- 5.26. Egy reaktor homogén aktív zónáját az $x = \pm a$ síkok határolják. Feltesszük, hogy térben állandók a következő mennyiségek: (1) a hasadóanyag $\nu\sigma_f$ és σ_a mikroszkopikus hatáskeresztmetszetei; (2) az aktív zónát alkotó többi anyag Σ_m makroszkopikus abszorpciós hatáskeresztmetszete; (3) az aktív zóna D diffúzióállandója. Határfeltételként előírjuk, hogy⁹

$$\left. \frac{1}{\Phi(x)} \frac{d\Phi(x)}{dx} \right|_{x=\pm a} = -\frac{1}{L}.$$

Megengedjük, hogy a hasadóanyag $N(x)$ megsűrűsége helyről helyre változzon.

- Optimalizálható-e a hasadóanyag eloszlása oly módon, hogy az egyenlőtlenségi tényező 1 legyen? (1 pont)
- Ha igen, mi ez az eloszlás? (4 pont)
- Hasonlítsuk össze az eredményt a kritikusságot biztosító N_0 egyenletes uránsűrűséggel! (3 pont)
- Megoldható ez a feladat csupasz reaktorban? (2 pont)

Az egyenlőtlenségi tényező a $\Sigma_f(x)\Phi(x)$ teljesítmény maximális értéke osztva az aktív zónára átlagolt értékével. Útmutatás: Az egyensoport diffúzióegyenletet írjuk a következő alakba:

$$D \frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + [\nu\sigma_f N(x) - \sigma_a N(x) - \Sigma_m] \Phi(x) = 0.$$

- 5.27. Az $x = 0$ sík két végtelen, homogén féltérrel választ el. Mindkét féltérben szórás és befogás történhet. Az $x > 0$ féltérben $S = 1 \text{ cm}^{-3}$ egyenletes izotrop neutronforrás van. Mi a valószínűsége, hogy egy ebben a féltérben keletkező neutron az $x < 0$ féltérben abszorbeálódik? (8 pont)
- 5.28. Homogén slab (hasáb) régiókból álló anyagban mi annak a valószínűsége, hogy a j -ik H_j vastag régióban egyenletes eloszlással keletkező neutron első ütközését a k -adik régióban szenvedje el? (10 pont)
- 5.29. Egy hengeres reaktort úgy teszünk szuperkritikussá, hogy egy rövid τ időre erősen reflektáló (albédó = 2) réteggel vesszük körül. Mekkora lesz a reaktivitás, ha a reaktort teljesen reflektáló réteggel körülvéve $k_{\text{eff}} = 1,23$ adódik, a kritikussághoz pedig 0,96 albédó szükséges? (10 pont)
- 5.30. Egy hasáb alakúnak tekinthető térfogatot két homogén, ismert anyagi tulajdonságú anyag tölt ki, a közöttük lévő határvonal helyét mérésrel kell megállapítani. Készítsünk tervet, hogyan végeznénk el a mérést és hogyan értékelnénk ki! (10 pont)
- 5.31. Részletezzük az (5.45) egyenletek levezetését! (2 pont)
- 5.32. Mutassuk meg, hogy ha a reaktornak van önmagában kritikus része fekete peremfeltétel mellett, akkor a reaktor egésze is legalább kritikus, bármilyen legyen is a geometria és az anyagi összetétel! (5 pont)
- 5.33. Mennyi a kritikus sugara egy tiszta ^{235}U gömbnek, ha a sűrűsége $18,8 \text{ g/cm}^3$? A nem-zérus mikroszkopikus hatáskeresztmetszetek: $\sigma_f = 1,3$ barn, $\sigma_s = 4$ barn, egy hasadásból átlagosan 2,5 neutron keletkezik. A szórás izotrop, diffúziós közelítés használható, alkalmazzuk fluxus=0 peremfeltételt! (5 pont)

⁹ Ha az aktív zónát mindkét oldalról egy végtelen reflektor veszi körül, L egyszerűen a reflektor diffúziós hossza.

6. Lassuláselmélet

Az 5.3. alfejezetben láttuk, hogy egy csupasz homogén reaktorban érvényes a reaktorfizika alaptétele, amely szerint a neutronspektrum alakja a reaktor minden pontjában azonos, más szóval a fluxus az (5.4) képlet szerint szorzatra bontható. A tértől és időtől függő $\Phi(\mathbf{r}, t)$ tényezőt az 5. fejezetben tárgyaltuk részletesen. A jelen fejezetben a $\psi(E)$ energiaspektrumot fogjuk tanulmányozni. $\psi(E)$ kielégíti az (5.10) integrálegyenletet, amelyet itt részletesen kiírunk:

$$-\left[D(E)B^2 + \Sigma_t(E)\right]\psi(E) + \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)\psi(E') dE' + \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_0^\infty \nu\Sigma_f(E')\psi(E') dE' = 0. \quad (6.1)$$

Mivel ez homogén lineáris integrálegyenlet, itt bevezettük az 5.1.2. szakaszban definiált k_{eff} sztatikus sajátértéket, hogy az egyenletnek adott B^2 mellett mindig legyen nem-triviális¹ megoldása. Megfordítva, ha k_{eff} adott (például $k_{\text{eff}} = 1$), akkor az egyenletnek csak B^2 speciális értéke(i) mellett van nem-triviális megoldása, vagyis (6.1) B^2 -re vonatkozóan is sajátérték-egyenlet.

A fentieket úgy is kifejezhetjük, hogy a (6.1) egyenletnek csak B^2 és k_{eff} összetartozó értékei mellett van nem-triviális megoldása. Az egyenlet linearitásából következik, hogy a $\psi(E)$ megoldást tetszőleges módon normálhatjuk. A lassuláselméletben kényelmes a

$$\int_0^\infty \nu\Sigma_f(E')\psi(E') dE' = k_{\text{eff}} \quad (6.2)$$

normálás. Ezzel a normálással a lassulásegyenlet átmegy a

$$-\left[D(E)B^2 + \Sigma_t(E)\right]\psi(E) + \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E)\psi(E') dE' + f(E) = 0 \quad (6.3)$$

egyenletbe. Itt $f(E)$ a hasadási neutronok spektruma, vagyis adott függvény. Emiatt (6.3) már nem homogén integrálegyenlet, tehát nincs triviális megoldása, de adott B^2 mellett mindig van nem-triviális megoldása. Ha ezt ismerjük, akkor a (6.2) egyenletbe helyettesítve megkapjuk k_{eff} -et. Így keletkezik a B^2 és k_{eff} közötti, fent említett összefüggés. A jelen fejezet fő témája a (6.3) egyenlet megoldása és a kapott megoldások tanulmányozása lesz.

Befejezésül néhány megjegyzést teszünk:

- Hacsak másképp nem állítjuk, a $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$ magfüggvény általában a rugalmas és rugalmatlan neutronszorások magfüggvényeinek összege.

¹ A (6.1) egyenletet triviálisan kielégíti a $\psi(E) \equiv 0$ függvény. Értelemszerűen az ettől különböző megoldásokat *nem-triviális* megoldásoknak hívjuk.

- A (6.1)–(6.3) egyenletek minden E energiára vonatkoznak, beleértve a termikus neutronokat is. Ezeket a 6.5. alfejezetben tárgyaljuk.
- Ha a vizsgált rendszer végtelen, nyilván $B^2 = 0$. Ha a (6.3) egyenletet ezzel a helyettesítéssel oldjuk meg, akkor a megoldást (6.2)-be helyettesítve k_{∞} -t kapjuk eredményül. Emiatt a modern reaktorfizikában nincs szükségünk a klasszikus négyfaktor-formulára.
- Ha (6.3)-ban B^2 -et úgy választjuk meg, hogy (6.2) $k_{\text{eff}} = 1$ -et adjon, akkor – definíció szerint – ez a B^2 nem más, mint a B_m^2 anyagi görbületi paraméter.
- Mivel a (6.1)–(6.3) egyenletekben szereplő hatáskeresztmetszetek nem analitikus formában ismert függvények, hanem kísérletileg mért táblázatok formájában állnak rendelkezésre, a lassulási egyenlet megoldását rendszerint numerikus módszerekkel szoktuk kiszámítani. A legjobban elterjedt módszer a *sokcsoport-módszer*, amelynek részletezése azonban nem fér bele ennek a jegyzetnek a kereteibe.

6.1. A hasadási neutronok spektruma

A (6.3) lassulási egyenletben szerepel az $f(E)$ spektrum, ezért először ezzel kell megismerkednünk. A 3. fejezetből tudjuk, hogy a neutronok többsége a hasadás pillanatában keletkezik: ezek a prompt neutronok. A hasadást követően egyes hasadási termékek radioaktív bomlása során is keletkezik még néhány neutron: ezek a késő neutronok. A hasadási neutronok e két csoportjának jelentősen különbözik a spektruma.

A prompt neutronok kísérletileg mért spektrumára jó közelítéssel

$$f_p(E) = C_1 \exp\left(-\frac{E}{C_2}\right) \text{sh}(\sqrt{C_3 E}) \quad (6.4)$$

alakú függvények illeszthetők (*Watt-spektrum*), ahol C_1 , C_2 és C_3 alkalmasan megválasztott állandók. Az ^{235}U hasadása esetében a (6.4) spektrum 0,7 MeV-nél veszi fel a maximumát, tehát ez a legvalószínűbb energia, viszont a hasadásban keletkező neutronok átlagos energiája 2 MeV. A konstansok értéke ekkor

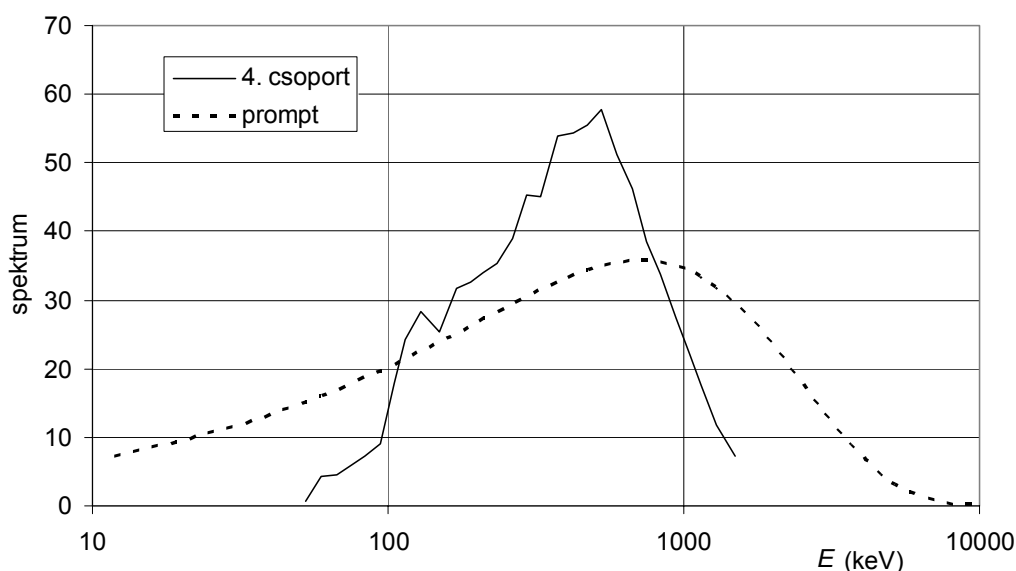
$$C_1 = 0,453, \quad C_2 = 0,965, \quad C_3 = 2,29,$$

ha az E energiát MeV-ben mérjük. A késő neutronok spektruma ennél lényegesen lágyabb (lásd alább).

Ha az i -edik későneutron-csoport spektrumát $f_i(E)$ -vel jelöljük, akkor a hasadás révén keletkező neutronok átlagos spektruma

$$f_s(E) = (1 - \beta)f_p(E) + \sum_{i=1}^6 \beta_i f_i(E), \quad (6.5)$$

amelyet *sztatikus hasadási spektrum*nak nevezünk.² Az elnevezés magyarázata, hogy a (6.3) egyenletben ezt kell $f(E)$ helyébe írni. Időben gyorsan változó fluxusok esetében (tehát a reaktorkinetikában) azonban tekintettel kell lenni az $f_p(E)$ és az $f_i(E)$ spektrumok különbözőségére. A leggyakrabban ezt elegendő úgy figyelembe venni, hogy a β_i későneutron-hányadok helyett *effektív* értékeket használunk (vö. 6.7. alfejezet). A késő neutronok spektruma függ a hasadó izotóptól. A 6.1. ábra illusztrációképpen az ^{235}U termikus hasadásaira vonatkozóan mutatja be a legnagyobb gyakoriságú 4. későneutron-csoport $f_4(E)$ spektrumát. Az ábrába — összehasonlításként — berajzoltuk a prompt neutronok $f_p(E)$ spektrumát is. Mindkét görbe alatti terület 100. Az egyes csoportoknak az $f_i(E)$ spektrumokkal számolt átlagos energiája a 6.1. táblázatban látható.



6.1. ábra. A 4. későneutron-csoport spektruma. Összehasonlításként látható a prompt neutronok spektruma is. Mindkét spektrum alatti terület 100.

6.1. táblázat. A későneutron-csoportok átlagos energiája

Csoport	Energia (keV)
1	235
2	470
3	419
4	453
5	426
6	437

Az egyéb neutronforrások spektruma ettől lényegesen eltérhet. Például a Pu-Be forrás által kibocsátott neutronok átlagos energiája körülbelül 5 MeV. A gyorsító neutrongenerátorokban a (d, t) reakció útján termelt neutronok energiája 14 MeV. A legtöbb atommag szórás hatáskeresztmetszete a néhány MeV energiájú neutronokra vonatkozóan jelentősen függ az energiától, ezért a különböző neutronfizikai megfontolásokban fontos figyelembe venni a neutronforrás spektrumát. Tekintve, hogy ebben

² A (6.5) képlet abban az esetben érvényes, amikor a vizsgált közegben egyetlen hasadó izotóp van. A több hasadó izotóp esetében érvényes képlet felírására ebben a fejezetben nincs lehetőség. Mindenesetre a sztatikus spektrum mindig nagyon közel van a (6.4) Watt-spektrumhoz.

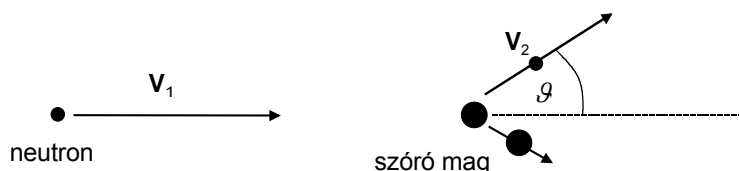
a jegyzetben elsősorban reaktorokkal foglalkozunk, a továbbiakban mindig a (6.4) és (6.5) hasadási spektrumból fogunk kiindulni.

6.2. Lassulás rugalmas szóródások útján

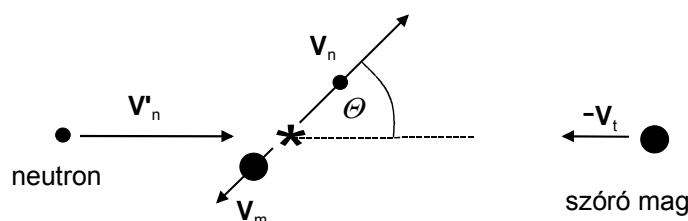
A hasadásokban keletkező neutronok a reaktorban található atommagokkal ütközve szóródhatnak, vagy valamilyen más magreakciót válthatnak ki, amelyek mérlegét a (6.3) lassulási egyenlet fejezi ki. Az, hogy milyen $\psi(E)$ neutronspektrum alakul ki, elsősorban az alábbi dolgoktól függ:

- a $\sigma_a(E)$ abszorpciós hatáskeresztmetszetek nagysága és energiafüggése,
- a rugalmatlan szórási hatáskeresztmetszetek,
- a σ_s rugalmas szórási hatáskeresztmetszet nagysága,
- a jelenlévő atommagok A tömegszáma.

A rugalmatlan szórást leíró $\Sigma_{in}(E' \rightarrow E)$ magfüggvény alakja nagyon bonyolult, általában numerikus alakban tudjuk megadni, így a rugalmatlan szóródás figyelembevétele csak numerikus számítások útján lehetséges. Erre való tekintettel ebben az alfejezetben figyelmen kívül hagyjuk. Mindössze annyit jegyzünk meg, hogy a rugalmatlan szóródás 10–100 keV nagyságrendű energiák alatt már elhanyagolható.³ A termikus reaktorokban a legfontosabb effektusok éppen ilyen kis energiákon jelentkeznek. A reaktor *tervezője* azonban nem engedheti meg magának ezt a “luxust”. Nagy energiákon romlik a rugalmas szórás hatékonysága (lásd alább), itt tehát a neutronok elsősorban a rugalmatlan szóródások révén lassulnak. Ez különösen gyors reaktorokban fontos effektus.



6.2a. ábra. Szórás a laboratóriumi koordináta-rendszerben



6.2b. ábra. Szórás a tömegközépponti koordináta-rendszerben

6.2.1. Rugalmas szórási magfüggvény

100 keV alatti energiákra a rugalmas szórás a tömegközépponti rendszerben izotrop, továbbá σ_s független a neutron energiájától. Az alábbiakban kiszámítjuk, milyen $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$ rugalmas szórási magfüggvény felel meg ennek az esetnek. Ütközzön

³ Akkor történik rugalmatlan szóródás, amikor a szóródó neutron az atommagot valamelyik energianívjára gerjeszti. Ha a neutron energiája kisebb, mint a legalacsonyabb energianív (plusz a mag visszalökésére fordított energia), nem lehetséges rugalmatlan szórás.

egy E_1 energiájú (v_1 sebességű) neutron egy A tömegszámú atommaggal. Tekintve, hogy az atommagok hőmozgásának energiája (szobahőmérsékleten) $0,025$ eV, a neutronlassulás tartományában az atommagot nyugvónak és szabadnak tekintjük.⁴ A szóródás után a neutron energiája legyen E_2 (sebessége v_2), továbbá a szóródás előtti és utáni sebességei zárjanak be egymással ϑ szöget (6.2a. ábra). Ha ezeket a laboratóriumi koordinátarendszerben mért mennyiségeket a tömegközépponti rendszerbe akarjuk áttranszformálni, akkor a következőképpen okoskodhatunk (6.2b. ábra). A tömegközéppont sebességének nagysága $v_t = v_1/(A+1)$, iránya pedig megegyezik a neutron sebességének irányával. Ebben a rendszerben a szóró mag sebessége az ütközés előtt a neutronéval ellentétes irányú és nagysága éppen v_t . A szóródás után a neutron és a mag sebessége legyen rendre v_n és v_m , a neutron eltérülésének a szöge pedig Θ .

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a neutron és a szóró mag összimпульzusa a tömegközépponti rendszerben az ütközés előtt nulla, tehát csak úgy maradhat nulla az ütközés után is, ha továbbra is egymással ellentétes irányban repülnek, és sebességük nagysága úgy aránylik egymáshoz, mint az ütközés előtt, tehát mint $A:1$. Ezek után nem nehéz belátni, hogy az energiamegmaradás csak úgy teljesülhet, ha a szóródás során a tömegközépponti rendszerben sem a neutron, sem a mag sebességének nem változik meg a nagysága, tehát

$$v_n = v_1 - v_t = \frac{Av_1}{A+1},$$

$$v_m = v_t = \frac{v_1}{A+1}.$$

Számítsuk ki ezek után a neutron ütközés utáni, a laboratóriumi rendszerben mért v_2 sebességét, amely a \mathbf{v}_n és \mathbf{v}_t sebességek vektori összege, tehát a 6.2b. ábra alapján

$$v_2^2 = |\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_t|^2 = v_n^2 + v_t^2 + 2v_n v_t \cos \Theta = \frac{v_1^2 (A^2 + 2A \cos \Theta + 1)}{(A+1)^2}.$$

Ha bevezetjük az

$$\alpha = \frac{(A-1)^2}{(A+1)^2}$$

paramétert, akkor a neutron ütközés előtti és utáni energiájának aránya a Θ szóródási szöggel kifejezve az

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{1}{2} [(1+\alpha) + (1-\alpha) \cos \Theta] \quad (6.6)$$

⁴ A szóró mag általában molekulában van kötve, mint például a hidrogén H_2O -ban. Akkor beszélünk szabad atommagról, amikor a kémiai kötés hatását elhanyagoljuk.

alakban írható. Látható, hogy a szóródásban a neutron energiája csökken. A különbség a mag visszalökésére fordítódik. A legnagyobb energiacsökkenés $\Theta = 180^\circ$ -ra adódik ("telitalálat"): ekkor $E_2 = \alpha E_1$, $\Theta = 0^\circ$ -ra viszont $E_2 = E_1$, általában pedig

$$E_1 \geq E_2 \geq \alpha E_1. \quad (6.7)$$

Vezessük be a $\mu_c = \cos\Theta$ jelölést, és legyen μ_c valószínűségi sűrűségfüggvénye $\chi(\mu_c)$. Mint mondtuk, 100 keV alatti neutronenergiáknál a szórást izotropnak tekinthetjük a tömegközépponti rendszerben, tehát annak a valószínűségét, hogy μ_c a $(\mu_c, \mu_c + d\mu_c)$ intervallumba essen, a

$$\chi(\mu_c) d\mu_c = \frac{d\bar{\Omega}}{4\pi} = \frac{2\pi d\mu_c}{4\pi} = \frac{d\mu_c}{2} \quad (6.8)$$

képlet adja meg. A későbbiek kedvéért megtartjuk az általánosságot, vagyis nem használjuk ki rögtön ezt a képletet. (6.6)-ból látjuk, hogy adott $d\mu_c$ -hez meghatározott dE_2 tartozik, tehát annak a valószínűségét, hogy a neutron energiája ütközés után az $(E_2, E_2 + dE_2)$ intervallumba fog esni, a

$$g(E_1, E_2) dE_2 = \chi(\mu_c) d\mu_c$$

képlet fogja megadni. (6.6)-ból kapjuk:

$$d\mu_c = \frac{2dE_2}{E_1(1-\alpha)},$$

tehát

$$g(E_1, E_2) = \begin{cases} \frac{2\chi(\mu_c)}{E_1(1-\alpha)} & \alpha E_1 \leq E_2 \leq E_1, \\ 0 & E_2 < \alpha E_1 \quad \text{vagy} \quad E_2 > E_1, \end{cases} \quad (6.9)$$

ahol (6.6) alapján

$$\mu_c = \frac{2E_2/E_1 - (1+\alpha)}{1-\alpha}.$$

Izotrop szögeloszlás esetében $\chi(\mu_c) \equiv 1/2$, tehát ekkor az E_2 energia egyenletes valószínűséggel vesz fel minden, a (6.7) intervallumba eső értéket. A további alfejezetekben ezt tételezzük fel. Néhány mennyiségre vonatkozóan a 6.2.4. szakaszban megadjuk, milyen következményei vannak a tömegközépponti rendszerben anizotrop szórásnak.

Amikor a szórást izotrop, $\mu_c = \cos\Theta$ átlaga a tömegközépponti rendszerben nulla. Más a helyzet a laboratóriumi rendszerben. A 6.2. ábráról leolvasható, hogy

$$\cos \vartheta = \frac{A \cos \Theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \Theta + 1}},$$

aminek az átlaga (6.8) alapján könnyen kiszámítható (vö. 6.1. feladat):

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{A \cos \Theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \Theta + 1}} d(\cos \Theta) = \frac{2}{3A}.$$

A laboratóriumi rendszerben tehát a szórás anizotrop, aminek a mértéke annál nagyobb, minél kisebb a szóró mag A tömegszáma.

6.2.2. Moderátorok jellemzői

(6.6)-ból látható, hogy a neutronenergiának a szóródás során lehetséges megváltozása annál kisebb, minél kisebb a szóródás előtti E_1 energia. Ezzel szemben az energia logaritmusának a változása független E_1 -től: $\ln E$ megváltozása 0 és $\ln(1/\alpha)$ közé esik. E_1 -től ugyanígy független az *átlagos logaritmikus energiacsökkenés* is:

$$\xi = \int_0^{E_1} \ln \left(\frac{E_1}{E_2} \right) g(E_1, E_2) dE_2, \quad (6.10a)$$

amit (6.9) alapján kiszámítva azt kapjuk, hogy izotrop szögeloszlás esetében

$$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha \approx \frac{2}{A+2/3}. \quad (6.10b)$$

Minél nagyobb ξ , annál gyorsabban lassul a neutron, hiszen annál kevesebb ütközés szükséges ahhoz, hogy a neutronok a 2 MeV hasadási energiáról a 0,025 eV körüli termikus energiára lassuljanak le:

$$\frac{\ln(2 \text{ MeV}/0,0253 \text{ eV})}{\xi} = \frac{18,2}{\xi}.$$

A neutronokat hatékonyan lassító anyagokat *moderátoroknak* nevezzük. (6.10b)-ből következik, hogy atommagjaiknak kis tömegszámúnak kell lenniük. Ezen túlmenően azonban még két dolgot szoktunk egy jó moderátortól megkövetelni: nagy szórási és kis termikus abszorpciós hatáskeresztmetszetet. A gyakorlatban négy moderátor van: könnyűvíz (H_2O), nehézvíz (D_2O), berillium (${}^9\text{Be}$) és grafit (${}^{12}\text{C}$). A rájuk vonatkozó legfontosabb mennyiségeket a 6.2. táblázatban foglaljuk össze. Összehasonlításképpen megadjuk egy nehéz mag, az ${}^{238}\text{U}$ megfelelő adatait is. A $\xi \Sigma_s$ szorzat megadja a neutron által megtett 1 cm útra eső átlagos logaritmikus energiacsökkenést. A táblázatból látható, hogy ez könnyűvízre a legnagyobb. Mégsem a könnyűvíz a legjobb moderátor, mert a lelassult (termikus) neutronokra túlságosan nagy az abszorpciós hatáskeresztmetszete. Ha a legfontosabb jellemzőket egyesítő $\xi \Sigma_s / \Sigma_a$ hányadost tekintjük, akkor a táblázat szerint a nehézvíz adódik a kimagaslóan legjobb moderátornak.

6.2. táblázat. A legfontosabb moderátorok összehasonlító adatai

Moderátor	A	α	ξ	$18,2/\xi$	$\xi\Sigma_s$ (cm ⁻¹)	$\xi\Sigma_s/\Sigma_a$
H ₂ O	1	0	1,0	18	1,3	61
D ₂ O	2	0,111	0,725	25	0,08	2538
⁹ Be	9	0,640	0,209	87	0,15	125
¹² C	12	0,716	0,158	115	0,061	190
²³⁸ U	238	0,983	0,0084	2172	0,04	0,16

6.2.3. Letargia

A lassuláselméletben az E energiánál természetesebb változó a *letargia*:

$$u = \ln\left(\frac{E_0}{E}\right), \quad E = E_0 e^{-u}, \quad (6.11)$$

ahol E_0 valamilyen alkalmasan választott (egyébként tetszőleges) felső határ (általában 10 MeV). (6.9)-et könnyen átírhatjuk a letargiaváltozóra. (6.11) alapján

$$E_1 = E_0 e^{-u_1}, \quad dE_2 = E_0 e^{-u_2} du_2, \quad g(E_1, E_2) dE_2 = g(u_1, u_2) du_2$$

$$g(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{e^{u_1 - u_2}}{1 - \alpha} & 0 \leq u_2 - u_1 \leq \ln(1/\alpha), \\ 0 & u_2 - u_1 > \ln(1/\alpha). \end{cases} \quad (6.12)$$

A $\psi(E)$ fluxus az E energia szerint sűrűségdimenziójú, tehát a fluxust a letargia függvényeként a következőképpen kell kifejezni:

$$\psi(u) = \psi(E) \left| \frac{dE}{du} \right| = \psi(E) E. \quad (6.13)$$

A (6.9), illetve (6.12) alatt felírt magfüggvények felhasználásával a (6.3) lassulási egyenletet a tömegközépponti rendszerben izotrop szórás esetében a

$$- (D(E)B^2 + \Sigma_t(E))\psi(E) + \int_0^{E/\alpha} \Sigma_s(E')\psi(E') \frac{dE'}{E'(1-\alpha)} + f(E) = 0$$

vagy

$$- (D(u)B^2 + \Sigma_t(u))\psi(u) + \int_{u-\varepsilon}^u \Sigma_s(u')\psi(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + f(u) = 0 \quad (6.14)$$

alakban írhatjuk fel, ahol

$$\varepsilon = \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Az $f(E)$ és $f(u)$ forrástagok (6.3)-ban a hasadásokban keletkező neutronokat jelentik, de általánosabban jelenthetnek más is, például a tekintett energiatartomány feletti energiákról lassuló neutronokat is (vö. 6.5. alfejezet). Minden irányban végtelen közeg tárgyalásakor B^2 helyébe nullát írunk. Az egyenletet először ilyen esetekben fogjuk megoldani.

6.2.4. A szórás anizotrópiája

Amikor a szóródó neutron energiája elegendően nagy, a szórás a tömegközépponti rendszerben anizotrop. Ez alól kivétel a hidrogén, mert a protonon való szórás minden energián izotrop a tömegközépponti rendszerben. Az alábbiakban néhány eredményt idézünk a

$$\chi(\mu_c) = \frac{1 + 3\bar{\mu}_c \mu_c}{2} \quad (6.15)$$

lineárisan anizotrop szórás esetére vonatkozóan, ahol $\bar{\mu}_c$ a szórási szög koszinuszának átlaga a tömegközépponti rendszerben. Itt nem részletezett számítások szerint ekkor

$$\xi = \int_{\alpha E}^E g(E' \rightarrow E) \ln \frac{E'}{E} dE' = \xi_0 - 3\bar{\mu}_c \left[\frac{\alpha \ln \alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)} \right], \quad (6.16)$$

ahol

$$\xi_0 = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha$$

az izotrop szóráshoz (6.10b) szerint kiszámított logaritmikus energiacsökkenés. Mivel $\bar{\mu}_c$ függ a neutron energiájától, az általános esetben ξ is függ tőle. Ha utolsó képletünket $1/A$ szerint sorba fejtjük, az egyszerűbb

$$\xi = \xi_0 - \bar{\mu}_c \left(\frac{2}{A} - \frac{2}{5A^3} + \dots \right) \quad (6.17)$$

képletet kapjuk.

Hasonlóan energiától függő mennyiséget kapunk a laboratóriumi rendszerben mért szórási szög koszinuszának az átlagára is:

$$\overline{\cos \vartheta} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{A\mu_c + 1}{\sqrt{A^2 + 2A\mu_c + 1}} \chi(\mu_c) d\mu_c = \frac{2}{3A} + \bar{\mu}_c \left(1 - \frac{3}{5A^2} \right).$$

A (6.17) képlettel ellentétben ez a formula nem sorfejtés, hanem – a (6.15) alatti közelítés keretein belül – egzakt.

$\bar{\mu}_c$ általában pozitív. (6.16)-ból következik, hogy a szórási anizotrópia rontja a neutronlassítást, hiszen $\xi < \xi_0$. Amikor azonban ez az effektus érezteti a hatását, a szóródó neutronok energiája elég nagy ahhoz, hogy a rugalmatlan szórás is jelentős járulékot adjon a lassításhoz, ami viszont javítja a lassítást. Nagy neutronenergiákon tehát két ellentétes hatás működik: az energia növekedésével romlik a rugalmas szórás és javul a rugalmatlan szórás hatékonysága. Numerikus számításokban mindkettőt figyelembe kell venni. Az alábbiakban – az egyszerűség kedvéért – mindkét effektust el fogjuk hanyagolni annak érdekében, hogy egyéb effektusok *lényegét* meg tudjuk magyarázni, tehát: el fogjuk hanyagolni mind a szórás anizotrópiáját, mind a rugalmatlan szórást.

6.3. Lassulás homogén közegben

A (6.1) lassulási egyenlet megoldása két esetben ismert analitikus formában: abszorpciómentes végtelen közegben és hidrogénen való lassulás esetében. Minden más esetben csak közelítő módszereket alkalmazhatunk.

6.3.1. Lassulási és szórási sűrűség

Mielőtt a lassulási egyenlet megoldásához kezdenénk, be kell vezetnünk a lassuláselmélet központi fogalmát, a *lassulási sűrűséget*. A képletek egyszerűsítése érdekében a következő jelölést alkalmazzuk:

$$F_s(u) = \Sigma_s(u) \psi(u). \quad (6.18)$$

Ezt a mennyiséget *szórási sűrűségnek* nevezzük. A lassulási sűrűség azoknak a neutronoknak a száma, amelyek lassulás közben – térfogategységben – időegység alatt átlépnek egy adott u letargiaértéket:

$$q(u) = \int_{u-\varepsilon}^u F_s(u') du' \int_u^{u'+\varepsilon} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha} du''. \quad (6.19)$$

E képlet magyarázata a következő. Az u letargiát azok a neutronok léphetik át, amelyek egy $u - \varepsilon \leq u' \leq u$ letargián szóródtak. Az u' körüli du' intervallumban szóródó neutronok száma $F_s(u') du'$. Szóródás utáni letargiájuk legfeljebb $u' + \varepsilon$ lehet. A képletben szereplő második integrál annak a valószínűségét adja meg, hogy a szóródás valamilyen $u \leq u'' \leq u' + \varepsilon$ letargiára vezet. Az u' szerinti integrál összegzi az összes szóba jövő szóródásnak a lassulási sűrűséghez való járulékát.

A lassulási sűrűség segítségével a lassulási egyenlet jelentősen egyszerűsíthető. Deriváljuk ugyanis $q(u)$ -t u szerint:

$$\frac{dq(u)}{du} = F_s(u) - \int_{u-\varepsilon}^u F_s(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du'. \quad (6.20)$$

E képlet levezetése nem triviális (vö. 6.3. feladat). Ha az integrált innen kifejezzük és (6.14)-be helyettesítjük, a

$$-(D(u)B^2 + \Sigma_a(u))\psi(u) - \frac{dq(u)}{du} + f(u) = 0$$

egyenletet kapjuk. Nem megyünk a részletekbe, csak megjegyezzük, hogy a (6.19) definíció csak olyan energiákon érvényes, amelyeken az $f(u)$ forrás már elhanyagolható. Ezért az utóbbi egyenletünket a

$$-(D(u)B^2 + \Sigma_a(u))\psi(u) - \frac{dq(u)}{du} = 0 \quad (6.21)$$

alakban fogjuk használni. Ennek az alaknak az az előnye, hogy a (6.19) képlet helyett közelítő formulákat használhatunk, amelyek nagyon megkönnyítik a lassulási egyenletek megoldását. A különböző közelítéseket lassulási modelleknek nevezzük (vö. 6.3.5. szakasz).

6.3.2. Lassulás végtelen közegben abszorpció nélkül

Abban az esetben, amikor nincs abszorpció (sem kifolyás), (6.14) így írható:

$$-\Sigma_s(u)\psi(u) + \int_{u-\varepsilon}^u \Sigma_s(u')\psi(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + f(u) = 0.$$

Olyan letargiákon, amelyekre $f(u)$ nem hanyagolható el, ennek az egyenletnek a megoldása meglehetősen bonyolult, mert külön-külön kell figyelembe venni és összegezni az egyszer sem ütközött, valamint az egyszer, kétszer stb. ütközött neutronok fluxusát. A forrásneutronok letargiájától távoli letargiákra már csak olyan neutronok juthatnak el, amelyek elegendően sokszor ütköztek, és ez lényegesen egyszerűsíti a tárgyalást. Ezért csak olyan letargiákon vizsgáljuk ezt az egyenletet, amelyeken a forrást zérusnak vehetjük:

$$-\Sigma_s(u)\psi(u) + \int_{u-\varepsilon}^u \Sigma_s(u')\psi(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' = 0. \quad (6.22)$$

Azonnal láthatjuk, hogy ha ide $F_s(u) = \Sigma_s(u)\psi(u) = c$ -t helyettesítünk ($c = \text{állandó}$), az egyenlet kielégül, hiszen

$$-c + \int_{u-\varepsilon}^u c \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' = -c + c \int_{u-\varepsilon}^u \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' = -c + c = 0.$$

Ha ugyanezt (6.19)-be helyettesítjük, némi számolás után (vö. 6.4. feladat) azt kapjuk, hogy

$$q(u) = c\xi,$$

aminek éppen 1-gyel kell egyenlőnek lennie, hiszen – tekintve, hogy nincs abszorpció – minden, a forrás által termelt neutronnak bármely u letargiát előbb-utóbb át kell lépnie [ξ értékét lásd a (6.10b) képletben]. Végeredményben tehát írhatjuk:

$$F_s(u) = \frac{1}{\xi}. \quad (6.23)$$

Ez – mint már említettük – a forrásneutronok letargijától távol érvényes.

(6.13) és (6.18) alapján kapjuk a (6.14) egyenlet megoldását:

$$\psi(u) = \frac{1}{\xi \Sigma_s(u)}, \quad \psi(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_s(E)E}. \quad (6.24)$$

Azt kaptuk tehát, hogy a forrás energiájától távol az energiaspektrum az energiával fordítva arányossá válik, hiszen a szórás hatáskeresztmetszet E -től jó közelítéssel független. Ezt “1/E spektrum” néven szoktuk emlegetni.

6.3.3. Lassulás hidrogénen, abszorbeáló közegben

Amikor nem hanyagolható el az abszorpció, a (6.14) lassulási egyenletnek csak közelítő megoldásai ismeretesek. Ez alól kivétel a hidrogénen való lassulás esete, amelyet azért is érdemes külön tekinteni, mert az alább alkalmazott módszer könnyen átvihető az általános esetre. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy végtelen közeget, vagyis legyen $B^2 = 0$.⁵ Hidrogén esetében a lassulási egyenlet a következő:

$$-\Sigma_t(u)\psi(u) + \int_0^u \Sigma_s(u')\psi(u')e^{u'-u} du' + f(u) = 0. \quad (6.25)$$

$\alpha = 0$ miatt a (6.19)-ben definiált lassulási sűrűség hidrogénre a

$$q(u) = \int_0^u F_s(u') du' \int_u^\infty e^{u'-u''} du'' = \int_0^u F_s(u') e^{u'-u} du'$$

alakban adódik, amit u szerint deriválva kapjuk (vö. 6.5. feladat) a

$$\frac{dq(u)}{du} + q(u) = \Sigma_s(u)\psi(u) \quad (6.26)$$

⁵ Ha jobban tetszik, mondhatjuk azt is, hogy (6.14)-ben a $D(u)B^2$ tagot beolvasszjuk $\Sigma_a(u)$ -ba.

összefüggést. Ha ezt (6.21)-be helyettesítjük olyan letargiákra, amelyekre $f(u) = 0$, rögtön adódik a

$$q(u) = \Sigma_t(u) \psi(u)$$

egyenlet. Mivel hidrogénre $\xi = 1$, itt minden további nélkül odaírhatjuk:

$$q(u) = \xi \Sigma_t(u) \psi(u). \quad (6.27)$$

ξ -t a későbbiek kedvéért írtuk oda. Ezt visszahelyettesítjük (6.21)-be:

$$\frac{dq(u)}{du} = -\Sigma_a(u) \psi(u) = -\frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_t(u)} q(u),$$

amiből egyszerűen következik

$$q(u) = \exp\left\{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\xi \Sigma_t(u')} du'\right\}.$$

Itt kezdeti feltételként figyelembe vettük, hogy nyilván $q(u) \rightarrow 1$, amikor $u \rightarrow 0$. Eből (6.27) alapján számítható a fluxus:

$$\psi(u) = \frac{1}{\xi \Sigma_t(u)} \exp\left\{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\xi \Sigma_t(u')} du'\right\} \quad (6.28a)$$

és

$$\psi(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_t(E) E} \exp\left\{-\int_E^\infty \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_t(E') E'} dE'\right\}. \quad (6.28b)$$

6.3.4. Lassulás az általános esetben

Az általános esetben nem sikerül olyan egyszerű, zárt képleteket levezetni, mint a hidrogénen való lassulás esetében (vagy akár az abszorpciómentes esetben). Ezért bizonyos közelítésekre van szükségünk. A tárgyalandó egyenlet (6.14) alapján

$$-\Sigma_t(u) \psi(u) + \int_{u-\varepsilon}^u \Sigma_s(u') \psi(u') \frac{e^{u'-u}}{1-\alpha} du' + f(u) = 0.$$

A hidrogénen való lassulás esetében a – hidrogénre vonatkozóan egzakt – (6.26) összefüggés adta a megoldás kulcsát. Ha tehát találunk olyan a és b (u -tól esetleg függő) együttthatókat, amelyekkel az általános esetben jó közelítéssel érvényes a

$$q(u) + a \frac{dq(u)}{du} = b \Sigma_s(u) \psi(u) \quad (6.29)$$

egyenlet, akkor az előző szakasz mintájára már könnyen megkaphatjuk a keresett megoldást. Ilyen együtthatókat valóban lehet találni, de ennek részleteit nem tudjuk itt bemutatni. Ha $q(u)$ deriváltját (6.21)-ből behelyettesítjük, akkor a következő egyszerű összefüggést kapjuk:

$$q(u) = (a\Sigma_a(u) + b\Sigma_s(u))\psi(u).$$

Végül ezt (6.21)-be helyettesítve adódik

$$\frac{dq(u)}{du} = -\Sigma_a(u)\psi(u) = -\frac{\Sigma_a(u)}{(a\Sigma_a(u) + b\Sigma_s(u))}q(u),$$

amiből

$$q(u) = \exp\left\{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{a\Sigma_a(u') + b\Sigma_s(u')} du'\right\}, \quad (6.30a)$$

továbbá könnyen levezethetjük a (6.28) képletek megfelelőit is:

$$\psi(u) = \frac{1}{a\Sigma_a(u) + b\Sigma_s(u)} \exp\left\{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{a\Sigma_a(u') + b\Sigma_s(u')} du'\right\} \quad (6.30b)$$

és

$$\psi(E) = \frac{1}{E(a\Sigma_a(E) + b\Sigma_s(E))} \exp\left\{-\int_E^\infty \frac{\Sigma_a(E')}{a\Sigma_a(E') + b\Sigma_s(E')} \frac{dE'}{E'}\right\}. \quad (6.30c)$$

$a = b = \xi = 1$ helyettesítéssel ez átmegy hidrogénre kapott (6.28) képletekbe.

E rész befejezéseként megjegyezzük, hogy ezek az összefüggések azzal a közelítéssel érvényesek, hogy a forrás energiájához közeli energiákon az abszorpciós hatáskeresztmetszet zérus. Ezért lehetett az energia szerinti integrált a végtelenig kiterjeszteni, letargiában 0-tól integrálni. Amikor ez a feltételezés nem jogos, úgyis csak numerikus eljárásokat lehet alkalmazni, amelyekben erre nincs szükség.

A (6.30) képletek alapján egyszerűen megkaphatjuk annak a valószínűségét, hogy egy forrásneutron lassulás közben eléri az u letargiát, vagyis nem abszorbeálódik:

$$p(0 \rightarrow u) = 1 - \int_0^u \Sigma_a(u')\psi(u')du' = \exp\left\{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{a\Sigma_a(u') + b\Sigma_s(u')} du'\right\}. \quad (6.31)$$

Tekintve, hogy az abszorpció többnyire a nehéz izotópok rezonanciáin következik be, ezt a mennyiséget *rezonanciakikerülési valószínűségnek* nevezzük. Vegyük észre, hogy ez nem más, mint a (6.30a) alatti lassulási sűrűség. Ez az egyezés nem véletlen.

6.3.5. Lassulási modellek

Mint utaltunk rá, a *lassulási modellek* arra szolgálnak, hogy a fluxus és a lassulási sűrűség között egyszerű kapcsolatot létesítsenek. Három modellt fogunk ismertetni: Fermi-modell, Greuling–Goertzel-modell és Wigner-modell. Mindegyik matematikai alakját a (6.29) képlet jelenti. Az előbbi kettő a lassulási sűrűség (6.19) képletéből származik, a Wigner-modell fizikai értelme más.

A lassulási sűrűséget megadó (6.19) képletben alkalmazzuk az $F_s(u') \approx F_s(u)$ közelítést:

$$q(u) = \int_{u-\varepsilon}^u F_s(u') du' \int_u^{u'+\varepsilon} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha} du'' \approx F_s(u) \int_{u-\varepsilon}^u du' \int_u^{u'+\varepsilon} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha} du''.$$

Meg lehet mutatni (vö. 6.4. feladat), hogy az itteni kettős integrál értéke ξ , tehát

$$q(u) = \xi \Sigma_s(u) \psi(u).$$

Ez a *Fermi-modell*, amely a fenti általános esetnek az $a = 0$ és $b = \xi$ helyettesítéssel kapott speciális esete. A fenti közelítés akkor fogadható el, amikor ε kicsi, vagyis a szóró mag A tömegszáma nagy. Már $A = 27$ esetén (alumínium) elegendően pontos.

A modellen lehet javítani. A lassulási sűrűséget megadó integrálban a szórási sűrűséget sorba fejtjük:

$$F_s(u') = F_s(u) + F_s'(u)(u' - u) + \dots$$

Ha ezt az integrálba helyettesítjük, a

$$q(u) = F_s(u) \int_{u-\varepsilon}^u du' \int_u^{u'+\varepsilon} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha} du'' + F_s'(u) \int_{u-\varepsilon}^u (u' - u) du' \int_u^{u'+\varepsilon} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha} du'' + \dots$$

összefüggést kapjuk. Itt nem részletezhető számítások alapján ez is a (6.29) modell alakjára hozható az

$$a = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2\xi} \cdot \frac{\alpha}{1-\alpha}, \quad b = \xi$$

együtthatókkal. Ezt nevezzük *Greuling–Goertzel-modell*nek. Minden szóró magra érvényes, olyan letargiatartományban, amelyben az abszorpciós hatáskeresztmetszet u -tól gyengén függ, vagyis nincsenek rezonanciák.

A rezonanciákon való abszorpció számítására használható legjobb közelítés a *Wigner-modell*. Ezt egy Einsteintől származó gondolatmenettel mutatjuk meg. Képzeljük úgy, hogy az u letargia közelébe lassuló neutronok “fehérre vannak festve”, továbbá az abszorpció hatására színük “feketére változik”, de továbbra is a reaktorban

maradnak. Ekkor $p(0 \rightarrow u)$ [vö. (6.31)] annak a valószínűsége, hogy egy forrásneutron lassulás közben fehéren jut túl az u letargián. (6.23) szerint a fehér és fekete neutronok *együttes* ütközési sűrűsége $1/\xi$, vagyis fluxusuk

$$\psi_T(u) = \frac{1}{\xi \Sigma_t(u)}.$$

A "T" indexszel azt kívánjuk hangsúlyozni, hogy itt együttes fluxusról van szó. Mivel ennek a szempontjából az abszorpció is szórásnak minősül, azért írhattunk a (6.23)-beli $F_s(u)$ eredeti, (6.18) szerinti definíciójában Σ_s helyett Σ_t -t.

Azoknak a neutronoknak a száma, amelyek ütközés révén egy du intervallumba eső letargiára tesznek szert, megegyezik az azt elhagyó neutronok számával:

$$\psi_T(u) \Sigma_t(u) du = \frac{du}{\xi}.$$

Közülük valamelyik $\Sigma_a(u)/\Sigma_t(u)$ valószínűséggel válik feketévé, tehát az adott intervallumban abszorbeálódó neutron száma

$$\frac{du}{\xi} \cdot \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)}.$$

Ha ezt összegezzük ($du \rightarrow 0$ esetén integráljuk) a tekintett rezonancia alatti részintervallumokra, megkapjuk az abszorpció valószínűségét. Ezt azt jelenti, hogy a rezonanciakikerülési valószínűségnek erre a rezonanciára vonatkozó része a következőképpen állítható elő:

$$p = 1 - \int \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)} du \approx \exp \left\{ - \int \frac{1}{\xi} \cdot \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)} du \right\}.$$

Ha feltételezzük, hogy az egyes rezonanciákban bekövetkező abszorpciók egymástól függetlenek, a keresett valószínűséget a kapott kikerülési valószínűségeknek a $(0, u)$ intervallumba eső rezonanciákra vonatkozó szorzatával egyenlő:

$$p(0 \rightarrow u) = \exp \left\{ - \int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma_a(u') + \Sigma_s(u')} \frac{du'}{\xi} \right\}.$$

Ezt (6.31)-gyel összevetve azt találjuk, hogy $a = b = \xi$ helyettesítéssel ez is egy (6.29) alakú modell. Az előző szakaszban mutatott levezetés szerint ezt akkor kapjuk, amikor a lassulási sűrűséget a

$$q(u) = \xi(u) \Sigma_t(u) \psi(u)$$

képlet adja meg. Ezt szoktuk Wigner-modell néven emlegetni.

6.3.6. Lassulás keverékben

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a lassulás egyetlen moderátorizotópon történik. A gyakorlatban természetesen *izotópok keverékével* van dolgunk. Az elmondottak könnyen általánosíthatók erre az esetre.

Amikor a lassulás több különböző izotópon történik, a teljes $q(u)$ lassulási sűrűség parciális lassulási sűrűségek összegére bonthatjuk:

$$q(u) = \sum_j q_j(u),$$

ahol a j összegzési index végigfut a reaktorban előforduló valamennyi izotópon, és mindegyik $q_j(u)$ egy (6.19) alakú integrál segítségével számítandó ki:

$$q_j(u) = \int_{u-\varepsilon_j}^u \Sigma_{sj}(u') \psi(u') du' \int_u^{u'+\varepsilon_j} \frac{e^{u'-u''}}{1-\alpha_j} du''.$$

Természetesen mindegyik $q_j(u)$ -ra vonatkozóan az A_j tömegszámtól függően eltérő közelítést alkalmazhatunk. Elképzelhető tehát, hogy a könnyű izotópokra a Greuling–Goertzel-modellt alkalmazzuk, a nehezekre pedig a Fermi-modellt. Numerikus számításokban ténylegesen ez is történik.

Láttuk, hogy gyorsan változó és nagy abszorpciós hatáskeresztmetszetek esetében az adekvát modell a Wigner-modell. Ezért a lassuláselméletben a rezonanciák figyelembevételét külön kell választanunk az olyan energiatartományokban való lassulás tárgyalásától, amelyekben az abszorpciós hatáskeresztmetszet kicsi és lassan változik.

6.4. Rezonanciaintegrál

A (2.7) képletek és a 2.4. ábra mutatja, hogy bizonyos nehéz elemek hatáskeresztmetszete az energia függvényében helyenként rezonanciaszerűen megnövekszik. E jelenségnek döntő hatása van a reaktorok működésére, azon belül is a reaktorok biztonságára. A rezonanciák megfelelő kezelése a lassuláselmélet egyik kulcskérdése. A jegyzetünk más fejezeteiben is követett módszer szerint először a homogén közegekben való rezonanciaabszorpcióval foglalkozunk. Persze a reaktorok többsége nem homogén, hanem aktív zónájuk fűtőelemrácsból épül fel, aminek jelentős befolyása van a jelenségre. Ezért meg fogjuk vizsgálni a rácsszerkezet hatását is. A legfontosabb dolog azonban az a körülmény, hogy a rezonanciaabszorpció függ a hőmérséklettől. Ezt nevezzük Doppler-effektusnak. Alfejezetünket ennek a tárgyalása zárja.

6.4.1. Rezonanciaabszorpció homogén közegben

A rezonanciaabszorpció tárgyalásakor a reaktort alkotó elemeket két részre szoktuk bontani. Egyrészt vannak a nehéz elemek, amelyek a neutronok lassításához alig járulnak hozzá, viszont rezonanciáik révén az abszorpciók többsége bennük törté-

nik. Jelentősen hozzájárulnak a rugalmatlan szórásokhoz. A rezonanciák energiatartományában azonban a rugalmatlan szórási hatáskeresztmetszet zérus, tehát ebben az alfejezetben a rugalmatlan szórásokat figyelmen kívül hagyhatjuk. Másrészt vannak a könnyű elemek, amelyek a neutronokat hatékonyan lassítják, viszont a bennük bekövetkező abszorpció jelentéktelen. Ezek elsősorban a moderátorok. Róluk szolt a 6.3. alfejezet. Az alábbi elmélet ezen a szétválasztáson alapul.

Először rezonanciaabszorbens és moderátormagok *homogén keverékét* tekintjük. Az abszorpció jelenlétében kialakuló spektrumot a (6.30) képletek segítségével számíthatjuk ki. Láttuk, hogy a rezonanciák tárgyalására a Wigner-modell tekinthető a legjobbnak, vagyis a (6.30) képletekbe $a = b = \xi$ -t helyettesítünk. Ekkor a (6.31) alatt definiált rezonanciakikerülési valószínűséget a

$$p(0 \rightarrow u) = \exp\left(-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\xi \Sigma_t(u')} du'\right) \quad (6.32)$$

képlet adja meg. Nem mutatjuk meg részletesen, csak megjegyezzük, hogy ez akkor jelent jó közelítést, ha

- a szomszédos rezonanciák a moderátorhoz tartozó ε egységeiben mérve a letargiatengelyen egymástól távol vannak, továbbá ha
- az egyes rezonanciák keskenyek, tehát ha $\Gamma \ll \alpha E_r$.

E feltevések érvényességét feltételezve elegendő az egyes rezonanciákat egymástól függetlenül vizsgálni.

Nyilvánvaló, hogy a sokszorozási tényező szempontjából döntő jelentősége van annak, hogy a 2 MeV átlagos hasadási energiáról termikus energiákra való lassulás közben hány neutron “vészeli át” abszorbeálódás nélkül azt az energiatartományt, ahol rezonanciák vannak. (6.32)-ből látható, hogy erre vonatkozóan elsősorban az exponenciális kifejezés kitevőjében lévő integrál a mérvadó. Ezért most ezt nézzük meg közelebbről. Az integrál alatti kifejezés nevezőjében lévő $\Sigma_t(u)$ teljes hatáskeresztmetszet két részre bontható:

- az E_r rezonanciaenergiáktól különböző E energiákon érvényes, u -tól független Σ_p potenciálszórési hatáskeresztmetszet, továbbá
- a nullától csak a rezonanciaenergiák közelében különböző $\Sigma_a(u)$ abszorpciós hatáskeresztmetszet, vagyis

$$\Sigma_t(u) = \Sigma_p + \Sigma_a(u) = N\sigma_{pa} + \Sigma_m + \Sigma_a(u),$$

ahol – mint látjuk – a Σ_p potenciálszórési hatáskeresztmetszetet tovább bontottuk az abszorbens mag és a moderátor hatáskeresztmetszetére. (Az előbbi az utóbbihoz képest általában kicsi.) N az abszorbens magsűrűsége.

(6.23)-ből következik, hogy olyan energiákon, ahol nincsenek rezonanciák, a fluxust a potenciálszórési hatáskeresztmetszet határozza meg:

$$\psi^{\text{fiktív}}(u) = \frac{1}{\xi \Sigma_p}.$$

Egy rezonancia közelében a fluxus ennél kisebb, ezért ezt ott *fiktív fluxus*nak nevezük: az u letargián azt adja meg, mekkora lenne a fluxus, ha u közelében nem lenne rezonancia. Mivel a fiktív fluxust könnyű kiszámítani, és u -val lassan változik (hiszen az abszorpciómentes esetre érvényes, a 6.3.2. szakaszban kifejtett egyszerű elmélet alkalmazható rá), a rezonanciaabszorpció jellemzésére célszerű bevezetni az *effektív rezonanciaintegrált* (I), amelyet úgy definiálunk, hogy a fiktív fluxussal szorozva megadja a rezonanciakikerülési valószínűséget (6.32) szerint meghatározó integrál értékét. Az előző képletekből könnyen levezethetők a

$$p(0 \rightarrow u) = \exp\left(-\frac{NI}{\xi \Sigma_p}\right), \quad NI = \int_0^\infty \frac{\Sigma_p \Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)} du. \quad (6.33)$$

összefüggések. Mint látható, a rezonanciaintegrált barn egységekben mérjük, hiszen definíciója szerint mikroszkopikus hatáskeresztmetszet.

(6.32) szerint a rezonanciakikerülési valószínűség nő, ha Σ_p nő, vagyis ha az abszorbens magokhoz képest szaporítjuk a moderátor magokat. Ez az oka annak, hogy egyáltalán érdemes moderátort alkalmazni. Tehát a legjobb lenne az abszorbens magokat (a reaktorok esetében az uránt) a moderátorban minél jobban hígítani.⁶ Az imént definiált rezonanciaintegrál viszont másképp viselkedik: annál nagyobb, minél nagyobb a hígítás. A $\Sigma_p \rightarrow \infty$ határátmenetkor kapott értéket *végtelen hígítású rezonanciaintegrálnak* nevezzük:

$$I_\infty = \int_0^\infty \sigma_a(u) du. \quad (6.34)$$

$\sigma_a(u)$ értékét (2.7b)-ből véve az integrált könnyen kiszámíthatjuk (vö. 6.6. feladat), és egyetlen rezonanciára vonatkozóan kapjuk:

$$I_\infty = \frac{\pi}{2} \sigma_0 \frac{\Gamma_a}{E_r}.$$

A rezonanciaintegrál véges Σ_p -re is kiszámítható analitikusan. Bevezetjük a

$$\sigma_p = \frac{\Sigma_p}{N}$$

jelölést, továbbá – az egyszerűség kedvéért – feltesszük, hogy $\sigma_{pa} \ll \sigma_p$. Ekkor a (6.33)-ban felírt integrált kiértékelve (vö. 6.4. feladat) adódik

⁶ A gyakorlatban azonban más szempontok is vannak, amelyek a hígításnak határt szabnak: ha túlságosan sok a moderátor, akkor ugyan sok neutron kerül el az abszorpciót, de ezek nagy részét nem a hasadóanyag, hanem a moderátor fogja abszorbeálni. Ezt a kérdést a 6.5. alfejezetben tárgyaljuk.

$$I(\sigma_p) = \frac{\sigma_p \Gamma_a}{2E_r} \int \frac{\sigma_0 / (1+x^2)}{\sigma_p + \sigma_0 / (1+x^2)} dx = I_\infty \frac{\sigma_p}{\sqrt{\sigma_p(\sigma_0 + \sigma_p)}}, \quad (6.35)$$

ami jól mutatja, hogy $I(\sigma_p)$ szigorúan monoton növekvő függvény. Az utóbbi és az alábbi képletekben szereplő integrálok mindig a tekintett rezonancia környékére vonatkoznak, de az integrált $-\infty$ -tól $+\infty$ -ig számoljuk, hiszen a rezonanciától távol az integrandus gyorsan eltűnik.

A (6.32) nevezőjében levő Σ_t -be beleszámít a számlálóban levő Σ_a . Emiatt a rezonanciaintegrált nem csak a moderátor jelenléte csökkenti, hanem maga az abszorpciós hatáskeresztmetszet. Ezt a jelenséget a rezonancia *önárnyékolásának* nevezük: hiába tart tehát a σ_0 hatáskeresztmetszet a végtelenbe, a rezonanciaintegrál mégis véges marad.

6.4.2. Rezonanciaabszorpció fűtőelemrácsokban

A legtöbb reaktorban az urán nem homogénen van a moderátorral elkeverve, hanem fűtőelemrudak formájában merül a moderátorba. Nézzük meg most, milyen befolyással van ez a rezonanciaabszorpcióra. Tekintsünk tehát a 6.3. ábra szerint egy moderátorral körülvevett rudat. Itt nem részletezhető gondolatmenettel belátható, hogy az ebben a magányos rúdban bekövetkező rezonanciaabszorpció kiszámítását vissza lehet vezetni egy homogén közegre vonatkozó (6.35) képletre. Ez a következő ekvivalenciatétel alapján: *egy rúdra vonatkozó rezonanciaintegrál kiszámítása visszavezethető a homogén esetre, ha a rúd potenciálszórási hatáskeresztmetszetéhez $1/\ell$ -et hozzáadunk.* Itt ℓ az átlagos hírhossz a rúdban⁷:

$$\ell = \frac{4V}{S}. \quad (6.36)$$

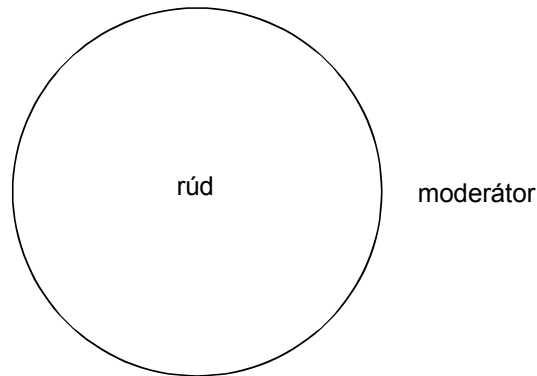
S a rúd felülete. A rúdban levő anyagok (UO_2 esetében az urán és oxigén) együttes potenciálszórási hatáskeresztmetszetét Σ'_p -vel jelöljük. Ekkor a kimondott tétel és (6.33) alapján a rezonanciaintegrál

$$NI = \int \frac{\Sigma'_p + 1/\ell}{\Sigma_t + 1/\ell} \Sigma_a du.$$

Végeredményben tehát a moderátornak a rúdtól való különválasztása növeli a rezonanciaintegrált, mivel (6.35) szerint az σ_p -nek monoton növekvő függvénye. Ennél bonyolultabb kérdés, hogy a heterogén elrendezés növeli-e vagy csökken-

⁷ A (6.36) képletnek számos levezetése ismert. A legegyszerűbb a következő. Tekintsünk egy végtelen közeget, amelyben térben egyenletes Φ fluxus alakul ki. Jelöljük ki a V térrészt. A 2.2. alfejezetben megmutattuk, hogy ΦV megadja a V térrészben levő neutronok által időegység alatt megtett utak összegét. Ugyanezt másképp is kifejezhetjük. A (2.11) képletek alapján a V térrész felületének egységnyi darabján 1 s alatt befelé haladó neutronok száma: $\Phi/4$. Ezek mindegyike (átlagosan) ℓ hosszúságú utat tesz meg a V térrészben. Tehát $S\ell\Phi/4$ a felületen 1 s alatt belépő neutronok által összesen megtett úthossz. Ezt az előbbivel egyenlővé téve kapjuk (6.36)-ot.

ti-e a rezonanciakikerülési valószínűséget. Hasonlítsuk össze ebből a szempontból azonos mennyiségű urán és moderátor homogén és heterogén elrendezését. A heterogén elrendezés akkor kedvezőbb, ha a moderátor Σ_m szórási hatáskeresztmetszete nagyobb, mint $1/\ell$. Tekintve, hogy a fűtőelemrudak méretét elsősorban nem reaktorfizikai, hanem hőtechnikai szempontok határozzák meg, egyáltalán nem biztos, hogy ez a gyakorlatban is így van. Példaként vegyük a paksi atomerőmű esetét. Ott a rudak átmérője (kerekítve) 1,5 cm, amelyre vonatkozóan (6.36) szerint $1/\ell = 0,67 \text{ cm}^{-1}$. A moderátor könnyűvíz, amelyre $\Sigma_m = 1,3 \text{ cm}^{-1}$, vagyis itt a heterogén elrendezés egy kicsit kedvezőbb, mint a homogén keverék lenne.



6.3. ábra. Moderátorban levő magányos fűtőelemrúd

Eddigi képleteink egy-egy rezonanciára vonatkoztak. A teljes rezonanciaintegrált úgy kapjuk meg, hogy az egyes rezonanciákra külön vett integrálokat összegezzük. Ha az egyes (felbontott) rezonanciák adatait (E_r , Γ , Γ_γ stb.) magfizikai katalógusokból kiolvassuk, ezen a módon bármilyen konkrét esetben ki tudjuk számítani a teljes rezonanciaintegrált. Gyakran valóban így járunk el. Vannak azonban közvetlen mérési eredmények is. *Hellstrand* svéd fizikus 1957-ben különböző anyagú és átmérőjű rudakra végzett méréseket, és azt találta, hogy a rezonanciaintegrál a rúd anyagán kívül valóban csak ℓ -től, vagyis (6.36) szerint az S/V hányadostól függ. Mivel a rúd-ban lévő urán M tömege V -vel arányos, az ekvivalenciatétel értelmében *Hellstrand* elméletileg megalapozottan fejezte ki mérési eredményeit S/M függvényeként:

$$\text{fém uránra: } I = 2,81 + 24,7\sqrt{S/M}, \quad \text{ha } 0,07 < S/M < 0,53; \quad (6.37a)$$

$$\text{UO}_2\text{-re: } I = 4,151 + 26,6\sqrt{S/M}, \quad \text{ha } 0,08 < S/M < 0,7. \quad (6.37b)$$

Itt I -t barn, S/M -et pedig cm^2/g egységekben kell behelyettesíteni.

6.4.3. Dancoff-faktor

A (6.37) képletek egyetlen, a moderátorban magányosan álló fűtőelemrúdra vonatkoznak. Az előző szakaszban kimondott ekvivalenciatétel azon a feltételezésen alapul, hogy a rúdból kilépő neutron csak a moderátorban ütközhet. Egy ilyen ütközés a neutron energiáját annyira megváltoztatja, hogy a tekintett rezonanciából kikerül. A valóságos reaktorokban azonban fűtőelemrácsok vannak, tehát egy rúdból kilépő neutron először nem szükségképpen a moderátorban fog ütközni, mert véges valószínű-

sége van annak is, hogy ez az ütközés egy másik rúdban történik. Ennek az effektusnak a figyelembevételére szolgál a C Dancoff-faktor.

A Dancoff-faktor annak a valószínűsége, hogy a fűtőelemrúdból kilépő neutron a moderátorban szenved el első ütközését. Itt nem részletezhető megfontolások alapján a fűtőelemrács hatását nagyon egyszerűen vehetjük figyelembe: a (6.36) képletben megadott ℓ húr hossz helyett ℓ/C -t kell a fenti képletekbe helyettesítenünk. Úgy is mondhatjuk, hogy a rács hatását úgy kell figyelembe vennünk, hogy az egyes rudak S felületét lecsökkentjük, vagyis S helyett SC -t használunk.

A Dancoff-korrekciónak egyetlen problémája tehát a Dancoff-faktor számítása. Legegyszerűbb módja a Monte Carlo módszeren alapul. Ez időigényes (bár a számítástechnika fejlődésével ez egyre kevésbé szempont), ezért a gyakorlatban félempirikus képletek terjedtek el. Közülük Saugar képletét idézzük:

$$C = \frac{e^{-\tau\eta}}{1 + (1 - \tau)\eta},$$

ahol

$$\eta = \ell N_a \sigma_m$$

és

$$\tau = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{1 + \frac{V_1}{V_0}} - 1 \right] \frac{V_0}{V_1} - 0,08 \quad \text{négyszögös rácsra,}$$

$$\tau = \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \sqrt{1 + \frac{V_1}{V_0}} - 1 \right] \frac{V_0}{V_1} - 0,12 \quad \text{hatszögös rácsra.}$$

Itt V_0 és V_1 a rúd, illetve a moderátor térfogata az elemi cellában.

6.4.4. Doppler-effektus

Az eddigi levezetésekben szereplő képletek csak akkor érvényesek, ha az abszorbens magok nyugalomban vannak. A valóságban azonban hőmozgást végeznek, és ennek bizonyos rezonanciák esetében számottevő hatása van a rezonanciaintegrálra. Ezt a reaktorok biztonsága szempontjából döntő jelentőségű hatást *Doppler-effektus*nak nevezzük, amely amiatt lép fel, hogy a (2.7) formulák által megadott hatáskeresztmetszet jelentősen eltér a (2.8) effektív hatáskeresztmetszettől:

$$\sigma_{a,\text{eff}}(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_a}{\Gamma} \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\theta^2(x-y)^2/4)}{1+y^2} dy,$$

ahol $x = \frac{E - E_r}{\Gamma/2}$, továbbá

$$\theta = \frac{\Gamma}{\Delta}$$

és

$$\Delta = \left(\frac{4kTE_r}{A} \right)^{1/2}$$

a rezonancia *Doppler-szélessége*. A az abszorbens mag tömegszáma, T az abszolút hőmérséklet, k a Boltzmann-állandó. Ezt a (2.7) képletekkel összevetve látjuk, hogy a Doppler-effektus miatt a Breit–Wigner-féle $1/(1+x^2)$ szerinti vonalak helyett az

$$\eta(\theta, x) = \frac{\theta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\theta^2(x-y)^2/4)}{1+y^2} dy \quad (6.38)$$

ún. *Doppler-kiszélesedett vonalakot* kell használni. Ezt a helyettesítést (6.35)-ben elvégezve kapjuk a T hőmérséklethez tartozó rezonanciaintegrált:

$$I(\sigma_p, T) = \frac{\sigma_p \Gamma_a}{2E_r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 \eta(\theta, x)}{\sigma_p + \sigma_0 \eta(\theta, x)} dx.$$

Végző soron tehát az $\eta(\theta, x)$ vonalak sajátosságai döntik el, milyen hatással van a Doppler-effektus a neutronmérlegre. Nézzük ezek közül a legfontosabbakat:

1. $T \rightarrow 0$ esetén $\Delta \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow \infty$, amit (6.38)-ben figyelembe véve kapjuk:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \eta(\theta, x) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \eta(\theta, x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ez azt is jelenti, hogy ha a rezonancia magfizikai szélessége (vagyis Γ) a Doppler-szélességhez képest nagy, akkor a Doppler-effektus alig befolyásolja a rezonanciaintegrált.

2. A kiszélesedett vonalak alatti terület ugyanakkora, mint az eredeti terület:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(\theta, x) dx = \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2},$$

ami azt jelenti, hogy a (6.34) alatt definiált végtelen hígítású rezonanciaintegrál független T -től. Tehát a Doppler-effektus csak véges σ_p esetén lehet jelentős.

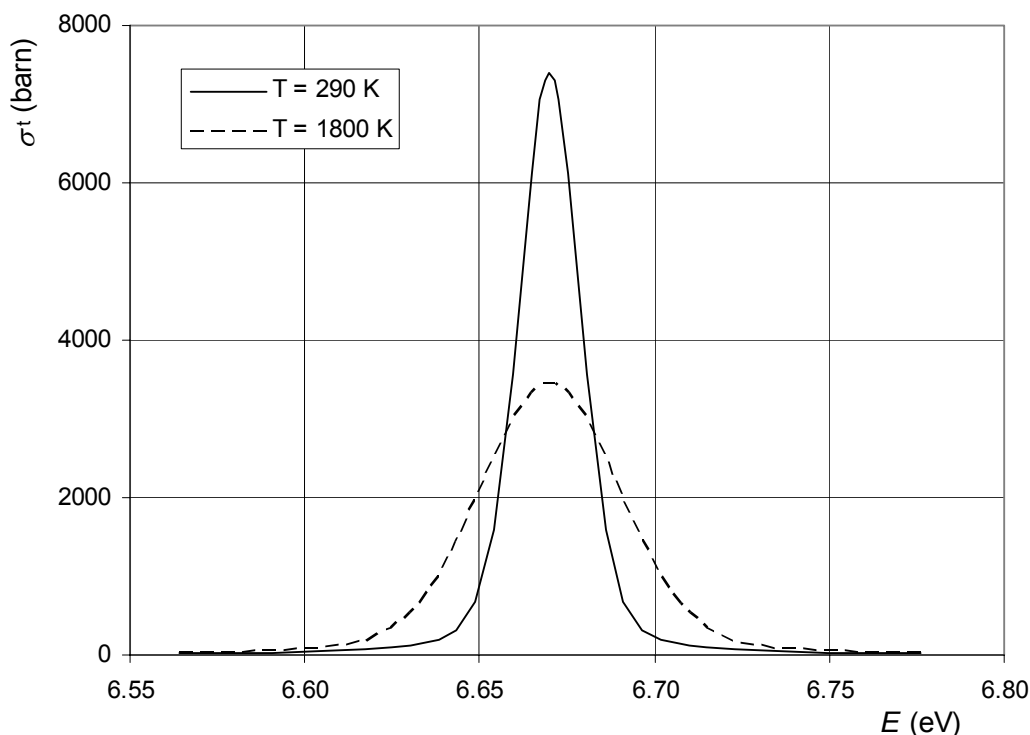
3. A rezonanciaintegrálhoz tartozó hatáskeresztmetszet σ_0 -nál kisebb, mert

$$\eta(\theta, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta \exp\left(-\frac{\theta^2}{4}\right) \operatorname{erfc}(\theta) < 1,$$

ahol

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (6.39)$$

A görbe alatti terület csak úgy maradhat változatlan, hogy a vonal kiszélesedik (6.4. ábra).



6.4. ábra. Doppler-effektus az ^{238}U legnagyobb rezonanciájára

4. A rezonanciaintegrál a hőmérséklettel monoton nő, mivel

$$\frac{\partial I(\sigma_p, T)}{\partial T} > 0.$$

Végeredményben a (6.37) Hellstrand formulák által adott rezonanciaintegrálokat korrigálni kell, ha a hőmérséklet magasabb, mint a szobahőmérséklet. A részletesebb vizsgálatok azt mutatják, hogy a korrekció az abszolút hőmérséklet négyzetgyökével arányos:

$$I(T) = I(T_0) \left(1 + \beta (\sqrt{T} - \sqrt{T_0}) \right),$$

ahol a β együtthatóra Hellstrand a következő formulákat javasolja:

$$\text{fém urán:} \quad \beta = \left(0,51 + 0,5 \frac{S}{M} \right) \cdot 10^{-2},$$

$$\text{UO}_2: \quad \beta = \left(0,58 + 0,5 \frac{S}{M} \right) \cdot 10^{-2}.$$

Itt S/M -et cm^2/g , T -t pedig K egységekben kell behelyettesíteni.

Legutóbbi következtetésünknek döntő jelentősége van a reaktorok biztonsága szempontjából: megszaladáskor (vö. 8.3. alfejezet) az urán hőmérsékletének emelkedése gyakorlatilag azonnal elkezdi csökkenteni a reaktivitást. Ha ugyanis az urán el van különítve a moderátortól, kezdetben a moderátor nem melegszik, így a moderátor hatáskeresztmetszetei sem változnak, tehát a fiktív fluxus is ugyanaz marad. A rezonanciaintegrál növekedése ezért kezdetben biztosan csökkenti a rezonanciakikerülési valószínűséget. Ez pedig előbb-utóbb szubkritikus állapotba viszi a reaktort, ami megállítja a teljesítmény növekedését. Jól méretezett reaktorban ez még az előtt következik be, mielőtt túlságosan sok hasadási energia szabadulna fel. Ha ebből a szempontból összevetjük a heterogén és a homogén reaktorokat, az utóbbiak biztonságosabbnak látszanak. Ugyanis a homogén reaktorokban nemcsak a Doppler-effektus hat *azonnal*, hanem a 8.2. alfejezetben definiált valamennyi reaktivitástényező is *prompt* visszacsatolást eredményez.

6.5. Termalizáció

A lassulás befejező szakasza a *termalizáció*, a reaktorfizika egyik legbonyolultabb és matematikailag legnehezebben tárgyalható jelenségcsoportja. A lassulástól minőségileg különbözik a következőkben:

- a neutronok energiája összemérhetővé válik egyrészt a moderátort alkotó atomok hőmozgásának, másrészt a moderátort alkotó molekulák kémiai kötésének energiájával, ennélfogva nem áll fenn az – a lassuláselméletben alaposan kihasznált – körülmény, hogy szóródáskor a neutron energiája csak csökkenhet;
- a termikus és a termikushoz közeli energiákon a hatáskeresztmetszetek olyan nagyok, hogy a szabad úthosszak kisebbek, mint a fűtőelemrudak átmérője; emiatt nem alkalmazhatjuk a homogén közegekben általában elfogadható egyszerűsítéseket.

Végeredményben tehát az előzőkben megengedett egyszerűsítések egyike sem lehetséges, sőt – a nagy abszorpciós hatáskeresztmetszetek miatt – még a diffúzióelmélet sem alkalmazható mindig. A transzportegyenlet (4.2) integrális alakjából szoktunk kiindulni, ami azt is jelenti, hogy csak numerikus módszerekkel kaphatunk használható eredményeket. Így az alábbiakban meg kell elégednünk azoknak az alapegyenleteknek a felírásával, amelyekben a termalizációt kezelő számítógépi programok alapulnak.

6.5.1. Termalizációs magfüggvények

(6.9) és (6.12) helyett úgy kaphatunk a legegyszerűbben a termalizációt is leíró $\sigma_s(E' \rightarrow E)$ magfüggvényt, hogy elhanyagoljuk a kémiai kötések hatását, vagyis a neutron szóró atommagokat szabadon mozgó gázatomok magjának tekintjük. Ezt szoktuk *Wigner–Wilkins-modell*nek nevezni. A 6.2. alfejezetben követett levezetés megfelelő általánosításával, de nagyon hosszadalmas levezetésekkel a következő magfüggvényt kapjuk:

$$\begin{aligned} \sigma_s(E' \rightarrow E) = & \frac{\sigma_s}{2E'} \eta^2 \left[\operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E}{kT}} - \rho \sqrt{\frac{E'}{kT}} \right) \pm \operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E}{kT}} + \rho \sqrt{\frac{E'}{kT}} \right) \right] + \\ & + \frac{\sigma_s}{2E'} \eta^2 \exp \left(-\frac{E-E'}{kT} \right) \left[\operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E'}{kT}} - \rho \sqrt{\frac{E}{kT}} \right) \mp \operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E'}{kT}} + \rho \sqrt{\frac{E}{kT}} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.40)$$

ahol

$$\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}} \quad \text{és} \quad \rho = \frac{A-1}{2\sqrt{A}},$$

továbbá az $\operatorname{erf}(x)$ függvényt (6.39)-ben definiáltuk. A felső előjel $E \leq E'$ -re, az alsó pedig $E \geq E'$ -re érvényes. Ezt a képletet csupán illusztrációnak szántuk, hogy az Olvasó lássa, milyen súlyos matematikai bonyodalmakat okoz a szóró atomok hőmozgása. Ha még a kémiai kötések hatását is figyelembe vesszük, a képletek tovább bonyolódnak. E termalizációs magfüggvények kiszámítására számos számítógépi programot fejlesztettek ki.

Ha a (6.40) magfüggvényt E szerint integráljuk, akkor a szórási hatáskeresztmetszetet kapjuk:

$$\sigma_s(E') = \frac{\sigma_s}{\beta\sqrt{\pi}} \exp(-\beta^2) + \sigma_s \left(1 + \frac{1}{2\beta^2} \right) \operatorname{erf}(\beta),$$

ahol

$$\beta^2 = \frac{AE'}{kT}.$$

Jóllehet a szórási hatáskeresztmetszetet eredetileg a v_r relatív sebességtől függetlennek tételeztük fel, végeredményben az E' energiától függő szórási hatáskeresztmetszetet kaptunk. (Ennek mért értékei láthatók a 2.3. ábrán.) Itt végső soron arról van szó, hogy a (2.8)-ban definiált effektív hatáskeresztmetszet jelentősen eltér a magfizikai hatáskeresztmetszettől. Az eltérés olyan mértékű, az effektív hatáskeresztmetszet végtelenbe tart, amikor $E' \rightarrow 0$.

6.5.2. Termikus spektrum homogén közegben

A (6.1) lassulási egyenlet termikus energiákra a következő alakba megy át:

$$- \left[D(E) B^2 + \Sigma_t(E) \right] \psi(E) + \int_0^\infty \Sigma_s(E' \rightarrow E) \psi(E') dE' = 0,$$

mivel esetünkben $f(E) = 0$. A következőkben végtelen közegekben való termalizációt vizsgáljuk, tehát $B^2 = 0$:

$$-\Sigma_t(E)\psi(E) + \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E)\psi(E') dE' = 0. \quad (6.41)$$

A neutronokat szóró magok sebességeloszlását a *Maxwell-spektrum* adja meg. Heurisztikusan azt várhatjuk, hogy a neutronok spektruma sem különbözik ettől lényegesen, hiszen ha a moderátor atommagjaival elég sokat ütközhetnek, felveszik azok sebességeloszlását. Alább látni fogjuk, hogy ez valóban így is van, ha nincs abszorpció. A neutronok sebességére vonatkozó Maxwell-eloszlás

$$P_T(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) 4\pi v^2. \quad (6.42)$$

E sebességeloszlás maximuma a *legvalószínűbb sebesség*nél adódik:

$$v_T = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (6.43)$$

amelynek megfelelő energia

$$E_T = \frac{mv_T^2}{2} = kT.$$

A $T = 293,16$ K szobahőmérsékletéhez (6.43) szerint tartozó legvalószínűbb sebesség értéke $v_0 = 2200$ m/s. A Maxwell-eloszlás *átlagos sebessége* v_T -nél egy kicsit nagyobb:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v P_T(v) dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_T = 1,128 v_T.$$

A (6.42) alatti eloszlásból úgy kapjuk a *fluxus spektrumát*, hogy $P_T(v)$ -t v -vel beszorozzuk. Ha az így adódó eloszlást energiaváltozóra írjuk át, akkor az

$$M_T(E) = \frac{E}{E_T^2} \exp\left(-\frac{E}{E_T} \right) \quad (6.44)$$

spektrumot kapjuk. Az eloszlást úgy normáltuk, hogy a $(0, +\infty)$ intervallumra vett integrálja 1 legyen.

Minden szórási magfüggvény, így a (6.40) alatt felírt magfüggvény is kielégíti az alábbi nevezetes azonosságot:

$$M_T(E') \sigma_s(E' \rightarrow E) = M_T(E) \sigma_s(E \rightarrow E'). \quad (6.45)$$

Ezt az összefüggést *részletes egyensúlyi feltételnek* nevezzük. A Wigner–Wilkins-modellre ez a (6.40) képletből közvetlenül látszik, de általában is következik a statisztikus fizika legáltalánosabb elveiből. Fontos következménye, hogy

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} M_T(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE' - \Sigma_s(E) M_T(E) = \\ & = \int_0^{\infty} M_T(E) \Sigma_s(E \rightarrow E') dE' - \Sigma_s(E) M_T(E) = \\ & = \Sigma_s(E) M_T(E) - \Sigma_s(E) M_T(E) = 0. \end{aligned}$$

Ha (6.41)-ben $\Sigma_t = \Sigma_a$ -t helyettesítünk, könnyű belátni, hogy ez azt jelenti, hogy abszorpciómentes végtelen közegben a termalizációs egyenlet megoldása valóban éppen $M_T(E)$, ahogy fent heurisztikus alapon állítottuk.

Amikor abszorpció is van, a (6.41) egyenletből indulunk ki, de a teljes energiatartományt két részre osztjuk fel: a $(0, E_m)$ *termikus* és az $(E_m, +\infty)$ *epitermikus* tartomány. Az E_m határenergiát úgy kell megválasztani, hogy az epitermikus tartományban már érvényes legyen a lassuláselmélet. Szokásos értéke: $E_m = 0,625$ eV. Abban az esetben, amikor a reaktorban plutónium is van, általában $E_m = 1,85$ eV-ot választunk, mert így a plutóniumizotópok termikus energiák közelében levő nagy rezonanciáinak a termikus spektrumra gyakorolt hatását pontosabban tudjuk figyelembe venni, mint a lassuláselméletben. Ezzel a (6.41)-ben levő integrál így írható:

$$\int_0^{\infty} \psi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE' = \int_0^{E_m} \psi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE' + \int_{E_m}^{\infty} \psi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE'.$$

A második integrálban a $\psi(E')$ energiaspektrumot ismerjük, hiszen a lassuláselméletből tudjuk, hogy $1/E'$ -vel arányos, továbbá a szórási magfüggvényt (6.9)-ből vehetjük. Ezzel ez a tag így írható:

$$S(E) = \int_{E_m}^{\infty} \psi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE' = q(E_m) \left[\frac{1}{E_m} - \frac{\alpha}{E} \right]. \quad (6.46)$$

Itt nullát kell venni olyan E -re, amelyre $S(E)$ negatívvá válna. $q(E_m)$ a (6.19)-ben bevezetett lassulási sűrűség. Ezzel a termalizációs egyenlet így írható:

$$-\Sigma_t(E) \psi(E) + \int_0^{E_m} \psi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) dE' + S(E) = 0. \quad (6.47)$$

Ennek az egyenletnek a megoldása csak numerikus módszerekkel lehetséges. A tapasztalat azt mutatja, hogy – hacsak az abszorpció nem szokatlanul nagy mértékű – a (6.47) egyenlet megoldásai nagyon közel vannak a Maxwell-spektrumhoz. A legmeglepőbb azonban az, hogy az egyenlet megoldására a szórási magfüggvény konkrét alakjának sokkal kisebb befolyása van, mint az abszorpciós hatáskeresztmetszetnek. Ennek az oka a (6.45) alatt felírt részletes egyensúlyi feltétel, amely nagyon erős meg-

szorítás, mert nem engedi, hogy a megoldás a Maxwell-spektrumtól lényegesen eltérjen.

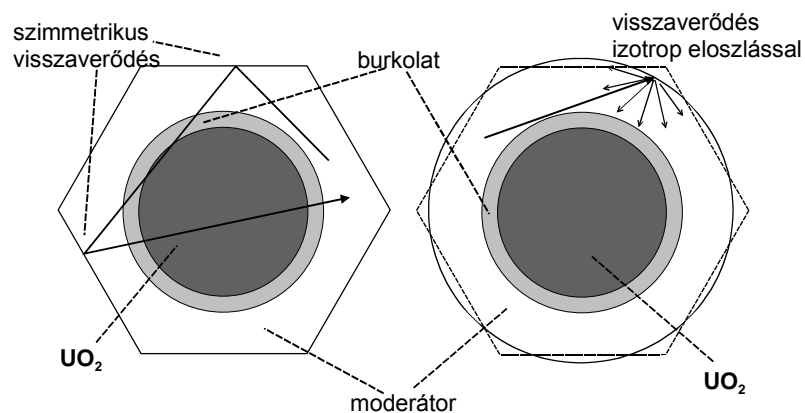
Az abszorpció jelenléte általában keményíti a spektrumot: nem enged meg elegendően sok ütközést ahhoz, hogy a termalizálódó neutronok a moderátor atomjaival egyensúlyba kerüljenek, és így a kT átlagenergia kialakulása előtt már abszorbeálódnak. Erre való tekintettel szoktunk – közelítőleg – *neutron-hőmérséklet*ről beszélni, ami azt jelenti, hogy a neutronspektrumot egy (6.44) szerinti Maxwell-spektrumnak vesszük, de benne a moderátor T hőmérsékleténél valamivel nagyobb T_n hőmérséklet szerepel. Amíg nem álltak rendelkezésre nagy teljesítményű számítógépek, a neutron-hőmérséklet fogalma nagyon hasznos volt, mert segítségével a termikus neutronspektrumot egyetlen, kísérletileg is meghatározható paraméterrel lehetett jellemezni. Ezzel szemben ma már nincs rá szükség, hiszen a (6.47) egyenlet numerikus megoldásának nincs akadálya.

6.5.3. Termalizáció szabályos fűtőelemrácsokban

Mint a jelen alfejezet bevezetőjében mondtuk, a termikus energiatartományban – a rezonanciák tartományához hasonlóan – tekintettel kell lenni arra, hogy a reaktorban az urán nem homogéven, hanem fűtőelemrudak formájában van a moderátorral elkeverve. A fűtőelemrudak általában *szabályos rácsot* alkotnak, amelyet – a kristályrácsokkal való analógia alapján – úgy képzelhetjük el, mint egy *elemi cella* szabályos ismétlődését. Hatszögű fűtőelemrácsnak például a 6.5. ábrán bemutatott cellát feleltethetjük meg. Az ilyen rácsok jellemzésére a $\Phi(\mathbf{r}, E)$ fluxust két tényező szorzatára szokás bontani:

$$\Phi(\mathbf{r}, E) = \Phi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, E),$$

ahol az első tényezőt *makrofluxus*nak, a másodikat pedig *mikrofluxus*nak nevezzük. A makrofluxus lényegében megfelel annak, amit az egycsoport diffúzióelmélet ír le (5. fejezet). A mikrofluxus követi a fűtőelemrács periodicitását: úgy viselkedik, mintha a rács végtelen lenne. A reaktor végességét természetesen nem hanyagoljuk el: erre szolgál az abszorpciós hatáskeresztmetszetbe beolvasztható $D(E)B^2$ tag.



6.5. ábra. Elemi cella (bal oldali rajz) és Wigner–Seitz-cella (jobb oldali rajz)

Az alábbiakban a mikrofluxusra vonatkozóan fogunk egyenletet felírni. A rács szimmetriájából következik, hogy $\psi(\mathbf{r}, E)$ -t elegendő az elemi cellára vonatkozóan meghatározni. Ebben az esetben $\psi(\mathbf{r}, E)$ az elemi cella határán tartozik kielégíteni az ún. *szimmetria-határfeltételt*. Amikor ugyanis egy neutronpálya a cella határát átlépi, és a szomszédos cellában folytatódik, akkor – mint egyszerűen belátható – a pályának a szomszédos cellához viszonyított helyzete ugyanolyan, mint a pálya tükörképének az eredeti cellához viszonyított helyzete. Emiatt elég egyetlen cellát tekinteni, és a neutronpályákat a cella határán a normálisra vonatkozóan tükrözni (6.5. ábra, bal oldali rajz). Ezt jelenti a szimmetria-határfeltétel.

A gyakorlatban általában megengedhető a *Wigner–Seitz-cella* közelítés: a valóságos cellát egy vele azonos területű körrel közelítjük. Ezzel elérjük, hogy $\psi(\mathbf{r}, E)$ csak a hengeres r koordinátától függjön. Egy ilyen cellában azonban a szimmetria-határfeltétel súlyos hibákhoz vezetne. Ha ugyanis egy pálya induláskor elkerüli a fűtőelemet, akkor a hengerfelületre vonatkozó tükörképei is el fogják kerülni. Az eredeti, hatszöges (vagy négszöges) cellában ilyen helyzet nem állhat elő. Ezért olyan határfeltételt kell keresni, amely nem okoz ilyen problémát. Nos, a Wigner–Seitz-cellában a szimmetria-határfeltételnek az ún. *fehér határfeltétel* felel meg. Itt ugyanis a cella valóságos határfelületei elmosódnak, és a valóságot akkor közelítjük a legjobban, ha azt mondjuk, hogy minden, a cellát elhagyó neutronnak egy véletlenszerű irányban visszatérő neutron felel meg (6.5. ábra, jobb oldali rajz).

A határfelületeket és a cellán belül való neutrontranszportot a *transzport magfüggvénnyel* jellemezzük. Képzeld el, hogy a Wigner–Seitz-cellában az r' és $r'+dr'$ sugarak által határolt hengergyűrűben időegység alatt $Q(r', E)dr'$ számú neutron keletkezik. Az ezek hatására az r és $r+dr$ sugarak által határolt hengergyűrűben megjelenő neutronok térben átlagolt fluxusát írjuk a

$$Q(r', E) G(E, r' \rightarrow r) dr dr'$$

alakban. Az itt megjelenő – Green-függvény jellegű – kifejezést a transzport magfüggvény. Kiszámítása nem egyszerű: a (4.2) integrálegyenletben szereplő $e^{-\Sigma_s(E)(r' \rightarrow r)}$ mennyiséget kell az említett hengergyűrűkre átlagolni – figyelembe véve a fehér határfeltételt is. A $Q(r', E)$ forrástagot a termalizációs tartományban két tag összegeként kell felírunk: egyrészt az epitermikus neutronok lassulásának megfelelő, (6.46)-ban felírt $S(E)$, másrészt a termikus energiatartományon belül való energiacserét leíró integrál:

$$Q(r, E) = S(r, E) + \int_0^{E_m} \psi(r, E') \Sigma_s(r, E' \rightarrow E) dE'. \quad (6.48a)$$

Ebben a kifejezésben feltüntettük, hogy a szórási magfüggvény függ a helytől, hiszen nyilvánvalóan egészen más a moderátorban, mint a fűtőelemrúdban. Ezen túlmenően az $S(r, E)$ lassulási forrás is függ a helytől. Az utóbbira vonatkozóan a következő feltevésekkel szokás élni. Az E_m energiát úgy célszerű megválasztani, hogy a $\psi(r, E_m)$ mikrofluxus r -től gyakorlatilag független legyen (vagyis az E_m energián a szabad úthosszak lényegesen nagyobbak legyenek, mint a cella méretei). Ebben az esetben a

(6.46)-ban szereplő $q(E_m)$ lassulási sűrűséget Fermi-közelítésben írhatjuk fel (lásd a 6.3.5. szakaszban), vagyis

$$S(r, E) = \xi \Sigma_s(r, E) \left[\frac{1}{E_m} - \frac{\alpha}{E} \right]. \quad (6.48b)$$

Ezeket figyelembe véve – a (4.2) integrális transzportegyenlet szellemében – a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\psi(r, E) = \int_0^{R_c} G(E, r' \rightarrow r) Q(r', E) dr', \quad (6.48c)$$

ahol R_c a Wigner–Seitz-cella sugara.

A (6.48) alatt felírt egyenletet iterációval lehet megoldani. Az ezt megvalósító legelterjedtebb számítógépi program a THERMOS, amely tartalmazza nem csak az egyenlet megoldását, hanem a transzport magfüggvény és a szórás magfüggvény számítását is. A tapasztalat szerint e három számítási feladat körülbelül ugyanannyi gépidőt igényel.

A (6.52) egyenlet megoldását elsősorban a 7. fejezetben tárgyalt többszoportelmélet által igényelt termikus csoportállandók számítására használjuk. Ezen túlmenően egyéb mennyiségeket is származtathatunk belőle, amelyek közül négyet említünk:

- Az *előnytelenségi tényező* a termikus fluxus átlagának a hányadosa a moderátorban és a fűtőelemben:

$$\delta = \frac{\int_0^{E_m} dE \int_{\text{mod.}} \psi(r, E) r dr / V_m}{\int_0^{E_m} dE \int_{\text{f.e.}} \psi(r, E) r dr / V_f}. \quad (6.49a)$$

- A *termikus hasznosítási tényező*:

$$f = \frac{\int_0^{E_m} dE \int_{\text{f.e.}} \Sigma_a(r, E) \psi(r, E) r dr}{\int_0^{E_m} dE \int_{\text{cella}} \Sigma_a(r, E) \psi(r, E) r dr}, \quad (6.49b)$$

amely azt fejezi ki, hogy az abszorbeálódó neutronoknak mekkora hányada abszorbeálódik az uránban.

- A *termikus csoportállandók*: tetszőleges csoportállandót (abszorpciós, hasadási stb.) átlagolhatunk a termikus energiákra és az elemi cellára, például

$$\Sigma_a^{\text{th}} = \frac{\int_0^{E_m} dE \int_{\text{cella.}} \Sigma_a(r, E) \psi(r, E) r dr}{\int_0^{E_m} dE \int_{\text{cella}} \psi(r, E) r dr}. \quad (6.50)$$

A 6.3. táblázatban szereplő hatáskeresztmetszeteket ezen a módon számítottuk.

- További integrális jellemző a már említett T_n neutron-hőmérséklet. A Maxwell-eloszlás esetében az eloszlás átlagos energiája kT . A neutron-hőmérséklet legtermészetesebb definíciója tehát a tekintett régióban (fűtőelem, moderátor, elemi cella stb.) kialakuló átlagos termikus neutronspektrumra vonatkoztatott átlagos energia. A THERMOS program végeredményén található “neutron-hőmérséklet” ezen a definíción alapul. Nem ez az egyetlen és talán nem is ez a legcélszerűbb definíció. Abban az esetben ugyanis, amikor a neutronabszorpciós hatáskeresztmetszet nem túlságosan nagy, az 1 eV alatti energiákhoz tartozó neutronspektrum jól közelíthető egy Maxwell-eloszlás és egy $1/E$ spektrum összegével. Ha ez igaz, akkor T_n -et célszerű a Maxwell-eloszláshoz tartozó “hőmérsékletként” definiálni. A tapasztalat szerint ez mindig magasabb, mint a közeg T hőmérséklete. A különbség első közelítésben arányos a $\Sigma_a/\xi\Sigma_s$ hányadossal.⁸ Tekintve, hogy a neutron-hőmérsékletet sem a számításokban, sem a kísérletekben nem használjuk már, további részletekbe nem megyünk bele.

Ezeket a mennyiségeket régebben beépítették a reaktorok elméletébe mint kísérletileg meghatározandó mennyiségeket. Amióta azonban rendelkezésre áll a THERMOS és a hozzá hasonló termalizációs programok, ezeknek és a hozzájuk hasonló mennyiségeknek a jelentősége csökkent, de legalábbis átalakult: ma elsősorban arra használjuk őket, hogy számítógépi programjainkat, de főleg a bennük felhasznált magfizikai adatokat kísérletileg ellenőrizzük. Ekkor azonban nem δ, f vagy T_n mért és számított értékeit hasonlítjuk össze, hanem a közvetlenül mért reakciógyakoróságokat.⁹

6.6. Fermi-kor, migrációs terület

Két fontos fogalom magyarázata érdekében visszatérünk a (6.31) alatti eredményünkre. Emlékeztetünk arra, hogy a 6.3. alfejezetben – a jelölések egyszerűsítése kedvéért – a $DB^2 + \Sigma_a$ helyébe egyszerűen csak Σ_a -t írtunk. Ezt most visszacsináljuk, amivel (6.31) a

$$p(0 \rightarrow u) = \exp \left\{ - \int_0^u \frac{D(u')B^2 + \Sigma_a(u')}{a\Sigma_a(u') + b\Sigma_s(u')} du' \right\}$$

képletbe megy át. Ha a dolgot így írjuk, akkor $p(0 \rightarrow u)$ nem csak a rezonancia elkerülésének a valószínűsége, hanem annak valószínűségét is magába foglalja, hogy a

⁸ Vegyük észre, hogy ez éppen a 6.2. táblázat utolsó oszlopában szereplő mennyiség reciproka.

⁹ Egyébként δ -t nem is lehet megmérni, mert nem mérhető reakciógyakoróságok, hanem fluxusátlagok hányadosa. A fluxust pedig nem lehet mérni.

neutron lassulás közben nem szökik ki. Ezért a mennyiséget két tényező szorzatára bontjuk:

$$p(0 \rightarrow u) = \exp\left\{-\int_0^u \frac{\Sigma_a(u')}{\xi\Sigma_t(u')} du'\right\} \cdot \exp\left\{-\int_0^u \frac{D(u')B^2}{\xi\Sigma_t(u')} du'\right\}.$$

Itt áttértünk a Wigner-modellre, mert megfontolásainkat a p rezonanciakikerülési valószínűség meghatározására szeretnénk korlátozni. Nyilvánvaló, hogy az első tényező a négyfaktor-formulában szereplő p , a második pedig annak a valószínűsége, hogy az u letargiáig való lassulás alatt a neutron bennmarad a reaktorban. Ha u a termikus energiák felső határának (általában 0,625 eV) megfelelő u_{th} letargia, akkor valóban

$$p = \exp\left\{-\int_0^{u_{th}} \frac{\Sigma_a(u')}{\xi\Sigma_t(u')} du'\right\}.$$

A másik tényező az (5.42) szerint definiált P_{NL} azzal a különbséggel, hogy most nem a termikus, hanem a lassuló neutronokra vonatkozik. Ezért ellátjuk az „epi” (= epitermikus) felső indexszel:

$$P_{NL}^{epi} = \exp\left\{-\int_0^{u_{th}} \frac{D(u')B^2}{\xi\Sigma_t(u')} du'\right\}. \quad (6.51)$$

Ez az 5. fejezetben definiált k_{∞} -t csökkenti, vagyis (5.42a) helyett most a

$$k_{eff} = k_{\infty} P_{NL}^{epi} P_{NL}^{th} \quad (6.52)$$

képletet kell alkalmaznunk, amelyben az utolsó tényező az (5.42b) képlettel definiált mennyiség, de – megkülönböztetésül – most ellátuk a „th” (= termikus) felső indexszel. A (6.52) képletet szoktuk *hatfaktor-formulának* nevezni, mivel k_{∞} -ben már eleve van négy tényező.

Az epitermikus bennmaradási valószínűséget megadó (6.51) képletet átírjuk a

$$P_{NL}^{epi} = e^{-B^2\tau}$$

alakba, ahol

$$\tau = \int_0^{u_{th}} \frac{D(u')}{\xi\Sigma_t(u')} du'. \quad (6.53)$$

Ezt a mennyiséget *Fermi-kornak* nevezzük. Az elnevezés magyarázata messze vezetne, de fizikai értelme valóban kapcsolatba hozható a neutron lassulása közben eltelt idővel, jóllehet τ dimenziója cm^2 . Az L^2 diffúziós területhez hasonlóan a Fermi-kor is jellemzi a lassuló neutronok térbeli eloszlását: 6τ annak a távolságnak a négyzetes átlaga, ahova a neutron a keletkezéstől a termikus energiákra való lassulás közben eljut.

A fenti képletek alapján (6.52) a következő alakra hozható:

$$k_{\text{eff}} = k_{\infty} \frac{e^{-B^2\tau}}{1 + B^2L^2}.$$

Ebben általában a következő sorfejtést lehet alkalmazni:

$$k_{\text{eff}} \approx \frac{k_{\infty}}{(1 + B^2L^2)(1 + B^2\tau)} \approx \frac{k_{\infty}}{1 + B^2M^2},$$

ahol

$$M^2 = L^2 + \tau. \quad (6.54)$$

Ezt a mennyiséget *migrációs területnek* nevezzük. Az 5.6. alfejezetben szereplő képleteket pontosabbá tehetjük, ha bennük mindenütt M^2 -et írunk L^2 helyébe.

Tájékoztatásul a 6.3. táblázatban megadjuk a négy legfontosabb moderátor megfelelő adatait.

6.3. táblázat. A moderátorok termikus adatai

Moderátor	D (cm)	Σ_a (cm ⁻¹)	L (cm)	τ (cm ²)
H ₂ O	0,142	0,0193	2,72	33
D ₂ O	0,80	0,000038	148	120
⁹ Be	0,70	0,0014	23,6	98
¹² C	0,90	0,0004	50,2	350

6.7. Az effektív későneutron-hányad

A (3.6) pontkinetikai egyenletrendszer a magfizikai későneutron-hányadok segítségével írtuk fel. E jegyzet több helyén hangsúlyoztuk, hogy ezek helyett nagyobb, effektív értékeket kell használnunk. A kérdéssel részletesen foglalkozik a Bevezetés a reaktorfizikába című tankönyv. Ebben a jegyzetben a dolog lényegét és az effektív mennyiségek számítási módszerét ismertetjük.

Arról van szó, hogy a késő neutronok a láncreakció szempontjából értékesebbek, mint a prompt neutronok. A 6.1. ábra mutatja, hogy a késő neutronok spektruma lágyabb, mint a prompt neutronoké. Az ábrán mutatott 4. csoport átlagos energiája 0,453 MeV, viszont a prompt neutronoké 2 MeV. A kisebb energiákon gyakorlatilag állandó szórás hatáskeresztmetszetek ebben az energiatartományban már függnek az energiától, nevezetesen az energiával csökkennek. Emiatt a prompt neutronok nagyobb valószínűséggel szöknek ki a reaktorból, mint a késő neutronok. Van azonban egy ezzel ellentétes effektus is: a késő neutronok a rezonanciákhoz közelebb eső energiával születnek, ezért nagyobb valószínűséggel abszorbeálódnak, mint a prompt neutronok. A két hatás mérlege általában pozitív, tehát az effektív későneutron-hányadok nagyobbak, mint a magfizikaiak. Nagy méretű reaktorokban a kiszökés alárendelt szerepet játszik, így előfordulhat, hogy az effektív későneutron-hányadok kisebbek, mint a magfizikaiak.

Az effektív hányadok számítása nagyon egyszerű, ha rendelkezünk egy olyan számítógépi programmal, amely képes a (6.3) lassulási egyenletet megoldani. Az eljárás a következő, amelynek a leírásában a különböző hasadó izotópokat az m indexszel különböztetjük meg egymástól:

1. Először meghatározzuk B^2 -nek azt az értékét, amelyre $k_{\text{eff}} = 1$. Az ebben a lépésben kapott $\psi(E)$ spektrummal minden hasadó izotópra kiszámítjuk

$$F_m = \int_0^{\infty} \nu \Sigma_{fm}(E) \psi(E) dE$$

és

$$F = \sum_m F_m$$

mennyiségeket.

2. B^2 értékét változatlanul tartva a (6.3) egyenletben $f(E)$ helyébe $f_i(E)$ -t helyettesítve minden későneutron-csoportra megoldjuk az egyenletet ($i = 1, 2, \dots, 6$), majd a megoldásokat (6.2)-ben $\psi(E)$ helyére írva kiszámítjuk a k_i tényezőket.
3. Az egyes későneutron-csoportokhoz és hasadó izotópokhoz tartozó effektív későneutron-hányadokat a

$$\beta_{im}^{\text{eff}} = k_i \beta_{im} .$$

képletek adják.

4. Az i -edik csoporthoz tartozó effektív későneutron-hányadot

$$\beta_i^{\text{eff}} = \sum_m k_i \beta_{im} .$$

összeg adja, amiből egyszerűen kapjuk a teljes β_{eff} -et

$$\beta_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^6 \beta_i^{\text{eff}} .$$

6.8. Feladatok

- 6.1. Számítsuk ki $\cos \vartheta$ átlagát! (1 pont)
- 6.2. Sorfejtéssel igazoljuk a (6.10b) képletben látható közelítést! A hiba $1/A$ hányadik hatványával kezdődik? (2 pont)
- 6.3. Vezessük le a (6.20) egyenletet! (1 pont)
- 6.4. A 6.3.2. szakaszban vezessük le a $q(u) = c\xi$ összefüggést! (1 pont)
- 6.5. Igazoljuk a (6.26) egyenletet! (2 pont)
- 6.6. Igazoljuk a (6.35) összefüggést! (2 pont)
- 6.7. Mutassuk meg, hogyan jutunk el a (6.42) Maxwell-eloszlástól a (6.44) Maxwell-spektrumig! (2 pont)

- 6.8. Becsüljük meg a termikus energiákig való lassuláshoz szükséges időt és a termikus diffúzió időtartamát! Mutassuk meg, hogy a lassuláshoz szükséges idő elhanyagolható a diffúzió idejéhez képest! (5 pont)
- 6.9. A (6.29) közelítő modellnek is megfeleltethető egy lassulás magfüggvény.
 a) Írjuk fel ennek analitikus képletét! (5 pont)
 b) A szóró mag A tömegszámának különböző értékei mellett grafikusán hasonlítsuk össze a (6.12) magfüggvénnyel! (5 pont)
- 6.10. Végtelen abszorpciómentes közegre oldjuk meg a lassulási egyenletet Laplace-transzformációval! A spektrumot vegyük monoenergetikusnak: $f(E) = \delta(E)$. (10 pont)
- 6.11. Termikus energiákon a fluxust egy-egy állandó (átlagos) értékkel közelítjük a fűtőelem belsejében és a moderátorban. Ezzel a közelítéssel fejezzük ki a (6.49b) termikus hasznosítási tényezőt a (6.49a) előnytelenégi tényezővel! (5 pont)
- 6.12. Termikus energiákon a fluxust egy-egy állandó (átlagos) értékkel közelítjük a fűtőelem belsejében és a moderátorban. Ezzel a közelítéssel
 a) (6.50) szerint írjuk fel a termikus csoportállandó képletét az abszorpciós, hasadási, szórási és transzport hatáskeresztmetszetekre! (4 pont)
 b) Az 1.2. táblázat adatait felhasználva számítsuk ki a csoportállandókat egy 3,6% dúsítású paksi elemi cellára, ha az előnytelenégi tényező $\delta = 1,15$! Adatok: a fűtőelem sugara 0,76 cm, a hatszöges cella rácsállandója 1,22 cm, az UO_2 sűrűsége $10,4 \text{ g/cm}^3$, a Zr-burkolatot elhanyagoljuk, a víz sűrűsége $0,99799 \text{ g/cm}^3$. Útmutatás: használjuk fel a 2.2. és 2.5. feladatok eredményeit. (4 pont)
- 6.13. A Hellstrand-képletek segítségével számítsuk ki a paksi atomerőmű 3,6%-os fűtőelemére a rezonanciaintegrált a hőmérséklet függvényében! Adatok: a fűtőelem sugara 0,76 cm, az UO_2 sűrűsége $10,4 \text{ g/cm}^3$. (4 pont)
- 6.14. A (6.30) képletek alapján u függvényében grafikusán vázoljuk fel a $\psi(u)$ spektrum menetét! (4 pont)
- 6.15. Az abszorpciós hatáskeresztmetszet epitermikus csoportállandója

$$\Sigma_a^{\text{epi}} = \frac{\int_{E_m}^{\infty} \Sigma_a(E) \psi(E) dE}{\int_{E_m}^{\infty} \psi(E) dE}.$$

Adjunk becslést erre a 6.13. feladat megoldásában kiszámolt rezonanciaintegrálok segítségével! Útmutatás: induljunk ki a (6.21) egyenletből $B^2 = 0$ helyettesítéssel. (10 pont)

- 6.16. Oldjuk meg a lassulási egyenletet abban az esetben, amikor mind a szórási, mind az abszorpciós hatáskeresztmetszet független a letargiától! Az eredményt hasonlítsuk össze a (6.30) közelítő megoldással! (5 pont)
- 6.17. Írjuk fel a lassulási egyenletet az energiaváltozót használva! Határozzuk meg a Placzek-tranziens szakadásának nagyságát az αE_0 helyen (itt E_0 a forrás által kibocsátott neutronok energiája). (4 pont)
- 6.18. Mi a $q(E)$ lassulási sűrűség alakja, ha $E \ll \alpha E_0$? Hogyan kapható meg $q(E)$ -ből a rezonanciakikerülés valószínűsége? (3 pont)
- 6.19. Hány ütközést szenved átlagosan egy neutron, amíg energiája 100 keV-ről 2 eV-ra csökken

- a) ^{238}U magon,
- b) deutériumon,
- c) grafiton (^{12}C) és
- d) oxigéneken (^{16}O)?

(5 pont)

6.20. A Greuling-Goertzel lassulási modellben szereplő $a(u) = -\frac{G_{10}(u)}{G_{20}(u)}$ paraméter

elhagyható, ha $A > 27$. Mutassuk meg, hogy ezzel az elhanyagolással a Greuling-Goertzel-modell átmegy a Fermi-modellbe! (5 pont)

6.21. Mi a valószínűsége annak, hogy grafiton lassuló 100 eV-os neutronok beleesnek egy 1,65 eV-nál lévő $\Gamma = 0,1$ eV szélességű rezonanciába? Hogyan változik ez a valószínűség, ha a hőmérséklet növekedése miatt a rezonancia kiszélesedik, és szélessége háromszorosára nő? (6 pont)

6.22. A sokszög alakú cellát gyakran helyettesítjük henger alakú cellával.

- a) Hogyan kell meghatározni a henger alakú cella sugarát? (2 pont)
- b) Henger alakú cellában mivel kell helyettesíteni a reflektív peremfeltételt? (2 pont)
- c) Okoz-e a reflektív peremfeltétel hibát a hengeres cellában? (2 pont)

7. Többscsoport módszerek

Az 5. fejezetben megismertük, mit lehet a reaktorról egycsoport-közelítésben mondani, a 6. fejezetben pedig megtanultuk az aszimptotikus lassuláselmélet legfontosabb tételeit. Tudjuk, hogy ez a két elmélet csak homogén közegben, a határfelületektől elegendő távolságban érvényes. Összetett, különböző anyagi minőségű tartományokból álló reaktorban ezek az elméletek felmondják a szolgálatot. Ilyen rendszerek tárgyalására született a *többscsoport-elmélet*, amelyen belül a *kevéscsoport-elmélet* lesz a jelen fejezet tárgya.

A többscsoport-elméletben a teljes 0-tól 10 MeV-ig terjedő energiatartományt felosztjuk véges számú intervallumra. Egy intervallumba eső energiájú neutronokat *neutroncsoportnak* nevezzük. Mindegyik csoporthoz rendelünk egy *csoportfluxust*, valamint *csoportállandókat*, és a (4.21) diffúzióegyenletet egy ezekre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszerrel helyettesítjük. Bonyolult rendszerek esetében a csoportok száma általában nem nagy (hatnál ritkán több), az ezen alapuló elméletet nevezük *kevéscsoport-elméletnek*.

Egészen az 1960-as évek végéig a kétscsoport-elmélet volt divatban. Ekkor az első csoportba az epitermikus, a másodikba pedig a termikus neutronok tartoztak. Két csoporttal már meglehetősen jó eredményeket sikerült elérni. Ahogy azonban megjelentek a nagy teljesítményű számítógépek, a csoportok számát növelni tudták. Például a 4-csoport-elméletben a következő csoportokat használták:

1. csoport: a $0,8 \text{ MeV}^1$ feletti energiájú neutronok;
2. csoport: a rezonanciák feletti energiák;
3. csoport: a rezonanciák tartománya;
4. csoport: termikus energiák.

Még finomabb beosztást tett lehetővé a 6-csoport-elmélet.

Már a 6. fejezetben jeleztük, hogy a lassuláselméletet sem folytonos energia-, illetve letargiaváltozóval szoktuk alkalmazni, hanem a teljes energiatartományt itt is véges számú energiacsoporthoz osztjuk fel. Mivel bizonyos hatáskeresztmetszetek gyorsan változnak az energiával, itt az energiacsoporthoz száma nagy. Például a termikus energiatartományban legalább 15 csoportra van szükség, nem is beszélve a rezonanciák tartományáról, ahol sokkal több csoportot kell használni. Bizonyos számításokban a csoportok száma több száz, de – ha a rezonanciák hatását részletesen kívánjuk leírni – több ezer is lehet. Ezért a lassuláselméletet *sokcsoport-modellben* szokás tárgyalni. A megfelelő programokban a csoportok száma legalább 60, de 200 felett is lehet. A lassuláselmélet sokcsoport változatát ebben a jegyzetben a matematikai bonyodalmak miatt nem tudjuk tárgyalni, ezért az alábbiakban az energiaspektrumot továbbra is folytonos energiaváltozóval fogjuk használni, de az Olvasónak tudnia kell, hogy az itteni integrálokat a sokcsoport-elméletben a csoportokra való összegzés helyettesíti.

¹ $0,8 \text{ MeV}$ az ^{238}U hasadási küszöbenergiája.

7.1. Kevéscsoport diffúzióelmélet

A többcsoport módszerek lényege a következő. A teljes energiatarományt felosztjuk G számú intervallumra:

$$(0 =) E_G < E_{G-1} < E_{G-2} < \dots < E_2 < E_1 < E_0 (= 10 \text{ MeV}).$$

Azokat a neutronokat, amelyek energiája a g -edik intervallumba esik, tehát amelyekre

$$E_k \leq E \leq E_{k-1},$$

a g -edik (*energia*)*csoport*nak nevezzük. A csoporthoz tartozó fluxust (az ún. *csoportfluxust*) a

$$\Phi_g(\mathbf{r}) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Phi(\mathbf{r}, E) dE \quad (7.1)$$

integrálok segítségével definiáljuk ($g = 1, 2, \dots, G$). Az utolsó (tehát a G -edik) csoport általában a termikus csoport abban az értelemben, ahogy ezt a 6.5. alfejezetben definiáltuk, tehát leggyakrabban $E_{G-1} = E_m = 0,625 \text{ eV}$ vagy $1,85 \text{ eV}$.

Ezután tekintünk valamilyen magreakciót, amelynek a hatáskeresztmetszete legyen $\Sigma(E)$. Az erre vonatkozó teljes reakciógyakoriságot felbontjuk az energiacsoportok szerinti részekre:

$$\int_0^{\infty} \Sigma(E) \Phi(\mathbf{r}, E) dE = \sum_{g=1}^G \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma(E) \Phi(\mathbf{r}, E) dE = \sum_{g=1}^G \Sigma_g \Phi_g(\mathbf{r}),$$

ahol

$$\Sigma_g = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} \Sigma(E) \Phi(\mathbf{r}, E) dE}{\Phi_g(\mathbf{r})} \quad (7.2)$$

a g -edik csoporthoz tartozó *csoportállandó*. Ezen a módon definiálhatunk abszorpciós, hasadási, szórás és egyéb csoportállandókat is (például diffúzióállandó, $1/v$). A szórás magfüggvény megfelelője a többcsoport módszerben a *szórás mátrix*:

$$\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_0^{\infty} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi(\mathbf{r}, E') dE' = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g}^s \Phi_{g'}(\mathbf{r}), \quad (7.3)$$

ahol

$$\Sigma_{g' \rightarrow g}^s = \frac{\int_{E_g}^{E_{g-1}} dE \int_{E_{g'}}^{E_{g'-1}} \Sigma_s(E' \rightarrow E) \Phi(\mathbf{r}, E') dE'}{\Phi_{g'}(\mathbf{r})}. \quad (7.4)$$

Analóg módon definiáljuk a rugalmatlan szórási mátrixot is.

A (4.21) diffúzióegyenlet többszoport megfelelőjét formálisan könnyen levezethetjük, ha külön-külön integráljuk a $g = 1, 2, \dots, G$ csoportokra:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \Phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \text{div}[D_g(\mathbf{r}) \text{grad} \Phi_g(\mathbf{r}, t)] - \Sigma_g^t \Phi_g(\mathbf{r}, t) + Q_g(\mathbf{r}, t), \quad (7.5a)$$

ahol

$$Q_g(\mathbf{r}, t) = \sum_{g'=1}^G \Sigma_{g' \rightarrow g}^s \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + f_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^f \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \sum_{g'=1}^N \Sigma_{g' \rightarrow g}^{\text{in}} \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_g(\mathbf{r}, t). \quad (7.5b)$$

Itt értelemszerűen

$$f_g = \int_{E_g}^{E_{g-1}} f(u) du.$$

Az $S_g(\mathbf{r}, t)$ külső forrástag definíciója analóg.

Ezen a módon a (4.21) integro-differenciálegyenletet egy G ismeretlenes differenciálegyenlet-rendszerre alakítottuk át, amelynek megoldására kidolgozott numerikus módszerek állnak rendelkezésre. Nem állítjuk, hogy az eredeti (4.21) egyenlet megoldására nincsenek megfelelő numerikus módszerek, de olyan esetekben, amikor a vizsgálandó reaktor nagy számú különböző anyagi minőségű tartományból áll, célravezetőbb a (7.5) *többszoport diffúzióegyenlet*ből kiindulni.

A fentiek azonban csak formálisan jelentenek előrelépést, hiszen a vázolt módszer alkalmazását több nehézség is gátolja:

- (1) Fenti definíciójuk szerint a csoportállandókat csak akkor tudjuk kiszámítani, ha ismerjük a $\Phi(\mathbf{r}, E)$ energiaspektrumot, tehát *circulus viciosus*ba kerültünk.
- (2) Mivel a spektrum általában függ az \mathbf{r} helykoordinátától, a csoportállandók szigorúan véve még akkor is függnék \mathbf{r} -től, amikor a vizsgált közeg egyébként homogén. Ez a megállapítás különösen a különböző anyagi összetételű homogén tartományokat elválasztó határfelületek közelében lehet érvényes, hiszen az energiaspektrum alakja ilyen helyeken függ a legerősebben a helytől. Nem nehéz belátni, hogy a csoportállandók térfüggése annál gyengébb lesz, minél szűkebbek az energiacsoportok, hiszen – a rezonanciák tartományától eltekintve – a fluxus az energiának lassan változó függvénye. Ebből következik, hogy célszerű a csoportok G számát minél nagyobbra választani, hiszen ekkor a csoportállandókat egy homogén tartományon belül egyre jobb közelítéssel \mathbf{r} -től függetlennek tekinthetjük.
- (3) A (7.5) egyenletrendszer megoldásakor általában a *véges differenciák* módszerét alkalmazzuk, vagyis a Laplace-operátorban szereplő differenciálhányadosokat differenciálhányadosokkal közelítjük [vö. (7.29)]. Ezen a módon végül egy lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk, amelyben az ismeretlenek száma az energia-

csoporthoz és a térbeli osztópontok számának a szorzata. Nyilvánvaló, hogy minél részletesebben kívánjuk a vizsgált rendszert leírni, annál több térbeli osztópontot kell alkalmaznunk. A gyakorlatban nem ritka, hogy a térbeli osztópontok száma több ezer. Annak érdekében, hogy ne kapjunk kezelhetetlenül sok ismeretlenes algebrai egyenletrendszert, ilyenkor arra törekszünk, hogy az energiacsoporthoz száma lehetőleg kicsi legyen.

Nyilvánvaló e két utóbbi törekvés közötti ellentmondás, amelynek a feloldására a csoportállandók számítását általában (legalább) két lépésben végezzük, és ezzel tudjuk megkerülni az (1) alatti problémát is:

- Először sok energiacsoporthoz választunk, és a reaktor geometriai viszonyait csak elnagyoltan vesszük figyelembe. Az esetek többségében ez azt jelenti, hogy minden anyagilag homogén tartományra külön-külön alkalmazzuk az aszimptotikus lassuláselméletet. Ennek eredményei alapján minden homogén anyagi minőségű tartományra csoportállandókat számítunk ki, amelyeket tartományonként állandónak tekintünk.
- Második lépésben kevés (2, esetleg 4 vagy 6) csoportot választunk, amelyekre a csoportállandókat az előbbi lépésben kapott spektrum felhasználásával számítjuk ki. A (7.2)-(7.4) képletekben ekkor $\Phi(\mathbf{r}, E)$ helyére $\psi(E)$ kerül. Ebben a lépésben már nagy számú térbeli osztópontot választhatunk.

A kevés csoport-elméletben már nem szoktuk egymástól különválasztani a rugalmas és rugalmatlan szórásokat, ezért bevezetjük a

$$\Sigma_{g' \rightarrow g} = \Sigma_{g' \rightarrow g}^s + \Sigma_{g' \rightarrow g}^{\text{in}}$$

szórási mátrixot. További egyszerűsítés, hogy a szórási hatáskeresztmetszetből le szoktuk vonni azoknak a szórásoknak a hatáskeresztmetszetét, amelyek nem vezetnek ki a csoportból:

$$\Sigma_g^R = \Sigma_g^s + \Sigma_g^{\text{in}} - \Sigma_{g \rightarrow g} = \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g \rightarrow g'}. \quad (7.6)$$

Az így kapott csoportállandó neve: *removal* (kiszórási) hatáskeresztmetszet. Ezzel a (7.5) egyenletek így írhatók:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \Phi_g(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = & \text{div}[D_g(\mathbf{r}) \text{grad} \Phi_g(\mathbf{r}, t)] - [\Sigma_g^a(\mathbf{r}) + \Sigma_g^R(\mathbf{r})] \Phi_g(\mathbf{r}, t) + \\ & + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g' \rightarrow g} \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + f_g \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^f \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_g(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (7.7)$$

($g = 1, 2, \dots, G$). Az energiacsereét leíró összegben csak azok a tagok szerepelnek, amelyek a tekintett g -edik csoportból *kivezetnek*. A sztatikus sajátérték-egyenletet a (7.7) egyenletek alapján egyszerűen felírhatjuk:

$$\operatorname{div}[D_g(\mathbf{r})\operatorname{grad}\Phi_g(\mathbf{r})] - [\Sigma_g^a(\mathbf{r}) + \Sigma_g^R(\mathbf{r})]\Phi_g(\mathbf{r}) + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g' \rightarrow g} \Phi_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{f_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^f \Phi_{g'}(\mathbf{r}) = 0. \quad (7.8)$$

7.2. Kétcsoport-elmélet

A kevéscsoport-elméletek közül a legegyszerűbb a *kétcsoport-elmélet*, amelyben $\Phi_1(\mathbf{r})$ az *epitermikus*, $\Phi_2(\mathbf{r})$ a *termikus* neutronok fluxusa. Egydimenziós rendszerekben ez még analitikusan kezelhető. Ugyanakkor a két csoport az egycsoport-közelítéshez képest számos, minőségileg új elemet hoz be az elméletbe, és ezzel a kétcsoport-elmélet már a gyakorlatban is hasznosítható eredményeket ad. Az alábbiakban két példán mutatjuk be ennek az elméletnek az alkalmazására.

7.2.1. Csupasz termikus reaktorok

Tekintsünk egy csupasz reaktort, amelyet oldalról az $x = a$ és $x = -a$ síkok határolnak. Erre vonatkozóan kétcsoport-közelítésben (7.8)-nak az alábbi egyenletrendszer felel meg:

$$D_1 \frac{d^2 \Phi_1(x)}{dx^2} - \Sigma_1 \Phi_1(x) + \frac{1}{k_{\text{eff}}} [\nu \Sigma_1^f \Phi_1(x) + \nu \Sigma_2^f \Phi_2(x)] = 0, \quad (7.9a)$$

$$D_2 \frac{d^2 \Phi_2(x)}{dx^2} - \Sigma_2^a \Phi_1(x) + \Sigma_1^R \Phi_1(x) = 0, \quad (7.9b)$$

ahol bevezettük a

$$\Sigma_1 = \Sigma_1^a + \Sigma_1^R$$

jelölést. Ennek az egyenletrendszernek a megoldását mindkét csoportban olyan függvények alakjában kereshetjük, amelyek mindegyike kielégíti az (5.9) Helmholtz-egyenletet. Szimmetriaokokból tehát a megoldást a

$$\Phi_1(x) = \phi_1 \cos Bx \quad (7.10a)$$

$$\Phi_2(x) = \phi_2 \cos Bx \quad (7.10b)$$

függvények alakjában kereshetjük. Ha ezeket (7.9)-be helyettesítjük, akkor a ϕ_1 és ϕ_2 együtthatókra vonatkozóan homogén algebrai egyenletrendszert kapunk. Ebből

$$\phi_2 = \frac{\Sigma_1^R}{D_2 B^2 + \Sigma_2^a} \phi_1 \quad (7.11)$$

szerint kapjuk az epitermikus és a termikus fluxus közötti arányt, továbbá az egyenletrendszernek csak akkor van nem-triviális megoldása, ha

$$k_{\text{eff}} = \frac{\nu\Sigma_1^f + \frac{\nu\Sigma_2^f \Sigma_1^R}{D_2 B^2 + \Sigma_2^a}}{D_1 B^2 + \Sigma_1}. \quad (7.12)$$

A végtelen reaktor sokszorozási tényezője ebből $B^2 = 0$ helyettesítéssel adódik:

$$k_{\infty} = \frac{\nu\Sigma_1^f + \frac{\nu\Sigma_2^f \Sigma_1^R}{\Sigma_2^a}}{\Sigma_1}. \quad (7.13)$$

A továbbiakban – az egyszerűség kedvéért – az epitermikus hasadásoktól eltekintünk, vagyis feltesszük, hogy

$$\nu\Sigma_1^f = 0,$$

amivel

$$k_{\infty} = \frac{\nu\Sigma_2^f \Sigma_1^R}{\Sigma_1 \Sigma_2^a}. \quad (7.14)$$

Ennek a képletnek az értelmezésére még visszatérünk.

A B_m^2 anyagi görbületi paraméter B^2 -nek az az értéke, amely mellett $k_{\text{eff}} = 1$. (7.12) szerint tehát B_m^2 kielégíti a

$$(D_1 B^2 + \Sigma_1)(D_2 B^2 + \Sigma_2^a) = \nu\Sigma_2^f \Sigma_1^R$$

kritikussági egyenletet. Osszuk ezt Σ_1 -gyel és Σ_2^a -val, majd vezessük be a

$$\tau = \frac{D_1}{\Sigma_1} \quad (7.15)$$

és

$$L^2 = \frac{D_2}{\Sigma_2^a} \quad (7.16)$$

jelöléseket. Az utóbbi megfelel az egycsoport elméletben szereplő diffúziós területnek [vö. (5.14)], τ pedig nem más, mint a 6.6. alfejezetben bevezetett Fermi-kor kétcsoport-elméletbeli megfelelője. Ezzel a kritikussági egyenlet átmegy az

$$(1 + \tau B^2)(1 + L^2 B^2) = k_{\infty}$$

alakba, amelynek egy pozitív és egy negatív gyöke van:

$$B_1^2 = \frac{-(L^2 + \tau) + \sqrt{(L^2 + \tau)^2 + 4L^2\tau(k_\infty - 1)}}{2L^2\tau} \approx \frac{k_\infty - 1}{L^2 + \tau} = \frac{k_\infty - 1}{M^2} \quad (7.17)$$

és

$$-B_2^2 = \frac{-(L^2 + \tau) - \sqrt{(L^2 + \tau)^2 + 4L^2\tau(k_\infty - 1)}}{2L^2\tau} \approx -\left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau}\right) - B_1^2. \quad (7.18)$$

Közülük B_1^2 adja meg az anyagi görbületi paramétert, mert az ehhez tartozó $\cos B_1x$ felel meg az egycsoport elméletben szereplő alaplómódusnak. M^2 a 6.6. alfejezetben bevezetett migrációs terület. A B_2^2 sajátérték megjelenése már a kétcsoport-elmélet következménye. Ha nem két-, hanem G -csoport-elméletben határoztuk volna meg ugyanezt, akkor G sajátértéket kaptunk volna, amelyek közül az egyik pozitív (ti. az anyagi görbületi paraméter), a többi pedig (B_1^2 -hez képest) nagy abszolút értékű negatív szám.

A (7.17) és (7.18) gyököket (7.10)-be helyettesítve, (7.11) figyelembevételével kapjuk az általános megoldást:

$$\Phi_1(x) = \cos B_1x + A \operatorname{ch} B_2x, \quad (7.19a)$$

$$\Phi_2(x) = \frac{\Sigma_1^R}{D_2B_1^2 + \Sigma_2^a} \cos B_1x + A \frac{\Sigma_1^R}{-D_2B_2^2 + \Sigma_2^a} \operatorname{ch} B_2x, \quad (7.19b)$$

ahol A a határfeltételek által meghatározott állandó. Valójában az egész megoldás egy tetszőleges állandó szorzó erejéig határozatlan. Ezt itt úgy választottuk meg, hogy az epitermikus fluxusban a $\cos B_1x$ tag együtthatója 1 legyen. A diffúziós határfeltételek szerint mind az epitermikus, mind a termikus fluxusnak el kell tűnnie a reaktor (extrapolált) külső határfelületén, tehát

$$\Phi_1(a) = \Phi_2(a) = 0.$$

A (7.19) alatti függvényekre ez csak úgy teljesülhet *egyszerre*, hogy $A = 0$, és

$$a = \frac{\pi}{2B_m}, \quad (7.20)$$

mint az egycsoport elméletben. Ez az eredmény összhangban van a reaktorelmélet alaptételével: *a térbeli eloszlás alakja mindkét csoportban ugyanaz* (vagyis $\cos B_1x$).

(7.14)-et átírhatjuk a négyfaktor-formulának megfelelő alakra. Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt az urán Σ_2^{aU} termikus abszorpciós hatáskeresztmetszetével, majd definiáljuk a következő mennyiségeket:

$$\eta = \frac{\nu \Sigma_2^f}{\Sigma_2^{aU}}$$

megadja, hogy egy az uránban abszorbeálódó neutronra hány hasadási neutron esik;

$$f = \frac{\Sigma_2^{aU}}{\Sigma_2^a}$$

a termikus hasznosítási tényező [vö. (6.49b)], továbbá

$$p = \frac{\Sigma_1^R}{\Sigma_1}$$

a rezonanciakikerülési valószínűség kétcsoport-elméletbeli megfelelői. Abban az esetben, amikor epitermikus hasadás is van, k_∞ a (7.14)-ben szereplőnél nagyobb [vö. (7.13)], és ezt az ε gyorshasadási tényezővel vehetjük figyelembe:

$$\varepsilon = 1 + \frac{\Sigma_2^a}{\Sigma_1^R} \cdot \frac{\nu \Sigma_1^f}{\nu \Sigma_2^f}.$$

ε eredetileg csak az ^{238}U hasadási küszöbe feletti energiájú neutronok által kiváltott hasadásokat jelentette, és az ^{235}U epitermikus hasadásait elhanyagolták. Itt az utóbbiak is megjelennek. Végeredményben megkaptuk a nevezetes “négyfaktor-formulát”:

$$k_\infty = \eta f p \varepsilon.$$

7.2.2. Reflektált reaktor kétcsoport-elmélete

Az 5.8.2. szakaszban fejtettük ki a reflektor egycsoport-elméletét. Ezt a gondolatmenetet megismételjük kétcsoport-elméletben, hogy lássuk, milyen új minőségi elemeket hoz be a termikus és gyors csoport szétválasztása. Tekintsük ismét az 5.7. ábrán bemutatott rendszert. Tárgyalásához az 5.8.2. szakaszban írtakhoz hasonlóan az aktív zónára vonatkozó (7.9) egyenleteket ki kell egészíteni a reflektorra vonatkozó analóg egyenletekkel:

$$D_1^r \frac{d^2 \Phi_1(x)}{dx^2} - \Sigma_1^r \Phi_1(x) = 0, \quad (7.21a)$$

$$D_2^r \frac{d^2 \Phi_2(x)}{dx^2} - \Sigma_2^{ar} \Phi_2(x) + \Sigma_1^{Rr} \Phi_1(x) = 0. \quad (7.21b)$$

Az “r” és “z” felső indexeket a reflektorra, illetve az aktív zónára vonatkozó csoport-állandók megkülönböztetésére alkalmazzuk. (7.15) és (7.16) mintájára bevezetjük a

$$\tau_r = \frac{D_1^r}{\Sigma_1^r}$$

és

$$L_r^2 = \frac{D_2^r}{\Sigma_2^{\text{ar}}}$$

jelöléseket. Segítségükkel a (7.21) egyenletrendszernek $x \rightarrow \infty$ mellett véges megoldásait az epitermikus csoportban a

$$\Phi_1^r(x) = C_1 e^{-x/\sqrt{\tau_r}} \quad (7.22)$$

alakban írhatjuk fel, amiből (7.11) figyelembevételével a termikus fluxus általános alakja a reflektorban

$$\Phi_2^r(x) = C_2 e^{-x/L_r} + \frac{\Sigma_1^{\text{Rr}}}{-D_2^r/\tau_r + \Sigma_2^{\text{ar}}} C_1 e^{-x/\sqrt{\tau_r}}. \quad (7.23)$$

Az itt szereplő C_1 és C_2 együtthatókat, valamint az aktív zónára kapott (7.19) megoldásban szereplő A együtthatót úgy kell megválasztani, hogy az $x = a$ határfelületen mindkét csoportbeli fluxus és mindkét áram folytonos legyen.

(1) Az epitermikus fluxus folytonossága:

$$\cos B_1 a + A \text{ch } B_2 a = C_1 e^{-a/\sqrt{\tau_r}}; \quad (7.24)$$

(2) a termikus fluxus folytonossága:

$$\begin{aligned} & \frac{\Sigma_1^{\text{Rz}}}{D_2^z B_1^2 + \Sigma_2^{\text{az}}} \cos B_1 a + \frac{\Sigma_1^{\text{Rz}}}{-D_2^z B_2^2 + \Sigma_2^{\text{az}}} A \text{ch } B_2 a = \\ & = C_2 e^{-a/L_r} + \frac{\Sigma_1^{\text{Rr}}}{-D_2^r/\tau_r + \Sigma_2^{\text{ar}}} C_1 e^{-a/\sqrt{\tau_r}}; \end{aligned} \quad (7.25)$$

(3) az epitermikus áram folytonossága:

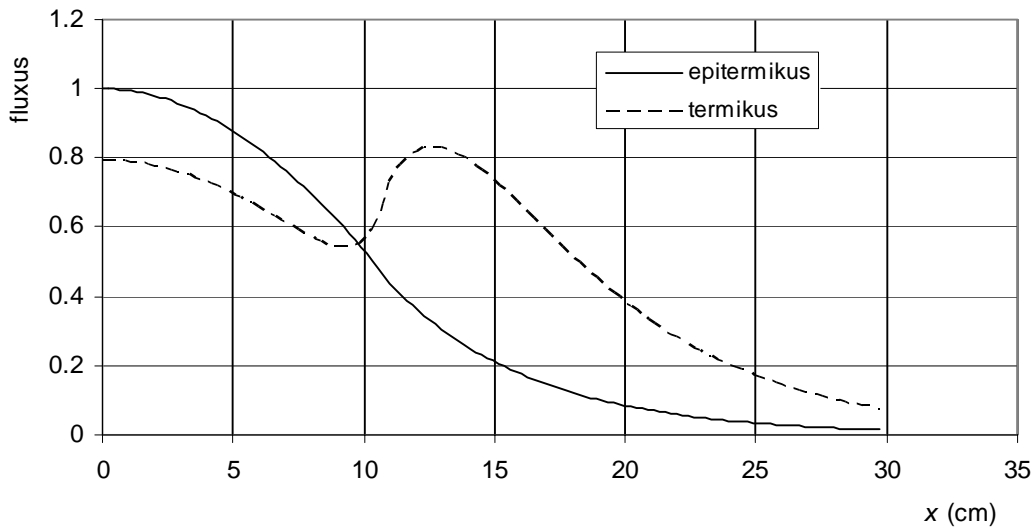
$$-D_1^z B_1 \sin B_1 a + D_1^z B_2 A \text{sh } B_2 a = -\frac{D_1^r}{\sqrt{\tau_r}} C_1 e^{-a/\sqrt{\tau_r}}; \quad (7.26)$$

(4) a termikus áram folytonossága:

$$-\frac{\Sigma_1^{\text{Rz}}}{D_2^z B_1^2 + \Sigma_2^{\text{az}}} D_2^z B_1 \sin B_1 a + \frac{\Sigma_1^{\text{Rz}}}{-D_2^z B_2^2 + \Sigma_2^{\text{az}}} D_2^z B_2 A \text{sh } B_2 a =$$

$$= -\frac{D_2^r C_2}{L_r} e^{-a/L_r} - \frac{\Sigma_1^{Rr}}{-D_2^r/\tau_r + \Sigma_2^{ar}} \frac{D_2^r C_1}{\sqrt{\tau_r}} e^{-a/\sqrt{\tau_r}}. \quad (7.27)$$

Ez négy feltétel három együtthatóra, vagyis ezek az egyenletek egyben a kritikusági feltételt is tartalmazzák (vö. előző szakasz). Ez azt jelenti, hogy a (7.24) – (7.27) egyenletrendszernek csak a meghatározott értéke mellett van megoldása. Az egyenletek transzcendensek, tehát a kritikus méretet csak numerikus úton kaphatjuk meg. Ha a számítást elvégezzük, és a kapott együtthatókat a (7.19), (7.22) és (7.23) képletekbe helyettesítjük, akkor a 7.1. ábrán látható fluxusokat kapjuk. Az epitermikus fluxus a reaktor közepétől kifelé haladva – koszinusz függvény szerint – monoton csökken, és ez a csökkenés – exponenciálisan – a reflektorban is folytatódik. Ezzel szemben a termikus fluxus csökkenése az aktív zóna szélén megszűnik, és a reflektorban egy maximum alakul ki. Ez a termikus reaktorokban jellegzetesen fellépő “*reflektorpúp*” jelensége, amely az egycsoport elméletben nem lép fel, tehát ez a kéts csoport-elmélet következménye.



7.1. ábra. A “reflektorpúp” jelensége reflektált reaktorban ($a = 11$ cm). A jobb ábrázolhatóság kedvéért a termikus fluxust megszoroztuk 4-gyel

A jelenség fizikai magyarázata a következő. Az aktív zónából kiszökő neutronok a reflektorban termalizálódnak, majd mint termikus neutronok diffundálnak tovább. Általában a diffúziós terület lényegesen kisebb, mint a Fermi-kor. Emiatt diffúziójuk során a termalizált neutronok sokkal kisebb távolságokra jutnak el, mint az epitermikus neutronok, és így az aktív zóna szélétől körülbelül $\sqrt{\tau_r}$ távolságban fel-dúsulnak.

Ha a (7.24) – (7.27) egyenleteket közelebbről megnézzük, akkor megtaláljuk ennek matematikai okát is. A (7.22)-ben felírt fluxusnak pozitívnak kell lennie, tehát a C_1 együttható pozitív, vagyis (7.26) jobb oldala negatív (annak megfelelően, hogy az epitermikus fluxus a reflektorban csökken). (7.25) bal oldalának második tagjában a nevező negatív, hiszen (7.18) és (7.16) szerint

$$-D_2^z B_2^2 + \Sigma_2^{az} = -\frac{D_2^z}{\tau_z} - D_2^z B_1^2 < 0.$$

Ez azt jelenti, hogy (7.19)-ben, illetve (7.24)-ben és (7.26)-ban a $\text{ch } B_2 a$ -t tartalmazó tag együttthatója az epitermikus és termikus fluxusnál különböző előjelű. Amelyik csoportban az együtttható pozitív, abban a csoportban ez az aktív zóna határának a közelében gyorsan növekvő tagot jelent. Ha viszont az együtttható negatív, akkor a fluxusban ez a tag is ugyanúgy csökkenő, mint a $\cos B_1 x$ alaplómódus. Nos, az aktív zóna határán az epitermikus fluxusok (7.24) és (7.26) szerint általában úgy illeszthetők össze, hogy $A < 0$. Arról van szó, hogy a reflektormegtakarítás miatt az aktív zóna határán a $\cos B_1 x$ tag még nem csökken elég gyorsan, így a reflektorban csökkenő epitermikus fluxushoz csak akkor tudjuk illeszteni, ha (7.24) bal oldalán a második tag is csökkenő, vagyis A negatív. Eszerint tehát a $\text{ch } B_2 x$ tag együttthatója a termikus csoportban pozitív, ami azt jelenti, hogy az aktív zóna határának a közelében a termikus fluxusnak a reflektorban is növekednie kell. Mivel azonban a fluxus az aktív zónától távol nullához tart, a reflektorban valahol egy maximumnak kell kialakulnia. Érdeemes megjegyezni, hogy ezek az előjelviszonyok grafit reflektor esetében többnyire nem így alakulnak, ezért ott a reflektorpúp általában elmarad.

Befejezésül megemlíjtük, hogy (7.19)-ben az $A \text{ch } B_2 x$ tag x -szel lényegesen gyorsabban változik, mint a $\cos B_1 x$ függvény. Mivel az A együtttható általában nagyon kicsi, ez a tag az aktív zóna közepén a $\cos B_1 x$ mellett elhanyagolható, és csak az aktív zóna határának a közelében válik számottevővé. Ez a megállapítás mindkét csoportra érvényes. Korábban ezért neveztük a $\cos B_1 x$ tagot *aszimptotikus fluxus*nak, hiszen a határfelületektől elegendően távol minden energián megadja a fluxus térbeli eloszlását. Ennek az általános megállapításnak itt most a kétcsoport-elméletbeli megnyilvánulását láttuk. Az aszimptotikus fluxust a reflektorba extrapolálva kapjuk a reflektormegtakarítást, amely a két csoportra azonos.

7.4. A véges differenciák módszere

7.4.1. A véges differenciák felírása

Azt a megoldási módszert, amelyet az előző alfejezetben alkalmaztunk, át lehet vinni kettőnél több csoportra is. Mint e fejezet bevezetőjében mondtuk, a kevés-csoport-elmélet nem egydimenziós, hanem két-, esetleg háromdimenziós problémák megoldására való. Erre azonban már két csoportban sem tudjuk alkalmazni az előzőekben követett módszert. A kevés-csoport diffúzióegyenletet általában a *véges differenciák módszerével* oldjuk meg. Lényegét az ún. X–Y geometria példáján mutatjuk be. Először is: a fluxust

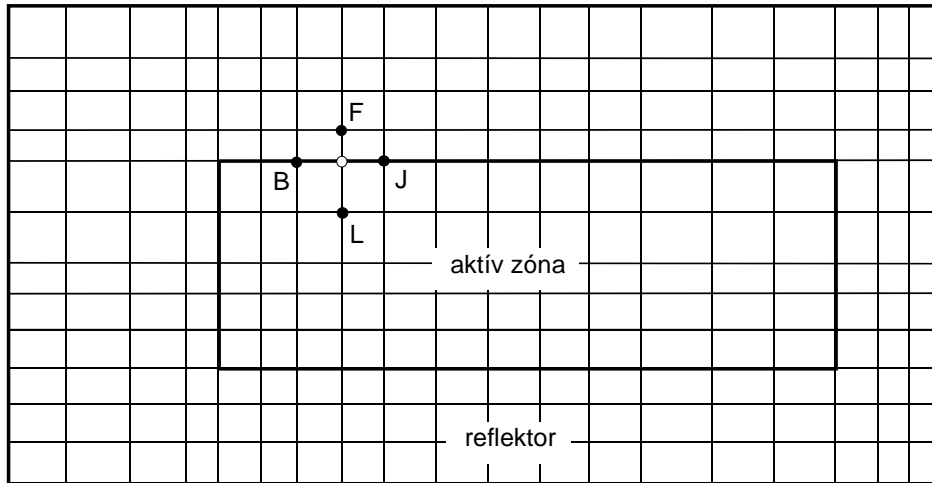
$$\Phi_g(\mathbf{r}, t) = \Phi_g(x, y, z, t) = \Phi_g(x, y, t) \cos(B_z z)$$

alakban közelítjük. Ekkor a neutronkifolyást jelentő tag a következőképpen írható:

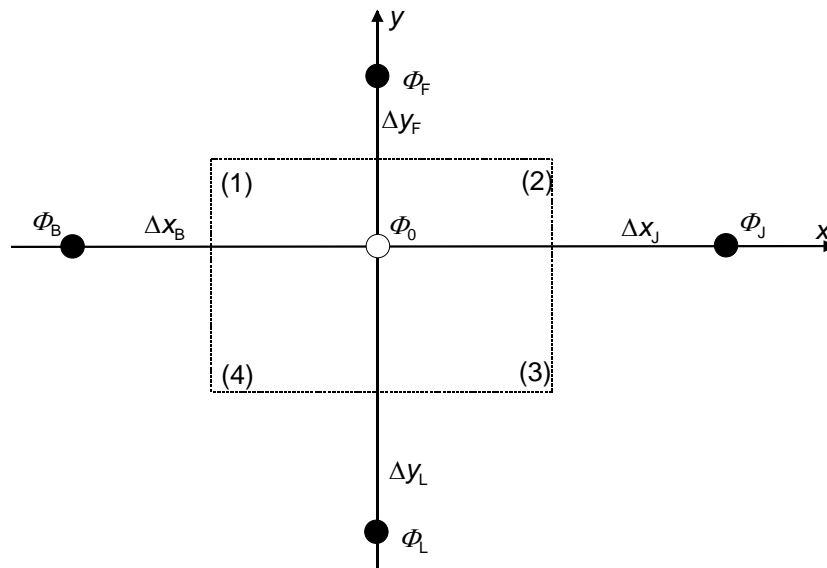
$$\text{div}(D_g \text{grad } \Phi_g(\mathbf{r}, t)) = \left\{ \text{div}[D_g(x, y) \text{grad } \Phi_g(x, y)] - D_g B_z^2 \Phi_g(x, y, t) \right\} \cos(B_z z),$$

ahol B_z^2 az axiális görbületi paraméter. A div és grad operátorok a jobb oldalon már csak az (x, y) változókra hatnak. Ebben az esetben tehát (7.8) a következő alakba megy át:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}[D_g(x, y)\operatorname{grad}\Phi_g(x, y)] - [\Sigma_g^a(x, y) + D_g(x, y)B_z^2 + \Sigma_g^R(x, y)]\Phi_g(x, y) + \\ + \sum_{g' \neq g} \Sigma_{g' \rightarrow g} \Phi_{g'}(x, y) + \frac{f_g}{k_{\text{eff}}} \sum_{g'=1}^G \nu \Sigma_{g'}^f \Phi_{g'}(x, y) = 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$



7.2. ábra. Reflektált reaktor számítására szolgáló rácsvonalak (X–Y geometria)



7.3. ábra. A 7.2. ábrán kijelölt osztópont nagyított környezete (X–Y geometria)

Tekintsünk egy reaktort, amely az aktív zónából és az azt körülvevő reflektorból áll. A 7.2. ábrán ennek a reaktornak a keresztmetszete látható. Az ábrát lefedjük a koordinátatengelyekkel párhuzamos rácsvonalakból álló sűrű hálóval, amelyek elhelyezése tetszőleges – azt leszámítva, hogy a különböző anyagi minőségű tartományokat elválasztó határvonalaknak rácsvonalaknak kell lenniük. A 7.2. ábrán üres körrel megjelölt pont környezetét a 7.3. ábra kinagyítva mutatja.

A tekintett ponthoz tartozó fluxusokat lássuk el a "0" indexszel. Négy szomszédja van: fent (F), lent (L), jobbra (J) és balra (B). A rácsintervallumok távolságát és a megfelelő fluxusokat ennek megfelelően indexeljük. A "0" pont környezetét a rácsvonalak az ábrán (1) – (4) indexekkel jelölt kvadránsokra osztják fel, amelyekhez egymástól eltérő csoportállandók tartozhatnak. A képletekben a kvadránsokat indexszel különböztetjük meg egymástól.

Az osztópontok között behúzzuk a felező merőlegeseket: a 7.3. ábrán ezek a szaggatott vonalak. A (7.28) egyenletet integráljuk a szaggatott vonalak által határolt területre. Az egyenlet első tagjának az integrálját a Gauss-tétel felhasználásával felületi integrállá alakítjuk, majd benne a differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal, magát az integrált pedig téglányösszegekkel közelítjük:

$$\begin{aligned} \oint D_g(x, y) \text{grad } \Phi_g(x, y) \, df &\cong \frac{\Phi_g^F - \Phi_{0g}}{\Delta y_F} \cdot \frac{D_{1g} \Delta x_B + D_{2g} \Delta x_J}{2} + \\ &+ \frac{\Phi_g^J - \Phi_{0g}}{\Delta x_J} \cdot \frac{D_{2g} \Delta y_F + D_{3g} \Delta y_L}{2} + \\ &+ \frac{\Phi_g^L - \Phi_{0g}}{\Delta y_L} \cdot \frac{D_{3g} \Delta x_J + D_{4g} \Delta x_B}{2} + \\ &+ \frac{\Phi_g^B - \Phi_{0g}}{\Delta x_B} \cdot \frac{D_{4g} \Delta y_L + D_{1g} \Delta y_F}{2}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

A (7.28)-ban szereplő többi tag integrálját egyszerű téglányösszeggel közelítjük a következő minta szerint:

$$\begin{aligned} \iint \Sigma_g(x, y) \Phi_g(x, y) \, dx dy &\cong \\ &\cong \frac{\Phi_{0g}}{4} (\Sigma_{1g} \Delta x_B \Delta y_F + \Sigma_{2g} \Delta x_J \Delta y_F + \Sigma_{3g} \Delta x_J \Delta y_L + \Sigma_{4g} \Delta x_B \Delta y_L). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Ha ezt – a határpontokat kivéve – minden rácspontra és csoportban elvégezzük, akkor a (7.28) differenciálegyenlet-rendszert közelítőleg egy lineáris algebrai egyenlet-rendszerrel helyettesítjük. A határpontokban nem kell integrálni, hiszen ott a határfeltételek megadják a fluxus értékét: tudjuk, hogy nulla.

Az ismeretlenek száma általában nagy. Példaként vegyünk 4 csoportot, az x tengely mentén 30, az y tengely mentén 40 osztópontot. Ekkor az ismeretlenek száma $4 \cdot 30 \cdot 40 = 4800$. Egy ennyi ismeretlenes algebrai sajátérték-egyenlet kezeléséhez – numerikus okokból – sem a determináns kiszámításán, sem a közvetlen mátrixinverzió alapuló eljárások nem használhatók. Emiatt többnyire iterációs eljárásokat szoktunk alkalmazni, amelyekkel a 7.5. alfejezetben foglalkozunk.

7.4.2. Határfeltételek

A 4.5. alfejezetben megbeszéltük, hogy a diffúzióegyenlethez tartozó határfeltétel szerint a fluxus eltűnik a vizsgált rendszer extrapolált határfelületén. Van egy további feltétel is: mind a fluxusnak, mind az áramnak folytonosnak kell lennie különböző anyagi minőségű tartományok határán. Ezt a végesdifferencia-egyenletek felírásakor már figyelembe vettük, így elegendő az előbbivel foglalkoznunk.

A vizsgált rendszer szélső osztóvonalait mindig az extrapolált határfelületen kell felvenni. A rajta levő osztópontokban a fluxus ismert, hiszen 0-val egyenlő. Emiatt ezekre az osztópontokra nem írunk fel végesdifferencia-egyenletet: a (7.29) vagy (7.30) alakú egyenleteket csak a határvonalakkal szomszédos osztóvonalakon levő pontokban kezdjük felírni, és így futunk végig az összes *belső* osztópontokon.

Gyakran fordul elő, hogy a vizsgált rendszer bizonyos szimmetriákat mutat. Például lehetséges, hogy a rendszernek tükrözési szimmetriája van az x vagy y tengellyel párhuzamos tengelyekre (vagy mindegyikre) vonatkozóan. Ebben az esetben elegendő a véges differenciákat a rendszernek arra a részére felírni, amelynek alkalmas tükrözésével az egész előállítható. A szimmetria tényét ún. *szimmetria-határfeltétellel* vesszük figyelembe. A szimmetriatengelyen ugyanis fennáll, hogy a fluxus gradiensének a tengelyre merőleges összetevője eltűnik. Az ilyen típusú határfeltételt a véges differenciák keretében úgy kezeljük, hogy az ilyen felületen a fluxust deriváltját tesszük zérussá. Ha például ilyen a helyzet az $x = 0$ vonalon, akkor ott előírjuk, hogy

$$\left. \frac{\partial \Phi_g(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (7.31)$$

Ennek a feltételnek a figyelembevétele legegyszerűbben úgy történhet, hogy az y tengellyel párhuzamos (balról) első és második osztóvonalat az $x = 0$ tengelyhez képest szimmetrikusan vesszük fel, és megköveteljük, hogy

$$\Phi_g(-\Delta x/2, y) = \Phi_g(\Delta x/2, y)$$

teljesüljön, ahol Δx az első és második osztóvonal közötti távolság. Ezt a feltételt a 7.2. ábrán balról a második osztópontra (7.29) szerint felírt egyenletekben úgy vesszük figyelembe, hogy bennük

$$\Phi_g^B = \Phi_{0g}. \quad (7.32)$$

Könnyen belátható, hogy pontosan ez adódik a (7.29) alatti felületi integrálban, ha kiszámításakor alkalmazzuk a (7.31) egyenletet.

7.5. A végesdifferencia-egyenletek megoldása iterációval

7.5.1. Az egyenletrendszer felírása

Az előző alfejezetben az X-Y geometriára is kiszámítottuk a véges differenciákat. A (7.29) egyenlet az alábbi általános alakban írható fel:

$$\oint D_g \text{grad} \Phi_g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f} \cong a \Phi_g^B + b \Phi_g^J + c \Phi_g^F + d \Phi_g^L - (a + b + c + d) \Phi_{0g}. \quad (7.33)$$

Itt Φ_{0g} együtthatója a szomszédok együtthatóinak összegével.

A (7.30) képlet szerint a (7.33)-ben felírtakhoz még járulnak Φ_{0g} -vel arányos tagok, amelyek a következő három típusba sorolhatók: (1) az abszorpciós és a removal hatáskeresztmetszet, (2) a neutronlassulási tag és (3) a hasadások járuléka. Az első típusba tartozó tagok előjele negatív, és ezeket összevonjuk a (7.33)-ben levő együtthatókkal:

$$\begin{aligned} \oint D_g \text{grad} \Phi_g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f} - \int [\Sigma_g^a(\mathbf{r}) + \Sigma_g^R(\mathbf{r})] \Phi_g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &\cong \\ &\cong a \Phi_g^B + b \Phi_g^J + c \Phi_g^F + d \Phi_g^L - e \Phi_{0g}, \end{aligned} \quad (7.34a)$$

ahol

$$e \cong a + b + c + d + \int [\Sigma_g^a(\mathbf{r}) + \Sigma_g^R(\mathbf{r})] \Phi_g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} > a + b + c + d. \quad (7.34b)$$

Az $e > a + b + c + d$ reláció döntő szerepet játszik a végesdifferencia-egyenletek megoldásában (lásd alább). A hasadási forrás járulékát a következőképpen jelöljük:

$$S_{0g} = f_g \sum_{g'=1}^G \int \nu \Sigma_{g'}^f(\mathbf{r}) \Phi_{g'}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (7.35)$$

Végül bevezetjük a lassulási forrást:

$$L_{0g} = \sum_{g' \neq g} \int \Sigma_{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \Phi_{g'}(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \quad (7.36)$$

Mindkét összegben az integrált a (7.30) képlet szerint kell kiszámítani.

Végeredményben tehát a (7.8) kevéscsoport diffúzióegyenletnek a 7.2. ábrán kiszemelt "0" osztópontjára vonatkozó végesdifferencia-egyenlet a következő alakú:

$$a_{0g} \Phi_g^B + b_{0g} \Phi_g^J + c_{0g} \Phi_g^F + d_{0g} \Phi_g^L - e_{0g} \Phi_{0g} + L_{0g} + \frac{S_{0g}}{k_{\text{eff}}} = 0. \quad (7.37)$$

Az a , b , c , d és e együtthatókat is elláttuk indexekkel annak érdekében, hogy világosabban látszon: értékük függ a csoport indexétől (vagyis g -től), továbbá a "0" osztóponttól. Ha ezt az egyenletet minden osztópontra felírjuk, annyi lineáris egyenletet kapunk, ahány ismeretlen van. Ez tehát k_{eff} -re vonatkozóan algebrai sajátérték-egyenlet, amelyet – legalábbis elvileg – az ismert lineáris algebrai módszerek valamelyikével meg lehet oldani.

Az ismeretlenek nagy számára való tekintettel az iterációs eljárások a leginkább célravezetőek. Az iterációt a gyakorlatban két szakaszra szokás bontani:

- Kezdetben ismertnek tételezzük fel az S_{0g} hasadási forrást. Ezt a (7.37) egyenletben adottak véve, megoldjuk az

$$a_{0g}\Phi_g^B + b_{0g}\Phi_g^J + c_{0g}\Phi_g^F + d_{0g}\Phi_g^L - e_{0g}\Phi_{0g} + L_{0g} + S_{0g} = 0 \quad (7.38)$$

alakú egyenletekből álló egyenletrendszer. Az ehhez szükséges iterációt nevezzük *belső iterációnak*.

- A belső iteráció végeredményével újraszámoljuk k_{eff} -et és a hasadási forrást, amelyet (7.38)-ba helyettesítve egy újabb belső iterációt hajtunk végre. Ennek alapján tovább javítjuk a hasadási forrást, amíg el nem érjük a konvergenciát. A hasadási forrás ismételt újraszámítását *külső iterációnak* nevezzük.

Tekintve, hogy a külső iteráció minden lépésében k_{eff} -et is újraszámoljuk, végeredményben a teljes sajátérték-problémát megoldjuk.

7.5.2. Belső iteráció

A belső iteráció (7.38) alapján azt jelenti, hogy minden osztópontban újraszámoljuk a fluxust:

$$\Phi_{0g} = \frac{a_{0g}\Phi_g^B + b_{0g}\Phi_g^J + c_{0g}\Phi_g^F + d_{0g}\Phi_g^L + L_{0g} + S_{0g}}{e_{0g}}. \quad (7.39)$$

Ennek matematikai elemzéséhez bevezetjük a következő jelöléseket:

$\vec{\Phi}_g$: a g -edik csoporthoz tartozó fluxusok vektora. A fluxusokat a belső osztópontok szerint rendezzük sorba: a bal felső saroktól kezdve felülről lefelé haladunk, majd a függőleges rácsvonalakat balról jobbra vesszük sorba.

S_g : a g -edik csoporthoz tartozó hasadási forrásokból képzett S_{0g}/e_{0g} mennyiségek vektora. Az osztópontok sorrendje ugyanaz, mint a fluxusok esetében.

L_g : a g -edik csoporthoz tartozó lassulási forrásokból képzett L_{0g}/e_{0g} mennyiségek vektora. Az osztópontok sorrendje ugyanaz, mint a fluxusok esetében. A fluxusok vektoraival a következő kapcsolatban van:

$$\mathbf{L}_g = \sum_{g' \neq g} \mathbf{B}_{g' \rightarrow g} \vec{\Phi}_{g'} \quad (7.40)$$

ahol a $\mathbf{B}_{g' \rightarrow g}$ mátrix elemeit a (7.36) és a (7.30), illetve (7.30b) képletek alapján számíthatjuk ki. A kevéscsoport elméletben általában energiában csak “lefelé” való szórás lehetséges, ami azt jelenti, hogy a \mathbf{B} mátrixok eltűnnek, amikor $g' \geq g$. \mathbf{A}_g : a (7.39)-ben szereplő $a_{0g}/e_{0g}, \dots, d_{0g}/e_{0g}$ együtthatókból képzett mátrix. Szerkezetének részleteire még visszatérünk.

Ezekkel a jelölésekkel a (7.39) iterációs képlet vektori alakja

$$\vec{\Phi}_g = \mathbf{A}_g \vec{\Phi}_g + \sum_{g' \neq g} \mathbf{B}_{g' \rightarrow g} \vec{\Phi}_{g'} + \mathbf{S}_g, \quad (g = 1, 2, \dots, G). \quad (7.41)$$

A számítási séma könnyebb megértése érdekében ezt a vektoregyenletetektől álló rendszert célszerű az egyes csoportokra külön-külön felírni. Mivel csak “lefelé” való szórás van, a $g = 1$ csoportra vonatkozóan (7.41) így fest:

$$\vec{\Phi}_1 = \mathbf{A}_1 \vec{\Phi}_1 + \mathbf{S}_1.$$

Itt \mathbf{S}_1 adott, tehát az egyenlet – az 1. csoportra alkalmazott belső iterációval – megoldható. Tegyük fel, hogy ez megtörtént. Ezután tekintjük a $g = 2$ csoportra vonatkozó egyenletet:

$$\vec{\Phi}_2 = \mathbf{A}_2 \vec{\Phi}_2 + \mathbf{B}_{1 \rightarrow 2} \vec{\Phi}_1 + \mathbf{S}_2.$$

Mivel az 1. csoportra már kiszámítottuk a fluxust, ez az egyenlet – a 2. csoportra alkalmazott újabb belső iterációval – megoldható, hiszen a jobb oldal utolsó két tagja ismert. Ezt folytathatjuk a 3. csoportra, amelyre a következő egyenlet vonatkozik:

$$\vec{\Phi}_3 = \mathbf{A}_3 \vec{\Phi}_3 + \mathbf{B}_{1 \rightarrow 3} \vec{\Phi}_1 + \mathbf{B}_{2 \rightarrow 3} \vec{\Phi}_2 + \mathbf{S}_3.$$

Ezt ismét megoldhatjuk $\vec{\Phi}_3$ -ra, és így tovább a $g = G$ csoportig.

Ezen a módon a belső iteráció konvergenciája az egyes \mathbf{A}_g mátrixok tulajdonságaitól függ. A konvergencia elemzése emiatt szétcsatolható az egyes csoportokra. A jelölések egyszerűsítése érdekében a “g” indexet elhagyjuk, tehát a vizsgálandó vektoregyenlet

$$\vec{\Phi} = \mathbf{A} \vec{\Phi} + \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{A} \vec{\Phi} + \mathbf{s}, \quad (7.42)$$

ahol az \mathbf{s} vektor adott. Tételezzük fel, hogy már ℓ belső iterációs lépést tettünk. Ekkor az $(\ell+1)$ -edik iteráltat a

$$\vec{\Phi}_{\ell+1} = \mathbf{A} \vec{\Phi}_{\ell} + \mathbf{s} \quad (7.43)$$

képlet adja meg. (7.42)-t kivonjuk (7.43)-ból:

$$\bar{\Delta}_{\ell+1} = \bar{\Phi}_{\ell+1} - \bar{\Phi} = \mathbf{A}(\bar{\Phi}_{\ell} - \bar{\Phi}) = \mathbf{A}\bar{\Delta}_{\ell} = \mathbf{A}^2\bar{\Delta}_{\ell-1} = \dots = \mathbf{A}^{\ell}\bar{\Delta}_1.$$

Nyilvánvaló, hogy ez a hibavektor akkor tart 0-hoz (vagyis az iteráció akkor konvergál), ha az \mathbf{A} mátrixnak minden sajátértéke 1-nél kisebb. Az alábbiakban ezt látjuk be.

Írjuk fel az \mathbf{A} mátrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátérték-egyenletet:

$$\mathbf{A}\bar{\Phi} = \lambda\bar{\Phi}.$$

Ha a sajátvektor legnagyobb abszolút értékű komponensének indexe i , akkor az erre vonatkozó egyenlet alapján írhatjuk:

$$\lambda = \sum_j A_{ij} \frac{\Phi_j}{\Phi_i}, \quad \text{vagyis} \quad |\lambda| = \sum_j A_{ij} \left| \frac{\Phi_j}{\Phi_i} \right| \leq \sum_j A_{ij}.$$

Itt kihasználtuk, hogy \mathbf{A} és $\bar{\Phi}$ minden eleme nem-negatív. A (7.34b) egyenlőtlenségből következik, hogy a jobb oldal határozottan kisebb 1-nél. Ezzel beláttuk, hogy

$$|\lambda| < 1,$$

ami a mondottak szerint a belső iteráció konvergenciáját jelenti. Természetesen más kérdés, milyen gyors a konvergencia. Az iteráció gyorsítására számos módszert dolgoztak ki, de ezek részletezésébe nem mehetünk bele. A gyakorlatban nem nehéz biztosítani, hogy a konvergencia 10–15 lépésben bekövetkezzen. A helyzetet könnyíti a következő két körülmény:

- A külső iteráció kezdeti lépéseiben nem érdemes a belső iterációt különösen nagy pontosságig erőltetni.
- A külső iteráció utolsó lépéseiben viszont az előző külső iterációban kapott fluxus egyre javuló kezdőértéket jelent a belső iteráció számára.

Mindkét körülmény csökkenti a belső iterációk számát.

7.5.3. Külső iteráció

A külső iteráció konvergenciája külön vizsgálendő kérdés. Az alábbi elemzésben feltételezzük, hogy a külső iteráció mindegyik lépésében olyan pontosságig folytatjuk a belső iterációt, hogy annak hibája elhanyagolható. A külső iteráció konvergenciáját a hasadási forrás konvergenciája jelenti. Ennek vizsgálatához tovább egyszerűsítjük a jelöléseket. Legyen \mathbf{F} a $\bar{\Phi}_g$ vektorokból álló hipervektor:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\Phi}_G \end{bmatrix}.$$

Hasonlóan képezzük az \mathbf{S} vektort, amelynek a komponenseit ugyanabban a sorrendben alkotják az (7.40) egyenletben szereplő S_{0g} hasadási források, mint a $\vec{\Phi}$ vektor komponenseit a Φ_{0g} fluxusok. (7.35) alapján definiálhatunk egy \mathbf{P} *produktions operátort* (mátrixot), amely a fluxusvektorból előállítja a forrásvektort:

$$\mathbf{S} = \mathbf{PF}.$$

A (7.37) sajátérték-egyenlet ennek segítségével a következő vektoros alakba írható:

$$\frac{1}{k_{\text{eff}}} \mathbf{PF} - \mathbf{DF} = 0, \quad (7.44)$$

ahol \mathbf{D} a (7.37) egyenlet többi tagját előállító, ún. *destrukciós operátor*.

A konvergencia vizsgálatához – az egyszerűség kedvéért – bevezetjük a Gauss-féle összegzés jelét:

$$[\mathbf{x}] = \sum_i x_i.$$

[...] tehát a szögletes zárójelen belüli vektor komponenseinek az összegét jelöli. Az osztópontok azonosítására eddig használt “0” index helyett a továbbiakban a j indexet fogjuk használni, ahol j végigfut az összes belső osztópontokon. Segítségével a \mathbf{DF} vektor normája:

$$\begin{aligned} [\mathbf{DF}] &= - \sum_{g=1}^G \sum_j \left(a_{jg} \Phi_{jg}^B + b_{jg} \Phi_{jg}^J + c_{jg} \Phi_{jg}^F + d_{jg} \Phi_{jg}^L - e_{jg} \Phi_{jg} + L_{jg} \right) \cong \\ &\cong - \sum_{g=1}^G \oint_{\text{reaktor}} D_g \text{grad} \Phi_g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{f} + \sum_{g=1}^G \int_{\Sigma_g^a} \Sigma_g^a(\mathbf{r}) \Phi_g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Ennek belátását a feladatok közé soroltuk (7.1. feladat). Hasonlóan belátható, hogy

$$[\mathbf{PF}] = \sum_{g=1}^G \sum_j S_{jg} \cong \sum_{g=1}^G \int_{\text{reaktor}} \nu \Sigma_g^f(\mathbf{r}) \Phi_g(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r}, \quad (7.46)$$

ami a reaktorban a hasadások által termelt neutronok teljes száma. (7.44)-ből következik, hogy a két norma hányadosa k_{eff} .

Vizsgáljuk meg ezekkel a jelölésekkel a külső iteráció konvergenciáját. Az ℓ -edik lépésben a forrás az ℓ -edik lépésben számolt fluxushoz tartozik. (7.38) szerint tehát az iteráció a következőt jelenti:

$$\mathbf{F}_{\ell+1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell}. \quad (7.47a)$$

Feltéve egyelőre, hogy az iteráció konvergens, nézzük meg, mihez tart ez $\ell \rightarrow \infty$ esetén. Nyilvánvaló, hogy nagy ℓ -re az \mathbf{F}_{ℓ} iterált egyre javuló pontossággal lesz arányos a (7.44) egyenlet megoldásával:

$$\mathbf{F}_{\ell} \approx \alpha \mathbf{F},$$

ahol α alkalmas arányossági tényező.² Ha ezt az iterációs képletbe helyettesítjük, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{F}_{\ell+1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell} \cong \alpha \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F} = \alpha k_{\text{eff}} \mathbf{F} \cong k_{\text{eff}} \mathbf{F}_{\ell},$$

vagyis az iteráltak – a konvergencia közelében – minden lépésben k_{eff} -vel szorozódnak. Ez azt jelenti, hogy szuperkritikus esetben az iteráció divergens, szubkritikus esetben pedig 0-hoz tartó fluxust eredményez. Ennek kivédésére a hasadási forrást minden lépésben normálni kell. Legegyszerűbb azt megkövetelni, hogy a norma 1 legyen:

$$[\mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell}] = 1. \quad (7.47b)$$

A gyakorlatban ez a következőt jelenti. Először (7.47a) szerint kiszámítjuk az

$$\mathbf{F}'_{\ell+1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell}$$

vektort, majd ezt normáljuk:

$$\mathbf{F}_{\ell+1} = \frac{\mathbf{F}'_{\ell+1}}{[\mathbf{P} \mathbf{F}'_{\ell+1}]}.$$

A fentiekben beláttuk, hogy a konvergencia közelében $\mathbf{F}'_{\ell+1} \cong k_{\text{eff}} \mathbf{F}_{\ell}$. Ennek a normája (7.47b) szerint:

$$[\mathbf{P} \mathbf{F}'_{\ell+1}] \cong k_{\text{eff}} [\mathbf{P} \mathbf{F}_{\ell}] = k_{\text{eff}},$$

ami a külső iteráció minden lépésében felhasználható k_{eff} javítására.

² Homogén egyenletről lévén szó, az \mathbf{F} megoldás még megoldás marad, ha egy szabadon választott együtthatóval megszorozzuk.

A következőkben bebizonyítjuk, amit eddig csak feltételeztünk: az iteráció valóban konvergens. A (7.44) sajátérték-probléma sajátértékei legyenek k_1, k_2, \dots , a megfelelő sajátfüggvények pedig rendre $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots$, vagyis $\mathbf{P}\bar{\varphi}_n = k_n \mathbf{D}\bar{\varphi}_n$. Az $n = 1$ indexhez tartozik a keresett megoldás, tehát $k_1 = k_{\text{eff}}$, és $\bar{\varphi}_1$ arányos a keresett \mathbf{F} -fel. A k_n sajátértékek monoton csökkenő sorozatot alkotnak. A sajátfüggvényeket is (7.47b) szerint normáljuk: $[\mathbf{P}\bar{\varphi}_n] = 1$. Az ℓ -edik iteráltat ezek szerint haladó sorba fejtjük:³

$$\mathbf{F}_\ell = \sum_n w_{n\ell} \bar{\varphi}_n.$$

A (7.47b) normálási feltétel azt jelenti, hogy

$$\sum_n w_{n\ell} = 1.$$

A sorfejtést a (7.47a) iterációs képletbe helyettesítjük:

$$\mathbf{F}'_{\ell+1} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}_\ell = \sum_n w_{n\ell} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P} \bar{\varphi}_n = \sum_n w_{n\ell} k_n \bar{\varphi}_n = \sum_n w'_{n,\ell+1} \bar{\varphi}_n.$$

A sajátfüggvények ortogonalitása miatt tehát fennáll:

$$w'_{n,\ell+1} = w_{n\ell} k_n.$$

A vesszőt azért tettük ki, mert ezt még normálni kell ahhoz, hogy az $(\ell+1)$ -edik iteráltat megkapjuk:

$$w_{n,\ell+1} = \frac{w'_{n,\ell+1}}{\sum_{n'} w'_{n',\ell+1}} = \frac{w_{n\ell} k_n}{\sum_{n'} w_{n'\ell} k_{n'}}.$$

Ha ezt a rekurziós képletet visszafelé követjük az első iterációs lépésig, – némi számolás után – a következő képletet kapjuk:⁴

$$w_{n,\ell+1} = \frac{w_{n1} k_n^\ell}{\sum_{n'} w_{n'1} k_{n'}^\ell} = \frac{w_{n1} (k_n/k_1)^\ell}{\sum_{n'} w_{n'1} (k_{n'}/k_1)^\ell}. \quad (7.48)$$

Belátjuk, hogy

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} w_{n,\ell+1} = \delta_{n1}.$$

³ Mivel az operátorok mátrixok, és a sajátfüggvények vektorok, ezt mindig meg lehet tenni.

⁴ Ha jobban tetszik, közvetlen behelyettesítéssel meg lehet győződni arról, hogy a (7.48) szerinti együtthatók kielégítik a rekurziós képletet.

Valóban, (7.48) jobb oldalán $k_n/k_1 < 1$, ha $n > 1$, így az $n = 1$ együtthatót kivéve mindegyik együttható 0-hoz tart. $n = 1$ esetén viszont a határérték 1. Ezzel megmutattuk, hogy a (7.47b) szerinti normálással a külső iteráció konvergens, és határértéke

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \mathbf{F}_\ell = \vec{\Phi}_1.$$

7.6. Feladatok

- 7.1. Igazoljuk a (7.45) és (7.46) összefüggéseket! (2 pont)
- 7.2. Írjuk fel explicit alakban a (7.43) iterációs képletben szereplő \mathbf{A} mátrix elemeit! A mátrixot hipermátrixnak tekintve, jellemezzük az egyes blokkokat! Írjuk fel explicit alakban a mátrix i -edik sorának összegét, és mutassuk meg, hogy 1-nél határozottan kisebb! (4 pont)
- 7.3. Egy csupasz homogén reaktor kéts csoport elméletét dolgozzuk ki
- egy R sugarú végtelen hosszú hengerre és (2 pont)
 - egy R sugarú gömbre! (2 pont)
- Útmutató: kövessük a 7.2.1. szakasz gondolatmenetét.
- 7.4. Egy végtelen reflektorral körülvett homogén reaktor kéts csoport elméletét dolgozzuk ki
- egy R sugarú végtelen hosszú hengerre és (3 pont)
 - egy R sugarú gömbre! (3 pont)
- Útmutató: kövessük a 7.2.2. szakasz gondolatmenetét.
- 7.5. Feltesszük a következőket: az epitermikus csoportban (1) nincs abszorpció; (2) a szórás hatáskeresztmetszet állandó; (3) a lassulás csak izotrop rugalmas szórások révén történik; (4) a hasadásban keletkező neutronok energiája $E_0 = 2$ MeV. Mutassuk meg, hogy ekkor $\Sigma_R = \frac{\xi \Sigma_s}{\ln(E_0/E_m)}$. Itt $E_m = 0,625$ eV az epitermikus tartomány alsó határa. (7 pont)
- 7.6. Tekintsük a (7.7) egyenletet két csoportban egy nem-sokszorozó, végtelen homogén közegben, amelyben egy $S_1(x) = \cos Bx$ epitermikus külső forrás van.
- Oldjuk meg az egyenletet! (4 pont)
 - Az eredményt általánosítsuk több energiacsoportra! (3 pont)
- Útmutatás: keressük a megoldást $\Phi_g(x) = \phi_g(x, B) \cos Bx$ alakban. Megjegyzés: a $\phi_g(x, B)$ függvényt karakterisztikus függvénynek nevezzük.
- 7.7. Tekintsünk egy csupasz homogén reaktort, amelyben nincs epitermikus hasadás. Hasonlítsuk össze az M^2 migrációs területre kapott értékeket egy, két és három energiacsoport esetében! A $\Sigma_{1 \rightarrow 3}$ mátrixelemet vegyük zérusnak. Útmutatás: a 7.2.1. szakaszt általánosítva számítsuk ki és írjuk $P_{NL} = 1/(1 + M^2 B^2)$ alakba a benmaradási valószínűséget. (7 pont)
- 7.8. A 7.7. feladat mindhárom esetében írjuk fel a kritikussági feltételt! (4 pont)
- 7.9. Feltesszük, hogy egy homogén közegben a határfelületektől távol megmérjük a fluxus x -től való függését: $\Phi_g(x) \propto \cos Bx$, ami mindegyik energiacsoportra érvényes, majd ebből illesztéssel meghatározzuk B értékét. L^2 és τ értékét számításból ismerjük. Írjuk fel kéts csoport-közelítésben a k_∞ -t megadó képletet! Mennyi k_∞

értéke és bizonytalansága, ha $B^2 = 0,00534 \pm 0,00012 \text{ cm}^{-2}$, továbbá $L^2 = 20 \text{ cm}^2$ és $\tau = 30 \text{ cm}^2$? (6 pont)

7.10. Tekintsünk egy sokszorozó közeget, amelyet végtelen reflektor vesz körül. Számítsuk ki kétcsoport-közelítésben az egyenlőtlenégi tényezőt a következő három geometriában!

- Az $x = \pm a$ síkokkal határolt rendszer; (3 pont)
- R sugarú végtelen hosszú henger; (4 pont)
- R sugarú gömb. (3 pont)

Az eredményeket hasonlítsuk össze a csupasz rendszerhez tartozó megfelelő eredményekkel! Az egyenlőtlenégi tényező a $\Sigma_1^f \Phi_1 + \Sigma_2^f \Phi_2$ teljesítmény maximális értéke osztva az aktív zónára átlagolt értékével.

7.11. Tekintsük az 5.23. feladatban vázolt három hengeres geometriájú reaktort. Írjuk fel explicit formában a rájuk vonatkozó kritikussági feltételt kétcsoport-közelítésben! Mutassuk meg, hogy a fluxus szeparálható az r és z változók szerint! Útmutatás: mindegyik esetben a fluxus r szerinti deriváltja zérus $r = 0$ -ban; az első és harmadik esetben a fluxus zérus $z = 0$ -ban, de a második esetben a fluxus z szerinti deriváltja zérus $z = 0$ -ban. (15 pont)

7.12. Alkalmazzuk a kétcsoport-modellt az 5.26. feladatra (legalább közelítőleg!) (15 pont)

7.13. Az albedó kiterjeszhető több energiacsoportra is. Ekkor a kimenő áram (J_g) és a bemenő áram (I_h) között az alábbi kapcsolat áll fenn:

$$J_g = \sum_{h=1}^G \alpha_{gh} I_h,$$

ahol G az energiacsoportok száma. Tekintsük két, albedókkal jellemzett anyag határát. Az egyik anyag tartalmaz hasadó anyagot, a másik nem. Hogyan határozható meg (diffúzióelméletben) az albedókból a k_{eff} és a spektrum a határon?

(10 pont)

7.14. Határozzuk meg egy négyszög alakú cellából álló végtelen rácsban a sokszorozási tényezőt kétcsoport diffúziós közelítésben! A cella három régióból áll:

- A fűtőelem külső sugara 0,6 cm; csoportállandók: $D_1 = 1,2 \text{ cm}$, $D_2 = 0,8 \text{ cm}$, $\Sigma_{c1} = 0,02 \text{ /cm}$, $\Sigma_{f1} = 0,03 \text{ /cm}$, $\nu\Sigma_{f1} = 0,0076 \text{ /cm}$, $\Sigma_{c2} = 0,03 \text{ /cm}$, $\Sigma_{f2} = 0,05 \text{ /cm}$, $\nu\Sigma_{f2} = 0,08 \text{ /cm}$, $\Sigma_{1 \rightarrow 2} = 0,04 \text{ /cm}$.
- A burkolat külső sugara 0,7 cm; csoportállandók: $D_1 = 1,1 \text{ cm}$, $D_2 = 0,7 \text{ cm}$, $\Sigma_{c1} = 0,001 \text{ /cm}$, $\Sigma_{c2} = 0,005 \text{ /cm}$, $\Sigma_{1 \rightarrow 2} = 0,004 \text{ /cm}$.
- A moderátor csoportállandói: $D_1 = 1,5 \text{ cm}$, $D_2 = 0,5 \text{ cm}$, $\Sigma_{c1} = 0,005 \text{ /cm}$, $\Sigma_{c2} = 0,04 \text{ /cm}$, $\Sigma_{1 \rightarrow 2} = 0,08 \text{ /cm}$.

A cella külső mérete $2 \times 2 \text{ cm}$. (18 pont)

8. Termikus reaktorok

Az előző fejezetekben tárgyaltakat ebben a fejezetben a reaktorok egy fontos fajtájára, a termikus reaktorokra alkalmazzuk. Ezen belül is elsősorban a vízzel moderált és hűtött reaktorokkal foglalkozunk. Közéjük tartozik a paksi atomerőmű is, amelynek a típusát VVER–nek¹ nevezzük. Az ott felhasznált fűtőelemek legfontosabb adatai:

- Töltet: anyaga UO_2 kerámia; az urán dúsítása 1,6%, 2,4%, 3,6%, 4,0% és 4,4%; UO_2 külső átmérője: 7,6 mm.
- A fűtőelemrúd aktív részének a hossza 2,5 m.
- Burkolat: anyaga 1% nióbiiumot tartalmazó cirkónium; külső átmérője 9,1 mm; falvastagsága 0,65 mm. A burkolat és az UO_2 között vékony légréteg van.
- Fűtőelemrács: hatszöges; a rácsállandó 12,2 mm.
- Fűtőelemköteg: 127 rácspozíciót tartalmaz, amelyek közül a középsőt mérések céljaira szolgáló cső foglalja el. Kívülről cirkóniumfal veszi körül.
- A moderátor bórsavat (H_3BO_3) tartalmaz; koncentrációja 0 és 8 g/liter között változhat.
- Szabályozás: a fűtőelemkötegekkel azonos külső méretű, bóracélt tartalmazó kötegek segítségével történik. Amikor a szabályozókötegeket kihúzzák, helyüket fűtőelemköteg foglalja el.

Egy ilyen fűtőelemrács elemi celláját mutatja a 6.5. ábra.

A VVER–típusú reaktorokra jellemző a hatszöges rács és a cirkónium fűtőelem-burkolat. Reaktorfizikai szempontból két alapváltozata van: a VVER–440 és a VVER–1000. A fentiekben szereplő adatok az előbbihez tartoznak. A VVER–1000 ettől néhány tekintetben eltér:

- Rácsállandó: 12,7 mm.
- Fűtőelemköteg: 331 pozíciót tartalmaz; nincs kötegfal.
- Szabályozás: egyes kötegekben bizonyos rácspozíciókban abszorbensrudak mozognak.
- A fűtőelemrúd aktív részének a hossza 3,5 m.

A felsoroltakon kívül még fontos eltérés, hogy a VVER–1000 típus teljesítménysűrűsége nagyobb: 110 kW/liter – szemben a VVER–440 típusra jellemző 80 kW/liter-rel.

A VVER–típustól különböző nyomottvizes reaktorokra nagy vonásaikban hasonló adatok jellemzők. Lényeges különbség, hogy mind a fűtőelemrács, mind a fűtőelemkötegek geometriája négyyszöges. A fűtőelemek burkolata szintén cirkónium, de nem nióbiiummal, hanem egyéb elemekkel van ötvözve. A szabályozás a fűtőelemkötegek között mozgatott, kereszt alakú szabályozókötegekkel történik.

¹ VVER orosz eredetű rövidítés: vízzel moderált, vízzel hűtött energetikai reaktor.

A különböző reaktortípusok reaktorfizikai leírására különböző közelítések alkalmazhatók. A felsoroltak közül a legegyszerűbben tárgyalható a VVER–440 típus, mert itt a legtöbb probléma tárgyalására megengedhető a fűtőelemköteg elhomogenizálása. A VVER–1000 típus esetében azonban már lényegesen finomabb elméletre van szükség. Ennek két fő oka van: egyrészt az eltérő szabályozás miatt a fűtőelemköteg általában nem homogenizálható el, másrészt a nagyobb teljesítménysűrűség miatt sokkal jobb számítási pontosságra van szükség. Hasonló megállapításokat tehetünk a többi reaktortípusra vonatkozóan. Végül még egy szempontot kell megemlítenünk. A korszerű atomerőművekben egységnyi urántömegeből több energiát vesznek ki, mint a korábbiakban. Emiatt bennük több hasadási termék és plutónium halmozódik fel (lásd a 9. fejezetben), ami a termikus spektrum számítását megnehezíti.

8.1. Optimális fűtőelemrácsok

Adott fűtőelemtípusból különböző fűtőelemrácsokat lehet kialakítani aszerint, hogy milyen a rács geometriája (például hatszöges vagy négyszöges), és mekkora a rácsállandó. A rács neutronsokszorozó tulajdonságai első közelítésben a moderátor és az urán térfogatarányától függenek (V_m/V_U). Van olyan arány, amelynél ezek a legkedvezőbbek, vagyis a kritikus tömeg a legkisebb.² Az ilyen rácsokat *optimális rácsok*-nak nevezzük. A rácsok vizsgálatában fel fogjuk használni a négyfaktor-formulát, de a vizsgált mennyiségeket a GRACE lassulási és a THERMOS termalizációs program segítségével számítjuk ki. Bár a négyfaktor-formulát nem használjuk konkrét számításokban, egyes tényezőinek elemzése segít a tendenciák megértésében.

A négyfaktor-formula tényezői közül az η tényező gyengén függ a fűtőelemrácstól, viszont függ a fűtőelem típusától. Például 3,6% dúsítású VVER-típusú fűtőelemek esetében $\eta \approx 1,85$. A másik három tényezőnek a V_m/V_U aránytól való függése viszont jelentős. Homogén közegre vonatkozóan a 6.4. alfejezetben kiszámítottuk a rezonanciakikerülési valószínűséget [vö. (6.33)]:

$$p = \exp\left\{-\frac{N_U^{28} I}{\xi \Sigma_m}\right\},$$

ahol N_U^{28} az ^{238}U magsűrűsége, I a rezonanciaintegrál, Σ_m a potenciálszórás hatáskeresztmetszet. Fűtőelemrácsban ezt módosítani kell (vö. 8.1. feladat):

$$p = \exp\left\{-\frac{V_U N_U^{28} I}{V_m N_m (\xi \sigma)_m}\right\}, \quad (8.1)$$

ahol N_m a moderátor magsűrűsége, σ a moderátor szórás hatáskeresztmetszete. Vegyük észre, hogy mindkét képlet szerint p az ^{238}U - és a moderátoratomok teljes számának az arányától függ. Mint a 6.4. alfejezetben láttuk, az I rezonanciaintegrál más

² Mivel a kritikus tömeg függ a reaktor külső alakjától (vö. 5.6.2. szakasz), a minimum a hasonló alakú reaktorokra (gömbökre, kockákra, hasonló hengerekre stb.) értendő.

homogén közegre, mint fűtőelemrácsra, de az utóbbiban elsősorban csak a fűtőelem-rúd méretétől függ, így első közelítésben független a moderátor térfogatától.

Ha a (6.49b) képletet alkalmazzuk, akkor egyszerű átalakításokkal kapjuk:

$$f = \frac{N_U \sigma_{25}^a V_U \bar{\Phi}_U}{N_U \sigma_{25}^a V_U \bar{\Phi}_U + N_m \sigma_m^a V_m \bar{\Phi}_m}, \quad (8.2)$$

ahol a felülhúzás a termikus neutronfluxusnak az indexben szereplő térfogatra vett átlagát jelenti, továbbá σ_{25}^a az ^{235}U abszorpciós hatáskeresztmetszetének átlaga a termikus csoportban; σ_m^a jelentése analóg a moderátorra. Mind az átlagfluxusok, mind az átlagos hatáskeresztmetszetek függnek a V_m/V_U aránytól, de ezt a függést elhanyagoljuk.

A (8.1) és (8.2) képletek szerint tehát p és f a következő módon függnek az $r = V_m/V_U$ aránytól:

$$f = \frac{1}{1 + c_1 r} \quad \text{és} \quad p = e^{-c_2/r}.$$

Az ε gyorshasítási tényezőre hasonlóan egyszerű elméleti függvényt levezetni nehéz, bár az irodalomban adnak meg ilyen képleteket. A fentiekben idézett programokkal elvégzett számítások szerint ε a következő egyszerű (empirikus) képlettel írható le:³

$$\varepsilon = 1 + \frac{c_3}{r}.$$

Az alábbi számítások a 3,6% dúsítású VVER-típusú fűtőelemrudakból képzett rácsokra vonatkoznak. Az ilyen rácsokra vonatkozó kísérletekben 4 rácsállandót valósítottak meg: 11,0 mm, 12,7 mm, 12,7 mm és 19,05 mm. Ha ehhez hozzávesszük a paksi atomerőműben használt 12,2 mm rácsállandót, az r tényező értéke 1 és 6 között változik. A 8.1. táblázatban a tiszta moderátorral végzett számítások eredményeit adjuk meg. A 8.2. táblázatban ugyanezt találjuk $C_B = 4$ g/liter koncentrációra⁴. Ha ezekre illesztjük empirikus képleteinket, akkor a paraméterekre a következő értékeket kapjuk:

$$c_1 = 0,0435, \quad c_2 = 0,848 \quad \text{és} \quad c_3 = 0,499; \quad C_B = 0;$$

$$c_1 = 0,0960, \quad c_2 = 0,840 \quad \text{és} \quad c_3 = 0,530; \quad C_B = 4 \text{ g/liter.}$$

Az f termikus hasznosítási tényezőre vonatkozóan meg kell jegyezni, hogy a (8.2)-ben szereplő átlagos hatáskeresztmetszetek függnek r -től. Emiatt a képletet kissé korrigálni kell. Ezekkel a paraméterekkel a következő (korrigált) képletet használhatjuk:

³ Ez nem ε eredeti definíciója, ugyanis tartalmazza az ^{235}U -izotóp epitermikus hasadásait is.

⁴ C_B megadja, hogy 1 liter vízben hány gramm bórsavat (H_3BO_3) oldottak fel.

$$k_{\infty} = \eta \left(1 + \frac{c_3}{r} \right) \frac{e^{-c_2/r}}{0,99 + c_1 r}. \quad (8.3)$$

Interpolációs célokra ez a képlet bizonyára megfelel.

8.1. táblázat. k_{∞} és a négyfaktor-formula tényezői 3,6% dúsítású, VVER-típusú fűtőelemrácsokra ($C_B = 0$)

Rácsállandó	V_m/V_U	k_{∞}	f	p	ε
11,0 mm	1,3099	1,24498	0,9545	0,5163	1,4114
12,2 mm	1,8414	1,37615	0,9329	0,6335	1,2572
12,7 mm	2,0791	1,39818	0,9233	0,6689	1,2216
15,0 mm	3,2955	1,43135	0,8754	0,7769	1,1342
19,05 mm	5,9279	1,36046	0,7833	0,8667	1,0794

8.2. táblázat. k_{∞} és a négyfaktor-formula tényezői 3,6% dúsítású, VVER-típusú fűtőelemrácsokra ($C_B = 4$ g/liter)

Rácsállandó	V_m/V_U	k_{∞}	f	p	ε
11,0 mm	1,3099	1,24014	0,9087	0,5178	1,4274
12,2 mm	1,8414	1,29371	0,8641	0,6357	1,2728
12,7 mm	2,0791	1,29941	0,8451	0,6713	1,2372
15,0 mm	3,2955	1,25803	0,7567	0,7798	1,1500
19,05 mm	5,9279	1,08300	0,6121	0,8694	1,0979

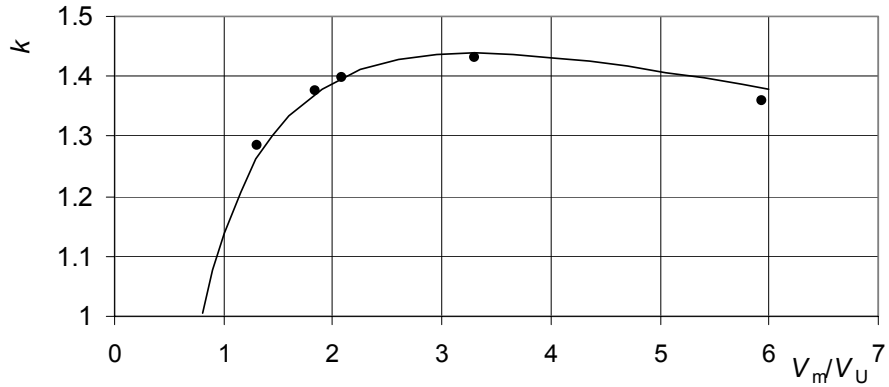
A 8.1. ábrán a közvetlenül számított és a (8.3) képlettel számolt mennyiségeket mutatjuk be ($C_B = 0$, illetve $C_B = 4$ g/liter). Az ábrákról világosan látszik, hogy k_{∞} maximumot vesz fel. Megkerestük az interpolációs képlet maximumát:

$$r_{\max} = 3,3107; \quad k_{\infty} = 1,43263; \quad \text{rácsállandó: } 15,03 \text{ mm}; \quad C_B = 0;$$

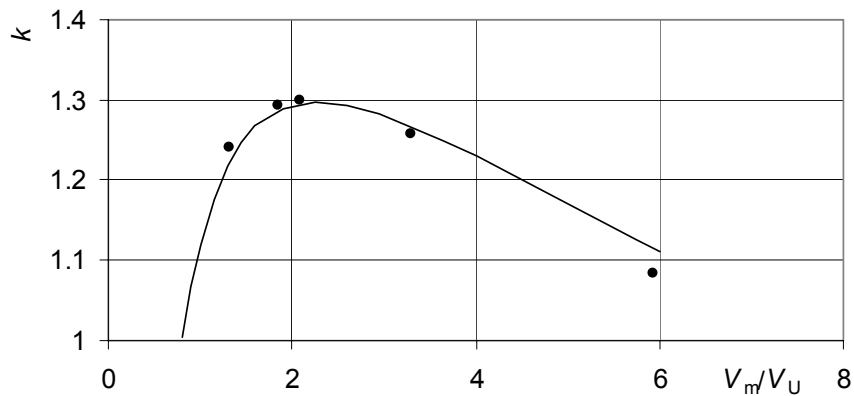
$$r_{\max} = 2,2950; \quad k_{\infty} = 1,29775; \quad \text{rácsállandó: } 13,14 \text{ mm}; \quad C_B = 4 \text{ g/liter.}$$

Ebből látszik, hogy a 15,0 mm-es rács tiszta moderátor és 3,6% dúsítás esetében maximális k_{∞} -nel rendelkezik. A maximumhoz tartozó rácsállandó a szűkebb rácsok irányában eltolódik, amikor a moderátorban bórsavat oldunk fel. Ezt mutatjuk be a 8.2. ábrán is, amelyen összehasonlítjuk a 8.1. ábrán látható görbéket. Ezeknek az effektusoknak hatásuk van a vízzel moderált reaktorok biztonságára.

Ha – adott fűtőelemtípus és moderátor-összetétel mellett – változtatjuk a fűtőelemrács állandóját, k_{∞} értéke egy bizonyos rácsállandónál maximumot vesz fel. Az ehhez tartozó rácsot nevezzük *optimális rácsnak*. Ha a rácsállandó ennél kisebb, *alulmoderált*, ha nagyobb, *túlmoderált* rácsról beszélünk. A biztonság szempontjából fontos tulajdonságaikra a 8.2. alfejezetben térünk vissza. A 8.1. és 8.2. táblázatokban feltűnő, hogy az ε gyorsasági tényező milyen nagy az alulmoderált rácsokban. Ennek az az oka, hogy ezekben a rácsokban nagyon kemény a neutronspektrum.

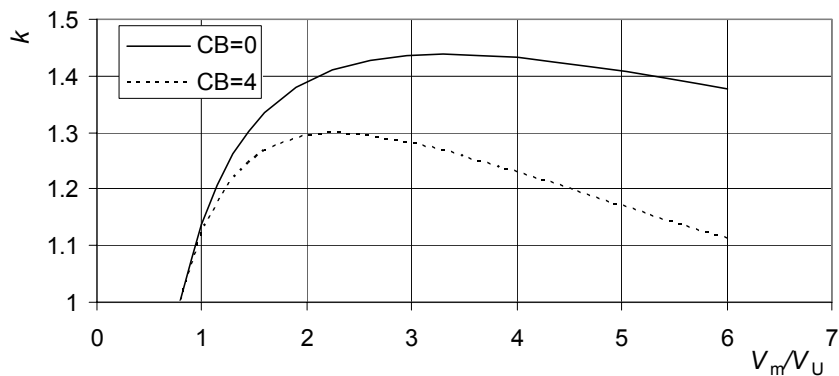


a)



b)

8.1. ábra. k_{∞} (az ábrán: k) az $r = V_m/V_U$ arány függvényében: a) $C_B = 0$ g/liter és b) $C_B = 4$ g/liter. Pontok: közvetlenül számított értékek; vonal: (8.3) képlet



8.2. ábra. k_{∞} (az ábrán: k) maximumának eltolódása a moderátorban oldott bórsav hatására

Az alul- vagy túlmoderáltság mértékének megadására legegyszerűbb a fenti $r = V_m/V_U$ arányt használni. Vannak azonban egyéb mennyiségek is, amelyeket egyes szerzők előnyben részesítenek. Közülük a legközönségesebb a “H/U viszony”: az aktív zónában levő hidrogén- és ^{235}U -magok számának az aránya.⁵ Értékét megkapjuk, ha a V_m/V_U arányt megszorozzuk a megsűrűségek arányával. A fenti rácsokra számí-

⁵ Magyarországon is ez terjedt el.

tott értékeit a 8.3. táblázatban adjuk meg. Ennek a mutatónak nagy előnye, hogy a fűtőelem dúsításának a hatását is magába foglalja. A tapasztalat szerint a különböző dúsítású rácsok esetében is a 8.1. ábrához hasonló görbéket lehet készíteni, és ezeken a különböző dúsítású rácsok nem válnak egymástól.

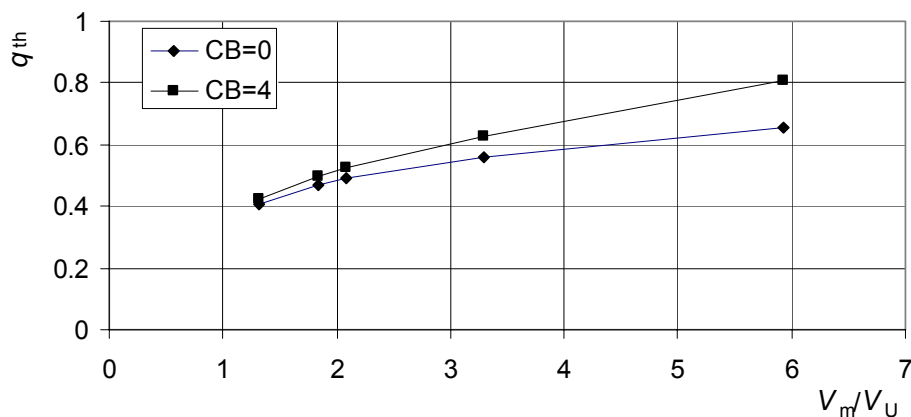
8.3. táblázat. Az alul-, illetve túlmoderáltságot jellemző mennyiségek 3,6% dúsítású, VVER-típusú fűtőelemrácsokra

Rácsállandó	V_m/V_U	H/U	q_{th} ($C_B = 0$)	q_{th} ($C_B = 4$ g/liter)
11,0 mm	1,3099	106	0,4076	0,4223
12,2 mm	1,8414	149	0,4696	0,4986
12,7 mm	2,0791	168	0,4888	0,5244
15,0 mm	3,2955	266	0,5571	0,6286
19,05 mm	5,9279	479	0,6550	0,8071

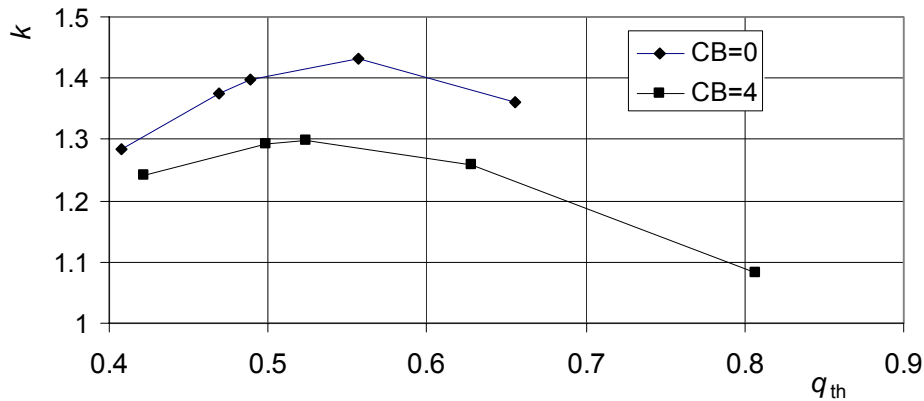
Francia szerzők munkáiban gyakran találkozunk a következő mennyiséggel. Amikor különböző dúsítású, hőmérsékletű, bórsavtartalmú stb. rácsokra számolt mennyiségeket vetünk össze egymással, található egy paraméter, amely a rács moderáltságot egymagában jellemzi: ez a lassulási sűrűség értéke a termikus csoport felső határánál (q_{th}). E mennyiségnek csak akkor van értelme, amikor az analízist sokcsoport aszimptotikus számításra alapozzuk. Ebben az esetben q_{th} több effektust egyesít magában:

- Arányos a rezonanciakikerülési valószínűséggel.
- Arányos az epitermikus bennmaradási valószínűséggel.
- Az utóbbit mindig az anyagi görbületi paraméternél (tehát a kritikus állapotra vonatkozóan) számítjuk ki, így q_{th} függ a fűtőelemrács globális tulajdonságaitól is.

A 8.3. ábrán látható, hogy q_{th} közel lineárisan változik V_m/V_U -val. Természetesen ez sem "csodaszer". A 8.4. ábrán e mennyiség függvényében ábrázoljuk k_{∞} -t. Az ábrán világosan elkülönül egymástól a két bórkoncentrációhoz tartozó görbe. Különböző rácsok tulajdonságainak elemzésekor mégis hasznos ennek a paraméternek a függvényében is felrajzolni a vizsgált mennyiségeket.



8.3. ábra. A termikus csoport határán megjelenő lassulási sűrűség (q_{th})



8.4. ábra. k_{∞} (az ábrán: k) ábrázolása q_{th} függvényében

8.2. Reaktivástényezők

A reaktor biztonsága szempontjából döntő fontosságú, hogyan változik meg a reaktivitás, amikor a reaktorban valami megváltozik. A legfontosabb a teljesítmény változása által előidézett reaktivitásváltozás. Mindezeket a hatásokat *reaktivástényezőkkel* jellemezzük. Ebben a fejezetben a hőmérsékletre, a teljesítményre, a buborékokra, a bórkoncentrációra és a hűtőközeg nyomására vonatkozó tényezőkkel foglalkozunk. Az x mennyiségre vonatkozó reaktivástényezőt az

$$\alpha_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (8.4)$$

képlettel definiáljuk. Mielőtt az egyes tényezők tárgyalásába kezdenénk, megemlítjük, hogy a felsoroltak nem függetlenek egymástól. Az egyik legfontosabb, a teljesítménytényező például kifejezhető a többivel.

A reaktivástényezők általában a legnehezebben számítható mennyiségek. Mindegyikük sok mennyiség megváltozásán keresztül érvényesül, amelyeknek számítással való meghatározása gyakran bonyolult feladat, továbbá számos anyagi jellemző részletes ismeretét igényli. Ezenkívül problémát jelent, hogy az x mennyiség infinitezimális megváltozásához tartozó reaktivitásváltozás szintén infinitezimális, amelynek numerikus meghatározása sok hibaforrást tartalmaz. Ezért gyakran kénytelenek vagyunk igénybe venni a perturbációelmélet képleteit, amelyek kifejtésére ebben a fejezetben nincs lehetőség.⁶ *Mindezekre való tekintettel a reaktivástényezőket feltétlenül meg kell mérni, hogy ellenőrizhessük a számítások pontosságát.*

A reaktivástényezők tárgyalására legegyszerűbb a hatfaktor-formulából kiindulni és a következő mennyiséget elemezni:

$$\frac{\partial \ln k_{eff}}{\partial x} = \frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \ln \eta}{\partial x} + \frac{\partial \ln p}{\partial x} + \frac{\partial \ln f}{\partial x} + \frac{\partial \ln P_{NL}^{epi}}{\partial x} + \frac{\partial \ln P_{NL}^{th}}{\partial x}, \quad (8.5)$$

⁶ Részletes kifejtése megtalálható a Bevezetés a reaktorfizikába című könyvben.

ahol az utolsó két tag a epitermikus, illetve a termikus bennmaradási valószínűség deriváltját jelenti. Mi is ezt fogjuk tenni, de tudnunk kell, hogy ez legfeljebb kvalitatív következtetésekre ad lehetőséget. A reaktivástényezők ugyanis erősen függnnek a fluxus térbeli eloszlásától, aminek a hatása nincs benne a négyfaktor-formulában. Így például ez a képlet csak nagy hibával adja meg reflektált reaktorok reaktivástényezőit.

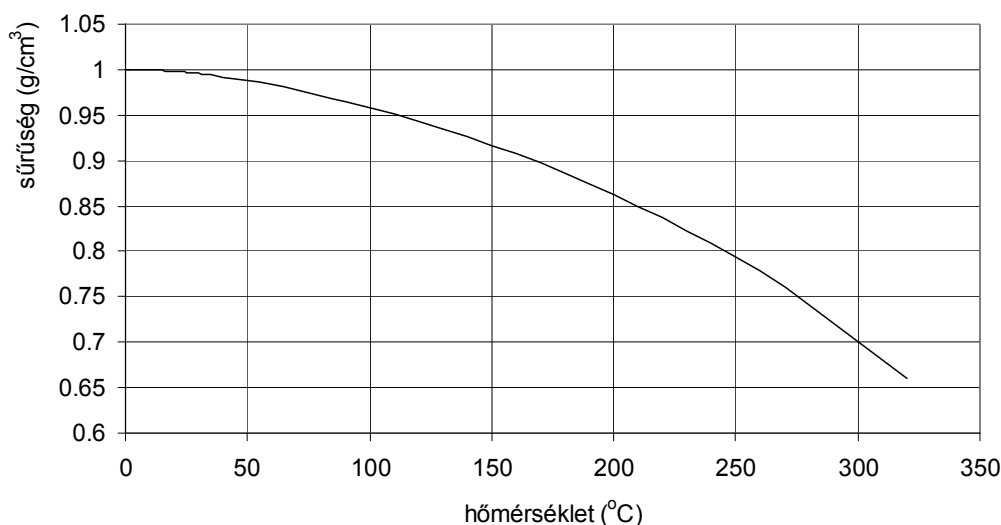
8.2.1. A moderátor hőfoktényezője

A moderátor hőfoktényezője (8.4) értelmében a következő:

$$\alpha_m = \frac{\partial \rho}{\partial T_m}, \quad (8.6)$$

ahol T_m a moderátor hőmérséklete. Amikor a moderátor hőmérséklete megváltozik, két effektus révén változik meg a reaktivitás: megváltozik a moderátor sűrűsége és a neutronok spektruma. E két effektussal külön-külön foglalkozunk. Tekintve, hogy a moderátor hőmérséklete a gyakorlatban nem változhat meg anélkül, hogy vele együtt az urán hőmérséklete is megváltozzon, az alábbiakban feltételezzük, hogy $T_U = T_m$. Az ilyen feltételekhez (8.6) szerint tartozó hőfoktényezőt *izotermikus hőfoktényező*-nek nevezzük. Elvileg ugyan ki lehet számítani ettől eltérő hőfoktényezőt is, de csak az izotermikus tényező közvetlen kísérleti meghatározása lehetséges.

A víz sűrűsége a szobahőmérséklet környékén a hőmérséklettel alig változik, viszont a nyomottvízes atomerőművek üzemi viszonyai között (300 °C közelében) a változás már jelentős. Ennek illusztrálására mutatjuk be a 8.5. ábrát. Ha ezt a görbét numerikusan deriváljuk, a sűrűség relatív megváltozására $-21 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$ adódik 20 °C-nál, viszont 300 °C környékén közelítőleg $-250 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$. Ez a nagyságrendi különbség eredményezi, hogy a moderátor sűrűségének a megváltozása domináns effektus az üzemi hőmérsékleten, viszont a többi effektussal azonos nagyságrendű alacsonyabb hőmérsékleteken.



8.5. ábra. A tiszta víz sűrűségének a hőmérséklettel való változása

Tekintsük a 8.1. ábrát, amely k_{∞} -t mutatja a moderátor és az urán térfogatarányának a függvényében. Végso soron ez ekvivalens a H/U viszony függvényében való ábrázolással. Amikor a moderátor sűrűsége változik, a reaktivitás megváltozása eszerint attól függ, alul- vagy túlmoderált-e a fűtőelemrács. Ha túlmoderált, a sűrűség csökkenésekor k_{∞} nő, tehát a reaktivitás is nő. Ez azt jelenti, hogy a moderátor hőmérsékletének emelkedésekor a reaktivitás nőne, vagyis a hőfoktényezőnek a moderátor sűrűségéhez tartozó komponense pozitív lenne. Ha viszont a rács alulmoderált, az effektus fordított: a hőfoktényezőnek a moderátor sűrűségéhez tartozó komponense negatív. A 8.3. alfejezetben látni fogjuk, hogy egy reaktor csak negatív hőfoktényező mellett lehet biztonságos, így *csak olyan fűtőelemrács kialakítása engedhető meg, amely az üzemi hőmérsékleten alulmoderált.*⁷

Nézzük ezután (8.5) egyes komponenseit külön-külön. Az alábbiakban végig ki fogjuk használni, hogy $\partial N_m / \partial T_m < 0$. Az η és ε tényezők gyengén függenek a moderátoratomok N_m sűrűségétől. A termikus hasznosítási tényezőt (8.2) alapján deriválhatjuk:

$$\frac{\partial \ln f}{\partial T_m} = -f \frac{\sigma_{\text{am}} V_m \bar{\Phi}_m}{\sigma_a^{25} V_U N_U \bar{\Phi}_U} \frac{\partial N_m}{\partial T_m} = -f \left(\frac{1}{f} - 1 \right) \frac{\partial \ln N_m}{\partial T_m} = -(1-f) \frac{\partial \ln N_m}{\partial T_m} > 0.$$

Az átlagfluxusok arányának a deriváltja kicsi (bár általában pozitív). A rezonanciakerülési valószínűség közvetlenül függ a T_U és T_m hőmérsékletektől. Az előbbitől való függés elemzését későbbre halasztjuk, most csak az utóbbival foglalkozunk. (8.1) szerint

$$\frac{\partial \ln p}{\partial T_m} = \frac{V_U N_U^{28} I}{V_m N_m^2 (\xi \sigma)_m} \frac{\partial N_m}{\partial T_m} = -\ln p \frac{\partial \ln N_m}{\partial T_m} < 0.$$

Az epitermikus kiszökési valószínűség csak a τ Fermi-koron keresztül függ T_m -től:

$$\frac{\partial \ln P_{\text{NL}}^{\text{epi}}}{\partial T_m} = -B^2 \frac{\partial \tau}{\partial T_m} = 2B^2 \tau \frac{\partial \ln N_m}{\partial T_m} < 0.$$

Itt kihasználtuk a 6.6. alfejezet képleteit. Az utóbbi lépést azért tehetjük meg, mert D fordítva, Σ_i pedig egyenesen arányos N_m -mel, tehát (alkalmas C együtthatóval)

$$\tau = \frac{C}{N_m^2}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{\partial \tau}{\partial N_m} = -\frac{2C}{N_m^3} = -\frac{2\tau}{N_m}.$$

Ha a termikus bennmaradási valószínűséget közelítőleg a

⁷ A hőfoktényezőnek a sűrűséghez tartozó komponensét még ellensúlyozhatják egyéb effektusok. Az elfogadott biztonsági filozófia szerint azonban megköveteljük, hogy a hőfoktényező minden komponense külön-külön is negatív legyen.

$$P_{NL}^{th} = \frac{1}{1 + B^2 L^2} \approx e^{-B^2 L^2}$$

alakban írjuk fel, akkor az előbbi analógiájára a

$$\frac{\partial \ln P_{NL}^{th}}{\partial T_m} = 2B^2 L^2 \frac{\partial \ln N_m}{\partial T_m} < 0$$

eredményt kapjuk. Végeredményben tehát a hőfoktényező most vizsgált összetevőjét az

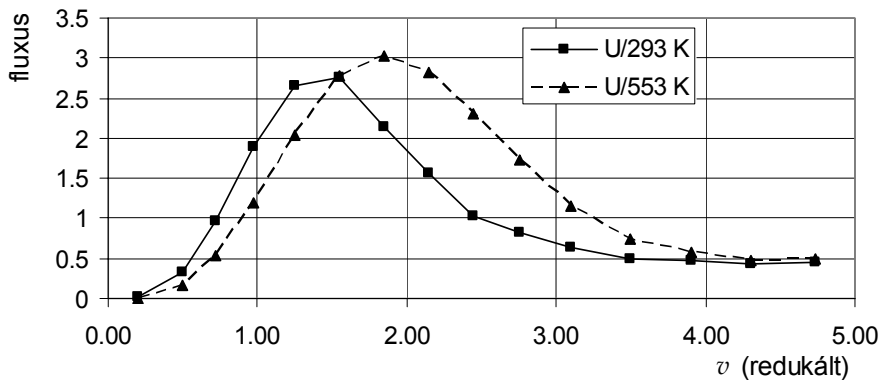
$$\alpha_{m1} = \left[-(1-f) - \ln p + 2B^2 M^2 \right] \frac{\partial \ln N_m}{\partial T_m} \quad (8.7)$$

képlet adja meg. Az erőművi reaktorok nagyok, tehát B^2 kicsi, így $B^2 M^2 \approx 0,02$. A másik két tagban jó közelítéssel felvehetjük, hogy $f = 0,90$ és $p = 0,70$. Láttuk, hogy a víz sűrűségének deriváltja üzemi hőmérsékleten $-250 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$, amivel

$$\alpha_{m1} = [-0,10 + 0,36 + 0,02] (-250 \cdot 10^{-5}) = -70 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}.$$

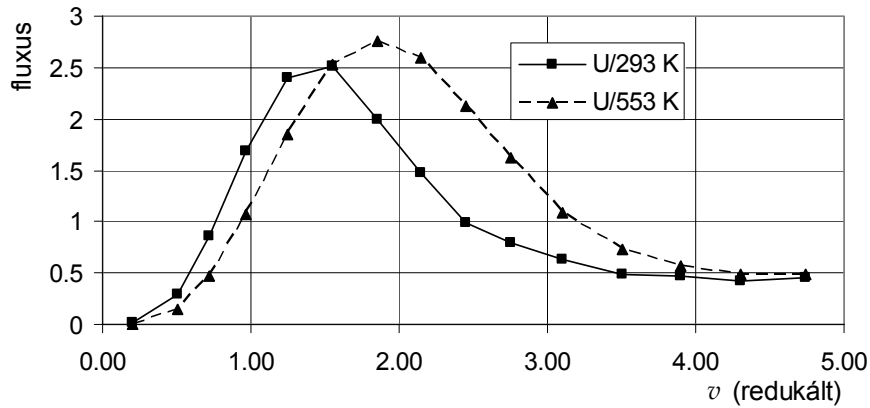
Ugyanez a szobahőmérséklet közelében közelítőleg $-7 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$. A fentiek mutatják, hogy a legnagyobb járulékot a rezonanciakikerülési valószínűség deriváltja adja. Fontos körülmény továbbá, hogy a vízsűrűség megváltozásán keresztül megjelenő tagok előjele – a termikus hasznosítási tényezőt leszámítva – negatív. A fűtőelemrácot tehát mindig lehet úgy méretezni, hogy az eredő *biztonsággal* negatív legyen.

Nézzük ezután a spektrális effektusokat. Közülük elsősorban a termikus spektrum változása érdemel említést. A 8.6. és 8.7. ábrákon bemutatjuk, hogyan változik a fűtőelemrúd középvezetési és a moderátorok a rúdtól legtávolabbi pontjában kialakuló spektrum a szobahőmérséklet ($T = 293 \text{ K}$) és üzemi hőmérséklet ($T = 553 \text{ K}$) között.⁸ (A redukált sebesség egysége $2,2 \text{ km/s}$.) Látható, hogy a hőmérséklet növekedésekor a spektrum mind tiszta víz, mind bórsav esetében jelentősen keményedik az uránban és a moderátorban egyaránt.



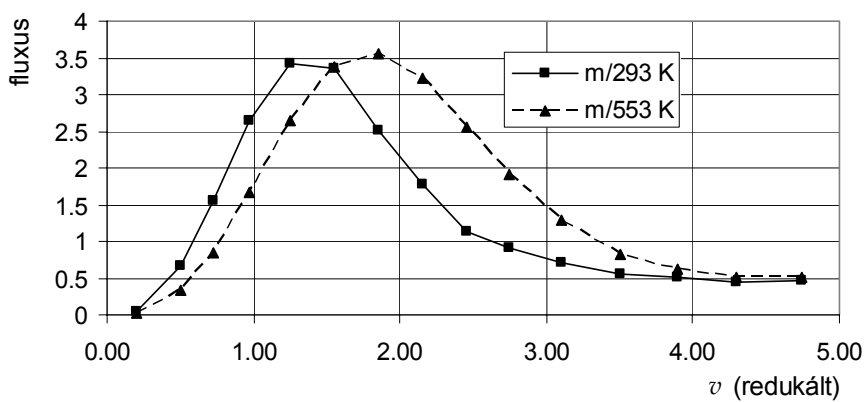
a)

⁸ Az ábrázolt mennyiségeket a THERMOS programmal (vö. 6.5.3. szakasz) számoltuk.

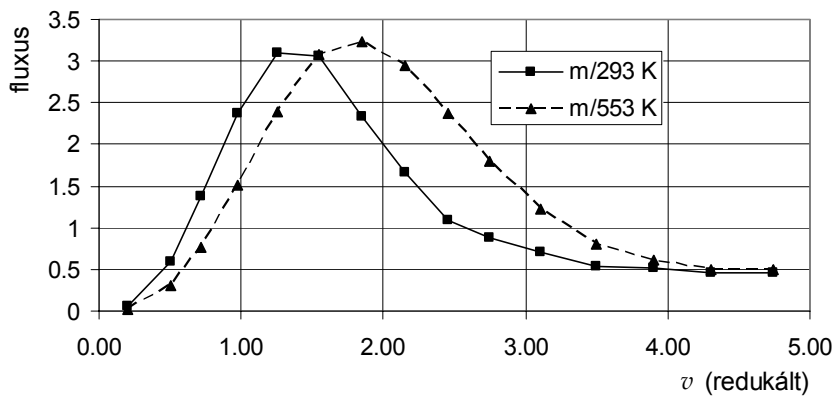


b)

8.6. ábra. Termikus spektrum az uránrúd közepén: a) $C_B = 0$ és b) $C_B = 4$ g/liter. (Rácsállandó: 12,7 mm; dúsítás: 3,6%.)



a)



b)

8.7. ábra. Termikus spektrum a moderátor közepén: a) $C_B = 0$ és b) $C_B = 4$ g/liter. (Rácsállandó: 12,7 mm; dúsítás: 3,6%.)

Mind az urán, mind a moderátor abszorpciós hatáskeresztmetszetei a neutron-energiával csökkennek, tehát a termikus spektrum keményedése minden esetben a termikus csoportra vonatkozó csoportállandók csökkenéséhez vezet. Ha minden hatáskeresztmetszet $1/v$ lenne, (8.2) szerint ez nem befolyásolná a termikus hasznosítási tényező (f) értékét. Az utóbbi ugyanis csak a σ_{25}^a/σ_m^a hányadostól függ. Mivel az ilyen hatáskeresztmetszetek átlaga fordítva arányos az átlagos sebességgel, amelyet a két hőmérsékletre vonatkozóan v_1 -gyel, illetve v_2 -vel jelölünk, írhatjuk:

$$\frac{\sigma_{25}^a(v_2)}{\sigma_m^a(v_2)} = \frac{\sigma_{25}^a(v_1) \cdot v_1/v_2}{\sigma_m^a(v_1) \cdot v_1/v_2} = \frac{\sigma_{25}^a(v_1)}{\sigma_m^a(v_1)}$$

Így ez a hányados $1/v$ hatáskeresztmetszetek esetében nem változik. A tényleges hatáskeresztmetszetek esetében e hatáskeresztmetszetek aránya azonban megváltozik a spektrum keményedése miatt. A 8.4. táblázatban megadjuk a (8.2) képletben szereplő mennyiségeket két különböző hőmérsékleten. A számításokat úgy végeztük, hogy a hőmérsékleten kívül mindent változatlanul hagytunk, tehát a táblázatban látható mennyiségek tisztán a spektrumváltozás hatását mutatják.⁹ A táblázatból látható, hogy a spektrumváltozásnak van hatása – mégpedig úgy, hogy f növekszik. Ennek a hőfok-tényezőre gyakorolt hatása az alábbiak szerint becsülhető:

$$\frac{\partial \ln f}{\partial T_m} \approx \frac{0,9245 - 0,9233}{0,9233 \cdot (553 - 293)} = 0,50 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \quad C_B = 0;$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial T_m} \approx \frac{0,8473 - 0,8450}{0,8450 \cdot (553 - 293)} = 1,05 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}. \quad C_B = 4,0.$$

A spektrumváltozás hatásának a nagyságrendje tehát $10^{-5}/^\circ\text{C}$, vagyis csak a szobahőmérséklet közelében mérhető össze a vízsűrűség megváltozásán keresztül érvényesülő effektusokéval. Emiatt a termikus spektrum keményedésének a hatását ugyan nem szabad elhanyagolni, de önmagában nem vonatkozik rá biztonsági kritérium.

8.4. táblázat. A termikus spektrum keményedésének a hatása

C_B (g/liter)	T (K)	$\sigma_m^a / \sigma_{25}^a$	$\bar{\Phi}_m / \bar{\Phi}_U$	f
0	293	$1,091 \cdot 10^{-3}$	1,1610	0,9233
	553	$1,083 \cdot 10^{-3}$	1,1296	0,9245
4,0	293	$2,551 \cdot 10^{-3}$	1,1585	0,8451
	553	$2,532 \cdot 10^{-3}$	1,1286	0,8474

8.2.2. Doppler-együttható

Az urán hőmérsékletére vonatkozó hőfoktényezőt általában *Doppler-együtthatónak* nevezzük, mert gyakorlatilag teljes egészében a 6.4.4. szakaszban tárgyalt Doppler-effektus határozza meg. Amikor T_U változik, megváltozik a fűtőelemrúd mérete, az UO_2 sűrűsége stb. E változások hatása azonban kicsi a rezonanciaintegrál növekedésének a hatásához képest. Eszerint tehát elég a (8.1)-ben felírt rezonanciakikerülési valószínűséget vizsgálni.

A fentiek mintájára kapjuk a megfelelő hőfoktényezőt:

⁹ A hőmérséklet hatására megváltozó magsűrűségek is befolyásolják a spektrumot, de ez másodlagos effektus, amelyet elhanyagolunk.

$$\alpha_D = \frac{\partial \ln p}{\partial T_U} = - \frac{V_U N_U^{28}}{V_m N_m (\xi \sigma)_m} \frac{\partial I}{\partial T_U} = \ln p \frac{\partial \ln I}{\partial T_U} < 0. \quad (8.8)$$

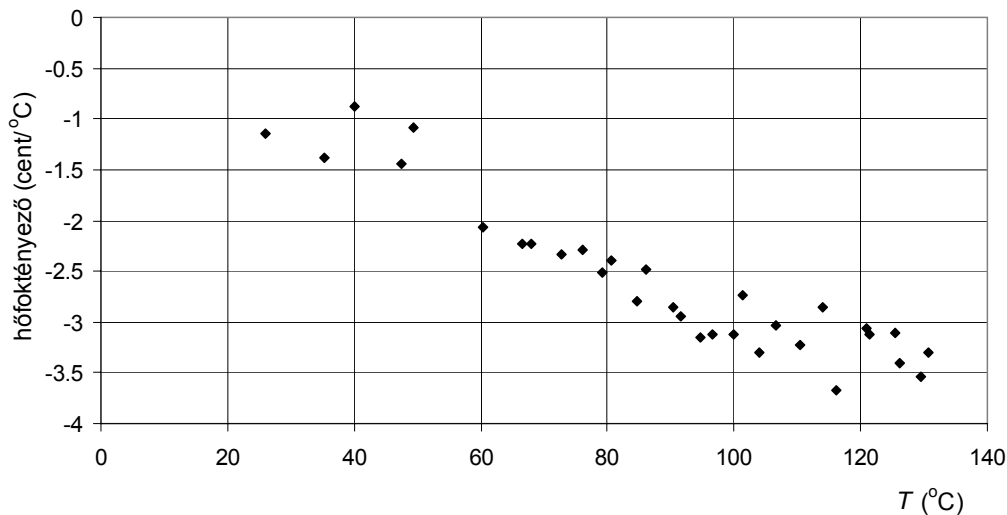
A 6.4.4. szakaszban láttuk, hogy I az urán hőmérsékletével monoton nő, tehát a jobb oldalon szereplő derivált pozitív. Mivel $\ln p$ negatív, a *Doppler-együttható mindig negatív*. A (6.37) képletek szerinti Hellstrand-formulák megadják a rezonanciaintegrált a különböző méretű fűtőelemrudakra vonatkozóan. Hellstrand meghatározta ennek hőfokfüggését is (vö. 6.4.4. szakasz). UO_2 -re

$$I(T_U) = I(T_0) \left(1 + \beta (\sqrt{T_U} - \sqrt{T_0}) \right) \quad (8.9)$$

ahol $T_0 = 300$ K és $\beta = \left(61 + 47 \frac{S}{M} \right) \cdot 10^{-4}$. A VVER-típusú rudakra $I = 18$ barn, $p = 0,67$. Ennek deriváltja $1,7 \cdot 10^{-3}$ barn/°C [vö. (8.9)], tehát (8.8) szerint

$$\alpha_D = \frac{1,7 \cdot 10^{-3}}{18} \ln 0,67 = -3,8 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}.$$

A Doppler-együttható minden esetben negatív. Jóllehet értéke kicsi a moderátor hőfoktényezőjéhez képest, α_D negatív voltának óriási biztonsági jelentősége van. Amint a reaktor teljesítménye nőni kezd, ezt késelem nélkül követi az urán hőmérséklete. Így a Doppler-együttható azonnal csökkenteni kezdi a reaktivitást. A 8.3. alfejezetben ezzel a jelenséggel részletesen fogunk foglalkozni. Az azonnali hatásra való tekintettel a Doppler-együtthatót szokás *prompt hőfoktényezőnek* is nevezni.



8.8. ábra. Mért hőfoktényező a hőmérséklet függvényében. Rácsállandó: 12,7 mm; dúsítás: 3,6%; $C_B = 4,0$ g/liter

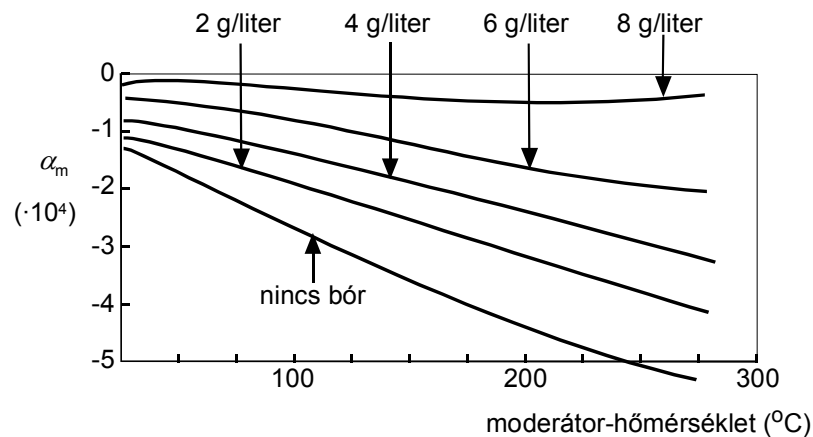
Példaképpen a 8.8. ábrán bemutatjuk egy VVER-típusú rácson végzett hőfoktényező-mérés eredményeit. A mérésben végig azonos volt az urán és a moderátor hőmérséklete, tehát ezek izotermikus hőfoktényezők. Látszik, hogy a hőfoktényező

végig negatív, és a hőmérséklettel csökken. A mérés cent (ϕ)¹⁰ egységekben szolgáltatja a reaktivitást. Ha ezt abszolút egységekbe akarjuk átszámolni, akkor az ábrázolt mennyiségeket $7,51 \cdot 10^{-5}$ -nel kell megszorozni. Eszerint tehát a hőfoktényező szoba-hőmérsékleten $-7,5 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$ körüli érték, ami 100°C környékén már $-23 \cdot 10^{-5}/^\circ\text{C}$ -ra csökken. Ezek a kísérleti adatok alátámasztják a fenti elméleti következtetéseket.

8.2.3. A bórsav hatása

A bórsav jelentősen befolyásolja a hőfoktényezőt. Ennek egyik aspektusát a fentiekben már elemeztük a termikus hasznosítási tényező révén. Láttuk, hogy f deriváltja pozitív: $\partial f/\partial T_m > 0$, és abszolút értéke annál nagyobb, minél nagyobb a bórsav koncentráció. Vannak azonban további hatások is. Ahogy nő a bórsav koncentrációja, egyre nő a termikus csoport abszorpciós hatáskeresztmetszete, ami miatt a neutron-spektrum az epitermikus neutronok javára tolódik el. Matematikailag ez azt jelenti, hogy megnő az ε tényező. Ezt látjuk a 8.1. és 8.2. táblázatok összehasonlításakor. Ez az oka annak, hogy a bórsav hatására k_∞ görbéje a kisebb V_m/V_U arányok felé tolódik el. Végeredményben a moderátor hőfoktényezője (a paksi atomerőműre vonatkozóan) a 8.9. ábrán látható módon függ a bórsav koncentrációjától: minél nagyobb C_B , annál kisebb a hőfoktényező abszolút értéke.¹¹

Annak, hogy a bórsav koncentrációja nem mehet 8 g/liter fölé – többek között – az is oka, hogy e fölött α_m már pozitív lehet. Ez a probléma a reaktor indítását közvetlenül követő időszakban merül fel, amikor C_B még nagy. Ahogy az üzem során az urán fogy, C_B folyamatosan csökken (vö. 9. fejezet), és emiatt a moderátor hőfoktényezője egyre negatívabbá válik.



8.9. ábra. A moderátor hőfoktényezője a bórsav különböző koncentrációi mellett. (A görbék a paksi atomerőműre vonatkoznak.)

¹⁰ A reaktivitás egységére a 3.2. alfejezetben bevezettük a dollárt (\$), amelynek a századrésze a cent (¢).

¹¹ E jelenség magyarázata nagyon nehézkes heurisztikusan, ugyanis több, nehezen átlátható effektus eredőjéről van szó. A megértést nehezíti, hogy a döntő effektusok az epitermikus spektrum alakjára vonatkoznak.

8.2.4. Üregegyűthető

Az üregegyűthető (α_{ii}) a moderátorban képződött buborékokra vonatkozó reaktivitástényező. (8.4) szerint ebben az esetben az x paraméter a buborékoknak a moderátor teljes térfogatához viszonyított aránya. Az üregegyűthető elsősorban a forralóvízes reaktorokban fontos mennyiség, mivel ott a moderátor jelentős részaránya a gőzbuborékok belsejében van. Nyomottvízes reaktorokban – elvileg – nincs forrás. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a fűtőelemek felületén nem keletkezhetnek gőzbuborékok, amelyek előbb-utóbb besodrónak a hűtőközeg belsejébe, és ott összeroppannak. Végeredményben tehát csökken a moderátor sűrűsége, ami csökkenti a rezonancia-kikerülési valószínűséget, és növeli a termikus hasznosítási tényezőt. Amíg a fűtőelemrác alulmoderált, az előbbi effektus a domináns, vagyis az üregegyűthető negatív. Értéke közelítőleg $-100 \cdot 10^{-5}/(\% \text{ üreg})$. Ha figyelembe vesszük, hogy a hűtőközeg térfogatának mintegy 0,5%-át foglalják el a buborékok, az üregeffektus teljes hatása egy nyomottvízes erőműben $-50 \cdot 10^{-5}$, ami üzemi hőmérsékleten megfelel annak a hatásnak, amelyet a moderátor hőmérsékletének 0,7 °C-kal való emelkedése okoz.

Az üregeffektus jelentős szerepet játszhat baleseti körülmények között, hiszen ekkor számolni kell a moderátor tömeges forrásával. Ilyenkor a fűtőelemrác alul- vagy túlmoderáltsága nagy biztonsági jelentőséget kap: túlmoderált rácspan az üregeffektus – általában – pozitív. Ez az egyik fő oka annak, hogy erőművi reaktorokban csak alulmoderált fűtőelemrácok engedélyezhetők. Ha a 8.2. ábrára tekintünk, belátjuk, hogy ebben a tekintetben a bórsav hatását körültekintően kell figyelembe venni.

8.2.5. Nyomáseggyűthető

A nyomottvízes atomerőművekben a hűtőközeg nyomása 12–15 MPa közötti érték lehet.¹² Mivel a folyadékok sűrűsége csak kis mértékben függ a nyomástól (hiszen “összenyomhatatlanok”), a nyomáseggyűthető (α_p) kicsi. A nyomás hatására a moderátor sűrűsége nő, ami – alulmoderált rácspan esetében – pozitív effektus. α_p értéke $14 \cdot 10^{-5}/\text{MPa}$. Ha ezt összevetjük a moderátor hőfoktényezőjével, akkor azt látjuk, hogy a nyomás 1 MPa-lal való növelésének (szobahőmérsékleten) körülbelül akkora hatása van, mint amikor a moderátor hőmérsékletét 1 °C-kal csökkentjük.

8.2.6. Teljesítménytényező

A reaktorok biztonsága szempontjából legfontosabb mennyiség a teljesítménytényező (α_{telj}), amelyre vonatkozóan a (8.4) képlet szerinti x paraméter a reaktor teljesítménye. Amikor a teljesítmény változik, változik a moderátor és az üzemanyag (urán) hőmérséklete, vagyis a teljesítménytényező α_m és α_D kombinációja:

$$\alpha_{telj} = \alpha_m \frac{\Delta T_m}{\Delta(\text{telj})} + \alpha_D \frac{\Delta T_U}{\Delta(\text{telj})}. \quad (8.10)$$

¹² A paksi atomerőműben 12,3 MPa.

Ha a moderátorban buborékok is vannak, akkor ezt ki kell még egészíteni egy további taggal, amely az üregegyütthatón keresztül veszi figyelembe a hűtőközegnek a teljesítménytől függő mértékű forrását. Ebből látszik, hogy a teljesítménytényező függ attól, hogy az adott körülmények között a moderátor és az üzemanyag hőmérséklete hogyan változik a teljesítménnyel. Példaképpen néhány eset:

- *izotermikus* teljesítménytényező: $T_m = T_U$; erre a fentiekben már láttunk példát;
- *adiabatikus* teljesítménytényező: T_U nő, de T_m nem változik; ilyen esetet vizsgálunk a 8.5. alfejezetben;
- *kvázisztatikus* teljesítménytényező: T_U és T_m úgy változik, hogy tartósan fennáll a moderátor és a fűtőelemrúd közötti hőcsere egyensúlya.

Biztonsági feltétel, hogy ne csak maga a hőfoktényező legyen negatív, hanem annak mindegyik összetevője külön-külön is. A körülményektől függően ugyanis egyik vagy másik válik dominánssá, tehát a biztonsághoz szükséges negatív visszacsatolás csak úgy biztosítható minden körülmények között, hogy mindegyik összetevő negatív.

8.2.7. Bórsavegyüttható

A moderátorban oldott bórsav jelentősen csökkenti a reaktivitást. A reaktor tervezője számára jelentős mennyiség a *bórsavegyüttható*, amelynek esetében a (8.4) képlet szerinti x paraméter a bórsav koncentrációja (C_B). Értéke minden esetben negatív, hiszen a bórsav bevitele mindig csökkenti a reaktivitást. Részletes elemzésébe nem bocsátkozunk. Jellegzetes értéke -2 $\$/(\text{g/liter})$ és -3 $\$/(\text{g/liter})$ között van.

8.3. A reaktor megszaladása

A (3.7) reciprokóra egyenlet tárgyalásakor említettük, hogy 1 dollárnál nagyobb reaktivitások ($\rho > \beta$) esetében olyan rövid a kétszerezési idő, hogy lehetetlenné válik a külső beavatkozás. Ilyen esetekben – jól tervezett reaktorokban – negatív visszacsatolások lépnek működésbe, amelyek előbb-utóbb megállítják a reaktor teljesítményének növekedését. A 8.2.2. szakaszban láttuk, hogy biztosan létezik legalább egy ilyen effektus: ez a Doppler-effektus, amely elsősorban a hasadóanyag melegeedésén keresztül hat vissza a reaktivitásra. Nézzük meg most részletesen, mindez hogyan befolyásolja a reaktor időbeli magatartását. Az alábbiakban tárgyalt egyenlet *Fuchs–Hansen-modell* néven ismert.

A (3.6) szerinti pontkinetikai egyenletben $\varphi(t)$ -t úgy normáljuk, hogy megadja a reaktor teljesítményét. Az uránrudak hőmérsékletét T_U -val, a hűtőközeg hőmérsékletét T_m -mel jelöljük, továbbá feltesszük, hogy a reaktivitás a hőmérséklettel lineárisan változik:

$$\rho = \rho_0 - A(T_U - T_m) = \rho_0 - A\Delta T, \quad (8.11)$$

ahol A a reaktivitás hőfoktényezője:

$$A = -\frac{\partial \rho}{\partial T_U}.$$

A 8.2. alfejezetben láttuk, hogy más hőfoktényezőt kell rendelni az urán és a hűtőközeg hőmérsékletéhez, de ezt elhanyagoljuk. Általában mindkettő negatív [ellentétben azzal, ahogy (8.11)-ben felírtuk]. (8.11) mégis elfogadható az adott esetben, mert megszaladáskor a teljesítmény olyan gyorsan változik, hogy T_m gyakorlatilag állandónak tekinthető. Ahhoz, hogy (3.6)-ban ezt figyelembe vehessük, szükségünk van egy további egyenletre, amely a ΔT hőmérséklet-különbséget a $\varphi(t)$ teljesítménnyel összekapcsolja. Ezt a

$$\frac{d\Delta T(t)}{dt} = -a\Delta T(t) + b\varphi(t) \quad (8.12)$$

alakban írjuk fel ($a, b > 0$). Itt az a paraméter az urán és a hűtőközeg közötti *hőátadást* írja le, b pedig a reaktor *hőkapacitásával* van kapcsolatban:

$$\frac{1}{b} = c_p M, \quad (8.13)$$

ahol c_p a fajhő, M pedig a reaktorban lévő urán teljes tömege.

Ezzel a reaktorkinetikai egyenlet – matematikai szempontból – zárttá vált, tehát megpróbálhatjuk megoldani. Keressük először stacionárius megoldásait (C_{i0}, φ_0). (3.9c)-ből a stacionárius állapothoz tartozó $\omega = 0$ -val adódik

$$\lambda_i C_{i0} = \frac{\beta_i \varphi_0}{\Lambda},$$

továbbá (8.12)-ből az ehhez tartozó hőmérsékletet az

$$a\Delta T_0 = b\varphi_0 \quad (8.14a)$$

összefüggés határozza meg. Ezt (3.6)-ba helyettesítve kapjuk, hogy a pont-kinetikai egyenletnek csak akkor van megoldása, ha

$$\rho_0 = \frac{Ab\varphi_0}{a} = A\Delta T_0. \quad (8.14b)$$

Fizikailag ez azt jelenti, hogy a *visszacsatolások* révén a reaktor “beállítja” azt a teljesítményt és hőmérsékletet, amely mellett éppen kritikus, és ebben az állapotában addig marad meg, amíg vagy a hőmérséklet, vagy a reaktivitás – valamilyen okból – meg nem változik. A reaktor ezen a módon követni tudja a lassú és kicsi változásokat. A visszacsatolások miatt tehát a transzportegyenlet elveszíti linearitását: most már nem igaz, hogy tetszőleges teljesítményen lehet kritikus. Ha növelni akarjuk a telje-

sítményt, növelnünk kell a reaktivitást (pl. egy szabályozórúd kihúzásával): (8.14) szerint ezt követni fogja a reaktor hőmérséklete és teljesítménye.¹³

A fellépő reaktivitásváltozások azonban nem lehetnek akármilyen nagyok. Ha ugyanis a reaktivitás növekedése – tévedésből – meghaladja az 1 dollárt, akkor *a reaktor megszalad*: teljesítménye olyan gyorsan kezd változni, hogy – kedvezőtlen esetben – akár 1000-szeresére is megnőhet, mielőtt a megnövelt reaktivitáshoz tartozó nagyobb teljesítményre visszaállna. A megszaladás olyan gyorsan zajlik le, hogy nemcsak a késő neutronok szerepe, hanem még a moderátor (*a* paraméterrel jellemzett) hűtése sem tud érvényesülni. Az alábbiakban e folyamat részleteit fogjuk megvizsgálni.

Tételezzük fel, hogy a $(-\infty, 0)$ időintervallumban a reaktor időben állandó φ_0 teljesítményen működött, de a $t = 0$ időpontban egy $\Delta\rho > \beta$ reaktivitásváltozás történik. Ekkor egy $t > 0$ időpontban (8.11) helyett most a

$$\rho(t) = \rho_1 - A\Delta T(t) = \rho_0 + \Delta\rho - A\Delta T(t) \quad (8.15)$$

összefüggés lesz érvényben. A (8.12) differenciálegyenletnek $\Delta T(0) = \Delta T_0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása

$$\Delta T(t) = \Delta T_0 e^{-at} + b \int_0^t \varphi(t') e^{-a(t-t')} dt'.$$

A 3.1. alfejezetben láttuk, hogy $\Delta\rho > \beta$ esetén $\varphi(t)$ változásának időállandója ms nagyságrendű. Az *a* együtthatóval jellemzett hőátadás ennél lényegesen lassúbb folyamatnak felel meg, ezért a legutóbbi egyenletben nem követünk el nagy hibát, ha *a* helyébe nullát írunk. Az így kapott kifejezést (8.15)-be helyettesítve kapjuk a reaktivitás időtől való függését:

$$\rho(t) = \rho_1 - A\Delta T(t) = \rho_1 - A\Delta T_0 e^{-at} - Ab \int_0^t \varphi(t') e^{-a(t-t')} dt' \approx \Delta\rho - Ab \int_0^t \varphi(t') dt',$$

ahol figyelembe vettük, hogy (8.14) és (8.15) szerint

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_0 = \rho_1 - A\Delta T_0.$$

Mivel – mint fent mondtuk – most elhanyagoljuk a késő neutronokat, (3.6a) alapján írhatjuk:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \varphi(t) = \frac{\Delta\rho - \beta}{\Lambda} \varphi(t) - \frac{Ab\varphi(t)}{\Lambda} \int_0^t \varphi(t') dt'. \quad (8.16)$$

¹³ Egy atomerőmű üzemtana tehát nemcsak a reaktor kinetikáját megszabó mennyiségeknek, hanem a hőtechnikai visszacsatolásoknak az ismeretét is magában foglalja.

Bevezetjük a

$$\varphi_0 x(t) = \int_0^t \varphi(t') dt' \quad (8.17)$$

és

$$\varphi_0 y(t) = \varphi(t) = \varphi_0 \frac{dx}{dt} \quad (8.18)$$

jelöléseket. Ezzel (8.16) a

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \left[\frac{\Delta\rho - \beta}{A} - \frac{Ab\varphi_0}{A} x(t) \right] \frac{dx(t)}{dt}. \quad (8.19)$$

másodrendű (nem-lineáris) differenciálegyenletté írható át. Mivel (8.17) szerint $x(t)$ t -nek szigorúan monoton növekvő függvénye, $y(t)$ tekinthető t helyett x függvényének is. (8.18)-ból egyszerűen következik:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} y,$$

amit (8.19)-be helyettesítve az egyszerű

$$\frac{dy}{dx} = \gamma_1 (\gamma_2 - x) \quad (8.20)$$

egyenletre jutunk. Itt a következő jelöléseket vezettük be:

$$\gamma_1 = \frac{Ab\varphi_0}{A} > 0, \quad (8.21a)$$

$$\gamma_2 = \frac{\Delta\rho - \beta}{Ab\varphi_0} > 0. \quad (8.21b)$$

Szintén (8.17)-ből és (8.18)-ból látható, hogy a (8.20)-hoz tartozó kezdeti feltétel

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

(8.20)-at ennek figyelembevételével x szerint integráljuk:

$$y(x) = \frac{dx}{dt} = 1 + \gamma_1 \left(\gamma_2 - \frac{x}{2} \right) x,$$

amit t szerint tovább integrálva kapjuk:

$$t = \int_0^x \frac{dx'}{1 + \gamma_1 \gamma_2 x' - \gamma_1 x'^2 / 2} = \frac{2}{\gamma_1} \int_0^x \frac{dx'}{(x_1 - x')(x' - x_2)}, \quad (8.22)$$

ahol

$$x_1 = \gamma_2 + \sqrt{\gamma_2^2 + 2/\gamma_1} > 0 \quad (8.23a)$$

és

$$x_2 = \gamma_2 - \sqrt{\gamma_2^2 + 2/\gamma_1} < 0. \quad (8.23b)$$

(8.22)-ben az integrandus az $x_2 < x' < x_1$ tartományban pozitív. Ebből azonban értelemszerűen csak a $0 < x' < x_1$ tartomány jön szóba. Mivel $x' \rightarrow x_1$ -re az integrandus és maga az integrál is végtelenné válik, fennáll

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1. \quad (8.24)$$

Mindezek figyelembevételével az integrál kiértékelhető, és végeredményben kapjuk:

$$x(t) = x_1 \frac{e^{\gamma t} - 1}{e^{\gamma t} + G},$$

ahol

$$G = -\frac{x_1}{x_2} > 0$$

és

$$\gamma = \gamma_1 \sqrt{\gamma_2^2 + 2/\gamma_1}.$$

Ezt deriválva adódik a keresett végeredmény:

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = x_1 \frac{(G+1)\gamma e^{\gamma t}}{(e^{\gamma t} + G)^2}. \quad (8.25)$$

Ahhoz, hogy a kapott eredményeket értelmezni tudjuk, képleteinkbe helyettesítsük be a paksi atomerőműre jellemző számértékeket:

$$c_p = 0,3 \text{ Ws/(g}\cdot\text{°C)},$$

$$M = 42 \text{ tonna},$$

$$A = 3,4 \cdot 10^{-5} / \text{°C},$$

$$\varphi_0 = 1370 \text{ MW},$$

$$\Lambda = 40 \text{ }\mu\text{s},$$

$$b = 0,079 \text{ °C/MWs},$$

amivel (8.13)-ból, (8.21)-ből és (8.23)-ból kapjuk, hogy

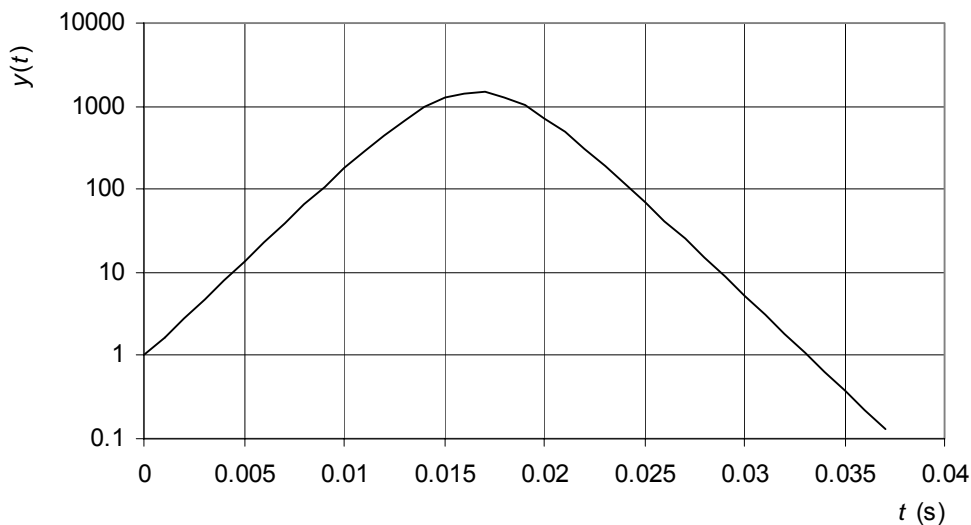
$$Ab\varphi_0 = 0,0037/\text{s},$$

$$\gamma_1 = 92,5/\text{s}^2,$$

$$\gamma_2 = \frac{\Delta\rho - \beta}{0,0037} = \frac{\Delta\rho/\beta - 1}{0,0037/\beta} = \frac{\Delta\rho/\beta - 1}{0,53} \text{ s}, \quad \beta = 0,007.$$

A 8.10. ábra a $\Delta\rho/\beta = 4$ \$ többletreaktivitásra vonatkozóan mutatja a teljesítmény megszaladását jellemző $y(t)$ függvényt. Ekkor

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= 5,68 \text{ s}, \\ \gamma &= 525/\text{s}, \\ x_1 &= 11,4 \text{ s}, \\ x_2 &= -0,0019 \text{ s}, \\ G &= 5961. \end{aligned}$$



8.10. ábra. A reaktor teljesítményének időfüggése megszaladáskor

Az ábrán mutatott [és (8.25) alatt általánosságban felírt] $y(t)$ függvény a

$$t = t_{\max} = \frac{\ln G}{\gamma} = 0,0166 \text{ s}$$

időpontban maximumot vesz fel, amelynek az értéke

$$y_{\max} = x_1 \gamma \frac{G+1}{4G} = 1491.$$

(8.18)-ből és (8.24)-ből látszik, hogy a megszaladás teljes időtartama alatt annyi teljesítmény szabadul fel, mint normális üzemben 11,4 s ($= x_1$) alatt, tehát nem nagyon sok. Ami a megszaladásos üzemzavarban súlyos következményekkel járhat, az az, hogy a teljesítmény rövid idő alatt a névleges teljesítmény sokszorosára (példánkban 16,6 ms alatt 1491-szeresére) fut fel, és ez már a fűtőelemek sérülését okozhatja.

Az üzemzavar lefolyása és méretei erősen függenek a bevitt $\Delta\rho$ reaktivitástól. Illusztrációképpen a 8.5. táblázatban különböző többletreaktivitásokra megadjuk az $y(t)$ függvénynek ebből a szempontból legfontosabb jellemzőit. Összefoglalásul megállapíthatjuk a következőket:

- A Doppler-együttható negatív volta nem csak ellensúlyozza a lassú reaktivitásváltozások hatását, hanem reaktivitásugrások esetében meg is állítja a teljesítmény gyors növekedését. Emiatt jól tervezett atomerőműben nem képzelhető el robbanás.
- A megszaladási folyamat néhányszor 10 ms alatt lezajlik, és a felszabaduló többletenergia kicsi.
- A pillanatnyi teljesítmény a névleges érték több ezerszerese lehet, ami károsíthatja a fűtőelemeket.

8.5. táblázat. A megszaladás jellemzői a reaktivitás függvényében

$\Delta\rho/\beta$	$\gamma(\text{s}^{-1})$	x_1 (s)	t_{\max} (ms)	y_{\max}
1,5	89	1,90	57,8	42
2	176	3,79	37,0	167
3	350	7,57	22,5	663
4	525	11,35	16,6	1491
5	700	15,14	13,2	2650
7	1050	22,70	9,60	5960
10	1575	34,06	6,91	13410

8.4. Feladatok

- 8.1. Hogyan következik a (8.1) egyenlet a (6.33) képletből? (2 pont)
- 8.2. Hogyan következik a (8.2) egyenlet a (6.49b) képletből? (2 pont)
- 8.3. Mutassuk meg, hogy az elemi cella L diffúziós hossza és a moderátor L_m diffúziós hossza között fennáll az $L^2 \approx (1-f)L_m^2$ közelítő összefüggés! A levezetésben vegyük a fűtőelem és a moderátor diffúzióállandóját azonosnak. Hogyan módosul az összefüggés, ha megkülönböztetjük a cella és a moderátor diffúzióállandóját (D , illetve D_m)? (5 pont)
- 8.4. Mutassuk meg, hogy az elemi cella τ Fermi-kora és a moderátor τ_m Fermi-kora között fennáll a $\tau \approx V_{\text{cella}}\tau_m/V_m$ közelítő összefüggés! A levezetésben vegyük a fűtőelem és a moderátor diffúzióállandóját azonosnak, továbbá hanyagoljuk el a fűtőelemben bekövetkező lassulást. (5 pont)
- 8.5. Oldjuk meg a diffúzióegyenletet az elemi cellára! Határfeltételek: (1) a fluxus deriváltja zérus a fűtőelem középvonalában és a cella külső határán; (2) a fluxus folytonos a fűtőelem és a moderátor határán; (3) az áram folytonos a fűtőelem és a moderátor határán. A termikus csoport határán a q lassulási sűrűséget vegyük zérusnak a fűtőelem belsejében, és tekintsük állandónak a moderátorban. (10 pont)
- 8.6. A 7.10. feladat megoldása alapján határozzuk meg az f termikus hasznosítási tényezőt!
- a) A megoldás alapján írjuk fel az f termikus hasznosítási tényezőt megadó képletet! (4 pont)
 - b) Mi f határértéke fekete rúdra, vagyis amikor a fűtőelem abszorpciós hatáskeresztmetszete a végtelenhez tart? (3 pont)
 - c) Lehet-e a számítást egyszerűsíteni, ha eleve egy fekete rúdból indulunk ki? (4 pont)

- 8.7. Mutassuk meg, hogy a hasadóanyag és a moderátor homogén keverékében a hőtágulás nem változtatja meg a négyfaktor-formula η és f tényezőit! (15 pont)
- 8.8. Feltesszük, hogy egy homogén reaktorban a fluxust a (6.44) képlet adja meg. A hasadóanyag abszorpciós hatáskeresztmetszetét a

$$\sigma(v) = \sigma(v_0) \frac{v_0 + c(v - v_0)}{v}$$

képlet adja meg, ahol v_0 a T_0 referencia-hőmérséklethez tartozó legvalószínűbb sebesség. A moderátor abszorpciós hatáskeresztmetszete $1/v$ -vel arányos.

- a) Számítsuk ki és c függvényében ábrázoljuk az abszorpciós csoportállandót! (5 pont)
 - b) Számítsuk ki az f termikus hasadási tényezőt! (5 pont)
 - c) Mekkora járulékot ad f hőmérsékletfüggése a reaktivitás hőfoktényezőjéhez? (5 pont)
- 8.9. A (8.9) képlet felhasználásával vizsgáljuk meg és grafikusán ábrázoljuk, hogyan függ a Doppler-együttható az urán hőmérsékletétől! (10 pont)
- 8.10. A 8.9. ábra mutatja, hogyan függ a moderátor hőfoktényezője a bórkoncentrációtól. Értelmezzük ezt a függést! (15 pont)
- 8.11. Számítsuk ki a 8.5. táblázatban megadott mennyiségeket 2,5 \$, 4,5 \$ és 6 \$ többletreaktivitásra! Hasonlítsuk össze grafikusán a kapott megszaladási görbéket! (5 pont)
- 8.12. Hogyan lehet egy kísérleti reaktorban mérni $\partial\rho/\partial T_m$ értékét (itt T_m a moderátor hőmérséklete)? Miért működik a javasolt mérési eljárás? Hogyan lehet egy energiatermelő reaktorban mérni $\partial\rho/\partial T_m$ értékét? Hasonlítsuk össze a két mérési módszert! (20 pont)

9. Kiegészés

Miközben a reaktor energiát termel, a nukleáris üzemanyag átalakul. Mindezekelőtt beszélhetünk technológiai elhasználódásról (a mechanikai tulajdonságok romlása a hasadási termékek felhalmozódása miatt, a neutron- és γ -sugárzás által okozott sugárkárosodás, az egymást ciklikusan váltó felmelegítések és lehűtések káros hatásai, a fűtőelem-burkolat korróziója stb.), amelynek eredményeképpen egy bizonyos mennyiségű energia megtermelése után az üzemanyagot frissre kell kicserélni. E technológiai folyamatok tárgyalása túlnőne jegyzetünk keretein. Ezért a továbbiakban csak a változások másik fontos köréről, a neutronfizikai elhasználódásról lesz szó:

- a hasadások fogyasztják a hasadóképes magokat;
- a hasadásokban hasadási termékek keletkeznek, amelyek között számos neutron-abszorbens (ún. *neutronmérég*) van;
- neutronbefogás és radioaktív bomlás révén transzurán elemek, köztük hasadó izotópok keletkeznek.

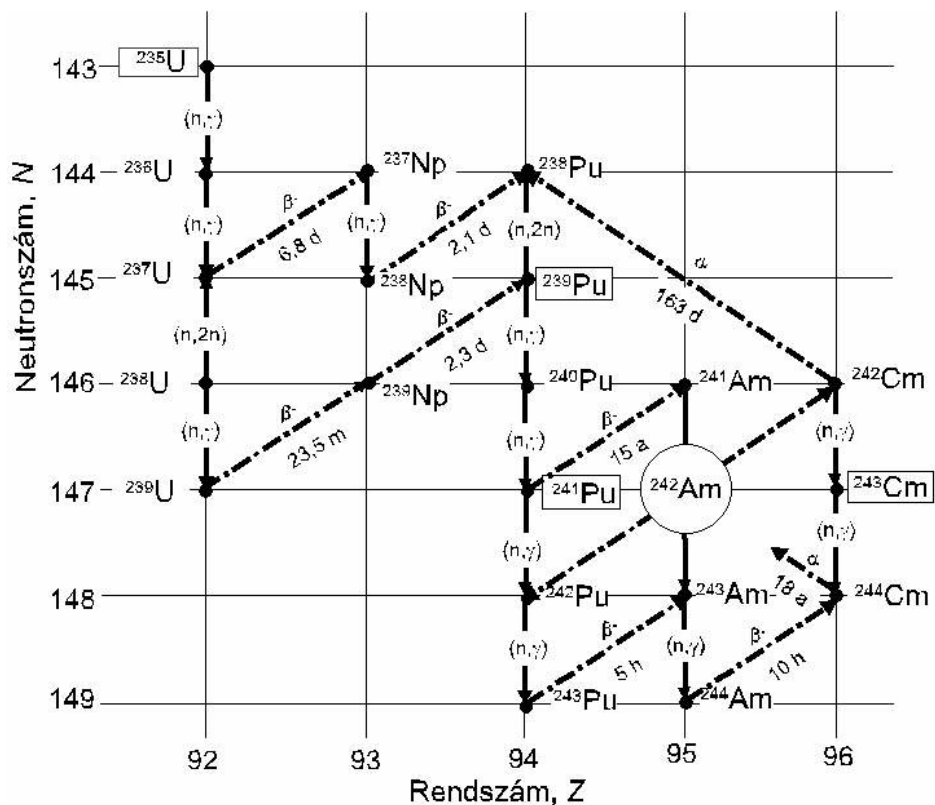
Ezeket a folyamatokat együttesen – a hagyományos erőművekkel való analógia alapján – *kiegés*nek nevezzük. Egy adott reaktortöltet addig tartható üzemben, amíg a kiegészés révén a hasadóanyag mennyisége annyira le nem csökken, hogy a reaktor többé nem tehető kritikussá. Ezután a reaktort friss üzemanyaggal kell feltölteni. Biztonsági okokból a nukleáris üzemanyagot úgy tervezik, hogy előbb kelljen a kiegészés miatt frissre cserélni, mint ahogy a technológiai elhasználódás bekövetkezik.

9.1. Izotópláncok

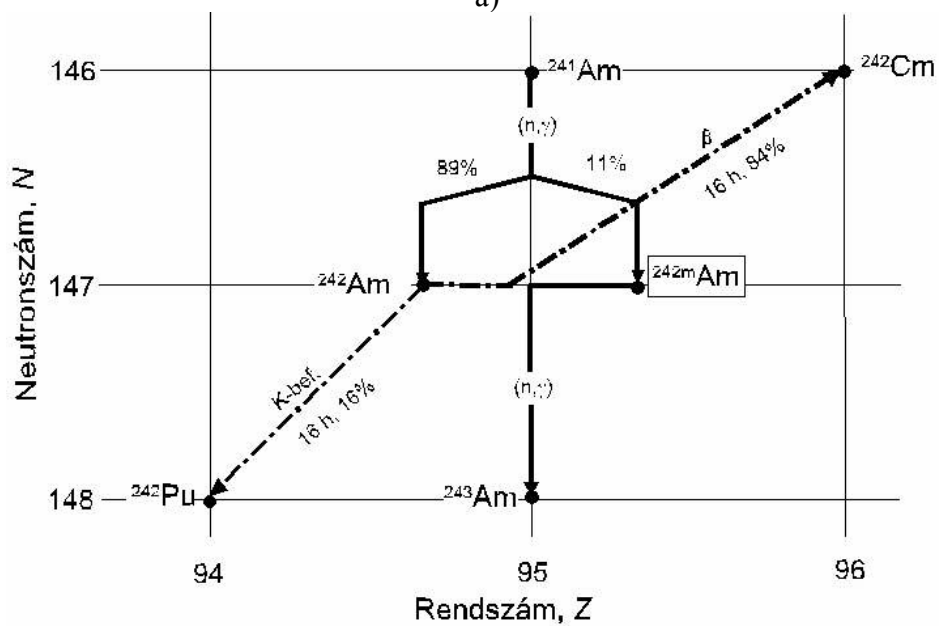
9.1.1. Nehéz elemek

A nehéz elemek körében két fontos izotóplánc van: az uránlánc (9.1. ábra) és a tóriumlánc (9.2. ábra). Az ábrákon bemutatott sémákban bekereteztük a gyakorlatban is jelentős hasadó izotópokat. Vannak rövid élettartamú izotópok is, amelyek csak mint a többi izotóp *anyamagjai* játszanak szerepet. A vastag nyilak magreakciók útján való átalakulást jelölnek. A radioaktív bomlásokat szaggatott nyíllal jelöljük. A nyilak alatt olvasható számok a felezési időket adják meg. (Az egységeket latin nevük alapján jelöltük: a = év, d = nap, m = perc, s = másodperc.)

Az atomenergetika mai gyakorlatában csak az uránlánc játszik szerepet, így a továbbiakban csak ezzel foglalkozunk. A tóriumláncot is érdemes azonban megismerni, mert a Föld hasadóanyag-készletének jelentős része tórium formájában áll rendelkezésre. Tekintve azonban, hogy a természetben található kiindulási izotóp, a ^{232}Th maga nem hasadó, a benne rejlő energia hasznosításához előbb ^{233}U hasadóanyaggá kell átalakítani a tóriumlánc szerint való magátalakítások útján.

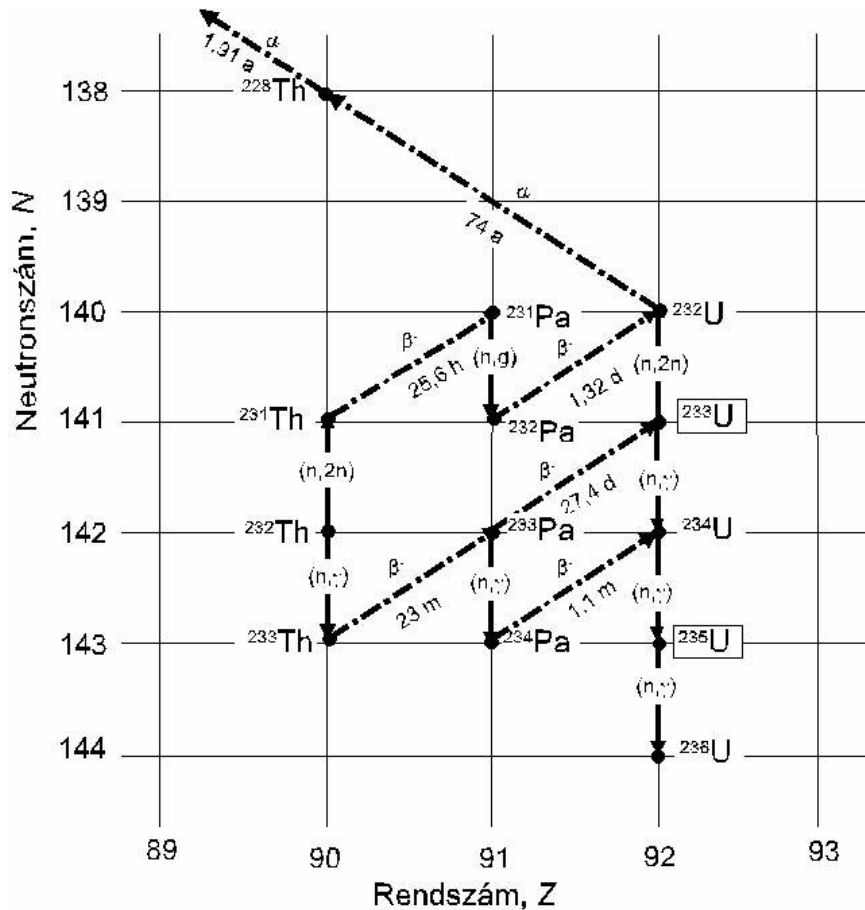


a)



b)

9.1. ábra. Az uránlác



9.2. ábra. A tóriumlánc

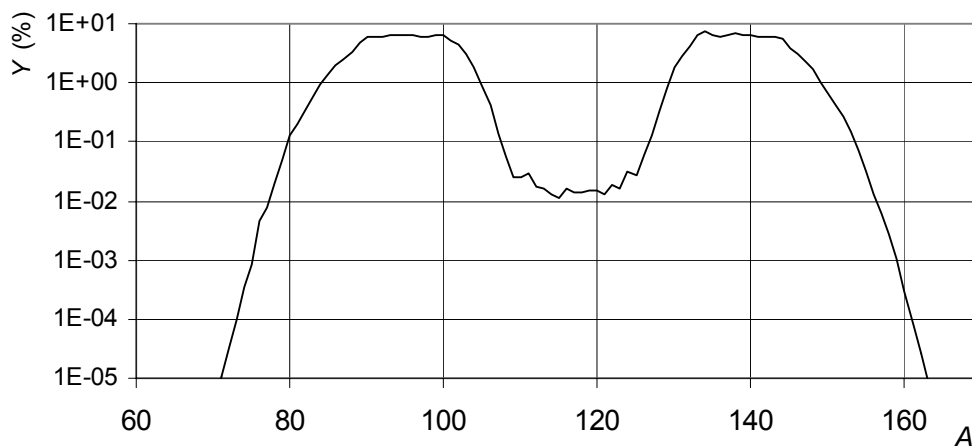
A 9.1. és 9.2. ábrákon feltüntetett nehéz izotópok mindegyike radioaktív. Az ábrák egyszerűsítése érdekében a bomlások módját azonban csak azokban az esetekben tüntettük fel, amelyekben ez az izotóplánc felépülésében szerepet játszik. A fel nem tüntetett bomlások általában α -bomlások, amelyek felezési ideje az izotópok többségénél ezer évnél hosszabb. (Például, a ^{239}Pu esetében 24 ezer év.) Mint a sémákból kitűnik, a β -bomlások felezési ideje lényegesen rövidebb, többnyire néhány nap vagy kevesebb. Ezek alól az általános megállapítások alól néhány nevezetes kivétel van:

- A ^{241}Pu -izotóp mind α -, mind β -bomlásra képes. Az α -bomlás felezési ideje nagy, de β -bomlásáé csak 15 év (vö. 9.1. ábra). Ez éppen akkora, hogy az üzemanyag-nak a reaktorban töltött ideje (általában 3–4 év) alatt már érezhetően befolyásolja ennek és a láncban utána következő izotópoknak a mennyiségét. (Pontos numerikus számításokban ezt figyelembe is szokás venni, de az alábbiakban el fogjuk hanyagolni.)
- A ^{238}Pu a reaktorban ugyan kis mennyiségben keletkezik, így a reaktor működését befolyásolni nem tudja, más területeken azonban különleges jelentősége van, mert α -bomlását nem kíséri kemény (vagyis nagy áthatolóképeségű) γ -sugárzás. α -bomlásának felezési ideje 88 év, így jól használható izotópgenerátorok energiaforrásaként (pl. pacemakerekben).
- A tóriumláncban két izotóp van, amelyek α -bomlása rövid felezési idejű. Ezeket a 9.2. ábrán bejelöltük.

A bemutatott izotópláncokban keletkező hasadóképes anyagok nukleáris üzemanyagként újra felhasználhatók. A láncokhoz tartozó többi izotóp viszont a nukleáris energiatermelés hulladékának tekintendő. Ebben a minőségükben elég kellemetlenek, mert ezer év feletti felezési idejük miatt tárolásukról hosszú időn keresztül kell gondoskodni. A legfontosabb nehéz izotópok néhány magfizikai adatát a 9.1. táblázat tartalmazza.

9.1. táblázat. Az urán- és tóriumlánc fontosabb izotópjainak termikus hatáskeresztmetszetei és rezonanciaintegráljai (barn)

Izotóp	σ_a	I_a	σ_f	I_f
^{232}Th	7,4	85		
^{233}U	578,8	904	531,1	764
^{235}U	680,8	419	582,2	275
^{238}U	2,7	275		
^{239}Pu	1011,3	501	742,5	301
^{240}Pu	289,5	8013	0,03	
^{241}Pu	1377	732	1009	570
^{242}Pu	18,5	1130		
^{241}Am	835	1500	3,15	21
$^{242\text{m}}\text{Am}$	8000	9000	6600	1570
^{243}Am	79,3	1820		
^{242}Cm	16	150		
^{243}Cm	825	2345	600	1860
^{244}Cm	15,1	660	1,2	12,5



9.3. ábra. A hasadási termékek gyakorisága és tömegszáma közötti összefüggés (az ^{235}U termikus hasadására vonatkozóan)

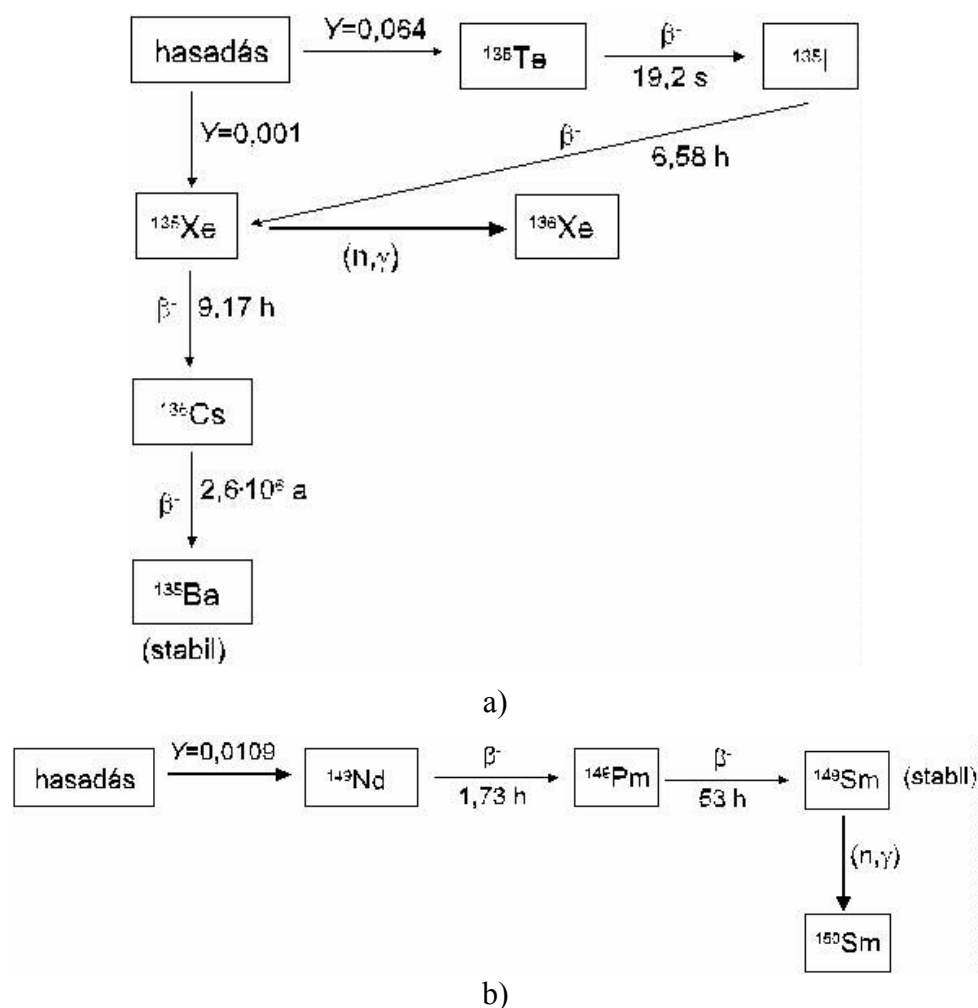
9.1.2. Hasadási termékek

A hasadásban több száz fajta izotóp keletkezhet hasadási terméként. Közülük több mint 600-nak mérték ki a magfizikai jellemzőit (gyakoriság, hatáskeresztmetszete, rezonanciaintegrál, felezési idő, bomlási séma, a kibocsátott γ - és β -sugárzás energiája stb.). A gyakoriságnak a tömegszám szerint való eloszlását a 9.3. ábra mutatja az ^{235}U -izotóp termikus neutronok által kiváltott hasadására vonatkozóan. Látható, hogy a legnagyobb gyakorisággal a 94-es és a 138-as tömegszámú izotópok keletkez-

nek. Más hasadó izotópokra vagy gyors neutronok által kiváltott hasadásokra az eloszlásgörbe jellege a 9.3. ábrához hasonló, de pontos alakja eltérő.

A hasadási termékek megjelenése több szempontból is káros:

- a nukleáris energiatermelés hulladékának minősülnek, és – mivel radioaktívak – biztonságos elhelyezésükről és hosszú idejű tárolásukról gondoskodni kell (kb. 600 évig);
- radioaktivitásuk révén hőt termelnek, így a nukleáris üzemanyag hűtéséről a láncreakció megszűnése után is gondoskodni kell: ez a *remanens hő*, amelynek biztonságos elvezetése okozza a reaktorbiztonság legnehezebb problémáját;
- a hasadási termékek egy részének nagy a neutronbefogási hatáskeresztmetszete, így felhalmozódásuk rontja a neutronmérleget, vagyis csökkenti a reaktivitást; emiatt az ilyen hasadási termékeket *reaktormérgeknek*, felhalmozódásukat pedig *mérgeződésnek* nevezzük;
- a hasadási termékek két úton is rontják a fűtőelemek mechanikai tulajdonságait: egyrészt a kristályrácsba beépülve azt roncsolják, másrészt radioaktív sugárzásuk károsítja a fűtőelem-burkolatot.



9.4. ábra. Hasadási termékek bomlási lánc: a) $A = 135$, b) $A = 149$

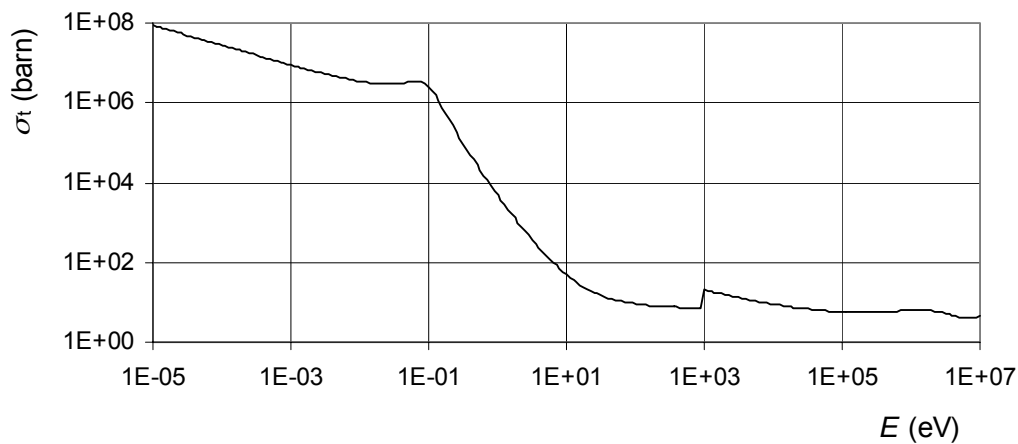
A nehéz elemekhez hasonlóan a hasadási termékek is bomlási láncokba sorolhatók, amelyeket a két legjelentősebb reaktormérgeg, a ^{135}Xe és a ^{149}Sm példájával il-

lusztráljuk. A ^{135}Xe lehet hasadási termék $Y = 0,001$ gyakorisággal, de keletkezhet az $Y = 0,064$ gyakoriságú ^{135}Te hasadási termék bomlása révén is (9.4a. ábra). A ^{149}Sm a 9.4b. ábrán látható sémával keletkezik. Teljes hatáskeresztmetszetüket a 9.5. és 9.6. ábrák mutatják be. (Esetükben σ_t gyakorlatilag azonos az abszorpciós hatáskeresztmetszettel.) Itt szokatlanul nagy hatáskeresztmetszetekről van szó. Egy 20°C -hoz tartozó Maxwell-spektrumra vett átlaguk

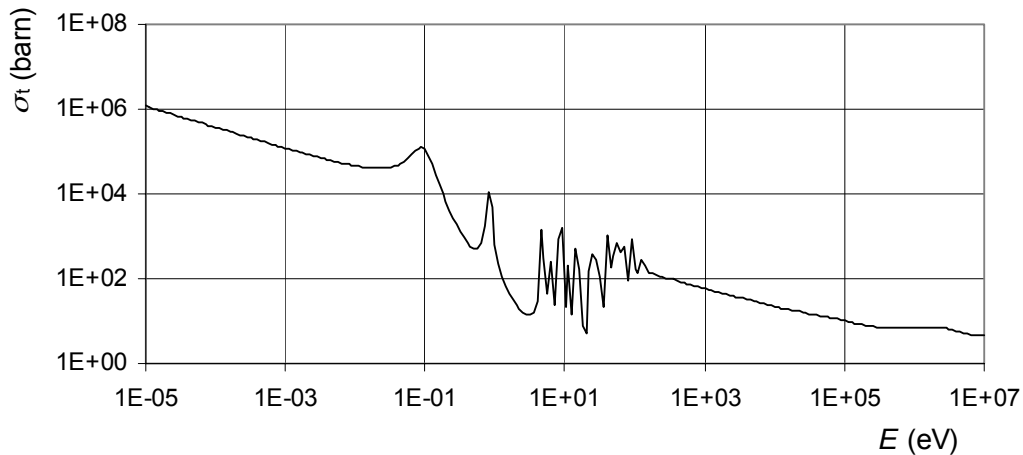
$$^{135}\text{Xe-re} \quad \sigma_a = 3,1 \cdot 10^6 \text{ barn,}$$

$$^{149}\text{Sm-re} \quad \sigma_a = 6,5 \cdot 10^4 \text{ barn.}$$

Ezek akkora értékek, hogy az izotópok egészen kis mennyisége már elegendő ahhoz, hogy a reaktivitást jelentősen befolyásolják (vö. 9.3. alfejezet).



9.5. ábra. σ_t ^{135}Xe -re



9.6. ábra. σ_t ^{149}Sm -re

9.2. Uránlánc

A 9.1. ábrán bemutatott uránlánc több fő ágra bomlik: az egyik az ^{235}U -ból indul ki, ettől gyakorlatilag független az ^{238}U -ból kiinduló ág, amelyhez csatlakozik a távoli transzuránokat tartalmazó ág. Közöttük ugyan vannak visszacsatolások, például a ^{239}Pu α -bomlása révén ^{235}U keletkezik (az ábrán ez nincs jelölve), de ezeket figyelmen kívül hagyjuk, mert nincs gyakorlati jelentőségük.

A lánchoz tartozó atommagok a reaktornak gyakorlatilag azon a helyén maradnak, ahol kialakultak. Ez bizonyos fokig megkönnyíti a keletkező izotópok mennyiségének számítását. Az izotóplánchoz tartozó i -edik izotópra vonatkozóan bevezetjük a következő jelöléseket:

N_i	magsűrűség;
σ_i^a	abszorpciós hatáskeresztmetszet;
λ_i	radioaktív bomlási állandó;
j	annak az izotópnak a sorszáma, amelyből az i -edik izotóp (n,γ) reakció útján keletkezik;
k	annak az izotópnak a sorszáma, amelyből az i -edik izotóp radioaktív bomlás útján keletkezik.

Ezek a mennyiségek a reaktornak egy kiszemelt pontjára vonatkoznak. A hatáskeresztmetszetek egycsoport-állandók [vö. (5.6) képletek]. A teljes energiatartományra integrált fluxust ϕ -vel jelöljük. A reaktor üzeme során az N_i magsűrűségek változnak, aminek az időfüggését a következő egyenletrendszer írja le:

$$\frac{dN_i}{dt} = -(\sigma_i^a \phi + \lambda_i)N_i + \sigma_j^c \phi N_j + \lambda_k N_k, \quad (9.1)$$

ahol az “ i ” index végigfut az izotóplánc valamennyi tagján. Az itt szereplő tagok fizikai jelentése: az első szerint a radioaktív bomlás és neutronabszorpció csökkenti, a második és a harmadik szerint pedig a j -edik fajta magban bekövetkező neutronbefogás, illetve a k -adik fajta mag radioaktív bomlása növeli az i -edik fajta izotóp mennyiségét. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy itt az abszorpció és a befogás között különbséget kell tenni: az izotóp *fogyását az abszorpció* (tehát a befogás és a hasadás együttesen) határozza meg, viszont az új izotóp *keletkezését a befogás* szabja meg. Ezért ügyelni kell az „a” és „c” felső indexek megfelelő használatára!

A (9.1) egyenletet a lánchoz tartozó mindegyik izotópra felírva egy elsőrendű differenciálegyenlet-rendszert kapunk, amelyet általában numerikus módszerekkel tudunk megoldani. A megoldást nehezítik a következő körülmények:

- a kiegészítés során változó izotóp-összetétel hatására változik a neutronspektrum, és emiatt a (9.1) egyenletben szereplő hatáskeresztmetszetek is függenek az időtől, tehát egy változó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerrel van dolgunk;

- a ϕ fluxus értéke a reaktorban helyről-helyre változik, tehát az időben változó izotóp-összetételt a reaktor minden helyén külön-külön ki kell számolni;
- a helyről-helyre változó izotóp-összetétel miatt a kiszemelt ponthoz tartozó spektrumra – szigorúan véve – befolyással van a szomszédos fűtőelemek izotóp-összetétele is; ez az effektus azonban olyan gyenge, hogy általában elhanyagolható;
- a ϕ fluxus általában változik az időben, ami a (9.1) egyenletrendszeret még akkor is változó együtthatóssá teszi, ha egyébként a fenti effektusok elhanyagolhatók lennének;
- végül megjegyezzük, hogy az időben változó izotóp-összetétel ellenére a reaktor-nak végig kritikussnak kell lennie, amit szabályozórudak mozgásával vagy a moderátorban oldott bórsav koncentrációjának változtatásával érnek el (lásd 9.4. alfejezet); ennek hatására szintén megváltozik a neutronspektrum és ezzel együtt a (9.1)-ben szereplő hatáskeresztmetszetek is; hasonló hatása van a hasadási termékek felhalmozódásának (lásd 9.3. alfejezet).

Mindezeknek az effektusoknak akár közelítő kezelése is bonyolult számítási sémákat igényel, amelyekről a 9.4. alfejezetben lesz szó. Egyelőre a kiegészítés jelenségének kvalitatív megértésére törekszünk, és ezért a fenti effektusokat mind elhanyagoljuk, azaz (9.1)-ben a hatáskeresztmetszeteket időtől függetlennek tekintjük (néha még a fluxust is). Ez az *állandó hatáskeresztmetszet modell*.

A 9.1. táblázatban közölt hatáskeresztmetszetek csak nagyságrendi tájékoztatást adnak arra vonatkozóan, hogy (9.1)-ben milyen értékeket kell használni. Arról van szó, hogy az itt szereplő hatáskeresztmetszetek egycsoport-hatáskeresztmetszetek, tehát a termikus és a rezonancia tartományban bekövetkező reakciók gyakoriságának a termikus és a gyors csoportra vett átlagát fejezik ki. Tekintve, hogy az epitermikus fluxus általában sokkal nagyobb, mint a termikus, a (9.1) szerinti egyenletekben szereplő hatáskeresztmetszetek jelentősen eltérhetnek a 9.1. táblázatban a termikus csoportra megadott értékektől.

A reaktorfizikában a nehéz izotópok jelölésére a következő egyszerű konvenciót szoktuk alkalmazni. Mindegyik izotóp esetében vesszük a rendszám és a tömegszám utolsó számjegyét, és a kettőből együtt (ebben a sorrendben) egy kétjegyű számot képezünk. Az egyes izotópokhoz tartozó mennyiségek indexelésére [tehát a (9.1) egyenletben az i, j és k indexek helyében] ezeket a számokat használjuk. Példák:

$$\begin{array}{lll} {}^{235}\text{U}: & 25 & {}^{232}\text{Th}: 02 & {}^{239}\text{Pu}: 49 \\ {}^{238}\text{U}: & 28 & & {}^{240}\text{Pu}: 40 \end{array}$$

stb. Könnyű ellenőrizni, hogy a 9.1. és 9.2. ábrákon mutatott izotópláncokra ez a jelölésmód egyértelmű.

9.2.1. Az ${}^{235}\text{U}$ -izotópból induló ág

Nézzük először az ${}^{235}\text{U}$ -izotópból induló ágat. A kiindulási izotópra (9.1) a következő alakot veszi fel:

$$\frac{dN_{25}(t)}{dt} = -\sigma_{25}^a \phi(t) N_{25}(t). \quad (9.2)$$

Mivel itt a radioaktív bomlás felezési ideje 0,7 milliárd év, ennek a hatása a neutron-abszorpció mellett $\phi(t)$ minden szóba jövő értékénél elhanyagolható. Az egyenlet megoldása egyszerű:

$$N_{25}(F) = N_{25}(0) \exp(-\sigma_{25}^a F), \quad (9.3)$$

ahol

$$F = \int_0^t \phi(t') dt'. \quad (9.4)$$

F -et *fluenciának*, *integrális fluxusnak* vagy *besugárzásnak* nevezzük, egysége neutron/cm². Tekintve, hogy F általában 10²¹ nagyságrendű, szokás a neutron/kbarn egységet is használni.¹ Azt kaptuk tehát (9.3)-ban, hogy az ²³⁵U-izotóp mennyisége a besugárzással exponenciálisan csökken. Ebből kiindulva a (9.1) egyenlet és a 9.1. ábra alapján kiszámíthatnánk az ²³⁶U-, ²³⁷U- stb. izotópok mennyiségét is, de ez a gyakorlatban különösebben nem érdekes, úgyhogy ezt elhagyjuk.

A kiégés mértékéül a számításokban legkézenfekvőbb a (9.4) alatt definiált F besugárzást használni. A gyakorlat emberei azonban más jellemzőket is használnak. Ritkábban a (9.3)-ban szereplő exponenciális tényezőt adják meg, hiszen ez megadja, hogy az ²³⁵U-izotóp mag-sűrűsége a kezdeti értékhez képest hányad részére csökkent. Ilyen értelemben beszélnek 70%, 50% stb. kiégésről, ami azt jelenti, hogy az ²³⁵U mennyisége kezdeti értékének rendre 70, 50 stb. százalékára csökkent le. Ezt leggyakrabban kutatóreaktoroknál használják, mert ott nagy dúsítású uránt alkalmaznak, és ebben az esetben az a döntő, hogy az egyetlen hasadóanyagból, az ²³⁵U-ből mennyi fogyott.

A nukleáris energetikában egy másik mennyiség természetes: azt adják meg, hogy a reaktorba eredetileg bevitt nehéz elemek tömegegységére vonatkoztatva mennyi energiát termelt a reaktor. Ez a mennyiség a

$$\int_0^t \Sigma_f \phi(t') dt' \quad (9.6)$$

integrállal arányos. Viszonyíthatjuk a reaktor bármelyik pontján az oda eredetileg bevitt urán sűrűségéhez. Ekkor a kiégés lokális jellemzőjét kapjuk. Ha viszont ezt a reaktor minden pontjában kiszámítjuk, majd a reaktor egész térfogatára integráljuk, és osztjuk a reaktorba helyezett urán teljes mennyiségével, a kiégésre egy átlagos mérő-

¹ Hétköznapi nyelven szoktunk “nvt”-ről is beszélni, hiszen a fluxus nv , azaz a neutronsűrűség és a sebesség szorzata, aminek az integrálása t -vel való szorzást jelent, ha a fluxus időben állandó. Többen a latin eredetű “fluens” kifejezést használják. Ez nem szerencsés, mert ez a szó a latinban melléknév. Ezen túlmenően germanizmus, mert a német “Fluente” szó átvétele (eredetileg a matematikában). A fizikában jobb lenne a latin “fluentia” főnévnél, illetve annak magyaros “fluencia” ejtésénél maradni, mint ez számos nyelvben történik: az angol és francia “fluence”, a spanyol “fluencia” mind ebből a főnévből származik.

számot kapunk. Az így kapott mennyiség egysége a MWnap/tonna. Az F besugárzás és a dústítás (e), valamint a mérnöki egység között nem lehet általános átszámítási tényezőt megadni, hiszen (9.6)-ban a hasadási hatáskeresztmetszetbe beleszámítanak a kiégés során keletkező plutóniumizotópok is, amelyek mennyisége reaktorról reaktorra változhat. Ha csak tiszta uránnal dolgozunk, akkor termikus reaktorban

$$1 \text{ neutron/kbarn} \Rightarrow 5515e \text{ MWnap/tonna},$$

ahol e az urán százalékban kifejezett dústítása (vö. 9.1 feladat). Kvalitatív megfontolásokban a nagyságrendek érzékeltetésére jól használhatjuk ezt az összefüggést.

9.2.2. Az ^{238}U -izotópból kiinduló ág

Most áttérünk az uránláncnak az ^{238}U -ból kiinduló ágára. A 9.1. ábráról látható, hogy erre a (9.1) egyenletek első néhány tagja így írható:

$$\frac{dN_{28}(t)}{dt} = -\sigma_{28}^a \phi(t) N_{28}(t), \quad (9.7a)$$

$$\frac{dN_{29}(t)}{dt} = \sigma_{28}^c \phi(t) N_{28}(t) - \lambda_{29} N_{29}(t), \quad (9.7b)$$

$$\frac{dN_{39}(t)}{dt} = \lambda_{29} N_{29}(t) - \lambda_{39} N_{39}(t), \quad (9.7c)$$

$$\frac{dN_{49}(t)}{dt} = \lambda_{39} N_{39}(t) - \sigma_{49}^a \phi(t) N_{49}(t). \quad (9.7d)$$

Mielőtt továbbmennénk, megmutatjuk, hogy a rövid felezési idejű izotópok, tehát az ^{239}U és a ^{239}Np figyelmen kívül hagyhatók, és az izotópláncot jó közelítéssel úgy tekinthetjük, mintha az ^{238}U -ból (n, γ) reakcióval rögtön ^{239}Pu keletkezne.² Az itt szereplő bomlási állandók

$$\lambda_{29} = \frac{\ln 2}{23,6 \cdot 60} = 4,9 \cdot 10^{-4} / \text{s},$$

$$\lambda_{39} = \frac{\ln 2}{2,3 \cdot 86400} = 3,5 \cdot 10^{-6} / \text{s}.$$

A ^{239}Pu (termikus) abszorpciós hatáskeresztmetszete 1011 barn a 9.1. táblázat szerint. A ϕ fluxus tipikus értéke $10^{13}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$, amivel

$$\sigma_{49}^a \phi = 10^{-8} / \text{s}.$$

A 9.1. táblázat szerint az ^{238}U (termikus) hatáskeresztmetszete 2,7 barn, vagyis fennállnak a következő relációk:

² Az említett két izotóp esetében elhanyagolható az abszorpció. Ezért hiányzik az abszorpciónak megfelelő tag az egyenletekből.

$$\lambda_{29} \gg \lambda_{39} \gg \sigma_{49}^a \phi \gg \sigma_{28}^a \phi .$$

A (9.7a) egyenlet megoldását (9.3) analógiájára írhatjuk fel:

$$N_{28}(F) = N_{28}(0) \exp(-\sigma_{28}^a F), \quad (9.8)$$

ahol F a (9.4) alatt definiált fluencia. Ha a fluxusra a fenti, tipikus értéket vesszük, akkor egy a reaktorban három évet töltő fűtőelemre:

$$F = 3 \cdot 365 \cdot 86400 \cdot 10^{13} = 9,5 \cdot 10^{20} \text{ neutron/cm}^2 \approx 1 \text{ neutron/kbarn} .$$

Erre való tekintettel a (9.8) alatti exponenciális kifejezés kitevőjének jellegzetes értéke 0,003, vagyis az ^{238}U -izotóp magzsűrűsége a kiégés során kevéssé változik meg. Ezért a következőkben állandónak fogjuk tekinteni.

Az ^{238}U -izotópból származó izotópok kezdeti értékét 0-nak vehetjük, hiszen a friss nukleáris üzemanyagban nem fordulnak elő. Ezzel a kezdőfeltétellel a (9.7b) és (9.7c) egyenletek megoldását könnyen kiszámíthatjuk, ha a ϕ fluxust t -től függetlennek tételezzük fel:

$$\lambda_{29} N_{29}(t) = \sigma_{28}^c \phi N_{28} [1 - \exp(-\lambda_{29} t)], \quad (9.9)$$

$$\lambda_{39} N_{39}(t) = \sigma_{28}^c \phi N_{28} \left[1 - \frac{\lambda_{29}}{\lambda_{29} - \lambda_{39}} \exp(-\lambda_{39} t) + \frac{\lambda_{39}}{\lambda_{29} - \lambda_{39}} \exp(-\lambda_{29} t) \right]. \quad (9.10)$$

Mivel λ_{29} két nagyságrenddel nagyobb, mint λ_{39} , van olyan t , hogy

$$\lambda_{29} t \gg 1 \quad \text{és} \quad \lambda_{39} t \ll 1,$$

amire vonatkozóan fennáll

$$\lambda_{29} N_{29}(t) \approx \sigma_{28}^c \phi N_{28}, \quad (9.11)$$

$$\lambda_{39} N_{39}(t) \approx \sigma_{28}^c \phi N_{28} [1 - \exp(-\lambda_{39} t)]. \quad (9.12)$$

Ha (9.12)-t (9.9)-cel összevetjük, akkor látjuk, hogy $N_{39}(t)$ -t azzal a feltevéssel is megkaphattuk volna, hogy ^{238}U -ból rögtön ^{239}Np keletkezik.

Ha (9.12)-vel számolunk tovább (9.7d)-ben, akkor teljesen analóg okoskodással levezethetjük, hogy olyan t -re, amelyre

$$\lambda_{39} t \gg 1,$$

és így

$$\sigma_{49}^a N_{49}(t) \approx \sigma_{28}^c N_{28} [1 - \exp(-\sigma_{49}^a F)]. \quad (9.13)$$

Ez pedig a

$$\frac{dN_{49}(t)}{dt} = \sigma_{28}^c \phi(t) N_{28}(t) - \sigma_{49}^a N_{49}(t)$$

differenciálegyenlet megoldása. Ezzel beláttuk, hogy elegendően hosszú idő elteltével a rövid felezési idejű izotópok magzsűrűsége telítési értéket vesz fel, és az izotóplánc későbbi tagjait úgy tekinthetjük, mintha ezek "átugrásával", közvetlenül a kiindulási izotópból keletkeztek volna. Az átugrott izotópok mennyisége arányos az ^{238}U -izotóp mindenkori mennyiségével. Meg lehet mutatni, hogy ez jó közelítéssel akkor is igaz, ha az utóbbi lassan változik. Ezt úgy fejezzük ki, hogy az ^{239}U - és ^{239}Np -izotópok az ^{238}U -izotóppal *szekuláris egyensúlyban* vannak. Valahányszor ilyen egyensúly kialakul, a gyorsan bomló izotópok bomlástermékeit az anyagok figyelmen kívül hagyásával számíthatjuk ki.

A mondottak figyelembevételével a plutóniumizotópokra vonatkozó egyenleteket jelentősen egyszerűsíthetjük: a t változó helyett használhatjuk F -et független változóként. (9.4) alapján ugyanis tetszőleges $N(t)$ függvényre igaz, hogy

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dN(F)}{dF} \frac{dF}{dt} = \frac{dN(F)}{dF} \phi. \quad (9.14)$$

Ezzel a változócserevel a differenciálegyenletekből kiküszöbölhetjük a fluxust:

$$\frac{dN_{49}(F)}{dF} = \sigma_{28}^c N_{28}(F) - \sigma_{49}^a N_{49}(F), \quad (9.15a)$$

$$\frac{dN_{40}(F)}{dF} = \sigma_{49}^c N_{49}(F) - \sigma_{40}^a N_{40}(F), \quad (9.15b)$$

$$\frac{dN_{41}(F)}{dF} = \sigma_{40}^c N_{40}(F) - \sigma_{41}^a N_{41}(F). \quad (9.15c)$$

(9.15a) megoldását (9.13)-ban már tulajdonképpen felírtuk, de ott t szerepelt változóként. Ugyanez F -fel kifejezve

$$\sigma_{49}^a N_{49}(F) = \sigma_{28}^c N_{28} \left[1 - \exp(-\sigma_{49}^a F) \right]. \quad (9.16a)$$

Mivel a 9.1. táblázat szerint $\sigma_{49} \approx 1$ kbarn, F értéke pedig 1 n/kbarn nagyságrendű, az itt szereplő exponenciális kifejezés kitevőjének értéke -1 körül van akkor, amikor a nukleáris üzemanyagot a reaktorból kirakjuk. Ez azt jelenti, hogy a ^{239}Pu mennyisége általában nem éri el az $F \rightarrow \infty$ -hez tartozó telítési értéket, hanem annak csak körülbelül 60%-át. A 9.1. táblázat és (9.3) alapján ezalatt az ^{235}U -nek körülbelül 50%-a fogy el. A kirakást jóval megelőző besugárzásokra ($F \ll 1$ n/kbarn) (9.16a)-ban az exponenciális függvényt sorba fejthetjük, és azt kapjuk, hogy

$$N_{49}(F) \approx \sigma_{28}^c N_{28} F, \quad (9.16b)$$

vagyis a kiégés kezdetén a ^{239}Pu koncentrációja az F besugárással közelítőleg lineárisan nő.

(9.16a)-t (9.15b)-be helyettesítve kapjuk a ^{240}Pu -izotóp mennyiségét:

$$\sigma_{40}^a N_{40}(F) = \sigma_{28}^c \sigma_{49}^c N_{28} \left[F - \frac{1 - \exp(-\sigma_{40}^a F)}{\sigma_{40}^a} \right], \quad (9.17a)$$

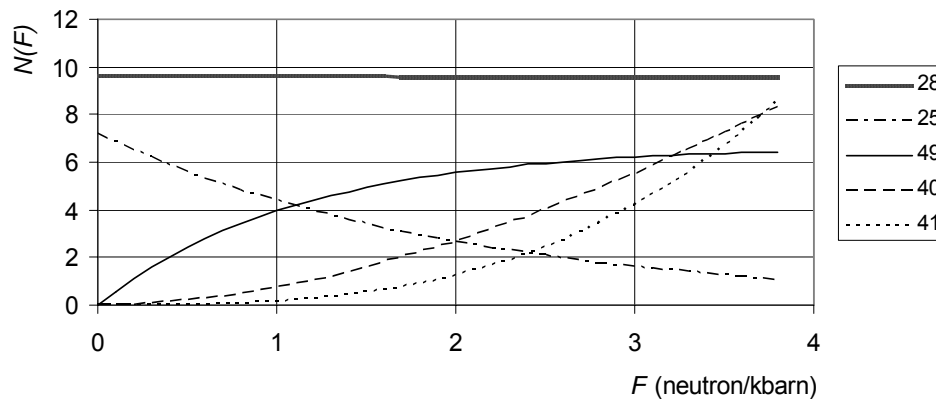
amiből sorfejtés után kis F -re kapjuk:

$$N_{40}(F) \approx \sigma_{28}^c \sigma_{49}^c N_{28} \frac{F^2}{2}. \quad (9.17b)$$

Ha ezt az utóbbi kifejezést (9.15c)-be helyettesítjük, az egyenlet kis F -re érvényes megoldásaként az

$$N_{41}(F) \approx \sigma_{28}^c \sigma_{49}^c \sigma_{40}^c N_{28} \frac{F^3}{6} \quad (9.18)$$

eredmény adódik.



9.7. ábra. A nehéz izotópok felhalmozódása (sematikus ábrázolás)

Végeredményben tehát azt találtuk, hogy az üzemanyagciklus elején a ^{240}Pu mennyisége a besugárzás négyzetével, a ^{241}Pu mennyisége pedig a köbével arányosan nő. Ez azt jelenti, hogy kis és közepes besugárzás mellett az utóbbiak mennyisége a ^{239}Pu -éhoz képest kicsi, viszont a továbbiakban a nehezebb plutóniumizotópok mennyisége már rohamosan nő, mégpedig annál gyorsabban, a láncnak minél későbbi tagjáról van szó. Ezek a kijelentések fokozottan érvényesek a távolabbi transzurán elemekre, tehát az ameríciumra, a kúriumra és a továbbiakra, hiszen mennyiségük F -nek egyre magasabb hatványával nő. A 9.7. ábrán sematikususan mutatjuk az egyes fajta izotópok mennyiségének F -től való függését.³

³ A "sematikus" jelző azért indokolt, mert az ábrázolt függvények kiszámításában használt hatáske-resztszámok a valóságos értékeknek csak hozzávetőleg felelnek meg. Az utóbbiak ugyanis erősen függenek a konkrét reaktortípustól, mi viszont általában vizsgáljuk az izotópláncot.

9.2.3. Konverzió és szaporítás

A reaktorból kirakott nukleáris üzemanyag legfontosabb jellemzője a *konverziós tényező*:

$$C = \frac{\text{keletkezett plutónium tömege}}{\text{elfogyott } ^{235}\text{U tömege}}. \quad (9.19a)$$

Ezt a mennyiséget az üzemanyag által a reaktorban töltött teljes üzemidőre vonatkoztatjuk, és kielégítő pontossággal csak úgy lehet megmérni, hogy a kirakott üzemanyagot *reprocesszáljuk*, vagyis abból kivonjuk az uránt és a plutóniumot, majd mennyiségüket kémiai úton meghatározzuk. Az így definiált konverziós tényező mellett szoktunk beszélni a *kezdeti konverziós tényezőről* is, amely a kiégés kezdetére vonatkozott mennyiség:

$$C_{\text{kezdeti}} = \frac{\int_0^{\infty} N_{28} \sigma_{28}^c(E) \psi(E) dE}{\int_0^{\infty} N_{25} \sigma_{25}^a(E) \psi(E) dE}, \quad (9.19b)$$

ahol $\psi(E)$ a neutronspektrum a reaktor vizsgált pontjában (vagy az egész reaktorra átlagolva). Természetesen lehetne a (9.19a) alatt definiált mennyiségre vonatkozóan is felírni egy (9.19b)-nek megfelelő képletet, de ettől – itt nem részletezett nehézségek miatt – eltekintünk. A ma üzemelő reaktorok nagy részéből kirakott üzemanyagot (egyelőre) nem reprocesszálják (vö. 1. fejezet, “Történelmi áttekintés”), így C -re vonatkozóan többnyire csak számított értékek állnak rendelkezésre.

A konverziós tényező értéke jelentősen függ a reaktor típusától, aminek két fő oka van: más a neutronspektrum és így mások a (9.1)-ben szereplő hatáskeresztmetszetek; más a kezdeti dúsítás; végül különbözik a kirakott üzemanyag kiégésének mértéke. Könnyűvízzel moderált reaktorokban a konverziós tényező 0,6 körül van, viszont grafitos reaktorokban 0,8 vagy annál nagyobb is lehet. A nehézvízes reaktorok még ennél is kedvezőbbek, sőt, a nehézvízzel moderált, ^{233}U -mal működő reaktorban (vö. 9.2. ábra) kissé meg is haladhatja az 1-et. Végül megemlítjük a gyors reaktorokat, amelyekben C jóval meghaladja az 1-et.

A konverziós tényező 1-nél nagyobb vagy kisebb volta az urán (és a tórium) hosszú távú hasznosítása szempontjából döntő jelentőségű. Ha ugyanis $C > 1$, akkor a reaktor üzeme során több hasadóanyag keletkezik, mint amennyi elfogy. Ebben az esetben *üzemanyag-szaporításról* beszélünk, és az ilyen reaktorokat *szaporító reaktoroknak* nevezzük. Ellenkező esetben csak *konverzióról* beszélünk, és a megfelelő reaktort *konverternek* nevezzük. Ha az említett nehézvízes ^{233}U reaktortól eltekintünk, akkor az előbbi csoportba a gyors reaktorok, az utóbbiba pedig a termikus reaktorok tartoznak.

Nézzük meg, a természetes urán energiatartalmának hasznosítása szempontjából milyen következményei vannak a konverziós tényező értékének. Nevezzük *kiegési*

ciklusnak azt az időt, amelyet egy adott töltet a reaktorban tölt. Képzeljük el, hogy minden ciklusban M tömegű friss üzemanyagot viszünk be a reaktorokba, de mindig felhasználjuk az előző ciklusokban termelt új hasadóanyagot is. A konverziós tényező definíciója szerint az első ciklus végére MC új hasadóanyag keletkezik, tehát a második ciklusban

$$M + MC$$

tömegű hasadóanyagot használunk fel. Hasonló megfontolással kapjuk, hogy a harmadik ciklusban felhasznált hasadóanyag tömege

$$M + (M + MC)C = M + MC + MC^2.$$

Ezt tovább folytatva látjuk, hogy végső soron

$$M + MC + MC^2 + MC^3 + \dots$$

tömegű hasadóanyagot tudunk felhasználni. Konverzió esetében ($C < 1$) e sor felső korlátja $M/(1 - C)$, viszont szaporításkor a sornak nincs felső korlátja, vagyis elvileg a teljes ^{238}U mennyiséget hasadóvá tudjuk tenni.⁴ Ha például csak könnyűvízes reaktorokat alkalmazunk, akkor a felhasználható hasadóanyag az ^{235}U mennyiségének legfeljebb csak $1/(1 - 0,6) = 2,5$ -szerese lehet, de grafitos reaktorok esetében is csak mintegy $1/(1 - 0,8) = 5$ -szörös növekedéssel számolhatunk. A gyakorlatban mindig fellépnek feldolgozási veszteségek, tehát a tényleges számok ennél kisebbek. Ha a Föld uránkészleteiből csak az ^{235}U -t hasznosítjuk, akkor ezek teljes energiataralma nagyságrendileg megfelel a Földön található szénhidrogén-készletek energiataralmának. A mondottak szerint tehát gyors reaktorok nélkül a Föld uránkészletei hosszútávon nem enyhítik jelentős mértékben az emberiség energiagondjait. Újrafeldolgozás és visszatáplálás esetén azonban óriási energiataralékokat képviselnek.

A különböző reaktortípusok között nemcsak a konverziós tényező értékében, hanem a plutónium izotóp-összetételében is különbségek vannak. Például tipikus értékek a következők:

	^{240}Pu	^{241}Pu
vizes reaktor	24%	15%
grafitos reaktor	20%	3%

A különbség oka elsősorban az, hogy a vizes reaktorokban a kiégés értéke általában 30 ezer MWnap/tonna, a grafitosokban pedig kevesebb. Ha figyelembe vesszük is, hogy a grafitos reaktorokban természetes uránt, a vizesekben pedig (kereken) 3% dúsítású uránt alkalmaznak, azt látjuk, hogy a vizes reaktorokban a kirakott üzemanyag besugárzása (tehát F) közelítőleg másfélszer nagyobb, mint a grafitos reaktorokban.

⁴ Akinek nem tetszik fenti gondolatmenetünk, egyszerűbben is okoskodhat. Ha a világon rendelkezésre álló hasadóanyag össztelege M , továbbá M' -vel jelöljük a végül hasznosított hasadóanyag össztelegét, akkor ebből $M'C$ lesz az a tömeg, amelyet a reprocesszálás révén nyerünk. Fennáll tehát a következő egyenlőség: $M' = M + M'C$, amiből $M' = M/(1 - C)$.

A plutónium izotóp-összetételének a további felhasználás szempontjából van jelentősége. Nézzük először a reaktorban való ismételt felhasználást. Ekkor a ^{240}Pu -ból hasadóanyag (^{241}Pu), a ^{241}Pu -ból pedig neutronabszorbens (^{242}Pu) keletkezik. Ez azt jelenti, hogy a további szaporítás szempontjából a sok ^{240}Pu és a kevés ^{241}Pu a kedvező. Ezért gyors reaktorokban kiindulásul kedvezőbb a grafitos reaktorban termelt plutóniumot felhasználni. Ha termikus reaktorban használnánk fel a plutóniumot (ami egyébként a világon egyelőre csak Franciaországban történik), akkor a szaporítás szempontjai helyett a jó neutronháztartás a fő szempont, vagyis itt a kis mennyiségű ^{240}Pu és a sok ^{241}Pu az előnyös. Látjuk, hogy erre inkább a vizes reaktorban termelt plutónium a jobb, de ez a különbség nem számottevő. Van egy további szempont is: a nagyobb tömegszámú plutóniumizotópok hatással vannak a reaktor hőfoktényezőjére (vö. 8.2. alfejezet). Egyes vizsgálatok szerint – heterogén reaktorokban – 4–6-szori visszatáplálás után a hőfoktényező pozitívvá válhat, így ez biztonsági megfontolásokból nem engedhető meg. A dologgal kapcsolatban közvetlen tapasztalat kevés van, így ezt kategorikusan – egyelőre – nem célszerű kijelenteni.

A nukleáris fegyvergyártás számára nagyon kritikus a plutónium izotóp-összetétele. Itt egyértelműen a grafitos reaktorok javára billen a mérleg, mert az atombombában a ^{239}Pu -nél nehezebb izotópok két módon is rontják a bomba tulajdonságait. Egyrészt a ^{240}Pu nagy abszorpciós rezonanciaintegrálja az ^{238}U -hoz hasonlóan rontja a neutronmérleget, tehát a ^{240}Pu mennyisége csökkenti a robbanás érdekében előidézett többletreaktivitást. Másrészt a nehezebb plutóniumizotópok spontán hasadásának rövid a felezési ideje, aminek következtében a bombában minden pillanatban meglehetősen sok neutron van jelen. A robbanás így még az előtt kifejlődik és szétveti a bombát, mielőtt a nagy robbanóerőhöz szükséges többletreaktivitás kialakulhatna. Ez az oka annak, hogy a nukleáris fegyverekhez felhasznált plutóniumot grafitos reaktorokban termelik, de az energetikai felhasználásnál lényegesen kisebb kiegészéssel (általában 1000 MWnap/tonna alatt). Következésképpen a grafitos reaktorok (például a Csernobilban felrobbant reaktorhoz hasonló, RBMK⁵ típusú reaktorok) ugyan felhasználhatók a nukleáris fegyvergyártás céljaira, de ez a fajta felhasználás ellentmond az energetikai szempontoknak: csak akkor keletkezik ún. *fegyvertisztaságú* plutónium, ha az üzemanyagot nagyon kevéssé égetik ki, vagyis belőle nagyon kevés energiát vonnak ki.

9.3. Hasadási termékek

A hasadási termékek felhalmozódását leíró általános egyenletet (9.1) analógiájára vezethetjük le. Egy kiszemelt (i -vel jelölt) hasadási termék háromféle módon keletkezhet:

- közvetlenül a hasadásban keletkezik; ennek a valószínűségét (vagyis a hasadási termék hozamát) Y_i -vel jelöljük⁶; mivel egy hasadásban általában két hasadási termék keletkezik, a hozamoknak az összes hasadási termékekre vett összege 2;
- egy másik (j -vel jelölt) hasadási termék radioaktív bomlásának a terméke;
- egy másik (k -val jelölt) hasadási termékben bekövetkező neutronbefogás terméke.

⁵ RBMK orosz rövidítés, amelynek a jelentése: csatornatípusú nagy teljesítményű reaktor.

⁶ Ezt ábrázoljuk a 9.3. ábrán.

Egy kiszemelt hasadási termék kétféle módon tűnhet el a reaktorból:

- radioaktív bomlással más izotóppá alakul;
- neutronbefogással más izotóppá alakul.

Mindezeknek a folyamatoknak a mérlegét a következő egyenlet fejezi ki:

$$\frac{dN_i}{dt} = Y_i \Sigma_f \phi + \lambda_j N_j + \sigma_k N_k \phi - \lambda_i N_i - \sigma_i N_i \phi. \quad (9.20)$$

Az itt alkalmazott jelölések megegyeznek az előző alfejezetben alkalmazott jelölésekkel.

A nagy számú hasadási terméket két fő csoportba szokás osztani:

- azok, amelyekre vagy λ_i vagy σ_i (vagy mindkettő) nagy: mennyiségük rövid idő alatt telítési értéket ér el; e csoport tipikus példái a ^{135}Xe - és a ^{149}Sm -izotópok, amelyek felhalmozódását a későbbiekben részletesen fogjuk tanulmányozni;
- azok, amelyekre mind λ_i , mind σ_i kicsi:

$$\sigma_i \phi t \ll 1 \quad \text{és} \quad \lambda_i t \ll 1;$$

mennyiségük a kiégés során folyamatosan nő, és a következőképpen írható fel:

$$N_i(t) = Y_i \int_0^t \Sigma_f \phi(t') dt'. \quad (9.21)$$

Az utóbbi csoportba tartozó izotópokat “salaknak” is nevezzük. Összes mennyiségük arányos a termelt energiával.⁷ Ha kiválasztunk egy jól ismert hozamú, hosszú felezési idejű hasadási terméket, amelynek mennyiségét az általa kibocsátott γ -sugárzás alapján kielégítő pontossággal meg lehet mérni, akkor (9.21) alapján ebből anélkül is meghatározhatjuk a kiégés számszerű értékét, hogy a besugárzott üzemanyagot reprocesszálni kellene. Ilyen célokra jól használható például a ^{148}Nd -izotóp.

A salakok csoportjába tartozó hasadási termékek mennyiségét nem szükséges külön-külön számba venni. Elégséges őket néhány csoportba összefogni, amelyekben belül a felezési idők egymástól nem térnek el nagyon, és ezekre a csoportokra eredő hozamot meg átlagos hatás keresztmetszeteket definiálni.

A reaktorokban felhalmozódó hasadási termékek abszorpciós hatás keresztmetszetük nagysága szerint növelik meg a fűtőelem abszorpciós hatás keresztmetszetét. Ezt a folyamatot *mérgeződésnek* nevezzük. (Σ_a növekedése elsősorban a termikus csoportban számottevő.) Két hasadási termék van, amelyek által okozott mérgeződés különösen jelentős: ^{135}Xe és ^{149}Sm . Kivételesen nagy abszorpciós hatás keresztmetszetük

⁷ Az orosz atomerőművi gyakorlatban a MWnap/tonná-ban kifejezett kiégés helyett gyakran használják a kg salak/kg urán mérőszámot. Számértéke véletlenül megegyezik az ezer MWnap/tonná-ban kifejezett kiégéssel, mert ezer MWnap energia termeléskor kereken 1 kg urán hasad el (vö. 9.1. feladat).

miatt fontos szerepet játszanak a reaktorok üzemvitelében. Tekintve, hogy az előbbi radioaktív, az utóbbi pedig stabil, hatásuk jellege eltérő. Ezért külön foglalkozunk velük.

9.3.1. Xe-mérgeződés

A ^{135}Xe bomlási sémáját a 9.4a. ábra mutatja. A ^{135}Te -t figyelmen kívül hagyhatjuk, mert felezési ideje sokkal kisebb, mint a ^{135}I -é. Ezzel (9.20) alapján a

$$\frac{dN_{\text{I}}}{dt} = Y_{\text{I}}\Sigma_f\phi - \lambda_{\text{I}}N_{\text{I}}, \quad (9.22a)$$

$$\frac{dN_{\text{Xe}}}{dt} = Y_{\text{Xe}}\Sigma_f\phi + \lambda_{\text{I}}N_{\text{I}} - \lambda_{\text{Xe}}N_{\text{Xe}} - \sigma_{\text{Xe}}N_{\text{Xe}}\phi \quad (9.22b)$$

egyenleteket írhatjuk fel, amelyeket nem nehéz megoldani. A következőkben két speciális esetet fogunk vizsgálni: az *egyensúlyi* és a *leállás utáni* mérgeződést.

(9.22a) és (9.22b) baloldalán a deriváltakat 0-val téve egyenlővé megkapjuk a xenon és a jód egyensúlyi koncentrációját:

$$N_{\text{I}}(\infty) = \frac{Y_{\text{I}}\Sigma_f\phi}{\lambda_{\text{I}}}, \quad (9.23a)$$

$$N_{\text{Xe}}(\infty) = \frac{(Y_{\text{I}} + Y_{\text{Xe}})\Sigma_f\phi}{\lambda_{\text{Xe}} + \sigma_{\text{Xe}}\phi}. \quad (9.23b)$$

Amikor a ϕ fluxus kicsi (vagyis 10^{12} n/(cm²·s)-nél kisebb), a nevezőben $\sigma_{\text{Xe}}\phi$ elhanyagolható. Ilyenkor (9.23b) szerint a xenon egyensúlyi koncentrációja a fluxussal arányos. A másik végletben, amikor a fluxus nagy (vagyis 10^{14} n/(cm²·s)-nél nagyobb), (9.23b) nevezőjében a λ_{Xe} bomlási állandó hanyagolható el. Ilyenkor a xenon egyensúlyi koncentrációja a fluxustól független. Atomerőművekben a fluxus nagyságrendje általában 10^{13} n/(cm²·s), tehát közbenső érték, amelyre a xenon egyensúlyi koncentrációja a fluxussal ugyan már nem arányos, de még nő. A fluxustól független koncentráció csak a nagyfluxusú kutatóreaktorokban szokott előfordulni.

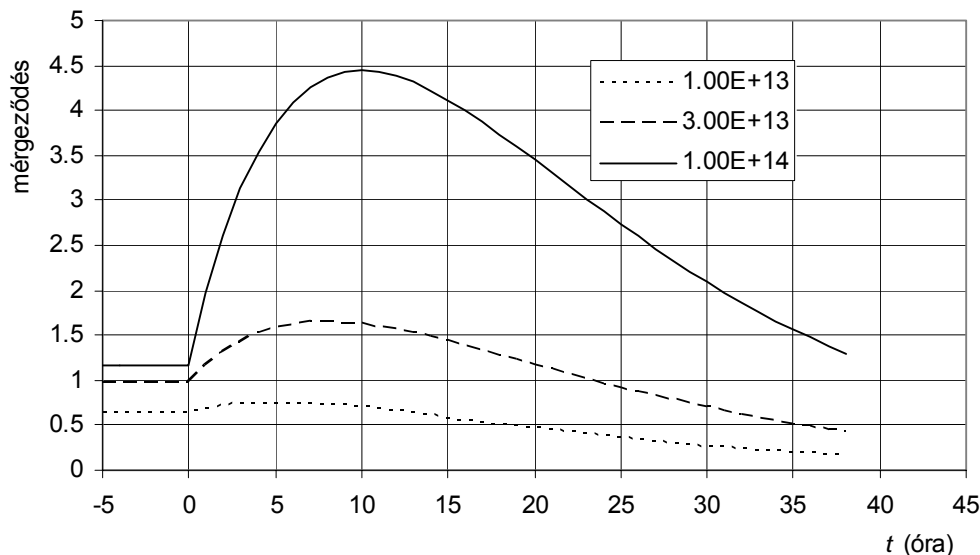
A gyakorlat számára különös problémákat okoz a következő, az erőművek életében gyakori eset. Tételezzük fel, hogy az erőmű a $t = 0$ időpillanat előtt hosszú ideig állandó teljesítményen üzemelt. Ezalatt mind a jód, mind a xenon felvette telítési koncentrációját. Ha a (9.22) egyenletek számára a (9.23) alatti koncentrációkat vesszük kezdeti feltételnek, akkor a megoldás

$$N_{\text{Xe}}(t) = N_{\text{Xe}}(\infty)e^{-\lambda_{\text{Xe}}t} + \frac{\lambda_{\text{I}}}{\lambda_{\text{Xe}} - \lambda_{\text{I}}} N_{\text{I}}(\infty) (e^{-\lambda_{\text{I}}t} - e^{-\lambda_{\text{Xe}}t}). \quad (9.24)$$

Ebben a kifejezésben t nagy értékeire a xenon koncentrációja 0-hoz tart. Kezdetben azonban – tekintve, hogy $\lambda_{\text{I}} > \lambda_{\text{Xe}}$ – a xenon koncentrációja *növekszik*, aminek az a

fizikai magyarázata, hogy a leállítás utáni néhány órában a jódbomlása több xenont termel, mint amennyit a xenon bomlása elfogyaszt. A leállítás után tehát lesz egy időpont, amikor a xenon koncentrációja maximumot ér el, és csak azt követően kezd csökkenni. A maximum időpontja a leállítás után 8–10 óra, nagysága pedig erősen függ attól, hogy a leállítás előtt mekkora volt a fluxus értéke.

A 9.8. ábrán a fluxus három értékére vonatkozóan mutatjuk be a Xe-mérgeződés időtől való függését. (A mérgeződést a xenon és az urán makroszkopikus abszorpciók hatáskeresztmetszetének a hányadosával mérjük.) Látható, hogy a mérgeződés elég érzékenyen függ a fluxus kiindulási értékétől. A jelenségnek a reaktorok üzemvitelének szempontjából az a következménye, hogy a leállítás után néhány órával a reaktivitás lecsökken, és ha nem tudunk a reaktorból elegendően sok szabályozórudat kihúzni, nem tudjuk a reaktort addig újraindítani, amíg a xenon el nem bomlott, tehát csak 24–48 óra múlva. Ezért a tervezőknek erre az esetre speciális rendeltetésű szabályozórudakról kell gondoskodniuk, vagyis a reaktorba kellő mennyiségű *reaktivitástartalékot* kell beépíteniük. Mivel a mérgeződés mértéke erősen nő a fluxussal, a xenon a legtöbb gondot a nagyfluxusú kutatóreaktorokban okozza.



9.8. ábra. Xe-mérgeződés az idő függvényében (paraméter: ϕ)

A xenon megjelenése nem csak a reaktivitást befolyásolja, hanem a fluxus térbeli eloszlását is. Kedvezőtlen esetben ez bonyolult térbeli ingadozásokhoz vezet. Ennek részleteit illetően az irodalomra utalunk.

9.3.2. Sm-mérgeződés

A xenonhoz hasonlóan a samárium is okoz mérgeződést, amelyet a (9.22)-höz hasonló egyenletek írnak le azzal a különbséggel, hogy a 9.4b. ábrán mutatott bomlási séma szerint a ^{149}Sm stabil izotóp. Ennek megfelelően a samárium koncentrációja monoton nő, hiszen a ^{149}Pm bomlása folyamatosan termeli a ^{149}Sm magokat, de azok nem bomlanak le. (9.20) mintájára a következő egyenletek érvényesek ezekre az izotópokra:

$$\frac{dN_{\text{Pm}}}{dt} = Y_{\text{Pm}} \Sigma_f \phi - \lambda_{\text{Pm}} N_{\text{Pm}}, \quad (9.25a)$$

$$\frac{dN_{\text{Sm}}}{dt} = \lambda_{\text{Pm}} N_{\text{Pm}} - \phi \sigma_{\text{Sm}} N_{\text{Sm}}. \quad (9.25b)$$

Ha ezeket az egyenleteket a $N_{\text{Pm}}(0) = N_{\text{Sm}}(0) = 0$ kezdeti feltételekkel megoldjuk, a

$$N_{\text{Pm}}(t) = \frac{Y_{\text{Pm}} \Sigma_f \phi}{\lambda_{\text{Pm}}} (1 - e^{-\lambda_{\text{Pm}} t}), \quad (9.26a)$$

$$N_{\text{Sm}}(t) = \frac{Y_{\text{Pm}} \Sigma_f}{\sigma_{\text{Sm}}} \left(1 - \frac{\sigma_{\text{Sm}} \phi e^{-\lambda_{\text{Pm}} t} - \lambda_{\text{Pm}} e^{-\sigma_{\text{Sm}} \phi t}}{\sigma_{\text{Sm}} \phi - \lambda_{\text{Pm}}} \right) \quad (9.26b)$$

eredményt kapjuk. Kiolvasható ebből, hogy elegendően hosszú idő alatt a következő stacionárius értékek állnak be [vö. (9.23)]:

$$N_{\text{Pm}}(\infty) = \frac{Y_{\text{Pm}} \Sigma_f \phi}{\lambda_{\text{Pm}}}, \quad (9.27a)$$

$$N_{\text{Sm}}(\infty) = \frac{Y_{\text{Pm}} \Sigma_f}{\sigma_{\text{Sm}}}. \quad (9.27b)$$

Figyelemre méltó, hogy a ^{149}Sm egyensúlyi koncentrációja független a fluxustól. Ha ezt összevetjük (9.23b)-vel, azt látjuk, hogy ennek a ^{149}Sm stabil volta az oka. A reaktor leállítás után a Sm-mérgeződés időbeli lefolyása is más, mint a Xe-mérgeződésé. Oldjuk ugyanis meg $\phi = 0$ mellett a (9.25) egyenleteket a

$$N_{\text{Pm}}(0) = N_{\text{Pm}}(\infty) \quad \text{és} \quad N_{\text{Sm}}(0) = N_{\text{Sm}}(\infty)$$

kezdőfeltételekkel. Mint könnyen belátható, a megoldás

$$N_{\text{Pm}}(t) = N_{\text{Pm}}(\infty) e^{-\lambda_{\text{Pm}} t},$$

$$N_{\text{Sm}}(t) = N_{\text{Sm}}(\infty) + N_{\text{Pm}}(\infty) (1 - e^{-\lambda_{\text{Pm}} t}).$$

Elegendően hosszú várakozási idő elteltével tehát a ^{149}Sm koncentrációja felveszi az $N_{\text{Pm}}(\infty) + N_{\text{Sm}}(\infty)$ értéket. Mivel (9.27a) szerint $N_{\text{Pm}}(\infty)$ függ a fluxustól, ez a háttárérték is függni fog attól, hogy a leállítás előtt milyen volt a reaktor fluxusa. A függés mértéke a

$$\frac{N_{\text{Pm}}(\infty)}{N_{\text{Sm}}(\infty)} = \frac{\sigma_{\text{Sm}} \phi}{\lambda_{\text{Pm}}} \approx \frac{1,95 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}}{3,63 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}} = 0,54 \quad (9.28)$$

arány [vö. (9.27)]. A képletben $\phi = 3 \cdot 10^{13} \text{ n}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ fluxust tételeztünk fel, továbbá felhasználtuk a 9.1.2. szakaszban megadott számértékeket. A fluxustól való függés tehát jelentős, hiszen – például – a kutatóreaktorokra jellemző fluxus mellett ennek az aránynak az értéke elérheti az 5-öt is.

A Xe-mérgeződéssel szemben lényes különbség, hogy a ^{149}Sm -nek ez a koncentrációja nem bomlik le, hanem a reaktor újraindításakor ott marad a reaktorban. Felmerül a kérdés, vajon a következő üzemeltetési ciklusban tovább halmozódik-e a ^{149}Sm mennyisége. A válaszhoz a (9.26) egyenleteket a következő kezdőfeltétellel kell megoldanunk:

$$N_{\text{Pm}}(0) = 0 \quad \text{és} \quad N_{\text{Sm}}(0) = N_{\text{Sm}}(\infty) + N_{\text{Pm}}(\infty).$$

Ha feltételezzük, hogy a ϕ fluxus ugyanakkora, mint az előző kampányban⁸, akkor a megoldás

$$N_{\text{Sm}}(t) = \frac{Y_{\text{Pm}} \Sigma_f}{\sigma_{\text{Sm}}} - \frac{Y_{\text{Pm}} \Sigma_f \phi}{\lambda_{\text{Pm}}} \cdot \frac{\lambda_{\text{Pm}} e^{-\lambda_{\text{Pm}} t} - \sigma_{\text{Sm}} \phi e^{-\sigma_{\text{Sm}} \phi t}}{\sigma_{\text{Sm}} \phi - \lambda_{\text{Pm}}}. \quad (9.29)$$

Nyilvánvaló, hogy $t \rightarrow \infty$ esetén ennek a határértéke ugyanúgy $N_{\text{Sm}}(\infty)$, mint amikor a szamárium koncentrációja 0-ról indul. Végeredményben tehát azt az – egyébként heurisztikusan is várható – eredményt kaptuk, hogy az előző kampányokban felhalmozódott szamárium minden kampányban kiég. Természetesen meg kell még néznünk, hogy egy kampány ideje, vagyis kerekén 1 év $\approx 3 \cdot 10^7$ s elegendően hosszú idő-e ehhez. A válasz: igen, hiszen

$$\lambda_{\text{Pm}} t \approx 3,63 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7 = 109 \quad \text{és} \quad \sigma_{\text{Sm}} \phi t \approx 1,95 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^7 = 59.$$

Befejezésül összevetjük a Xe- és Sm-mérgeződés mértékét. Ehhez kiszámítjuk az egyensúlyi koncentrációhoz tartozó makroszkopikus abszorpciós hatáskeresztmetszetek arányát [vö. (9.23b) és (9.27b)]:

$$\frac{\Sigma_a^{\text{Sm}}}{\Sigma_a^{\text{Xe}}} = \frac{N_{\text{Sm}}(\infty) \sigma_{\text{Sm}}}{N_{\text{Xe}}(\infty) \sigma_{\text{Xe}}} = \frac{Y_{\text{Pm}} (\lambda_{\text{Xe}} + \sigma_{\text{Xe}} \phi)}{(Y_{\text{I}} + Y_{\text{Xe}}) \sigma_{\text{Xe}} \phi}.$$

Elegendően nagy fluxus esetében ez csak a gyakoriságok arányától függ:

$$\left. \frac{\Sigma_a^{\text{Sm}}}{\Sigma_a^{\text{Xe}}} \right|_{\phi \text{ nagy}} = \frac{Y_{\text{Pm}}}{Y_{\text{I}} + Y_{\text{Xe}}} = \frac{0,0109}{0,001 + 0,064} = 0,168.$$

Közepes fluxus esetében nagyobb szám adódik. Például a $\phi = 3 \cdot 10^{13} \text{ n}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ fluxus mellett az arány 0,206. A Sm-mérgeződés mértéke tehát a Xe-mérgeződésnek mintegy

⁸ A "kampány" a reaktor két átrakása között eltelt idő. A kifejezés értelmét a 9.4. alfejezetben világítjuk meg részletesebben.

20%-a. Emiatt a xenon lényegesen több gondot okoz az operátoroknak, mint a szamárium.

9.4. Atomerőművek üzemeltetése

Ha a reaktor egy adott pillanatban kritikus, akkor a kiégés hatására rövid időn belül szubkritikussá válik, tehát leáll az energiatermelés. Ennek megakadályozására a reaktort úgy építik meg, hogy benne az üzemvitel igényei szerint változtatni lehessen az abszorpciós hatáskeresztmetszetet, nevezetesen a moderátorban bórsavat oldanak fel, továbbá a reaktor meghatározott helyein szabályozórudakat helyeznek el. Ahogy a kiégés hatására fogy a hasadóanyag, és mérgeződik a reaktor, a kritikus állapot fenntartása érdekében az abszorbens anyagok mennyiségét csökkentik.

9.4.1. Kampány

Az erőmű üzemének menete vázlatosan a következő. A szabályozórudak egy része a rövid idejű (legfeljebb néhány órás) reaktivitásváltozások ellensúlyozására szolgál:

- kellő számú szabályozórudat állandóan kihúzott állapotban kell tartani, hogy tetsszőleges vészjel esetén a reaktort le lehessen állítani (ezek a *biztonságvédelmi rudak*);
- néhány rúdra szükség van a xenon- és szamárium-mérgeződés, továbbá a reaktor változó hőmérsékletéből eredő reaktivitásváltozások ellensúlyozására.

A hosszú idejű változások (vagyis a kiégés) ellensúlyozására a bórsav és a szabályozórudak fennmaradó része szolgál:

- az első szakaszban folyamatosan csökkentik a bórsav koncentrációját;
- amikor ez (gyakorlatilag) 0-ra csökkent, kezdik a maradék rudakat kihúzni; amikor az utolsó rudat is kihúzták, a reaktor tovább nem tartható üzemben, és le kell állítani, majd friss üzemanyaggal kell feltölteni.

Az első szakasz körülbelül 9–10 hónapig tart, a második pedig 1–2 hónapig. Ezt az időszakot együttesen *kampánynak* nevezzük. A reaktort úgy kell megtervezni, hogy két átrakás között jó közelítéssel egy év teljen el. Így lehet elérni, hogy egy reaktor átrakása a naptári évnek mindig ugyanarra a szakaszára essen. Ennek különösen a magyarhoz hasonló kis energiarendszerek esetében van jelentősége, hiszen ilyenekben nem lehet megengedni, hogy egyszerre két blokk álljon le tartósan.

A kampány hosszát *effektív napokban* mérjük. Egy kampány folyamán a reaktor teljesítménye időben változhat. A teljesítménygörbe alatti terület adja meg a reaktor által a kampány alatt termelt teljes (hő)energiát. Nos, az *effektív üzemidő* az az idő, amely alatt a reaktor ugyanennyi energiát termelt volna, ha végig a névleges teljesítményen működött volna. Nyilvánvaló, hogy az effektív napok száma mindig kisebb, mint a kampány naptári napokban mért hossza. Ha nem jön közbe be nem tervezett leállítás, a 11 naptári hónap hosszúságú kampány effektív hossza 270–280 effektív nap.

A kampány minden pillanatában be kell tartani bizonyos korlátozó feltételeket, amelyeket az alábbi két biztonsági követelményből vezetünk le:

- A reaktor egyik fűtőelemének a felületén sem léphet fel *forrásos krízis*, ami azt jelenti, hogy a fűtőelemből a moderátor felé irányuló hőáram értéke nem lehet akkora, hogy a moderátor forrása révén keletkező buborékok a fűtőelem felületén összefüggő gőzréteggé olvadjanak össze. Ilyenkor ugyanis a hőátadás annyira leromlik, hogy a fűtőelem megolvadhat.
- A reaktor legsúlyosabb üzemzavara esetén sem lehet a fűtőelemekben annyi hasadási termék, hogy a radioaktív bomlásuk által termelt hő (az ún. *remanens hő*) a fűtőelem megolvadását okozhassa.

Mindkét feltétel a lokális teljesítménysűrűség korlátozását jelenti, amit végső soron egyetlen mennyiség segítségével szokás kifejezni: a fűtőelemek hosszegységére eső hőteljesítmény (a *lineáris teljesítménysűrűség*) a legmelegebb helyen sem haladhat meg egy felső korlátot. A paksi atomerőmű esetében ez a korlát 500 W/cm. Ha ezt a mennyiséget csak számítás útján határozzuk meg, akkor ezt tovább kell csökkenteni egy biztonsági tényezővel. Így adódik a paksi reaktorok esetében 325 W/cm.

Ennek figyelembevételéhez számítás útján meg kell határozni a legnagyobb teljesítményt leadó fűtőelemköteget, azon belül a legmelegebb fűtőelemet, majd annak legmelegebb szakaszát. A korszerű atomerőművekben (így Pakson is) van egy mérőrendszer, amely mindezeket a mennyiségeket meghatározza. Ezért a gyakorlatban olyan korlátozásokat szokás előírni, amelyek a mért mennyiségek bizonyos kombinációinak a felső határát szabják meg. További részletekbe nem mehettünk bele.

9.4.2. A reaktor manőverezhetősége

Normális körülmények között az a leggazdaságosabb, hogy az atomerőművek teljesítménye minél közelebb van névleges teljesítményükhöz, és a villamosenergia-igények változásait a hagyományos erőművek követik. Gyakran ez nem lehetséges, ha több atomerőmű szolgálja ki ugyanazt a villamosenergia-rendszert. Ebben az esetben az atomerőmű teljesítményének is követnie kell a változó igényeket, amit *terheléskövető üzemmódnak* nevezünk. Megvalósításához az atomerőműnek kellő mértékben *manőverezhetőnek* kell lennie.

A VVER-típusú atomerőművek közül a Kóla félszigeten működő 440 MW-os reaktorblokkok esetében már szükségessé vált a terheléskövető üzemmód. A paksi atomerőművet nem ilyen módon üzemeltetik. Ha azonban szükségessé válna valamelyik blokk változó terheléssel való üzemeltetése, változatlanul érvényben maradnának a fentiekben említett korlátozó feltételek, amelyeknek ilyen körülmények között való betartása az alábbiakban ismertetett problémákat veti fel.

A reaktor teljesítményének változása felborítja az egyensúlyi feltételeket, és a xenon mennyiségében tranziens folyamatokat indít el. Az operátornak tisztában kell lennie a reaktivitás változásának irányával, hogy a bórkoncentrációt megfelelő értékre tudja beállítani a hűtőközeg hőmérsékletének állandó értéken való tartása érdekében.

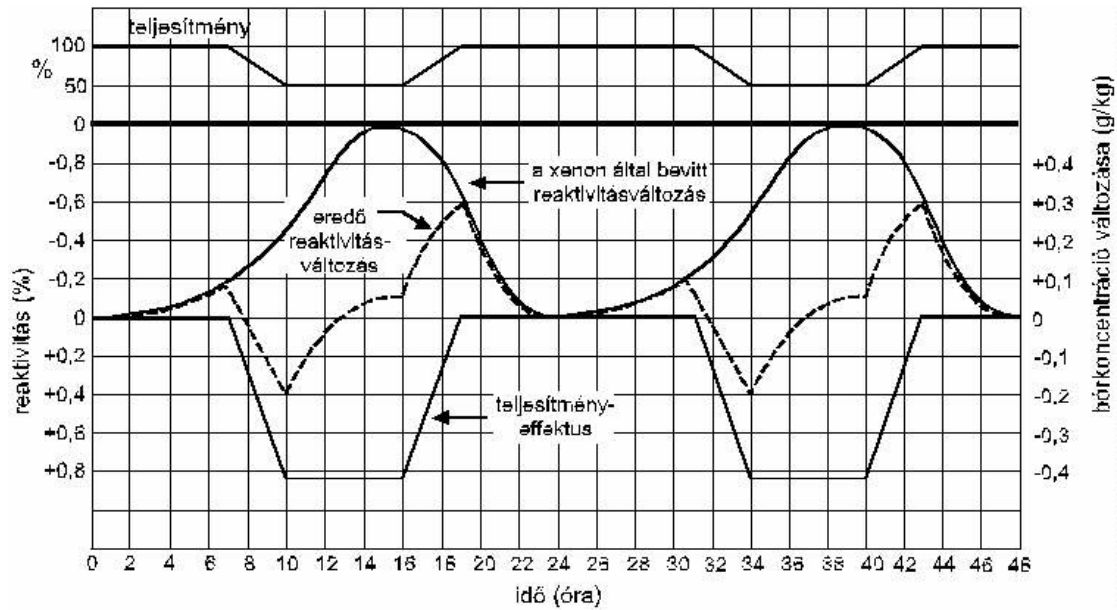
A szabályozórudak mozgatása eltorzítja az axiális eloszlást, továbbá fokozhatja a megindult xenontranzienst. Emiatt a tranzieneket lehetőleg bórsavval és nem szabályozórudakkal célszerű követni. A kampány végén már nincs bórsav a moderátorban, ezért ekkor a manőverezhetőség két okból is leromlik: egyrészt kicsi a reaktivitástartalék (emiatt alig van mivel kompenzálni a xenon hatását), másrészt a rudak húzása (a mondottak értelmében) nagy axiális egyenlőtlenégeket okozhat, és emiatt csak a teljesítmény csökkentésével lehet betartani a korlátozó feltételeket. A teljesítmény csökkentése pedig a xenon koncentrációjának a növekedéséhez vezet.

Amikor a teljesítmény csökkenni kezd, a hűtőközeg hőmérsékletének csökkenése miatt a reaktivitás nő, tehát az automatikus szabályozórendszer ereszti be a szabályozórudakat. Amikor a teljesítmény elérte a kívánt, kisebb értékét, a xenon felhalmozódása miatt a szabályozórudak kezdenek kifelé mozogni. Ha még van a reaktorban bór (tehát nem a kampány vége felé járunk), a bórkoncentráció kezdeti növelésével, majd csökkentésével biztosítani lehet, hogy a szabályozórudak visszakerüljenek eredeti helyükre, és így az axiális egyenlőtlenesség a megengedett határok között maradjon. Ha a kisebb teljesítményen hosszabb ideig kell üzemelni, a xenon mennyisége újra csökkenni kezd, és ekkor már szükségessé válhat a bórkoncentráció növelése, nehogy a szabályozórudaknak ismét el kelljen mozdulniuk. A kampány végén erre nincs lehetőség, ezért a szabályozórudak elmozdulása jelentősen befolyásolja a teljesítmény axiális eloszlását.

A fentiekkel analóg módon járunk el, amikor növelni kell a teljesítményt. A növelés előtt még időben meg kell kezdeni a bórsav hígítását. Enélkül ugyanis a teljesítmény növelésekor a szabályozórudak kifelé kezdenének mozogni. Az axiális egyenlőtlenességnek emiatt bekövetkező romlását csak úgy tudjuk megakadályozni, valamint a korlátozó feltételeket csak úgy tudjuk betartani, hogy a bórsavat tovább hígítjuk.

Amikor a reaktor elérte az előírt, nagyobb teljesítményt, a kisebb teljesítményen felhalmozódott xenon kezd kiégni, amit először a szabályozórudak befelé való mozgása jelez. Ennek ellensúlyozása és az axiális egyenlőtlenességnek az előírt határok között való tartása érdekében a bórkoncentrációt növelni kell. A nagyobb teljesítményen való néhány órai üzem után a xenon mennyisége ismét növekedni kezd, ami miatt a bórkoncentráció növelését lassítani kell.

Látjuk tehát, hogy a terheléskövető üzemmódban a teljesítmény előírt változásait a reaktor jellemzőinek (bórkoncentráció, rúdhelyzet stb.) bonyolult és gondosan megtervezett változtatásával kell kísélni. Egy tipikus terheléskövető ciklus látható a 9.9. ábrán, amelyen feltételeztük, hogy a teljesítmény előírt változása a következő: 12 óra 100%-on, a terhelés 50%-ra való csökkentése 3 óra alatt, 6 óra üzem 50%-on, a terhelés 100%-ra növelése 3 óra alatt. Ez a ciklus hosszú időn keresztül naponta viszszatérhet, bár előfordulhat, hogy a teljesítmény növelésének és csökkentésének ideje, valamint az állandó teljesítményszintek értéke változik a teherelosztó központ utasításai szerint. A 9.9. ábra felső görbéje a szabályosan ismétlődő ciklusok esetét mutatja.



9.9. ábra. A reaktor paramétereinek változása terheléskövető üzemmódban. A felső diagramm a teljesítmény változását mutatja, az alsó görbék pedig a különböző reaktivitáseffektusokat, valamint az eredő reaktivitásváltozást mutatják. A jobb oldali skáláról leolvasható, hogy a mutatott reaktivitásváltozások ellensúlyozásához mennyivel kell a bórsav koncentrációját megváltoztatni

A ciklus alatt a xenon által bevitt reaktivitáseffektus a ciklus kezdetén és végén zérus. Ezekben az időpontokban a teljesítmény 100%. Ezután egyre negatívabbá válik, mert a xenon mennyisége kezd közeledni a 100%-hoz tartozó egyensúlyi értékéhez, amelyet nem tud elérni, mert a 7. órában kezdődik a teljesítmény csökkentése. Ezt követően a xenoneffektus tovább nő, mert a ^{135}I atomok bomlása tovább termeli a xenont, viszont a xenon fogyása a kisebb teljesítményen lassabb. Körülbelül a 15. órában maximumon megy keresztül: ekkor kezd a kisebb teljesítményhez tartozó egyensúlyi értékhez közeledni, amit a teljesítmény növelése miatt szintén nem tud elérni, emiatt a csökkenés a 24. órában megáll, és a ciklus kezdődik előlről.

Közben a teljesítmény változásai is visznek be reaktivitást. Ezt mutatja a 9.9. ábra alsó görbéje. Az ebből eredő reaktivitásváltozás a kisebb teljesítményen, továbbá a teljesítmény csökkentése és növelése alatt pozitív (a 100%-hoz képest). A két hatás eredőjét mutatja a 9.9. ábra középső görbéje, amelyen a teljesítményváltozások kezdetén és végén éles változások (a görbéken törések) vannak. Az eredő reaktivitásváltozások ellensúlyozására a jobb oldali függőleges tengelyen felmért bórkoncentrációváltozásra van szükség. A dolog természetéből következik, hogy a bórkoncentráció csak néhány perc késéssel követheti a reaktivitás változásait. Ezért szükséges, hogy az operátor előre lássa a teljesítménynek és a hűtőközeg hőmérsékletének várható értékeit.

Mint említettük, a terheléskövetés nehéz a reaktorkampány végén: ekkor már nehéz a fenti ciklust végrehajtani, és könnyen bekövetkezhet, hogy a tervezetthez képest csökkenteni kell a teljesítményt (mert ezzel kissé megnövelhetjük a reaktivitás-tartalmat). Emiatt a terheléskövetés a kampány végén nem gazdaságos.

A *manőverezhetőség* legnagyobb problémája a teljesítményváltozások miatt kialakuló aszimmetrikus xenoneloszlás. Az axiális teljesítményeloszlás nagy torzulásai meg nem engedett lineáris teljesítménysűrűségekhez vezethetnek, ezért szigorú műszaki előírások vonatkoznak a megengedett axiális fluxuskülönbségekre.

9.4.3. Üzemviteli számítások

A fentiekben vázolt kampány elméleti leírásához tulajdonképpen elégséges egy számítógépi kód, amely a diffúzióegyenletet a 7. fejezetben ismertetett kevéscsoport közelítésben megoldja, ha ismerjük, hogyan függnek a kevéscsoport állandók a kiégéstől, a bórsav-koncentrációtól, a xenonkoncentrációtól, a hőmérséklettől és a többi, az erőmű üzeme során szintén változó mennyiségtől. Az alábbiakban megbeszéljük, hogy kell ezt kiszámítani, így egyelőre feltételezzük, hogy ismert a kevéscsoport állandóknak a kiégéstől és a többi mennyiségtől való függése. Először a kiindulási állapotra ($t = 0$) számítjuk ki a fluxus térbeli eloszlását, amiből rögtön megkapjuk a reaktorteljesítménynek, tehát $\Sigma_f \phi$ -nek a térbeli eloszlását is. Ezt az eloszlást egy bizonyos Δt ideig érvényesnek tekintve extrapolálhatunk a Δt -vel későbbi időpontra, vagyis kiszámíthatjuk a kiégés térbeli eloszlását a $t = \Delta t$ időpontban. Feltevésünk értelmében akkor ismernénk a kevéscsoport állandókat minden pontban, ha ismernénk a bórsavnak azt a koncentrációját, amely mellett az ilyen mértékben kiégett reaktor kritikus. Ezt alkalmas iterációval meghatározhatjuk. Ezzel megkapjuk a $t = \Delta t$ időponthoz tartozó teljesítményeloszlást, amelyet a $t = 2\Delta t$ időpontra extrapolálva megismételhetjük a fenti iterációt, amiből megkapjuk az ekkor fennálló bórsav-koncentrációt és teljesítményeloszlást. Ezt addig ismételhetjük, amíg a bórsav-koncentráció beiterált értéke 0 alá nem csökken. Ezután – pontosan úgy, ahogy az üzemvitelben is történik – az iterációt a szabályozórudak kritikus helyzetére vonatkozóan végezzük. Amikor ilyen rúdhelyzetet nem találunk, a számítás szerint elérkeztünk a kampány végéhez. A fentiekben mondottak szerint ezeket a számításokat három dimenzióban kell elvégezni, hiszen a biztonsági korlátok elsősorban az axiális teljesítményeloszlásra vonatkoznak.

Az itt leírthoz hasonló számítást az erőmű üzemeltetői általában nemcsak egyszer végzik el, hiszen a reaktort olyan üzemanyaggal igyekeznek feltölteni, amely egyrészt a szükséges ideig tartható üzemben, másrészt a legkevesebb költséggel a legtöbb energiát szolgáltatja. Az ilyen összetétel megkeresését nevezzük *optimalizálásnak*. Általában ehhez nem szükséges a teljes kiégési ciklust végigszámolni, hanem elég a $t = 0$ -hoz tartozó teljesítményeloszlást optimalizálni. A teljesítmény térbeli egyenlőtlensége ugyanis a kiégéssel csökken.

9.5. Feladatok

9.1. Egységek átszámítása:

- 1 MWnap energia hány gramm ^{235}U hasadása révén keletkezik? (1 pont)
- Hány hasadás szükséges 1 joule és 1 MWnap energia termeléséhez? (1 pont)
- Hány MWnap/t egy ^{235}U -ban e dúsítású urán kiégetettsége, ha az uránt ért be-sugárzás 1 n/kbarn? (1 pont)

Útmutatás: $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; a hasadáskor keletkező energia 200 MeV ; az 1 g ^{235}U -ban levő magok számát a (2.4) képlet értelmében számíthatjuk ki.

- 9.2. Feltesszük, hogy a reaktor teljesítménye időben állandó. $0,7\%$ és $3,6\%$ dúsításra számítsuk ki és ábrázoljuk az F fluencia függvényében az ^{235}U , ^{239}Pu , ^{240}Pu és ^{241}Pu izotópok mennyiségét! Hanyagoljuk el az ^{238}U mennyiségének változását. Ábrázolásakor az ^{238}U magok koncentrációját vegyük egységnyiinek. (4 pont)
- 9.3. A C_0 kezdeti konverziós tényező függvényében számítsuk ki, hogyan változik a négyfaktor-formula η tényezője a kampány elején! Van C_0 -nak olyan értéke, amikor ez a változás zérus? (5 pont)
- 9.4. Adjuk meg a (9.1) egyenlet együtthatóinak számszerű értékét az $i = 39$ és 41 izotópokra! A fluxus értékét változtassuk 10^{12} és $10^{15} \text{ n}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ között! (7 pont)
- 9.5. Integráljuk a (9.22) egyenleteket időben változó $\phi(t)$ fluxus esetén! Feltéve, hogy a xenon és a jódt mennyisége zérus $t < 0$ -re, az eredményt alkalmazzuk a következő esetre:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ \Phi_0 t / T_1 & 0 < t < T_1, \\ \Phi_0 & T_1 < t < T_2, \\ \Phi_0 (T_3 - t) / (T_3 - T_2) & T_2 < t < T_3. \end{cases}$$

Az urán dúsítása $3,6\%$, $T_1 = 6$ óra, $T_2 = 18$ óra és $T_3 = 24$ óra. A xenon magsűrűségét az idő függvényében ($0 < t < T_3$) rajzoljuk fel egy közös grafikonon a fluxus $\Phi_0 = 10^{12}$, $\Phi_0 = 10^{13}$ és $\Phi_0 = 10^{14} \text{ n}/(\text{cm}^2 \cdot \text{s})$ értékeire! (14 pont)

- 9.6. A 9.5. feladatban a leállást követően mikor éri el a xenon koncentrációja a maximális értékét? A maximális értéket hasonlítsuk össze az egyes Φ_0 fluxusokhoz tartozó egyensúlyi koncentrációkkal! (11 pont)
- 9.7. Oldjuk meg a 9.5. feladatot szamáriumra! (11 pont)
- 9.8. A radioaktív hulladékban a ^{134}Cs és ^{137}Cs mennyiségének aránya függ attól, hogy milyen módon üzemelt az a reaktor, amely a hulladékot termelte (vö. 9.10. feladat). Tehát más az izotóparány az atombomba robbanásakor keletkező hulladékban, mint abban, ami a csernobili robbanás után szétszóródott.
- a) Mi az eltérés magyarázata? (3 pont)
- b) Amikor egy talajmintában megmérjük e két izotóp arányát, hogyan tudjuk szétválasztani, a szennyezés mely hányada származik Csernobiltól és a magas légköri atomfegyver-kísérletekből? (7 pont)
- c) Mindkét esetben adjunk becslést a két izotóp arányára! (10 pont)
- 9.9. Ábrázoljuk grafikusán, hogyan változik k_∞ a xenonmérgeződés hatására a következő esetekben!
- a) A (9.23) képletek szerinti egyensúlyi koncentráció kialakulása után. (3 pont)
- b) A reaktor leállása után a (9.24) képlet szerinti esetben. (3 pont)
- c) A 9.5. és 9.6. feladatok szerinti esetben. (4 pont)
- 9.10. A ^{148}Nd izotóp mennyisége a reaktor működése során folyamatosan nő, bomlása elhagyható. Mennyisége γ -vonala alapján pontosan mérhető. Hogyan lehet ebből a termelt energiára következtetni? (8 pont)
- 9.11. Vannak hasadási termékek, amelyek neutronbefogással eggyel nagyobb tömegszámú izotóppá alakulnak át, miközben radioaktív bomlás révén más elemmé alakulnak át. Jelöljük ugyanannak az elemnek egymást követő izotópjait az A, B, C stb. betűkkel. Hány izotóp mennyiségét kell megmérni ahhoz, hogy a mért izotóparányokból visszakövetkeztethessünk a vizsgált nukleáris üzemanyag által termelt

összes energiára? Mi a feltétele annak, hogy ilyen következtetést egyáltalán le-
hessen vonni? (15 pont)

1. Függelék. Kétszerezési idő a reaktivitás függvényében a BME oktatóreaktorra vonatkozóan

BME cella - 293 K

REACTIVITY IN CENTS VS. T2X IN SEC

BETA-EFF=

0.79842

	I	0	I	1	I	2	I	3	I	4	I	5	I	6	I	7	I	8	I	9	I
0.	I			99.37	*	93.28	*	89.33	*	86.21	*	83.55	*	81.22	*	79.14	*	77.25	*	75.51	*
1.	I	73.90	*	72.41	*	71.02	*	69.71	*	68.47	*	67.31	*	66.20	*	65.15	*	64.15	*	63.20	*
2.	I	62.28	*	61.41	*	60.57	*	59.77	*	59.00	*	58.25	*	57.54	*	56.84	*	56.18	*	55.53	*
3.	I	54.91	*	54.30	*	53.72	*	53.15	*	52.60	*	52.06	*	51.54	*	51.04	*	50.54	*	50.07	*
4.	I	49.60	*	49.15	*	48.70	*	48.27	*	47.85	*	47.44	*	47.03	*	46.64	*	46.26	*	45.88	*
5.	I	45.52	*	45.16	*	44.80	*	44.46	*	44.12	*	43.79	*	43.47	*	43.15	*	42.84	*	42.53	*
6.	I	42.23	*	41.94	*	41.65	*	41.36	*	41.09	*	40.81	*	40.54	*	40.28	*	40.02	*	39.76	*
7.	I	39.51	*	39.26	*	39.02	*	38.78	*	38.54	*	38.31	*	38.08	*	37.86	*	37.64	*	37.42	*
8.	I	37.20	*	36.99	*	36.78	*	36.58	*	36.37	*	36.17	*	35.97	*	35.78	*	35.59	*	35.40	*
9.	I	35.21	*	35.03	*	34.84	*	34.66	*	34.49	*	34.31	*	34.14	*	33.97	*	33.80	*	33.63	*
10.	I	33.47	*	33.30	*	33.14	*	32.98	*	32.83	*	32.67	*	32.52	*	32.37	*	32.22	*	32.07	*
11.	I	31.92	*	31.78	*	31.63	*	31.49	*	31.35	*	31.21	*	31.07	*	30.94	*	30.80	*	30.67	*
12.	I	30.54	*	30.41	*	30.28	*	30.15	*	30.03	*	29.90	*	29.78	*	29.65	*	29.53	*	29.41	*
13.	I	29.29	*	29.18	*	29.06	*	28.94	*	28.83	*	28.71	*	28.60	*	28.49	*	28.38	*	28.27	*
14.	I	28.16	*	28.05	*	27.95	*	27.84	*	27.74	*	27.63	*	27.53	*	27.43	*	27.33	*	27.23	*
15.	I	27.13	*	27.03	*	26.93	*	26.84	*	26.74	*	26.64	*	26.55	*	26.46	*	26.36	*	26.27	*
16.	I	26.18	*	26.09	*	26.00	*	25.91	*	25.82	*	25.73	*	25.65	*	25.56	*	25.47	*	25.39	*
17.	I	25.30	*	25.22	*	25.14	*	25.05	*	24.97	*	24.89	*	24.81	*	24.73	*	24.65	*	24.57	*
18.	I	24.49	*	24.42	*	24.34	*	24.26	*	24.19	*	24.11	*	24.03	*	23.96	*	23.89	*	23.81	*
19.	I	23.74	*	23.67	*	23.59	*	23.52	*	23.45	*	23.38	*	23.31	*	23.24	*	23.17	*	23.10	*
20.	I	23.04	*	22.97	*	22.90	*	22.83	*	22.77	*	22.70	*	22.64	*	22.57	*	22.51	*	22.44	*
21.	I	22.38	*	22.31	*	22.25	*	22.19	*	22.13	*	22.06	*	22.00	*	21.94	*	21.88	*	21.82	*
22.	I	21.76	*	21.70	*	21.64	*	21.58	*	21.52	*	21.47	*	21.41	*	21.35	*	21.29	*	21.24	*
23.	I	21.18	*	21.12	*	21.07	*	21.01	*	20.96	*	20.90	*	20.85	*	20.79	*	20.74	*	20.69	*
24.	I	20.63	*	20.58	*	20.53	*	20.47	*	20.42	*	20.37	*	20.32	*	20.27	*	20.22	*	20.17	*
25.	I	20.12	*	20.07	*	20.02	*	19.97	*	19.92	*	19.87	*	19.82	*	19.77	*	19.72	*	19.67	*
26.	I	19.63	*	19.58	*	19.53	*	19.48	*	19.44	*	19.39	*	19.34	*	19.30	*	19.25	*	19.21	*
27.	I	19.16	*	19.12	*	19.07	*	19.03	*	18.98	*	18.94	*	18.89	*	18.85	*	18.81	*	18.76	*
28.	I	18.72	*	18.68	*	18.64	*	18.59	*	18.55	*	18.51	*	18.47	*	18.43	*	18.38	*	18.34	*
29.	I	18.30	*	18.26	*	18.22	*	18.18	*	18.14	*	18.10	*	18.06	*	18.02	*	17.98	*	17.94	*

BME cella - 293 K

REACTIVITY IN CENTS VS. T2X IN SEC

BETA-EFF=

0.79842

	I	0	I	1	I	2	I	3	I	4	I	5	I	6	I	7	I	8	I	9	I
30.	I	17.90	*	17.86	*	17.82	*	17.79	*	17.75	*	17.71	*	17.67	*	17.63	*	17.60	*	17.56	*
31.	I	17.52	*	17.48	*	17.45	*	17.41	*	17.37	*	17.34	*	17.30	*	17.26	*	17.23	*	17.19	*
32.	I	17.16	*	17.12	*	17.09	*	17.05	*	17.02	*	16.98	*	16.95	*	16.91	*	16.88	*	16.84	*
33.	I	16.81	*	16.77	*	16.74	*	16.71	*	16.67	*	16.64	*	16.61	*	16.57	*	16.54	*	16.51	*
34.	I	16.48	*	16.44	*	16.41	*	16.38	*	16.35	*	16.31	*	16.28	*	16.25	*	16.22	*	16.19	*
35.	I	16.16	*	16.12	*	16.09	*	16.06	*	16.03	*	16.00	*	15.97	*	15.94	*	15.91	*	15.88	*
36.	I	15.85	*	15.82	*	15.79	*	15.76	*	15.73	*	15.70	*	15.67	*	15.64	*	15.61	*	15.58	*
37.	I	15.55	*	15.53	*	15.50	*	15.47	*	15.44	*	15.41	*	15.38	*	15.36	*	15.33	*	15.30	*
38.	I	15.27	*	15.24	*	15.22	*	15.19	*	15.16	*	15.13	*	15.11	*	15.08	*	15.05	*	15.03	*
39.	I	15.00	*	14.97	*	14.95	*	14.92	*	14.89	*	14.87	*	14.84	*	14.81	*	14.79	*	14.76	*
40.	I	14.74	*	14.71	*	14.69	*	14.66	*	14.63	*	14.61	*	14.58	*	14.56	*	14.53	*	14.51	*
41.	I	14.48	*	14.46	*	14.43	*	14.41	*	14.39	*	14.36	*	14.34	*	14.31	*	14.29	*	14.26	*
42.	I	14.24	*	14.22	*	14.19	*	14.17	*	14.14	*	14.12	*	14.10	*	14.07	*	14.05	*	14.03	*
43.	I	14.00	*	13.98	*	13.96	*	13.94	*	13.91	*	13.89	*	13.87	*	13.84	*	13.82	*	13.80	*
44.	I	13.78	*	13.75	*	13.73	*	13.71	*	13.69	*	13.67	*	13.64	*	13.62	*	13.60	*	13.58	*
45.	I	13.56	*	13.54	*	13.51	*	13.49	*	13.47	*	13.45	*	13.43	*	13.41	*	13.39	*	13.37	*
46.	I	13.35	*	13.32	*	13.30	*	13.28	*	13.26	*	13.24	*	13.22	*	13.20	*	13.18	*	13.16	*
47.	I	13.14	*	13.12	*	13.10	*	13.08	*	13.06	*	13.04	*	13.02	*	13.00	*	12.98	*	12.96	*
48.	I	12.94	*	12.92	*	12.90	*	12.88	*	12.86	*	12.84	*	12.82	*	12.80	*	12.79	*	12.77	*
49.	I	12.75	*	12.73	*	12.71	*	12.69	*	12.67	*	12.65	*	12.63	*	12.62	*	12.60	*	12.58	*
50.	I	12.56	*	12.54	*	12.52	*	12.51	*	12.49	*	12.47	*	12.45	*	12.43	*	12.41	*	12.40	*
51.	I	12.38	*	12.36	*	12.34	*	12.33	*	12.31	*	12.29	*	12.27	*	12.26	*	12.24	*	12.22	*
52.	I	12.20	*	12.19	*	12.17	*	12.15	*	12.13	*	12.12	*	12.10	*	12.08	*	12.07	*	12.05	*
53.	I	12.03	*	12.02	*	12.00	*	11.98	*	11.96	*	11.95	*	11.93	*	11.92	*	11.90	*	11.88	*
54.	I	11.87	*	11.85	*	11.83	*	11.82	*	11.80	*	11.78	*	11.77	*	11.75	*	11.74	*	11.72	*
55.	I	11.70	*	11.69	*	11.67	*	11.66	*	11.64	*	11.63	*	11.61	*	11.59	*	11.58	*	11.56	*
56.	I	11.55	*	11.53	*	11.52	*	11.50	*	11.49	*	11.47	*	11.46	*	11.44	*	11.43	*	11.41	*
57.	I	11.40	*	11.38	*	11.37	*	11.35	*	11.34	*	11.32	*	11.31	*	11.29	*	11.28	*	11.26	*
58.	I	11.25	*	11.23	*	11.22	*	11.20	*	11.19	*	11.17	*	11.16	*	11.15	*	11.13	*	11.12	*
59.	I	11.10	*	11.09	*	11.07	*	11.06	*	11.05	*	11.03	*	11.02	*	11.00	*	10.99	*	10.98	*

BME cella - 293 K

REACTIVITY IN CENTS VS. T2X IN SEC

BETA-EFF=

0.79842

	I	0	I	1	I	2	I	3	I	4	I	5	I	6	I	7	I	8	I	9	I
60.	I	10.96	*	10.95	*	10.93	*	10.92	*	10.91	*	10.89	*	10.88	*	10.87	*	10.85	*	10.84	*
61.	I	10.82	*	10.81	*	10.80	*	10.78	*	10.77	*	10.76	*	10.74	*	10.73	*	10.72	*	10.70	*
62.	I	10.69	*	10.68	*	10.66	*	10.65	*	10.64	*	10.63	*	10.61	*	10.60	*	10.59	*	10.57	*
63.	I	10.56	*	10.55	*	10.54	*	10.52	*	10.51	*	10.50	*	10.48	*	10.47	*	10.46	*	10.45	*
64.	I	10.43	*	10.42	*	10.41	*	10.40	*	10.38	*	10.37	*	10.36	*	10.35	*	10.33	*	10.32	*
65.	I	10.31	*	10.30	*	10.29	*	10.27	*	10.26	*	10.25	*	10.24	*	10.23	*	10.21	*	10.20	*
66.	I	10.19	*	10.18	*	10.17	*	10.15	*	10.14	*	10.13	*	10.12	*	10.11	*	10.09	*	10.08	*
67.	I	10.07	*	10.06	*	10.05	*	10.04	*	10.02	*	10.01	*	10.00	*	9.99	*	9.98	*	9.97	*
68.	I	9.96	*	9.94	*	9.93	*	9.92	*	9.91	*	9.90	*	9.89	*	9.88	*	9.87	*	9.85	*
69.	I	9.84	*	9.83	*	9.82	*	9.81	*	9.80	*	9.79	*	9.78	*	9.77	*	9.76	*	9.74	*
70.	I	9.73	*	9.72	*	9.71	*	9.70	*	9.69	*	9.68	*	9.67	*	9.66	*	9.65	*	9.64	*
71.	I	9.63	*	9.62	*	9.60	*	9.59	*	9.58	*	9.57	*	9.56	*	9.55	*	9.54	*	9.53	*
72.	I	9.52	*	9.51	*	9.50	*	9.49	*	9.48	*	9.47	*	9.46	*	9.45	*	9.44	*	9.43	*
73.	I	9.42	*	9.41	*	9.40	*	9.39	*	9.38	*	9.37	*	9.36	*	9.35	*	9.34	*	9.33	*
74.	I	9.32	*	9.31	*	9.30	*	9.29	*	9.28	*	9.27	*	9.26	*	9.25	*	9.24	*	9.23	*
75.	I	9.22	*	9.21	*	9.20	*	9.19	*	9.18	*	9.17	*	9.16	*	9.15	*	9.14	*	9.13	*
76.	I	9.12	*	9.11	*	9.10	*	9.09	*	9.09	*	9.08	*	9.07	*	9.06	*	9.05	*	9.04	*
77.	I	9.03	*	9.02	*	9.01	*	9.00	*	8.99	*	8.98	*	8.97	*	8.96	*	8.95	*	8.95	*
78.	I	8.94	*	8.93	*	8.92	*	8.91	*	8.90	*	8.89	*	8.88	*	8.87	*	8.86	*	8.86	*
79.	I	8.85	*	8.84	*	8.83	*	8.82	*	8.81	*	8.80	*	8.79	*	8.78	*	8.78	*	8.77	*
80.	I	8.76	*	8.75	*	8.74	*	8.73	*	8.72	*	8.71	*	8.71	*	8.70	*	8.69	*	8.68	*
81.	I	8.67	*	8.66	*	8.65	*	8.65	*	8.64	*	8.63	*	8.62	*	8.61	*	8.60	*	8.59	*
82.	I	8.59	*	8.58	*	8.57	*	8.56	*	8.55	*	8.54	*	8.54	*	8.53	*	8.52	*	8.51	*
83.	I	8.50	*	8.49	*	8.49	*	8.48	*	8.47	*	8.46	*	8.45	*	8.45	*	8.44	*	8.43	*
84.	I	8.42	*	8.41	*	8.41	*	8.40	*	8.39	*	8.38	*	8.37	*	8.37	*	8.36	*	8.35	*
85.	I	8.34	*	8.33	*	8.33	*	8.32	*	8.31	*	8.30	*	8.29	*	8.29	*	8.28	*	8.27	*
86.	I	8.26	*	8.25	*	8.25	*	8.24	*	8.23	*	8.22	*	8.22	*	8.21	*	8.20	*	8.19	*
87.	I	8.19	*	8.18	*	8.17	*	8.16	*	8.16	*	8.15	*	8.14	*	8.13	*	8.13	*	8.12	*
88.	I	8.11	*	8.10	*	8.10	*	8.09	*	8.08	*	8.07	*	8.07	*	8.06	*	8.05	*	8.04	*
89.	I	8.04	*	8.03	*	8.02	*	8.01	*	8.01	*	8.00	*	7.99	*	7.98	*	7.98	*	7.97	*

BME cella - 293 K

REACTIVITY IN CENTS VS. T2X IN SEC

BETA-EFF=

0.79842

	I	0	I	1	I	2	I	3	I	4	I	5	I	6	I	7	I	8	I	9	I
90.	I	7.96	*	7.96	*	7.95	*	7.94	*	7.93	*	7.93	*	7.92	*	7.91	*	7.91	*	7.90	*
91.	I	7.89	*	7.88	*	7.88	*	7.87	*	7.86	*	7.86	*	7.85	*	7.84	*	7.84	*	7.83	*
92.	I	7.82	*	7.81	*	7.81	*	7.80	*	7.79	*	7.79	*	7.78	*	7.77	*	7.77	*	7.76	*
93.	I	7.75	*	7.75	*	7.74	*	7.73	*	7.73	*	7.72	*	7.71	*	7.71	*	7.70	*	7.69	*
94.	I	7.68	*	7.68	*	7.67	*	7.66	*	7.66	*	7.65	*	7.64	*	7.64	*	7.63	*	7.63	*
95.	I	7.62	*	7.61	*	7.61	*	7.60	*	7.59	*	7.59	*	7.58	*	7.57	*	7.57	*	7.56	*
96.	I	7.55	*	7.55	*	7.54	*	7.53	*	7.53	*	7.52	*	7.51	*	7.51	*	7.50	*	7.50	*
97.	I	7.49	*	7.48	*	7.48	*	7.47	*	7.46	*	7.46	*	7.45	*	7.44	*	7.44	*	7.43	*
98.	I	7.43	*	7.42	*	7.41	*	7.41	*	7.40	*	7.39	*	7.39	*	7.38	*	7.38	*	7.37	*
99.	I	7.36	*	7.36	*	7.35	*	7.35	*	7.34	*	7.33	*	7.33	*	7.32	*	7.31	*	7.31	*
100	I	7.30		7.24		7.18		7.13		7.07		7.01		6.96		6.90		6.85		6.80	
110	I	6.74		6.69		6.64		6.59		6.55		6.50		6.45		6.40		6.36		6.31	
120	I	6.27		6.22		6.18		6.14		6.09		6.05		6.01		5.97		5.93		5.89	
130	I	5.85		5.81		5.78		5.74		5.70		5.67		5.63		5.59		5.56		5.53	
140	I	5.49		5.46		5.42		5.39		5.36		5.33		5.29		5.26		5.23		5.20	
150	I	5.17		5.14		5.11		5.08		5.05		5.03		5.00		4.97		4.94		4.91	
160	I	4.89		4.86		4.83		4.81		4.78		4.76		4.73		4.71		4.68		4.66	
170	I	4.63		4.61		4.59		4.56		4.54		4.52		4.49		4.47		4.45		4.43	
180	I	4.40		4.38		4.36		4.34		4.32		4.30		4.28		4.26		4.24		4.22	
190	I	4.20		4.18		4.16		4.14		4.12		4.10		4.08		4.06		4.04		4.03	
200	I	4.01		3.99		3.97		3.95		3.94		3.92		3.90		3.89		3.87		3.85	
210	I	3.84		3.82		3.80		3.79		3.77		3.76		3.74		3.72		3.71		3.69	
220	I	3.68		3.66		3.65		3.63		3.62		3.60		3.59		3.57		3.56		3.55	
230	I	3.53		3.52		3.50		3.49		3.48		3.46		3.45		3.44		3.42		3.41	
240	I	3.40		3.39		3.37		3.36		3.35		3.33		3.32		3.31		3.30		3.29	
250	I	3.27		3.26		3.25		3.24		3.23		3.21		3.20		3.19		3.18		3.17	
260	I	3.16		3.15		3.14		3.12		3.11		3.10		3.09		3.08		3.07		3.06	
270	I	3.05		3.04		3.03		3.02		3.01		3.00		2.99		2.98		2.97		2.96	
280	I	2.95		2.94		2.93		2.92		2.91		2.90		2.89		2.88		2.87		2.86	
290	I	2.86		2.85		2.84		2.83		2.82		2.81		2.80		2.79		2.78		2.78	

BME cella - 293 K

REACTIVITY IN CENTS VS. T2X IN SEC

BETA-EFF=

0.79842

	I	0	I	1	I	2	I	3	I	4	I	5	I	6	I	7	I	8	I	9	I
300	I	2.77		2.76		2.75		2.74		2.73		2.72		2.72		2.71		2.70		2.69	
310	I	2.68		2.68		2.67		2.66		2.65		2.64		2.64		2.63		2.62		2.61	
320	I	2.61		2.60		2.59		2.58		2.58		2.57		2.56		2.55		2.55		2.54	
330	I	2.53		2.52		2.52		2.51		2.50		2.50		2.49		2.48		2.48		2.47	
340	I	2.46		2.46		2.45		2.44		2.44		2.43		2.42		2.42		2.41		2.40	
350	I	2.40		2.39		2.38		2.38		2.37		2.36		2.36		2.35		2.35		2.34	
360	I	2.33		2.33		2.32		2.32		2.31		2.30		2.30		2.29		2.29		2.28	
370	I	2.27		2.27		2.26		2.26		2.25		2.25		2.24		2.23		2.23		2.22	
380	I	2.22		2.21		2.21		2.20		2.20		2.19		2.19		2.18		2.18		2.17	
390	I	2.16		2.16		2.15		2.15		2.14		2.14		2.13		2.13		2.12		2.12	
400	I	2.11		2.11		2.10		2.10		2.09		2.09		2.08		2.08		2.07		2.07	
410	I	2.06		2.06		2.06		2.05		2.05		2.04		2.04		2.03		2.03		2.02	
420	I	2.02		2.01		2.01		2.00		2.00		2.00		1.99		1.99		1.98		1.98	
430	I	1.97		1.97		1.97		1.96		1.96		1.95		1.95		1.94		1.94		1.94	
440	I	1.93		1.93		1.92		1.92		1.91		1.91		1.91		1.90		1.90		1.89	
450	I	1.89		1.89		1.88		1.88		1.87		1.87		1.87		1.86		1.86		1.86	
460	I	1.85		1.85		1.84		1.84		1.84		1.83		1.83		1.83		1.82		1.82	
470	I	1.81		1.81		1.81		1.80		1.80		1.80		1.79		1.79		1.79		1.78	
480	I	1.78		1.77		1.77		1.77		1.76		1.76		1.76		1.75		1.75		1.75	
490	I	1.74		1.74		1.74		1.73		1.73		1.73		1.72		1.72		1.72		1.71	
500	I	1.71		1.71		1.70		1.70		1.70		1.69		1.69		1.69		1.68		1.68	
510	I	1.68		1.68		1.67		1.67		1.67		1.66		1.66		1.66		1.65		1.65	
520	I	1.65		1.64		1.64		1.64		1.64		1.63		1.63		1.63		1.62		1.62	
530	I	1.62		1.61		1.61		1.61		1.61		1.60		1.60		1.60		1.59		1.59	
540	I	1.59		1.59		1.58		1.58		1.58		1.57		1.57		1.57		1.57		1.56	
550	I	1.56		1.56		1.56		1.55		1.55		1.55		1.55		1.54		1.54		1.54	
560	I	1.53		1.53		1.53		1.53		1.52		1.52		1.52		1.52		1.51		1.51	
570	I	1.51		1.51		1.50		1.50		1.50		1.50		1.49		1.49		1.49		1.49	
580	I	1.48		1.48		1.48		1.48		1.47		1.47		1.47		1.47		1.46		1.46	
590	I	1.46		1.46		1.45		1.45		1.45		1.45		1.45		1.44		1.44		1.44	

