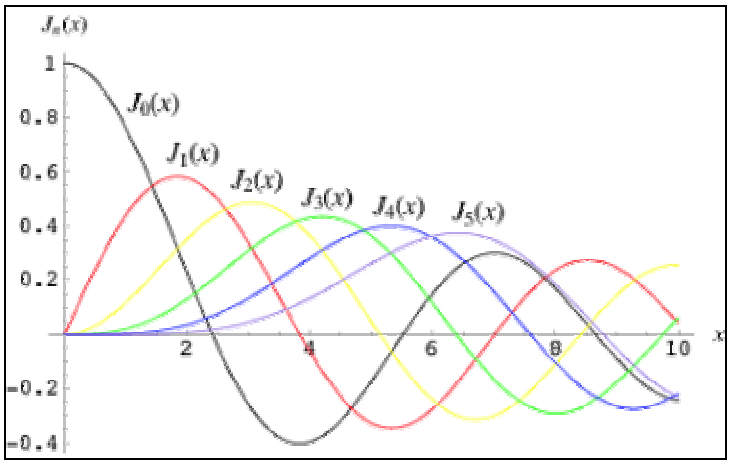
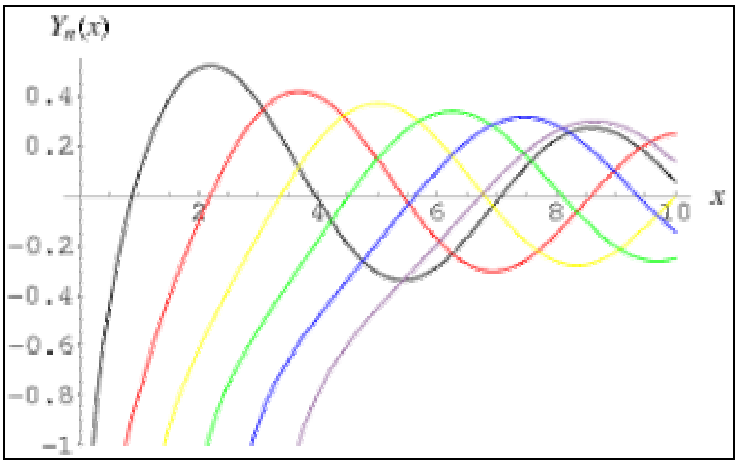
Bessel – függvények

1. Bessel – egyenlet, első- és másodfajú Bessel-függvények

Az n-ed rendű Bessel-egyenlet: $x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(a^2 x^2 - n^2\right) y = 0$,

A megoldása két független függvény: $y = AJ_n(ax) + BY_n(ax)$, ahol $J_n(x)$ az elsőfajú n-ed rendű Bessel-függvény, $Y_n(x)$ a másodfajú n-ed rendű Bessel-fv.





Tulajdonságok, rekurziós képletek (J_n-re és Y_n-re egyaránt vonatkoznak!)

$$\left.\begin{aligned} J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) &= \frac{2n}{x} J_n(x) \\ J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x) &= -2\frac{\mathrm{d}J_n(x)}{\mathrm{d}x} \end{aligned}\right\}$$

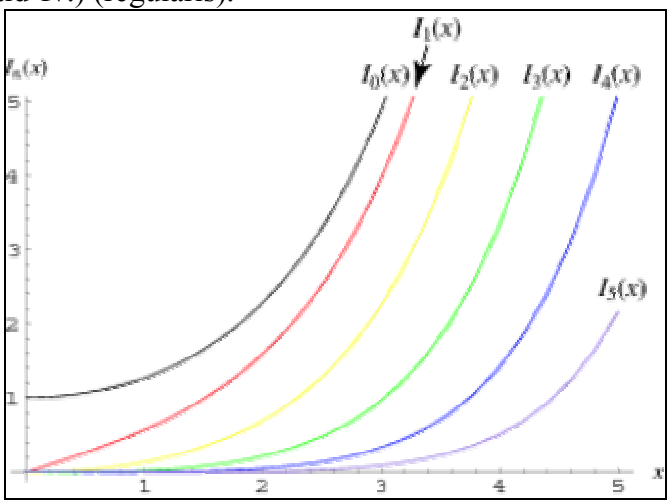
$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m(x)\right] = x^m J_{m-1}(x)$$

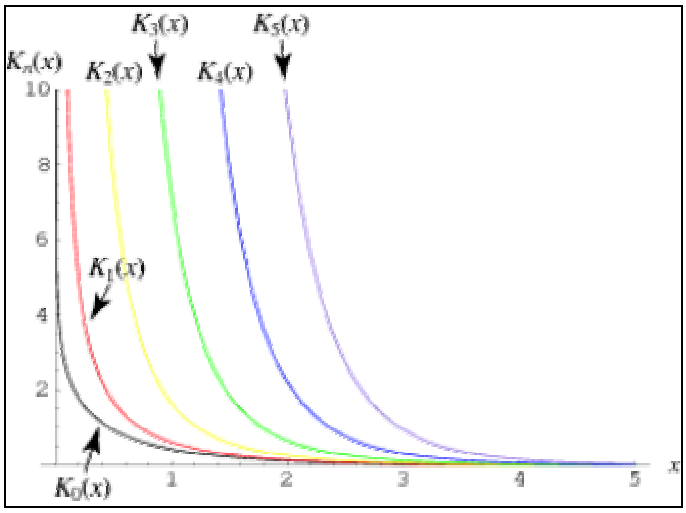
$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ $\quad J_0(x)$ első 3 zérushelye: $\alpha_1 = 2{,}405;\ \alpha_2 = 5{,}5200;\ \alpha_3 = 8{,}6537$

2. Módosított Bessel – egyenlet, komplex argumentumú Bessel – függvények

Az n-ed rendű módosított Bessel-egyenlet: $x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \left(a^2x^2 + n^2\right)y = 0$.

A megoldása két független függvény: $y = AI_n(ax) + BK_n(ax)$, ahol $I_n(x)$ az elsőfajú n-ed rendű módosított Bessel-függvény (irreguláris), $K_n(x)$ a másodfajú n-ed rendű módosított Bessel-fv. (MacDonald-fv.) (reguláris).





Tulajdonságok, rekurziós képletek

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)\,;\; K_n = i^{-n} Y_n(ix)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{n-1}(x) - I_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} I_n(x) \\ I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x) &= \frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}x} = I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)$$

$$\left.\begin{aligned} K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) &= \frac{2n}{x} K_n(x) \\ -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x) &= \frac{\mathrm{d}K_n}{\mathrm{d}x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}K_n}{\mathrm{d}x} = -K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x)$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x)$$

Kis argumentumú határeset ($x \to 0$):

$$J_n(x) \approx \frac{x}{2\Gamma(n+1)}; \quad Y_n(x) \approx \frac{2}{\pi}\ln(x);$$

$$I_n(x) \approx \frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n; \quad K_n(x) \approx \frac{1}{2}\Gamma(n)\left(\frac{x}{2}\right)^{-n}; \; K_0(x) \approx -\ln(x)$$

ahol a Gamma-függvény: $\Gamma(n) = (n-1)!$

Aszimptotikus viselkedés ($x \to \infty$):

$$J_n(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2}\pi\right); \quad Y_n(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{2}\pi\right);$$

$$I_n(x) \sim \mathrm{e}^x\left(\sum b_i x^{-i}\right); \quad K_n(x) \sim \mathrm{e}^{-x}\left(\sum b'_i\, x^{-i}\right)$$