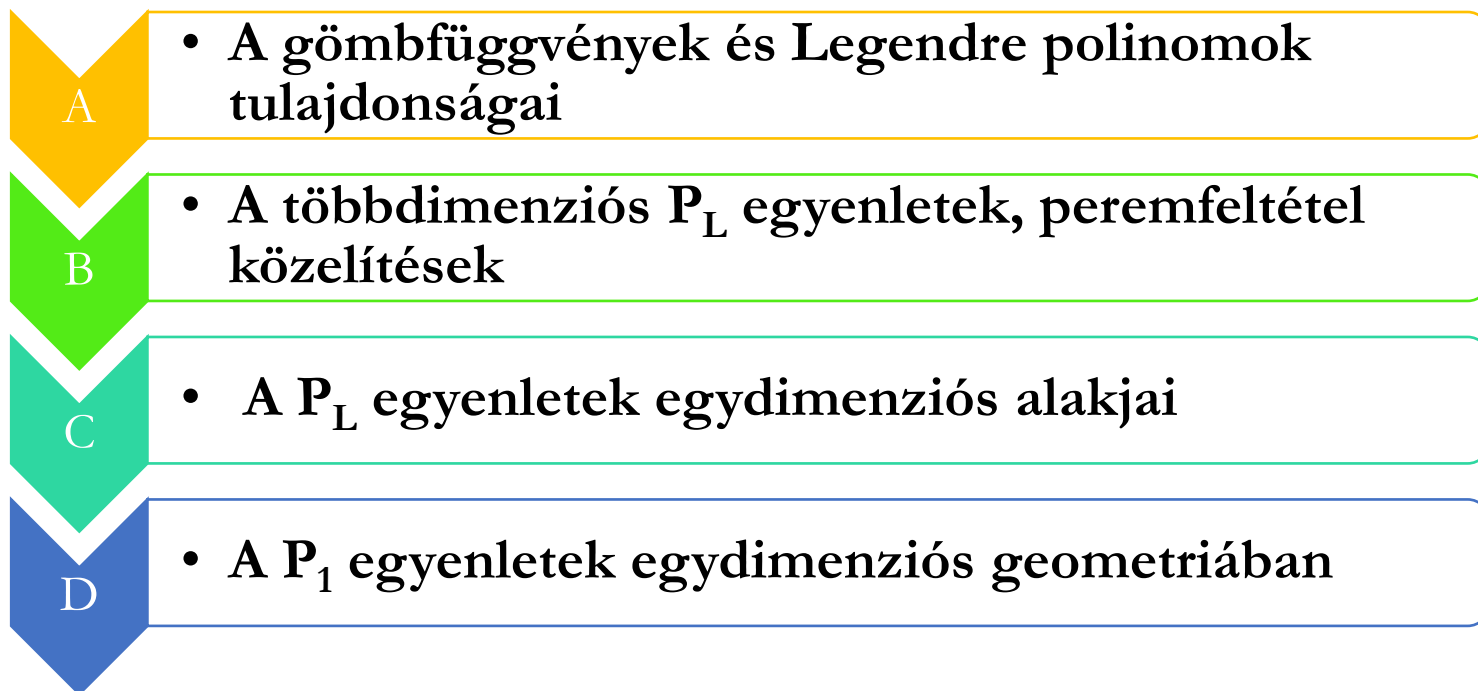


Reaktorfizikai számítások

A P_L közelítés

3. előadás

2019.09.24.



Irodalom: Dr. Szatmáry Zoltán: Reaktorfizikai számítások, 146-178. oldal
(a fejezetek, ábrák, táblázatok számozása a könyvbeli helyükre utal)

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0.$$

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell}^m r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

(41.2a összefüggés)

$$Y_{\ell m}(\Omega) = Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} \frac{(-\sin \theta)^m}{\ell! 2^{\ell}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} \frac{d^{\ell+m}(\cos^2 \theta - 1)^{\ell}}{d(\cos \theta)^{\ell+m}}$$

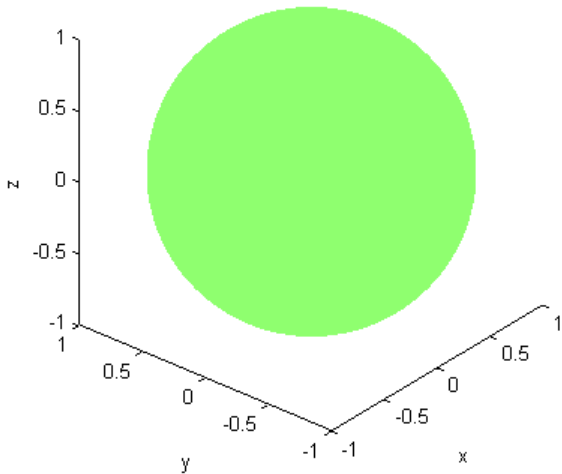
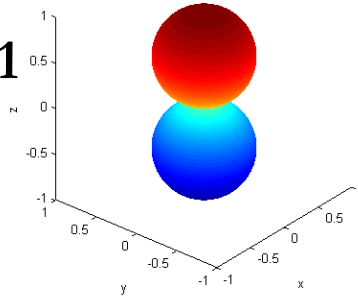
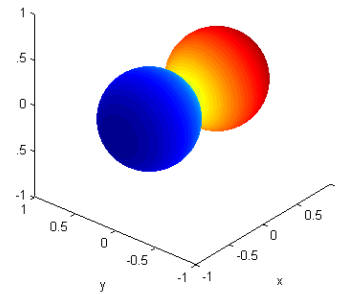
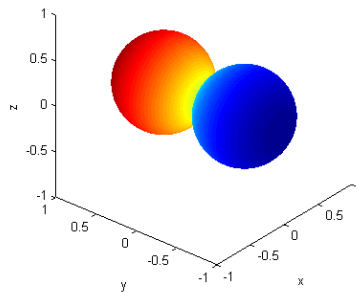
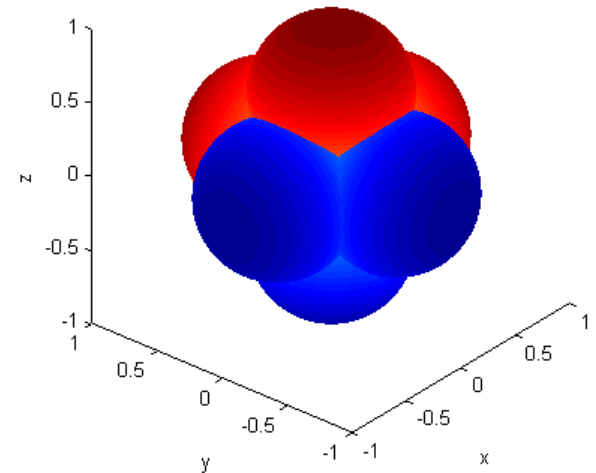
(41.2b összefüggés)

$$Y_{\ell, -m}(\Omega) = (-1)^m Y_{\ell m}^*(\Omega)$$

A

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

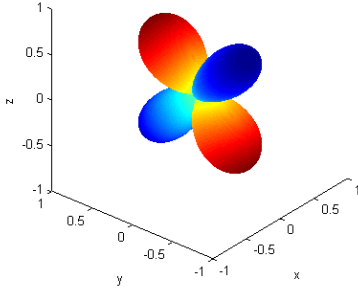
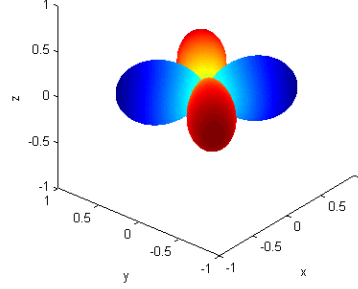
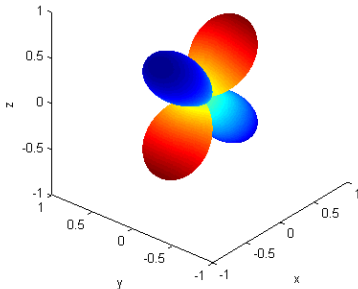
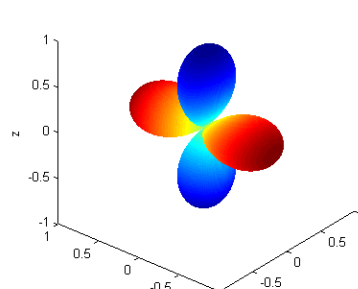
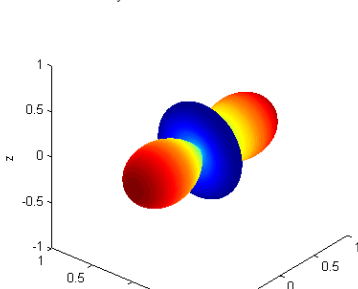
 Y_{00}

 $Y_{1,-1}$

 $Y_{1,0}$

 $Y_{1,1}$

 P_1 - diffúzió


A

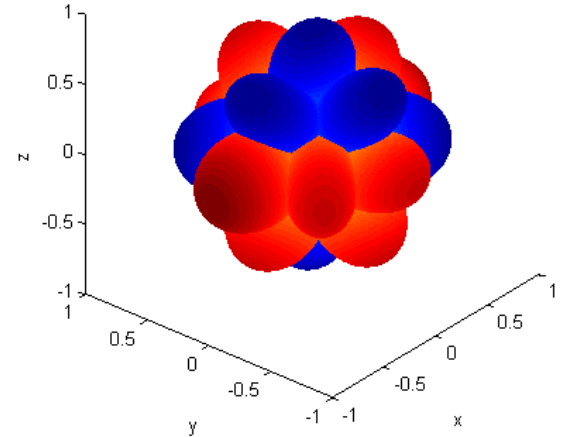
Az ábrázoló programot fejlesztette: Böröczki Zoltán

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

 $Y_{2,-2}$

 $Y_{2,1}$

 $Y_{2,-1}$

 $Y_{2,2}$

 $Y_{2,0}$


P_2 - közelítés

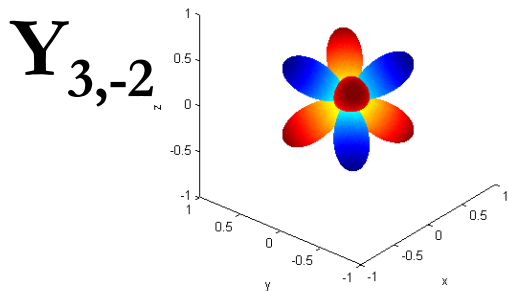
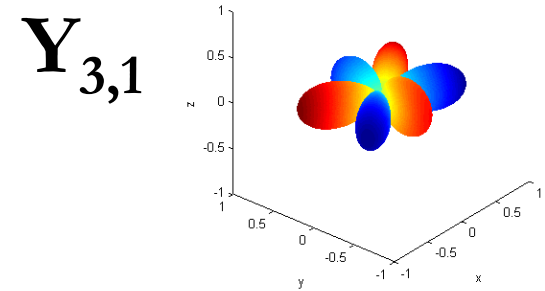
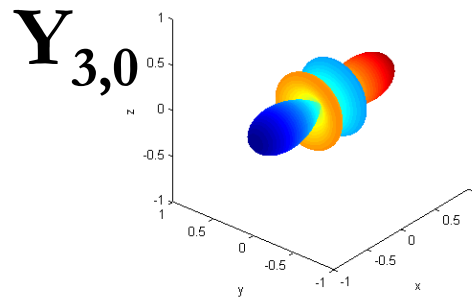
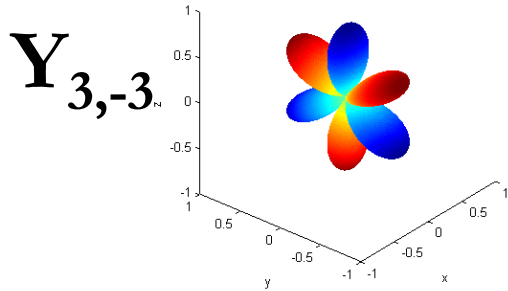


A

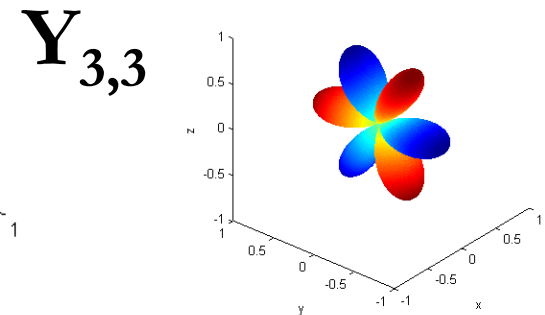
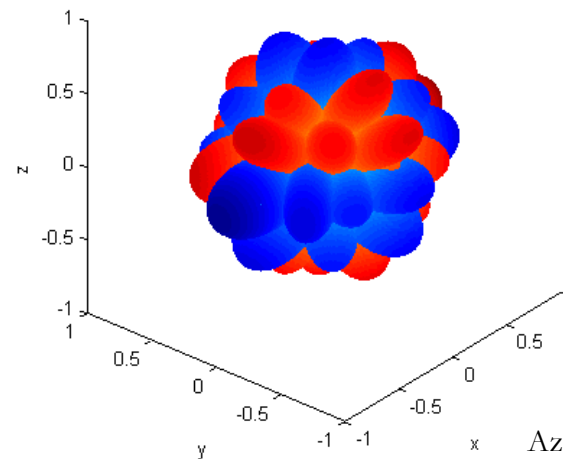
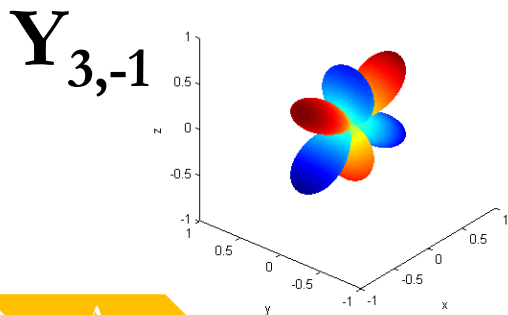
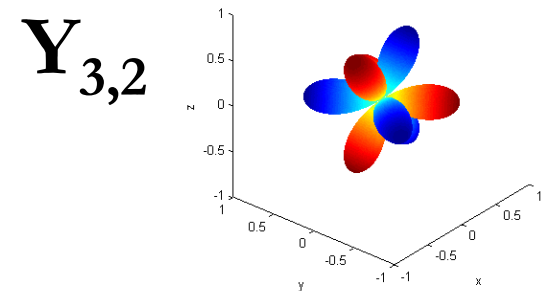
Az ábrázoló programot fejlesztette: Böröczki Zoltán

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai



P_3 - közelítés



Az ábrázoló programot fejlesztette: Böröczki Zoltán

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

(41.3 összefüggés)

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_{\ell'm'}(\theta, \varphi) Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) d\varphi = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}.$$

Példák gömbfüggvények analitikus alakjaira:

$$Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \frac{e^{-i\varphi} \sin \theta}{\sqrt{2}}, \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \cos \theta, \quad Y_{11}(\theta, \varphi) = -\frac{e^{i\varphi} \sin \theta}{\sqrt{2}}.$$

A

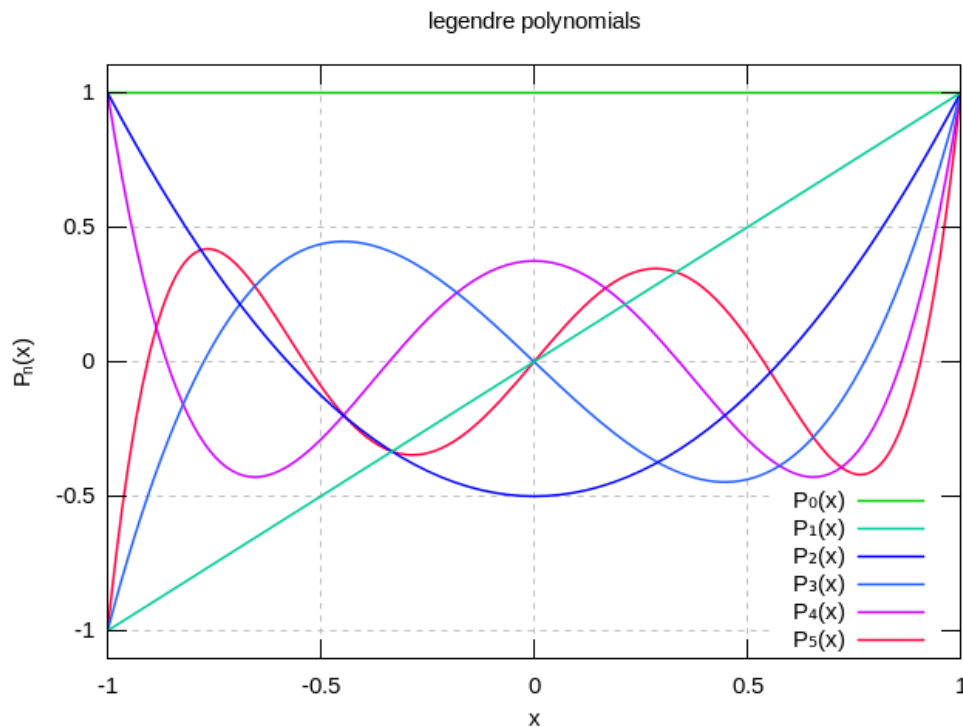
A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

Az $m = 0$ indexű gömbfüggvények a Legendre-polinomok:

$$Y_{\ell 0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\ell! 2^\ell} \frac{d^\ell (\cos^2 \theta - 1)^\ell}{d(\cos \theta)^\ell} = P_\ell(\cos \theta).$$

(41.4 összefüggés)



A

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2} (3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16} (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128} (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128} (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256} (46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

A

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

Rekurziós formulák

$$(2\ell + 1)\cos\theta Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{(\ell + 1)^2 - m^2} Y_{\ell+1, m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\ell^2 - m^2} Y_{\ell-1, m}(\theta, \varphi), \quad (41.5a)$$

$$(2\ell + 1)\sin\theta e^{i\varphi} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \quad (41.5b)$$

$$= -\sqrt{(\ell + m + 2)(\ell + m + 1)} Y_{\ell+1, m+1}(\theta, \varphi) + \sqrt{(\ell - m)(\ell - m - 1)} Y_{\ell-1, m+1}(\theta, \varphi),$$

$$(2\ell + 1)\sin\theta e^{-i\varphi} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \quad (41.5c)$$

$$= -\sqrt{(\ell + m)(\ell + m - 1)} Y_{\ell-1, m-1}(\theta, \varphi) + \sqrt{(\ell - m + 2)(\ell - m + 1)} Y_{\ell+1, m-1}(\theta, \varphi).$$

Addíciós tétel

(41.6 összefüggés)

$$P_\ell(\cos\theta_0) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}(\Omega) Y_{\ell m}^*(\Omega')$$

A

A

A gömbfüggvények és Legendre polinomok tulajdonságai

Ω vektor komponensei:

$$\Omega_x = \sin \theta \cos \varphi = \frac{Y_{1,-1}(\theta, \varphi) - Y_{11}(\theta, \varphi)}{\sqrt{2}} = \frac{Y_{1,-1}^*(\theta, \varphi) - Y_{11}^*(\theta, \varphi)}{\sqrt{2}},$$
$$\Omega_y = \sin \theta \sin \varphi = \frac{Y_{11}(\theta, \varphi) + Y_{1,-1}(\theta, \varphi)}{i\sqrt{2}} = -\frac{Y_{1,-1}^*(\theta, \varphi) + Y_{11}^*(\theta, \varphi)}{i\sqrt{2}},$$
$$\Omega_z = \cos \theta = Y_{10}(\theta, \varphi),$$

A

 B **A többdimenziós P_L egyenletek, peremfeltétel közelítések**

(41.1 összefüggés)

$$\Phi(\mathbf{r}, E, \Omega) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \Phi_{\ell m}(\mathbf{r}, E) Y_{\ell m}(\Omega)$$

(41.8 összefüggés)

$$\Sigma_s(E' \rightarrow E, \mu_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{4\pi} \Sigma_{s\ell}(E' \rightarrow E) P_{\ell}(\mu_0)$$

 **A** **B**

B

A többdimenziós P_L egyenletek, peremfeltétel közelítések

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell+m+2)(\ell+m+1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell+1,m+1}(\mathbf{r}, E)}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_{\ell+1,m+1}(\mathbf{r}, E)}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell-m+2)(\ell-m+1)}}{2\ell+1} \left(-\frac{\partial \Phi_{\ell+1,m-1}(\mathbf{r}, E)}{\partial x} + i \frac{\partial \Phi_{\ell+1,m-1}(\mathbf{r}, E)}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell-m)(\ell-m-1)}}{2\ell+1} \left(-\frac{\partial \Phi_{\ell-1,m+1}(\mathbf{r}, E)}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_{\ell-1,m+1}(\mathbf{r}, E)}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell+m)(\ell+m-1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell-1,m-1}(\mathbf{r}, E)}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_{\ell-1,m-1}(\mathbf{r}, E)}{\partial y} \right) - \\
& - \frac{\sqrt{\ell^2 - m^2}}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell-1,m}(\mathbf{r}, E)}{\partial z} - \frac{\sqrt{(\ell+1)^2 - m^2}}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell+1,m}(\mathbf{r}, E)}{\partial z} - \Sigma_t(\mathbf{r}, E) \Phi_{\ell m}(\mathbf{r}, E) + \\
& + \int_0^\infty \Sigma_{sl}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \Phi_{\ell m}(\mathbf{r}, E') dE' + \delta_{\ell 0} \delta_{m 0} \int_0^\infty \Sigma_{in}(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \Phi(\mathbf{r}, E') dE' + \\
& + \delta_{\ell 0} \delta_{m 0} \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(\mathbf{r}, E') \Phi(\mathbf{r}, E') dE' = 0.
\end{aligned} \tag{42.1}$$

$$(\ell = 0, 1, 2, \dots)(m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell)$$

A

B

B

A többdimenziós P_L egyenletek, peremfeltétel közelítések

Marshak-határfeltétel: megköveteljük, hogy a fluxus páratlan momentumai eltűnjenek a befelé mutató neutronirányokra:

$$\int_{\Omega \mathbf{N}_s < 0} \Phi(\mathbf{r}_s, E, \Omega) Y_{\ell m}^*(\Omega) d\Omega = 0, \quad \ell = 1, 3, \dots, L. \quad (42.4)$$

Mark-határfeltétel: megköveteljük, hogy a fluxus eltűnjön $\mu = \Omega \mathbf{N}_s$ néhány kiszemelt értékére:

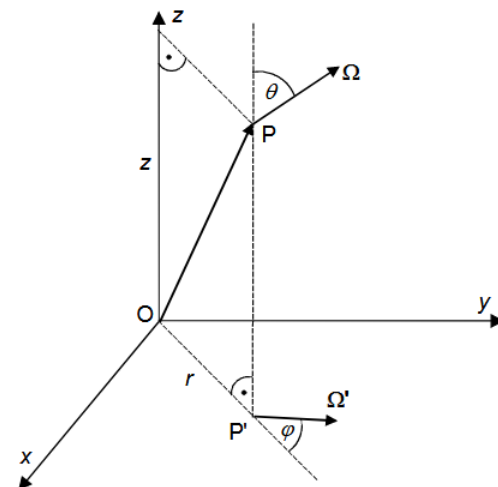
$$\Phi(0, \mu_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, (L+1)/2. \quad (42.6)$$

B A többdimenziós P_L egyenletek, peremfeltétel közelítések

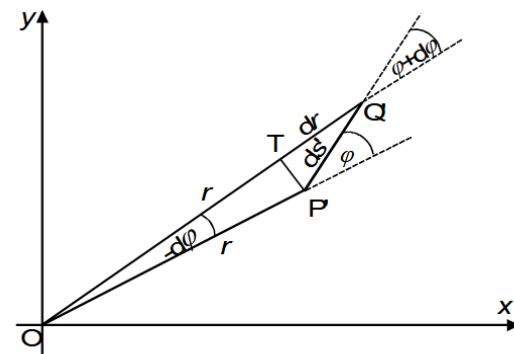
$$-\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \sin \theta \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos \theta - \Sigma_t \Phi + Q = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell+m+2)(\ell+m+1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell+1,m+1}(r,z,E)}{\partial r} + \frac{m+1}{r} \Phi_{\ell+1,m+1}(r,z,E) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell-m+2)(\ell-m+1)}}{2\ell+1} \left(-\frac{\partial \Phi_{\ell+1,m-1}(r,z,E)}{\partial r} + \frac{m-1}{r} \Phi_{\ell+1,m-1}(r,z,E) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell-m)(\ell-m-1)}}{2\ell+1} \left(-\frac{\partial \Phi_{\ell-1,m+1}(r,z,E)}{\partial r} - \frac{m+1}{r} \Phi_{\ell-1,m+1}(r,z,E) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell+m)(\ell+m-1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell-1,m-1}(r,z,E)}{\partial r} - \frac{m-1}{r} \Phi_{\ell-1,m-1}(r,z,E) \right) - \\ & - \frac{\sqrt{\ell^2 - m^2}}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell-1,m}(r,z,E)}{\partial z} - \frac{\sqrt{(\ell+1)^2 - m^2}}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell+1,m}(r,z,E)}{\partial z} - \\ & - \Sigma_t(r,z,E) \Phi_{\ell m}(r,z,E) + \int_0^\infty \Sigma_{s\ell}(r,z,E' \rightarrow E) \Phi_{\ell m}(r,z,E') dE' + \\ & + \delta_{\ell 0} \delta_{m 0} \left(\int_0^\infty \Sigma_{in}(r,z,E' \rightarrow E) \Phi(r,z,E') dE' + \frac{f(E)}{k_{eff}} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(r,z,E') \Phi(r,z,E') dE' \right) = 0. \end{aligned}$$

$(\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell) \quad (42.8)$



Fl.1. ábra. Hengerkoordináták



Fl.2. ábra. Hengerkoordináták vetülete az x-y síkra

A

B

C

A P_L egyenletek egydimenziós alakjai - Gömb

$$\begin{aligned}
& -\mu \frac{\partial \Phi(r, E, \mu)}{\partial r} - \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \Phi(r, E, \mu)}{\partial \mu} - \Sigma_t(r, E) \Phi(r, E, \mu) + Q(r, E, \mu) = 0 \\
& -\frac{\ell}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell-1}(r, E)}{\partial r} - \frac{\ell-1}{r} \Phi_{\ell-1}(r, E) \right) - \frac{\ell+1}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell+1}(r, E)}{\partial r} + \frac{\ell+2}{r} \Phi_{\ell+1}(r, E) \right) - \\
& -\Sigma_t(r, E) \Phi_\ell(r, E) + \int_0^\infty \Sigma_{s\ell}(r, E' \rightarrow E) \Phi_\ell(r, E') dE' + \\
& + \delta_{\ell 0} \int_0^\infty \Sigma_{in}(r, E' \rightarrow E) \Phi(r, E') dE' + \delta_{\ell 0} \frac{f(E)}{k_{eff}} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(r, E') \Phi(r, E') dE' = 0, \\
& (\ell = 0, 1, 2, \dots). \tag{43.4}
\end{aligned}$$

$\ell = 0$ estében az $(\ell-1)$ indexű tag elmarad.

C

A P_L egyenletek egydimenziós alakjai - Sík

$\Phi_{\ell m}$ függvények közül csak az $m = 0$ indexűek maradnak meg

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\ell}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell-1}(z, E)}{\partial z} - \frac{\ell+1}{2\ell+1} \frac{\partial \Phi_{\ell+1}(z, E)}{\partial z} - \Sigma_t(z, E) \Phi_\ell(z, E) + \\
 & + \int_0^\infty \Sigma_{s\ell}(z, E' \rightarrow E) \Phi_\ell(z, E') dE' + \delta_{\ell 0} \int_0^\infty \Sigma_{in}(z, E' \rightarrow E) \Phi(z, E') dE' + \\
 & + \delta_{\ell 0} \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(z, E') \Phi(z, E') dE' = 0, \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots). \quad (43.2)
 \end{aligned}$$

A

B

C

C

A P_L egyenletek egydimenziós alakjai - Henger $m > 0$ -ra:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell+m+2)(\ell+m+1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell+1,m+1}(r,z,E)}{\partial r} + \frac{m+1}{r} \Phi_{\ell+1,m+1}(r,z,E) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell-m+2)(\ell-m+1)}}{2\ell+1} \left(-\frac{\partial \Phi_{\ell+1,m-1}(r,z,E)}{\partial r} + \frac{m-1}{r} \Phi_{\ell+1,m-1}(r,z,E) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell-m)(\ell-m-1)}}{2\ell+1} \left(-\frac{\partial \Phi_{\ell-1,m+1}(r,z,E)}{\partial r} - \frac{m+1}{r} \Phi_{\ell-1,m+1}(r,z,E) \right) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\ell+m)(\ell+m-1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell-1,m-1}(r,z,E)}{\partial r} - \frac{m-1}{r} \Phi_{\ell-1,m-1}(r,z,E) \right) - \\
& - \Sigma_t(r,z,E) \Phi_{\ell m}(r,z,E) + \int_0^\infty \Sigma_{sl}(r,z,E' \rightarrow E) \Phi_{\ell m}(r,z,E') dE' = 0 \quad (43.5a)
\end{aligned}$$

$(\ell = 0, 1, 2, \dots) \quad (m = 1, 2, \dots, \ell)$

A

B

C

C

A P_L egyenletek egydimenziós alakjai - Henger $m = 0$ -ra:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{(\ell+2)(\ell+1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell+1,1}(r, z, E)}{\partial r} + \frac{\Phi_{\ell+1,1}(r, z, E)}{r} \right) + \\
& - \frac{\sqrt{\ell(\ell-1)}}{2\ell+1} \left(\frac{\partial \Phi_{\ell-1,1}(r, z, E)}{\partial r} + \frac{\Phi_{\ell-1,1}(r, z, E)}{r} \right) + \\
& - \Sigma_t(r, z, E) \Phi_{\ell 0}(r, z, E) + \int_0^\infty \Sigma_{s\ell}(r, z, E' \rightarrow E) \Phi_{\ell 0}(r, z, E') dE' + \\
& + \delta_{\ell 0} \left(\int_0^\infty \Sigma_{in}(r, z, E' \rightarrow E) \Phi(r, z, E') dE' + \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(r, z, E') \Phi(r, z, E') dE' \right) = 0.
\end{aligned}$$

($\ell = 0, 1, 2, \dots$) (43.5b)

A

B

C

D

A P_1 egyenletek egydimenziós geometriában

Az 1D síkgeometriára $\Phi_0(z, E)$ a $\Phi(z, E)$ fluxus, továbbá (41.10c)-ből következik, hogy $\Phi_1(z, E)$ az áram z komponense, $J(z, E)$. Ezekkel a jelölésekkel (43.2)-ből következnek a P_1 egyenletek:

$$-\frac{\partial J(z, E)}{\partial z} - \Sigma_t(z, E)\Phi(z, E) + \int_0^\infty \Sigma_{s0}(z, E' \rightarrow E)\Phi(z, E')dE' + \int_0^\infty \Sigma_{in}(z, E' \rightarrow E)\Phi(z, E')dE' + \frac{f(E)}{k_{eff}} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(z, E')\Phi(z, E')dE' = 0 \quad (43.6a)$$

és

$$-\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi(z, E)}{\partial z} - \Sigma_t(z, E)J(z, E) + \int_0^\infty \Sigma_{s1}(z, E' \rightarrow E)J(z, E')dE' = 0. \quad (43.6b)$$



D

A P_1 egyenletek egydimenziós geometriában

A gömbgeometriához tartozó P_1 egyenletek (43.4)-ből adódnak:

$$-\left(\frac{\partial J(r, E)}{\partial r} + \frac{2}{r} J(r, E)\right) - \Sigma_t(r, E) \Phi(r, E) + \int_0^\infty \Sigma_{s0}(r, E' \rightarrow E) \Phi(r, E') dE' + \\ + \int_0^\infty \Sigma_{in}(r, E' \rightarrow E) \Phi(r, E') dE' + \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_0^\infty \nu \Sigma_f(r, E') \Phi(r, E') dE' = 0 \quad (43.7a)$$

és

$$-\frac{1}{3} \frac{\partial \Phi(r, E)}{\partial r} - \Sigma_t(r, E) J(r, E) + \int_0^\infty \Sigma_{s1}(r, E' \rightarrow E) J(r, E') dE' = 0. \quad (43.7b)$$



D

A P_1 egyenletek egydimenziós geometriában

Az 1D hengergeometriához tartozó P_1 egyenleteket (43.5)-ből kapjuk. Ebben az esetben a Φ_{11} függvény helyett célszerű a radiális áramot használni. Az F1.2. ábrá-

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(rJ(r, E))}{\partial r} - \Sigma_t(r, E)\Phi(r, E) + \int_0^\infty \Sigma_{s0}(r, E' \rightarrow E)\Phi(r, E')dE' + \\ + \int_0^\infty \Sigma_{in}(r, E' \rightarrow E)\Phi(r, E')dE' + \frac{f(E)}{k_{\text{eff}}} \int_0^\infty \nu\Sigma_f(r, E')\Phi(r, E')dE' = 0, \quad (43.8a)$$



D

A P_1 egyenletek egydimenziós geometriában

Vegyük észre, hogy a sík-, gömb- és hengergeometriában kapott P_1 egyenletek azonos alakra hozhatók, ha az első egyenlet első tagját a következő alakban írjuk fel:

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial (r^\alpha J(r, E))}{\partial r},$$

ahol:

$\alpha = 0$ síkgeometriában,

$\alpha = 1$ hengergeometriában,

$\alpha = 2$ gömbgeometriában.

